安徽大学 2024—2025 学年第一学期

《数学分析（上）》考试试卷（B 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

班级________________姓名________________学号___________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

得 分	

一、（4 分）分别写出数列$\{a_n\}$以 a 为极限的定义，以及数列$\{a_n\}$不以 a 为极限的定义.

二、计算下列极限（每小题 5 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2\sqrt{n}+3}{4n^2-5n-11}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{2n+1}+\dfrac{3}{3n+1}+\dots+\dfrac{n}{nn+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\dots+(2n+1)^2}{n^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^3}\mathrm{e}^{-x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

得 分	

三、 计算与求解（每小题 8 分，共 24 分）

1. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由关系式 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

3. 求常数 a,b 使 $f(x)=\begin{cases} x^2+b & x>2 \\ ax+1, & x\le 2 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，并求 $f'(2)$.

四、分析与证明(共 42 分).

得 分	

1.（6 分）设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}(n\geqslant 1)$ 定义，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ 存在并求此极限.

2.（8 分）证明 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c$，其中 a,b,c 均为正数.

3.（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导. 证明：存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

4.（10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，令 $\omega_f(\delta)=\sup\limits_{\substack{x,y\in I\\ |x-y|<\delta}}|f(x)-f(y)|$. 证明：

（a） $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_f(\delta)$ 存在，

（b） $f(x)$ 在区间 I 上一致连续等价于 $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_f(\delta)=0$.

5. （10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $|f(x)|\le A, |f''|\le B$.

证明：$|f'(x)|\le 2A+\dfrac{1}{2}B,\ x\in[0,1]$.