

## 第 2 讲 IMU 传感器

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 10 月 18 日

- ① 旋转运动学
- ② IMU 测量模型及运动模型
  - MEMS 加速度计工作原理
  - MEMS 陀螺工作原理
- ③ IMU 误差模型
  - 确定性误差
  - 确定性误差的标定
  - 随机误差
  - IMU 数学模型
- ④ 运动模型离散时间处理
  - 欧拉法
  - 中值法
- ⑤ IMU 数据仿真

# Section 1

## 旋转运动学

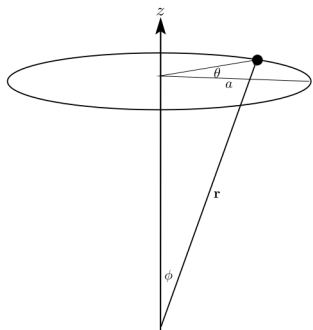
# 线速度与角速度

粒子在坐标系中  $z = h$  中的平面做圆周运动，坐标为： $\mathbf{r} = (a \cos \theta, a \sin \theta, h)^\top$   
 对坐标求导得：

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}} &= (-a\dot{\theta} \sin \theta, a\dot{\theta} \cos \theta, 0)^\top \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ h \end{bmatrix} \\
 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{z}$ ,  $|\dot{\theta}|$  是角速度大小。  
 对公式 (1) 两边取模得：

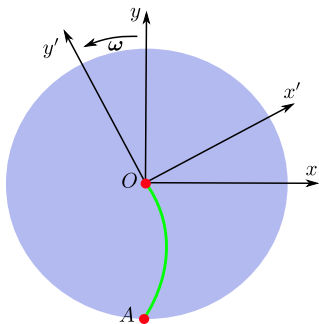
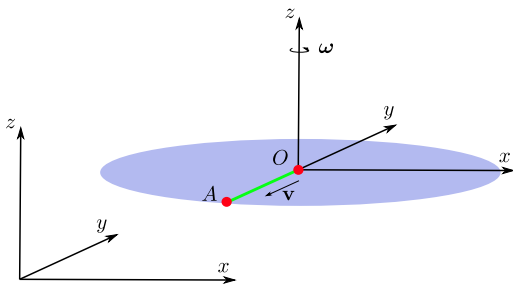
$$|\dot{\mathbf{r}}| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin \phi = a |\dot{\theta}|$$



## 更复杂一点的例子

一个旋转的水平光滑圆盘上，有一个光滑的小球，从圆心沿着半径向外运动。

- 从外部静止的坐标系来观察，小球轨迹如何？
- 从圆盘旋转坐标系来观察，小球轨迹如何？
- 离心力？科里奥利力？



# 旋转坐标系下的运动学

质量块在 body 坐标系下的坐标为：

$$\mathbf{r}^b = (x_1, x_2, x_3)^\top$$

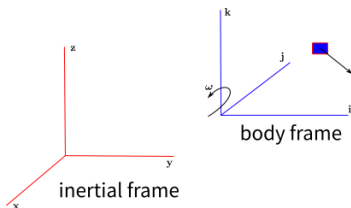
忽略平移，只考虑旋转，则旋转到惯性系下有：

$$\mathbf{r}^i(t) = \mathbf{R}_{ib}\mathbf{r}^b$$

对时间求导有：

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}}^i &= \mathbf{R}_{ib}\dot{\mathbf{r}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{ib}\mathbf{r}^b \\
 &= \mathbf{R}_{ib}\dot{\mathbf{r}}^b + [\mathbf{R}_{ib}\boldsymbol{\omega}^b]_{\times}\mathbf{r}^i \\
 &= \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i \\
 \mathbf{v}^i &= \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i \Leftrightarrow \mathbf{R}_{ib}\mathbf{v}^b = \mathbf{v}^i - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_{ib}\boldsymbol{\omega}^b$ ，表示 body 坐标系的角速度在  $I$  系下的表示。



# 旋转坐标系下的运动学

补充：

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}}_{ib} \mathbf{r}^b &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_{ib} \exp([\boldsymbol{\omega}^b \Delta t]^\wedge) \mathbf{r}^b - \mathbf{R}_{ib} \mathbf{r}^b}{\Delta t} \\
 &\approx \mathbf{R}_{ib} [\boldsymbol{\omega}^b]_\times \mathbf{r}^b \\
 &= [\mathbf{R}_{ib} \boldsymbol{\omega}^b]_\times \mathbf{R}_{ib} \mathbf{r}^b = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i
 \end{aligned} \tag{3}$$

对速度求导得到：

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{R}_{ib} \dot{\mathbf{v}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{ib} \mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}^i + [\dot{\mathbf{R}}_{ib} \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{R}_{ib} \dot{\boldsymbol{\omega}}^b]_\times \mathbf{r}^i \\
 &= \mathbf{R}_{ib} \dot{\mathbf{v}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{ib} \mathbf{v}^b + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i) + [\mathbf{R}_{ib} \dot{\boldsymbol{\omega}}^b]_\times \mathbf{r}^i \\
 &= \mathbf{R}_{ib} \mathbf{a}^b + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^i \\
 \Rightarrow \mathbf{a} &= \mathbf{a}^i - \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\text{科氏力}} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^i}_{\text{欧拉力}} - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^i)}_{\text{离心力}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

其中， $\mathbf{v} = \mathbf{R}_{ib} \mathbf{v}^b$ ， $\mathbf{a} = \mathbf{R}_{ib} \mathbf{a}^b$ ，表示物体在 body 下的速度或加速度在 I 系下的表示。

在旋转坐标系下观察，运动的物体（运动方向和旋转轴不为同一个轴时）会受到科氏力的作用。

# 定义清楚问题

咦，我们这是要干嘛呢？

惯性坐标系，机器人坐标系，机器人位移和姿态，机器人角速度，加速度...



## Section 2

# IMU 测量模型及运动模型

# IMU 测量模型及运动模型

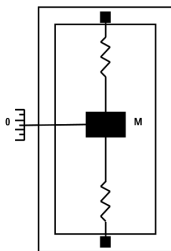
## MEMS 加速度计工作原理

- 测量原理可以用一个简单的质量块 + 弹簧 + 指示计来表示
- 加速度计测量值  $a_m$  为弹簧拉力对应的加速度,

$$a_m = \frac{f}{m} = a - g \quad (5)$$

$f$  弹簧拉力,  $a$  物体在惯性系下的加速度,  $g$  重力加速度

- MEMS 加速度计利用电容或者电阻桥来等原理来测量  $a_m$



# 加速度计测量原理

- 东北天坐标系 (ENU):

$$\mathbf{g} = (0, 0, -9.81)^T$$

- 假设 IMU 坐标系就是 ENU 坐标系,  
 $R_{ib} = \mathbf{I}$ , 静止时有

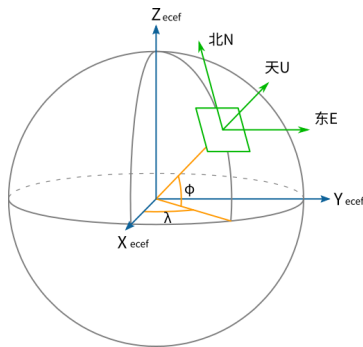
$$\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a}_m = -\mathbf{g}$$

自由落体时有

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}$$

$$\mathbf{a}_m = 0$$



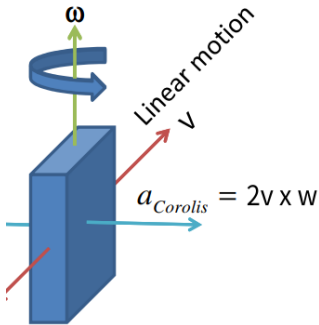
# 陀螺仪测量原理

## 陀螺工作原理

- 陀螺仪主要用来测量物体的旋转角速度，按测量原理分有振动陀螺，光纤陀螺等。
- 低端 MEMS 陀螺上一般采用振动陀螺原理，通过测量 Coriolis force 来间接得到角速度。

# 陀螺仪测量原理

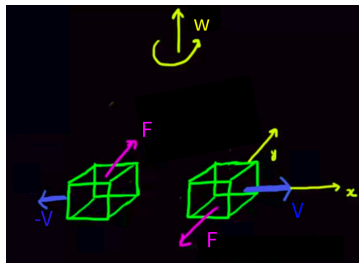
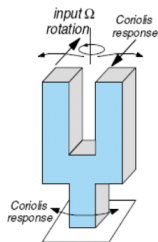
- 在旋转坐标系中，运动的物体受到科氏力作用
- MEMS 陀螺仪：一个主动运动轴 + 一个敏感轴



# 音叉振动陀螺原理

## 音叉振动陀螺

- 叉子的中间为旋转轴，叉子左右两个质量块，做方向相反的正弦运动，质量块受到的科氏力方向相反。
- 但是为啥要用这么做呢？一个质量块不行么



# 思考

## 陀螺仪的 G-sensitivity

实际上，两个质量块不可能完全一致，也就是说陀螺仪的测量可能会受到外部加速度的影响，即常称的 G-sensitivity。

## 疑问

诶，加速度计不需要考虑科氏力的影响吗？

## Section 3

# IMU 误差模型



# IMU 误差模型

## 误差分类

- 加速度计和陀螺仪的误差可以分为：确定性误差，随机误差。
- 确定性误差可以事先标定确定，包括：bias, scale ...
- 随机误差通常假设噪声服从高斯分布，包括：高斯白噪声，bias 随机游走...

# 确定性误差

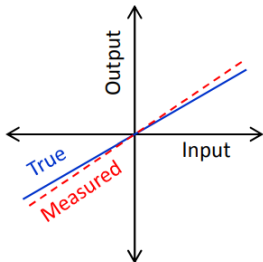
## Bias

理论上，当没有外部作用时，IMU 传感器的输出应该为 0。但是，实际数据存在一个偏置  $b$ 。加速度计 bias 对位姿估计的影响：

$$\mathbf{v}_{err} = \mathbf{b}^a t, \quad \mathbf{p}_{err} = \frac{1}{2} \mathbf{b}^a t^2$$

## Scale

scale 可以看成是实际数值和传感器输出值之间的比值。



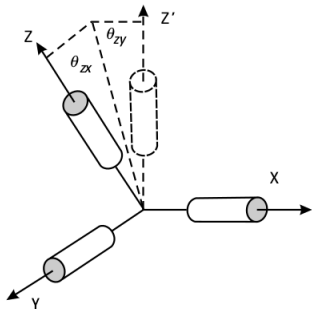
# IMU 误差模型

## Nonorthogonality/Misalignment Errors

多轴 IMU 传感器制作的时候, 由于制作工艺的问题, 会使得  $xyz$  轴可能不垂直, 如下图所示。

scale + Misalignment:

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$



# IMU 误差模型

## 其他确定性误差

- Run-to-Run Bias/Scale Factor
- In Run (Stability) Bias/Scale Factor
- Temperature-Dependent Bias/Scale Factor
- ...

# 六面法标定加速度

## 六面法标定加速度 bias 和 scale factor

六面法是指将加速度计的 3 个轴分别朝上或者朝下水平放置一段时间，采集 6 个面的数据完成标定。

如果各个轴都是正交的，那很容易得到 bias 和 scale:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{l_f^{up} + l_f^{down}}{2} \\ S &= \frac{l_f^{up} - l_f^{down}}{2 \cdot \|\mathbf{g}\|} \end{aligned} \quad (6)$$

其中， $l$  为加速度计某个轴的测量值， $g$  为当地的重力加速度。

# 六面法标定加速度

考虑轴间误差的时候，实际加速度和测量值之间的关系为：

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ax} \\ b_{ay} \\ b_{az} \end{bmatrix} \quad (7)$$

水平静止放置 6 面的时候，加速度的理论值为

$$a_1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

对应的测量值矩阵  $\mathbf{L}$ ：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 & \mathbf{l}_4 & \mathbf{l}_5 & \mathbf{l}_6 \end{bmatrix}$$

利用最小二乘就能够把 12 个变量求出来。

# 六面法标定陀螺仪

## 六面法标定陀螺仪 bias 和 scale factor

和加速度计六面法不同的是，陀螺仪的真实值由高精度转台提供，这里的 6 面是指各个轴顺时针和逆时针旋转。

# 温度相关的参数标定

## 标定方法

- 目的：这个标定的主要目的是对传感器估计的 bias 和 scale 进行温度补偿，获取不同温度时 bias 和 scale 的值，绘制成曲线。

两种标定方法：

- soak method: 控制恒温室的温度值，然后读取传感器数值进行标定。
- ramp method: 记录一段时间内线性升温 and 降温时传感器的数据来进行标定。



# IMU 随机误差

## 高斯白噪声

IMU 数据连续时间上受到一个均值为 0，方差为  $\sigma$ ，各时刻之间相互独立的高斯过程  $n(t)$ :

$$\begin{aligned} E[n(t)] &= 0 \\ E[n(t_1)n(t_2)] &= \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\delta()$  表示狄拉克函数。

## Bias 随机游走

通常用维纳过程 (wiener process) 来建模 bias 随时间连续变化的过程，离散时间下称之为随机游走。

$$\dot{b}(t) = n_b(t) = \sigma_b w(t) \quad (9)$$

其中  $w$  是方差为 1 的白噪声

# IMU 随机误差

## 问题

实际上，IMU 传感器获取的数据为离散采样，离散和连续高斯白噪声存在何种关系？

假设有一个单轴角速度信号收到高斯白噪声和 bias 的影响，建模如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(t) &= \omega(t) + b(t) + n(t) \\ \dot{b}(t) &= n_b(t)\end{aligned}\quad (10)$$

当传感器采集信号时，假设采样时间段内信息为常数：

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \tilde{\omega}(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [\omega(t) + b(t) + n(t)] dt \quad (11)$$

即

$$\tilde{\omega}(t_0 + \Delta t) = \omega(t_0 + \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [b(t) + n(t)] dt \quad (12)$$

# 高斯白噪声的离散化

只考虑高斯白噪声的积分

$$n_d[k] \triangleq n(t_0 + \Delta t) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n(\tau) d\tau \quad (13)$$

协方差为

$$\begin{aligned} E(n_d^2[k]) &= E\left(\frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n(\tau) n(t) d\tau dt\right) \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} E(n(\tau) n(t)) d\tau dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \delta(t - \tau) d\tau dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\Delta t} \end{aligned} \quad (14)$$

# 高斯白噪声的离散化

即

$$n_d[k] = \sigma_d w[k] \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_d &= \sigma \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \quad (16)$$

也就是说高斯白噪声的连续时间到离散时间之间差一个  $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$ ,  $\sqrt{\Delta t}$  是传感器的采样时间。

# bias 随机游走的离散化

将公式 (9) 代入 (12), 提取 bias 积分部分

$$b(t_0 + \Delta t) = b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n_b(t) dt \quad (17)$$

由此可得离散化下的 bias 协方差

$$E \{ b^2(t_0 + \Delta t) \} = E \left\{ \left[ b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n_b(t) dt \right] \left[ b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n_b(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (18)$$

由于  $E \{ n_b(t) n_b(\tau) \} = \sigma_b^2 \delta(t - \tau)$  有:

$$E \{ b^2(t_0 + \Delta t) \} = E \{ b^2(t_0) \} + \sigma_b^2 \Delta t \quad (19)$$

# bias 随机游走的离散化

即:

$$b_d[k] = b_d[k-1] + \sigma_{bd}w[k] \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_{bd} &= \sigma_b \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (21)$$

bias 随机游走的噪声方差从连续时间到离散之间需要乘以  $\sqrt{\Delta t}$  .

更详细的连续到离散的推导参见<sup>1</sup>。

---

<sup>1</sup>John L Crassidis. "Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation". In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 42.2 (2006), pp. 750-756.

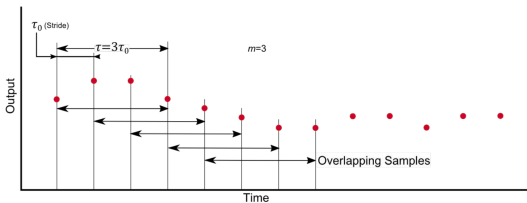
# IMU 随机误差的标定

## 艾伦方差标定 random walk noise

Allan 方差法是 20 世纪 60 年代由美国国家标准局的 David Allan 提出的，它是一种基于时域的分析方法。

具体的流程如下：

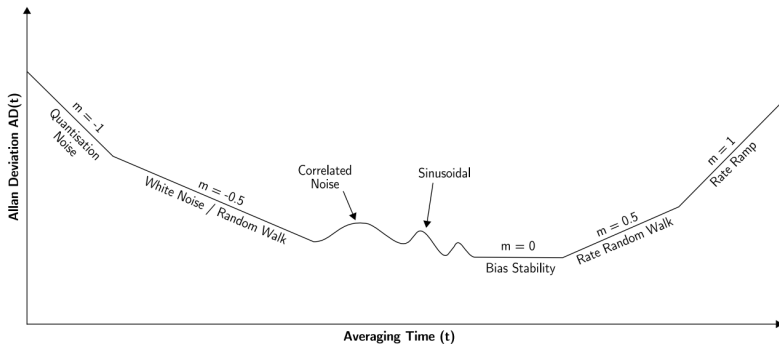
1. 保持传感器绝对静止获取数据。
2. 对数据进行分段，设定时间段的时长，如下图所示。



3. 将传感器数据按照时间段进行平均。
4. 计算方差，绘制艾伦曲线。

# IMU 随机误差的标定

得到的艾伦曲线如下图所示<sup>2</sup>:



<sup>2</sup>Allan Variance. "Noise Analysis for Gyroscopes". In: *Freescale Semiconductor Document Number: AN5087 Application Note Rev. 0 2 (2015)*.

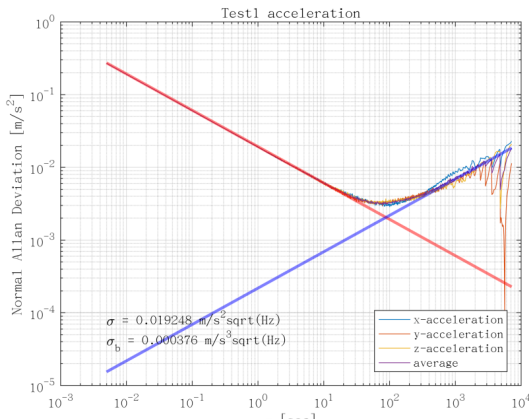


# Allan 方差的验证

## 仿真数据

制作一个仿真 IMU 数据集。设定，加速度的高斯白噪声设定为 0.019, 陀螺仪的高斯白噪声为 0.015. 加速度 bias 的随机游走噪声设定为  $5e^{-4}$ , 陀螺仪的 bias 随机游走噪声设定为  $5e^{-5}$ 。

加速度的艾伦方差曲线如下：



# 加速度计数学模型

## 加速度计的误差模型

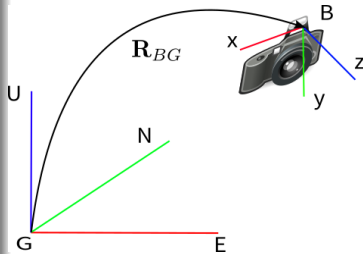
导航系  $G$  为东北天,  $\mathbf{g}^G = (0, 0, -9.81)^\top$ 。  
理论测量值为:

$$\mathbf{a}_m^b = \mathbf{R}_{bG} (\mathbf{a}^G - \mathbf{g}^G) \quad (22)$$

如果考虑高斯白噪声, bias, 以及尺度因子, 则为:

$$\mathbf{a}_m^b = \mathbf{S}_a \mathbf{R}_{bG} (\mathbf{a}^G - \mathbf{g}^G) + \mathbf{n}^a + \mathbf{b}^a \quad (23)$$

通常假设尺度因子为单位矩阵。



# 陀螺仪数学模型

## 陀螺仪的误差模型

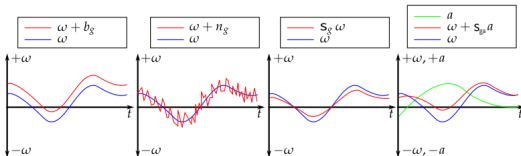
考虑尺度因子，高斯白噪声，以及 bias，陀螺仪的误差模型如下：

$$\omega_m^b = S_g \omega^b + n^g + b^g \quad (24)$$

低端传感器，考虑加速度对陀螺仪的影响，即 g-灵敏度：

$$\omega_m^b = S_g \omega^b + s_{ga} a^b + n^g + b^g \quad (25)$$

陀螺仪受四种噪声的影响分别如下图所示<sup>3</sup>：



<sup>3</sup>MA Shelley. "Monocular visual inertial odometry on a mobile device". In: *Master's thesis, Institut für Informatik, TU München, Germany (2014)*.

## Section 4

# 运动模型离散时间处理

# VIO 中的 IMU 模型

忽略 scale 的影响，只考虑白噪声和 bias 随机游走：

$$\tilde{\omega}^b = \omega^b + \mathbf{b}^g + \mathbf{n}^g \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^b = \mathbf{q}_{bw}(\mathbf{a}^w + \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}^a + \mathbf{n}^a \quad (27)$$

上标  $g$  表示 gyro,  $a$  表示 acc,  $w$  表示在世界坐标系 world,  $b$  表示 imu 机体坐标系 body。IMU 的真实值为  $\omega, \mathbf{a}$ , 测量值为  $\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{a}}$ 。

$P(\text{ose}), V(\text{elocity}), Q(\text{uaternion})$  对时间的导数可写成：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_{wb_t} &= \mathbf{v}_t^w \\ \dot{\mathbf{v}}_t^w &= \mathbf{a}_t^w \\ \dot{\mathbf{q}}_{wb_t} &= \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

# 连续时间下 IMU 运动模型

根据上面的导数关系，可以从第  $i$  时刻的 PVQ，通过对 IMU 的测量值进行积分，得到第  $j$  时刻的 PVQ:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t + \int \int_{t \in [i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t} \mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w) \delta t^2 \\
 \mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w + \int_{t \in [i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t} \mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w) \delta t \\
 \mathbf{q}_{wb_j} &= \int_{t \in [i,j]} \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{array} \right] \delta t
 \end{aligned} \tag{29}$$

# 运动模型的离散积分——欧拉法

使用欧拉法，即两个相邻时刻  $k$  到  $k+1$  的位姿是用第  $k$  时刻的测量值  $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$  来计算。

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{p}_{wb_k} + \mathbf{v}_k^w \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \Delta t^2 \\ \mathbf{v}_{k+1}^w &= \mathbf{v}_k^w + \mathbf{a} \Delta t \\ \mathbf{q}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{q}_{wb_k} \otimes \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{array} \right]\end{aligned}\tag{30}$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{q}_{wb_k} \left( \mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a \right) - \mathbf{g}^w \\ \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g\end{aligned}\tag{31}$$

# 运动模型的离散积分——中值法

使用 mid-point 方法，即两个相邻时刻  $k$  到  $k+1$  的位姿是用两个时刻的测量值  $\mathbf{a}, \omega$  的平均值来计算。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{p}_{wb_k} + \mathbf{v}_k^w \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \Delta t^2 \\
 \mathbf{v}_{k+1}^w &= \mathbf{v}_k^w + \mathbf{a} \Delta t \\
 \mathbf{q}_{wb_{k+1}} &= \mathbf{q}_{wb_k} \otimes \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \omega \delta t \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{32}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{q}_{wb_k} \left( \mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a \right) - \mathbf{g}^w + \mathbf{q}_{wb_{k+1}} \left( \mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a \right) - \mathbf{g}^w \right] \\
 \omega &= \frac{1}{2} \left[ \left( \omega^{b_k} - \mathbf{b}_k^g \right) + \left( \omega^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g \right) \right]
 \end{aligned} \tag{33}$$

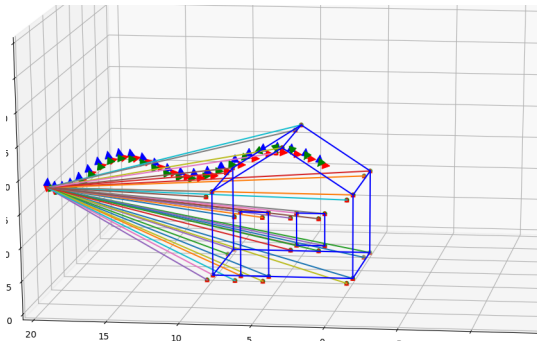


## Section 5

# IMU 数据仿真

## 仿真

- 思路 1: 指定轨迹方程, 求一阶导得到速度, 角速度, 求二阶导得到加速度。
- 思路 2: 已有 pose 轨迹, 不知道方程, 利用 B-Spline 产生 IMU 数据。



# 旋转基础知识

## 旋转积分的几种方式

四元数的形式：

$$\mathbf{q}_{wb'} = \mathbf{q}_{wb} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Delta t \end{bmatrix} \quad (34)$$

SO3 形式：

$$\mathbf{R}_{wb'} = \mathbf{R}_{wb} \exp(\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta t) \quad (35)$$

欧拉角形式：

$$\boldsymbol{\vartheta}_{wb'} = \boldsymbol{\vartheta}_{wb} + E_{wb} \cdot \boldsymbol{\omega}\Delta t \quad (36)$$

其中  $\boldsymbol{\vartheta} = (\psi_{roll}, \theta_{pitch}, \phi_{yaw})^\top$ ,  $E_{wb}$  表示将 IMU body 坐标系下的角速度转换成欧拉角速度<sup>a</sup>。

<sup>a</sup>MIT. Kinematics Of Moving Frames. URL:

<https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-154-maneuvering-and-control-of-surface-and-underwater-vehicles-13-49-fall-2004/lecture-notes/lec1.pdf> (visited on 2004).

# 欧拉角

## 问题

inertial frame 下的一个点旋转到 body 坐标系，用欧拉角如何表示？仿真数据中旋转矩阵用欧拉角来表示很方便。

step 1. 绕着惯性坐标系的  $z$  轴旋转，得到新的坐标系  $b^1$ 。

$$\mathbf{x}_b^1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^0 = R(\phi) \mathbf{x}_b^0$$

step 2. 绕着新坐标系  $b^1$  的  $y$  轴旋转得到坐标系  $b^2$

$$\mathbf{x}_b^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^1 = R(\theta) \mathbf{x}_b^1$$

# 欧拉角

step 3. 绕着新坐标系  $b^2$  的  $x$  轴旋转得到坐标系  $b^3$ ,  $b^3$  就是我们的 body 坐标系。

$$\mathbf{x}_b^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \mathbf{x}_b^2 = R(\psi) \mathbf{x}_b^2$$

综合起来，得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b &= R(\psi)R(\theta)R(\phi)\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\phi & c\theta s\phi & -s\theta \\ -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & s\psi c\theta \\ s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\theta \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= R(\phi, \theta, \psi)\mathbf{x} \end{aligned}$$

# 欧拉角速度和 body 角速度的转换

## 问题

inertial frame 下的欧拉角速度怎么转到 body 坐标系下呢？

euler rate to body rate:

$$\begin{aligned}
 \omega &= R(\psi)R(\theta) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\phi}{dt} \end{Bmatrix} + R(\psi) \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{d\psi}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \theta \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\psi}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{37}$$

公式 (37) 取逆就能得到, body rate to euler rate 的变换:

$$\frac{d\theta}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \psi \tan \theta & \cos \psi \tan \theta \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi / \cos \theta & \cos \psi / \cos \theta \end{bmatrix} \vec{\omega} \tag{38}$$

# 仿真代码

## IMU 仿真

- 定义 imu body 坐标系的位置方程, 椭圆, 圆形等等.
- 定义 imu body 坐标系在惯性系下的欧拉角方程.
- 求导得到角速度, 加速度
- 设置噪声参数, 利用 imu 的模型产生数据。

介绍下仿真代码:

[https://github.com/HeYijia/vio\\_data\\_simulation](https://github.com/HeYijia/vio_data_simulation)

# 习题

## 基础作业，必做

- ① 设置 IMU 仿真代码中的不同的参数，生成 Allen 方差标定曲线。  
allan 方差工具：  
[https://github.com/gaowenliang/imu\\_utils](https://github.com/gaowenliang/imu_utils)  
[https://github.com/rpng/kalibr\\_allan](https://github.com/rpng/kalibr_allan)  
...
- ② 将 IMU 仿真代码中的欧拉积分替换成中值积分。

## 提升作业，选做

阅读从已有轨迹生成 imu 数据的论文，撰写总结推导：

- 2013 年 BMVC, Steven Lovegrove ,Spline Fusion: A continuous-time representation for visual-inertial fusion with application to rolling shutter cameras.



# 谢谢