2019-2020 第一学期《数学分析》(上)B卷参考答案及评分标准

一、填空题(每题3分，共9分)

1. 1;　　2. $\dfrac{3}{2}$;　　3. 1.

二、计算数列极限 (共24分)

1. (6分) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)\cos n\pi$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)\cos n\pi\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\cos n\pi\\&=0.\quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6分\end{aligned}$$

2. (6分) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a^{n-1}}{n+1}$, 其中$a>0$且$a\neq 1$.

解　由Stolz定理

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a^{n-1}}{n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a^{n-1}}{n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a^{n-1}-\log_a^{n-2}}{(n+1)-n}\\&=\lim_{n\to\infty}\log_a^{\frac{n-1}{n-2}}\\&=0.\quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6分\end{aligned}$$

3. (6分) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

解　记

$$I=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

易见$I>0$, 且成立

$$\begin{aligned}I^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2\\ &<\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n}{2n+1}\\ &=\frac{1}{2n+1}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}\end{aligned}$$

于是成立$0<I<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=0$, 所以由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}I=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

4. (6分) 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$.

解　记$I=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$. 易见$\sqrt[n]{1}<I<\sqrt[n]{n}$. 易知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}I=1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots 3$分

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}=\ln 1=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

三、计算函数极限 (共24分)

1. (6分) 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-3}$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-3}\\ =&\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}}\\ =&\frac{1}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}\end{aligned}$$

2. (6分) 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x+5\sin 5x}{4x}$.

解　由L'Hospital 法则知

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\cos x+5\sin 5x}{4x}\\ =&\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+25\cos 5x}{4}\\ =&\frac{25}{4}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}\end{aligned}$$

3. (6分) 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+\sin x)}$.

解　因为$x\to 0$时成立

$$
\begin{aligned}
&(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+o(x^2),\\
&(1+2x^2)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(2x^2)+o(x^2),\\
&\ln(1+\sin x)\sim\sin x\sim x,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+\sin x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)]-[1+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)]}{x}\\
=&\frac{1}{2}.\quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}
\end{aligned}
$$

4. (6分) 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x^2}}$.

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
=&\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x^2}}}\\
=&\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})}{x^2}}.\quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}
\end{aligned}
$$

由L'Hospital法则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x-\frac{x^2}{2}}\cdot(-\sin x-x)}{2x}\\
=&-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x-\frac{x^2}{2}}\\
=&-2.
\end{aligned}
$$

所以　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.　$\cdots\cdots\cdots\cdots 3$分

四、解答题(共16分)

1. (8分) 求曲线$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 在$t=1$处的切线方程和法线方程.

解 $t=1$ 对应曲线上的点$(2,0)$. $t=1$对应的曲线上点的切线斜率

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{(t-t^3)'}{(1+t)'}\right|_{t=1} = -2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

于是切线方程为

$$y = -2x + 4, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

法线方程为

$$y = \frac{1}{2}x - 1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

2. (8分) 设$y = x^2\cos 3x$, 求$\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

解

$\dfrac{d^n y}{dx^n} = (x^2\cos 3x)^{(n)}$

$= x^2(\cos 3x)^{(n)} + C_n^1 2x(\cos 3x)^{(n-1)} + 2C_n^2(\cos 3x)^{(n-2)}$

$= x^2\cos\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + 2nx\cos\left(3x + \dfrac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)\cos\left(3x + \dfrac{n-2}{2}\pi\right).$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$8分

五、证明题(共27分)

1. (5分) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$.

证明

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right| = \left|\frac{n\times(n-1)\times\cdots 2\times 1}{n\times n\times\cdots\times n}\right| \le \frac{1}{n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

$\forall\varepsilon > 0$, 取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当$n > N$时，恒有

$$\left|\frac{n!}{n}\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由数列极限的定义知：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$. 证毕 $\cdots\cdots\cdots\cdots$2分

2. (7分)设函数$f(x)=(1+\frac{1}{x})^{2x}$定义在$[a_0,+\infty)$上, $a_0>0$, 证明$f(x)$在$[a_0,+\infty)$上一致连续.

证明　易知$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}=e^2$. 由Cauchy收敛准则知，$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\forall x_1,x_2>X$恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

因为$f(x)$在闭区间$[a_0,X+1]$上连续，所以一致连续. 于是对上述$\varepsilon>0$, $\exists\delta>0(\delta<1)$, $\forall x',x''\in[a_0,X+1]:|x'-x''|<\delta$, 恒成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

于是对一切$x',x''\in[a_0,+\infty)$且满足$|x'-x''|<\delta$, 恒成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由一致连续的定义, $f(x)$在$[a_0,+\infty)$上一致连续. 证毕　$\cdots\cdots\cdots\cdots$2分

3. (8分) 证明不等式: $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$.

证明　记$f(x)=\ln(1+x)$. 由Taylor公式知，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta_1 x)}{2!}x^2,\quad \theta_1\in(0,1),$$
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta_2 x)}{3!}x^3,\quad \theta_2\in(0,1).\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

易知, $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$. 于是有

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta_1 x)^2},$$
$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\theta_2 x)^3}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

因为$x>0$，所以成立

$$x-\frac{x^2}{2}<f(x)<x.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$

证毕

4. (7分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$|f''(x)| \leq 1$, $f(x)$在$(0,1)$内取到最大值$\dfrac{1}{4}$, 证明: $|f(0)|+|f(1)| \leq 1$.

证明　不妨设$f(\xi)=\frac{1}{4}$, $\xi \in (0,1)$. 易知$x=\xi$是$f(x)$的一个极值点. 由Fermat定理知，$f'(\xi)=0$.　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2分

分别在闭区间$[0,\xi]$和$[\xi,1]$ 上运用Lagrange中值定理得

$$f(0)=f(\xi)+f'(\xi)(0-\xi)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(0-\xi)^2, \quad \eta_1 \in (0,\xi),$$

$$f(1)=f(\xi)+f'(\xi)(1-\xi)+\frac{f''(\eta_2)}{2}(1-\xi)^2, \quad \eta_2 \in (\xi,1). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

上两式相加，并注意到$f''(x) \leq 1$, $x \in [0,1]$, 可得

$$|f(0)|+|f(1)| \leq 2|f(\xi)|+\frac{1}{2!}[\xi^2+(1-\xi)^2].$$

由于$f(\xi)=\frac{1}{4}$, $g(\xi)=\xi^2+(1-\xi)^2$在闭区间[0,1]上的最大值为1, 所以成立

$$|f(1)|+|f(0)| \leq 2 \times \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

证毕