安徽大学 2021-2022 学年第一学期

《高等代数（上）》期末考试试卷（B 卷）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得分	

1. 设 A 是一个 3 阶方阵，$|A|=1$，则 $|2A^*|=$ ____________.

2. 已知 a,b,c,d 为实数，且 $ad-bc\neq 0$，则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=$ ____________.

3. 已知齐次线性方程组

$$\begin{aligned} \lambda x_1+3x_2+4x_3 &=0, \\ -x_1+\lambda x_2 &=0, \\ x_2+x_3 &=0 \end{aligned}$$

有非零解，则 $\lambda=$ ____________.

4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是线性空间 V 的一个基，$\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$，$\eta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\eta_4=\varepsilon_1$. 若向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $(1,-1,1,-1)$，则 α 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 ____________.

5. 设 $\mathbb{F}^2,\mathbb{F}^3$ 分别是 2 维和 3 维行向量空间. 已知线性映射 $\varphi:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^3$ 满足 $\varphi((1,-1))=(1,0,-1)$，$\varphi((1,1))=(1,-2,3)$，则 $\varphi((2,-3))=$ ____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得分	

6. 设 A,B,C,D 为 n 阶矩阵，O 为 n 阶零矩阵，$a_i,b_i,c_i,d_i\,(i=1,2)$ 为实数，则下列正确的是　（　）

试卷宝 创建

(A) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$

(B) $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = -|A||B|$.

(C) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A|^2 - |B|^2$.

(D) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$.

7. A, B 是 n 阶矩阵，则下列命题正确的是　　　　(　　)

(A) $AB = O$ 当且仅当 $A = O$ 且 $B = O$.　　(B) $|A| = 0$ 当且仅当 $A = O$.

(C) $|AB| = 0$ 当且仅当 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$.　　(D) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

8. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶反对称矩阵按照矩阵加法和数乘构成的线性空间. 则 $\mathbb{F}$- 线性空间 V 的维数为　　　　(　　)

(A) $\frac{n(n-1)}{2}$.　(B) $\frac{n(n+1)}{2}$.　(C) n^2-1.　(D) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

9. 设 A, B 是 2 阶方阵, A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = 3$, 则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* =$　　　　(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$.

10. 设 $V_1, \cdots, V_s$ 都是线性空间 V 的子空间, $s \geq 3$, 则和 $V_1 + \cdots + V_s$ 是直和充分必要条件是　　　　(　　)

(A) $V = \sum_{i=1}^{s} V_i$.　　(B) 对任意 $1 \leq k \leq s-1$, $V_k \cap (\sum_{i=k+1} V_i) = \{0\}$.

(C) $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \{0\}$　　(D) 对任意 $1 \leq i \neq j \leq s$, $V_i \cap V_j = \{0\}$..

三、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

得分	

1. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_n \end{vmatrix}$.

试卷宝 创建

12 设在 4 维行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中，V_1 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间，V_2 是由 β_1,β_2,β_3 生成的子空间，其中 $\alpha_1=(1,0,-1,0)$，$\alpha_2=(0,1,2,1)$，$\alpha_3=(2,1,0,1)$，$\beta_1=(-1,1,1,1)$，$\beta_2=(1,-1,-3,-1)$，$\beta_3=(-1,1,-1,1)$. 求 $V_1\cap V_2$ 的维数.

13. 设 $\mathbb{F}$ 是数域，V 与 W 分别是 2 维和 3 维 $\mathbb{F}$ 上线性空间，且线性映射 $\varphi: V\to W$ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 与 W 的基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ 求 φ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 和 W 的基 $\eta_1,\eta_1+\eta_2,\eta_1+\eta_2+\eta_3$ 下的矩阵.

试卷宝 创建

14. 线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \qquad +3x_4 \qquad =2 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4 \qquad =2 \\ x_1-2x_2 \qquad +3x_4-x_5=a \\ -x_1+2x_2-2x_3-7x_4+x_5=-12. \end{cases}$$

问 a 取何值时使得方程组有解？并在有解时求其全部解.

四、证明题（每小题 10 分，共 30 分）

得分	

15. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是数域 F 中互不相同的数，$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是数域 F 中任意给定的一组数，用克莱姆法则证明：存在唯一的数域 F 上的 $n-1$ 次多项式 $f(x)=c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\cdots+c_1x+c_0$ 使得 $f(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$.

试卷宝 创建

16. 设 A, B 是 n 阶方阵, $AB = A + B$. 证明:

(1) $A - I$ 与 $B - I$ 均可逆;

(2) $AB = BA$;

(3) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

17. 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, α 是 n 维非零列向量, $A^m\alpha = 0$, 且 $A^{m-1}\alpha \neq 0$, m 为正整数.

证明: 向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

五、论述题 (共 5 分, 开放式回答, 无标准答案)

得分	

18. 请谈谈你对线性空间基的理解和认识.

试卷宝 创建