安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《 高等代数（下） 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线　　装　订　线

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1、多项式 $f(x)=x^4-4x^3+2x^2+3x+2$ 的全部有理根是____________________。

2、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似，那么 y 的值是________。

3、设矩阵 A 有一个特征值 λ，则矩阵 $B=2A^2-3A+4I$ 一定有一个特征值是

________________。

4、已知实对称矩阵 A 的秩和符号差分别是 4 和 -2，则 A 的正特征值个数为______。

5、设欧氏空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上的内积为：$(A,B)=tr\left(A^{\mathrm{T}}B\right)$. 设有两个矩阵

$$C_1=\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&-1\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}0&-1\\2&1\end{bmatrix},$$

则模长大的矩阵是________。

二、简答题（每小题 5 分，共 15 分）

得 分	

6、判断一个 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ 可对角化的条件有哪些？（至少写 3 条）

7、判断一个n阶实对称矩阵A是正定矩阵的条件有哪些？（至少写 3 条）

8、判断欧式空间上的线性变换是正交变换的条件有哪些？（至少写 3 条）

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

得 分	

9、设多项式 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ g(x)=2x^3-x^2-5x+4$。求$\left(f(x),g(x)\right)$，并求 $u(x)$ 和 $v(x)$，使得$\left(f(x),g(x)\right)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

10、已知复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形。

11、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. 求 A^n，其中 n 为正整数。

12、求一个正交线性替换化二次型 $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形。

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

得 分	

13、证明：n元二次型 $X^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}X$ 是正定二次型。

14、证明：多项式 $f(x)=x^{p}+px+1$ （p 为素数）在有理数域上不可约。

五、开放性试题（10 分）

得 分	

15、简述欧氏空间内积的定义，并谈谈欧式空间引入内积的意义。