安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等代数（下）》考试 B 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $x=-\frac{1}{2}$ 是二重根； 2. $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda^2+1)$； 3. $\mathrm{tr}B=12-5^n-(-1)^n 2$； 4. 3 个；

5. C_2。

二、简答题（每小题 5 分，共 15 分）

6、答：（1）有 n 个线性无关的特征向量；（2）有 n 个不同的特征值；（3）有 n 个特征值，且每个特征值的代数重数等于几何重数；（4）有 n 个特征值，且 σ 的最小多项式是互不相同的一次因式的乘积。

7、答：（1） A 的负惯性指数为 n；（2）合同于 $-I$；（3）存在可逆矩阵 P 使得 $A=-PP^T$；（4） A 的奇数阶顺序主子式全小于 0，偶数阶顺序主子式；（5） A 的所有特征值全为负数。

8、答：（1）线性变换在 V 的任意一个基下的矩阵的秩称为该线性变换的秩。

（2）合理性：因同一个线性变换在不同基下的矩阵是彼此相似同的，而相似的矩阵有相同的的秩，具有唯一性，故该秩是由这个线性变换唯一确定的，因此可定义为该线性变换的秩。

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

9、解： $f'(x)=7x^6+12x^5-30x^4-32x^3+51x^2+12x-20$. 用辗转相除法求得

$$(f,f')=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$$

于是 $q(x)=\dfrac{f}{(f,f')}=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ ………………..3 分

由于 $f(x)$与$q(x)$ 有相同的不可约因式 $x-1,x+2$，所以 $f(x)$ 有根 1 与-2. ………..5 分

再用综合除法课得 1 是 $f(x)$ 的 4 重根，那么-2 就是 $f(x)$ 的 3 重根，所以 $f(x)$ 的典型分解式为

$$f(x)=(x-1)^4(x+2)^3。$$ ……………10 分

10、解：（1）先求出行列式因子： $D_1(\lambda)=1,D_2(\lambda)=(\lambda-2),D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$，

接着求出不变因子： $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=(\lambda-2),d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$。 …………5 分

（2）写出 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$或 $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ …………10 分

11、解：原二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&2b\\1&2b&1\end{bmatrix}$，标准型的矩阵为 $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

…………..2 分

由于它们是正交相似的，于是$|\lambda I-A|=|\lambda I-D|$. 将其展开得

$$-\lambda^3+3\lambda^2+(a^2+4b^2-2)\lambda+4ab-a^2-4b^2=-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda.$$

比较λ的同次幂的系数可得

$$\begin{cases}a^2+4b^2-2=-2\\4ab-a^2-4b^2=0\end{cases}$$ 解得 $a=b=0$. ………………..5 分

因此 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2.$ ………………..6 分

解出对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 单位化为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}。$$

故所求的正交替换为

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}。$$ ………………..10 分

12、解：设 A 的属于特征值 3 的特征向量为$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$. 由于 A 是实对称矩阵，故属于不同特征值的特征向量互相正交，所以有

$$\begin{cases}-x_1-2x_2+3x_3=0,\\x_1-4x_2-3x_3=0.\end{cases}$$ ……………5 分

此基础解系为$\alpha_3=(3,0,1)^T$．即 A 的属于特征值 3 的全部特征向量为$k\alpha_3$，$k\neq 0$.

（2） 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-1&1&3\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}-2&-4&6\\1&-4&-3\\3&0&3\end{bmatrix}$．于是

$$A=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}31&-4&15\\-2&20&6\\5&4&21\end{bmatrix}.$$ ……………10 分

四、证明题（每小题 15 分，共 30 分）

13、证明：先写出n元二次型的矩阵

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}。$$ ………5 分

它的顺序主子式为

$$D_1=1>0,D_2=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0,\cdots,D_k=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}_k=\frac{k+1}{2^k}>0,\ k=3,4,\cdots,n。$$

故A是正定矩阵。 …………10 分

14、证明：假设$f(x)$在 Q 上可约，即可以分解成两个次数较低的多项式乘积

$$f(x)=g(x)h(x),$$

其中$g(x)=b_kx^k+\cdots+b_0$，$h(x)=c_lx^l+\cdots+c_0$为整系数多项式且$k,l<n$ $k+l=n$.从而有

$$a_0=b_0c_0,\ a_n=b_kc_l.$$ …………3 分

因$p|a_0$且p为素数，所以$p|b_0$或$p|c_0$．又由于$p^2\dagger a_0$，所以p只能整除b_0和c_0中的一个，不妨设$p|b_0$但$p\dagger c_0$. ………………5 分

此外由 $p \nmid a_n$ 知 $p \nmid b_k$. 令 b_t 是 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 中第一个不能被 p 整除的数. 注意到

$$a_t = b_t c_0 + b_{t-1} c_1 + \cdots + b_0 c_t,$$

且 $p \mid a_t$，所以 $p \mid b_t c_0$. 但 $p \nmid b_t$，所以 $p \mid c_0$. 矛盾，故 $f(x)$ 在 Q 上不可约。

…………………10 分