

安徽大学 2023-2024 学年第 1 学期《高等代数 (上)》

期末考试 B 卷参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分).

1. $r(A)$ 或 秩(A) 或者 $\text{rank}(A)$ 或者 A 的秩. 2. $(1, 0, -2)^T$ 或者 $(1, 0, -2)$. 3. $\frac{1}{6}A$
 或者 $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 4. $3^{k-1}A$ 或者 $3^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & 1 & \frac{3}{5} \\ 5 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$. 5. $(6, -1, 14)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分).

6. C. 7. B. 8. D. 9. A. 10. A.

三、计算题 (每小题 10 分, 共 30 分).

11. 解. 从第二列起将每一列加到第一列上并提出公因子 $n - 1$, 得到

$$|A| = (n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

.....(4 分)

再将第一行乘以 -1 依次加到后面各行, 得到

$$|A| = (n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n - 1).$$

.....(10 分)

12. 解. 因为 $|A| = 1 \neq 0$, 所以 $X = A^{-1}B$ (4 分)

将 A, B 水平并置, 做初等行变换如下:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

$$\text{因此, } X = A^{-1}B = \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right) (10 \text{ 分})$$

13. 解. 将向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) (5 \text{ 分})$$

注意到右边阶梯形矩阵中主元所在的列指标为 1, 2, 4, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组的一个极大线性无关组. 注意到极大线性无关组一般并不唯一, 在本题中, 除了 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 之外, $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 和 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 也都是极大线性无关组, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不是极大线性无关组. (10 分)

四、证明题 (每小题 10 分, 共 30 分).

14. 证. 设 $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 为 B 的列向量组, 则它们为齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解.

..... (4 分)

于是 $r(B) = \text{秩}(\beta_1, \dots, \beta_l) \leq n - r(A)$ (7 分)

从而 $r(A) + r(B) \leq n$ (10 分)

15. 证. 由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1, \dots, k_r, k \in \mathbb{F}$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r + k\beta = 0.$$

若 $k = 0$, 则 k_1, \dots, k_r 不全为零. 于是上式化为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0.$$

这与 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关矛盾. 故 $k \neq 0$. 从而

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k}\right)\alpha_r,$$

即 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出. (6 分)

下证表示法是唯一的. 设

$$\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r = b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r, \text{ 故 } (a_1 - b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_r - b_r)\alpha_r = 0.$$

由于向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故 $a_i = b_i, i = 1, \dots, r$. 唯一性得证. (10 分)

16. 证法 1. 由线性方程组解的定理知, V_1 的维数是 1, V_2 的维数是 $n - 1$. .. (3 分)

若列向量 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 α 既是第一个线性方程组的解, 也是第二个线性方程组的解, 不难看出 α 只能等于零向量. 因此 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ (6 分)

又因为

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 1 + (n - 1) = n = \dim \mathbb{F}^n,$$

故 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ (10 分)

证法 2. 对任意 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{F}^n$, 令 $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. 令

$$\alpha_1 = (\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a})^T, \alpha_2 = (a_1 - \bar{a}, a_2 - \bar{a}, \dots, a_n - \bar{a})^T. \text{ 显然, }$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2. (5 \text{ 分})$$

另一方面, 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in V_1 \cap V_2$, 则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0, a_1 = a_2 = \cdots = a_n. \text{ 由此可得 } a_i = 0, 1 \leq i \leq n. \text{ 从而 } \alpha = 0,$$

即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

故 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ (10 分)

五、简答题 (5 分, 判断叙述是否正确并简要说明理由)

17. 解. 正确. (2 分)

理由如下:

设 \bar{A} 、 \bar{B} 的行向量组分别为 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 和 β_1, \dots, β_m .

$AX = \gamma$ 与 $BX = \delta$ 同解.

$\iff AX = \gamma, BX = \delta$ 以及 $AX = \gamma$ 与 $BX = \delta$ 的联立方程组同解.

$$\iff \text{r}(\bar{A}) = \text{r}(A) = \text{r} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{r} \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = \text{r}(B) = \text{r}(\bar{B}).$$

$$\iff L(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_m) = L(\beta_1, \dots, \beta_m).$$

$\iff \bar{A}, \bar{B}$ 的行向量组等价. (5 分)