2019-2020 第二学期《数学分析》（中）B卷
参考答案及评分标准

一、计算题（共44分）

1. 求下列数列的上极限和下极限（每小题4分，共8分）

(1) $x_n = \sqrt[n]{n+1} + (-1)^n$，$n = 1, 2, \cdots$;

解　易知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. 所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$. $\cdots\cdots\cdots$ 4分

(2) $x_n = \dfrac{2n}{3n-4} + \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $n = 2, 3, \cdots$.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-4} = \frac{2}{3},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sin\frac{n\pi}{2} = 1,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sin\frac{n\pi}{2} = -1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

所以成立 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1分

2. 计算下列积分（每小题6分，共36分）

(1) $\int \sin(1+\cos x)\sin x dx$;

解

$$\int \sin(1+\cos x)\sin x dx$$

$$= -\int \sin(1+\cos x) d(1+\cos x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$= \cos(1+\cos x) + c. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

(2) $\int x^3 \ln x dx$;

解

$$
\begin{aligned}
&\int x^3 \ln x dx \\
=&\frac{1}{4}\int \ln x dx^4 \\
=&\frac{1}{4}\left[x^4 \ln x - \int x^3 dx\right] \\
=&\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6分
\end{aligned}
$$

(3) $\int x(x-2)^{2020}dx$;

解　令$x-2=t$, 则$x=t+2$, $dx=dt$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2分

于是

$$
\begin{aligned}
&\int x(x-2)^{2020}dx \\
=&\int (t+2)t^{2020}dt \\
=&\int t^{2021}dt + 2\int t^{2020}dt \\
=&\frac{(x-2)^{2022}}{2022} + \frac{2}{2021}(x-2)^{2021} + c. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4分
\end{aligned}
$$

(4) $\int_{-1}^{1} x(\sin x + \ln \sqrt{x^2+1+\sin^4 x})dx$;

解

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} x(\sin x + \ln \sqrt{x^2+1+\sin^4 x})dx \\
=&\int_{-1}^{1} x\sin x dx + \int_{-1}^{1} x \ln \sqrt{x^2+1+\sin^2 x} dx \\
=&\int_{-1}^{1} x\sin x dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3分 \\
=&2\sin 1 - 2\cos 1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3分
\end{aligned}
$$

(5) $\int_0^1 x(1-x^2)^8dx$;

解

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x(1-x^2)^8dx\\=&-\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)^8d(1-x^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}\\=&-\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^9}{9}\right]_0^1\\=&\frac{1}{18}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}\end{aligned}$$

(6) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

解　令$e^x=t$, 则$x=\ln t$, $dx=\dfrac{1}{t}dt$, $e^{-x}=\dfrac{1}{t}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$分

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx\\=&\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt\\=&\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt\\=&\arctan t\Big|_1^{+\infty}\\=&\frac{\pi}{4}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}\end{aligned}$$

二、求解题 (每小题8分，共16分)

1. 求曲线$y=\cos x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 绕x轴旋转一周所成旋转体的体积;

解

$$
\begin{aligned}
V =&\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}\\
=&2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dt\\
=&2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\\
=&\frac{\pi^2}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}
\end{aligned}
$$

2. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$的收敛半径、收敛域及和函数.

解　记$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$. 易知

$$A=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

所以收敛半径$R=\frac{1}{A}=1$,收敛区间为$(-1,1)$. 易知, 当$x=1$时，相应的数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$为Leibnitz级数，故收敛; $x=-1$时，相应的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$为调和级数，故发散. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$收敛域为$(-1,1]$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4分

对$\forall x\in(-1,1)$, 记$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$. 易知

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=-1+x-x^2+\cdots+(-1)^n x^{n-1}+\cdots=\frac{-1}{1+x},\quad x\in(-1,1)\quad(1)$$

于是

$$S(x)=-\int\frac{1}{1+x}dx=-\ln(1+x)+C,\quad x\in(-1,1)\quad(2)$$

在等式（2）中，令$x=0$, 得$C=S(0)$. 而由等式$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$知$S(0)=0$, 所以$C=0$, 于是成立

$$S(x)=-\ln(1+x),\quad x\in(-1,1).$$

由$S(x)$在区间$(-1,1]$上的连续性知，

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}[-\ln(1+x)]=-\ln 2.$$

所以

$$S(x)=-\ln(1+x),\quad -1<x\le 1.\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

三、分析判断题（共28分）

1. 判断下列反常积分的敛散性（每小题4分，共8分）

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^3}dx$;

解　因为$\left|\dfrac{\arctan x}{1+x^3}\right| \le \dfrac{\pi}{2(1+x^3)} \le \dfrac{\pi}{x^3}$，且反常积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\pi}{x^3}dx$ 收敛，所以由Weierstrass判别法知：反常积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^3}dx$收敛.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4分

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}+1}dx$;

解　易知$\forall A>0$, 成立$|\int_0^A\cos x dx|\le 2$.

记$b(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. 由于

$$b'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}<0,\quad x\in[0,+\infty).$$

所以$b(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减. 又$\lim\limits_{x\to+\infty}b(x)=0$.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3分

由Dirichlet判别法知，反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}+1}dx$收敛.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1分

2. 判断下列级数的敛散性（每小题5分，共20分）

（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3-2n}$;

解　由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{n^2}{n^3-2n}=1$, 且$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以由正项级数的比较判别法知：级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3-2n}$发散.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$;

解　记$u_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$. 由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}\to\frac{2}{e}<1,\quad n\to\infty.$$

由正项级数的比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$收敛.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$;

解　记$u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{2+(-1)^n}{2^{\frac{2n+1}{n}}}=\frac{3}{4}<1,$$

所以由Cauchy判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$收敛. ························5分

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$.

解　易知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

显然，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$是Leibnitz级数，因而收敛. ··········5分

四、证明题（每小题6分，共12分）

1. 证明$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续.

证明　只需证明$f(x)$ 在$(0,2\pi)$上内闭一致收敛. 事实上，$\forall 0<\delta<\pi$, 当$x\in[\delta,2\pi-\delta]$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}|}{2|\sin\frac{x}{2}|}\leq\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

且$\dfrac{1}{n^2+1}$ 关于变量x在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛于0，由Dirichlet 判别法知，$f(x)$在$(0,2\pi)$上内闭一致收敛. 又$u_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$上连续，由连续定理知$f(x)$在$(0,2\pi)$上连续.证毕 ···4分

2. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导, 且$f''(x)\geq 0$，$x\in[0,1]$，证明:

$$\int_0^1 f(x^3)dx\geq f(\frac{1}{4}).$$

证明　由Taylor 公式，对$\forall x\in[0,1]$，存在$\xi\in(0,1)$使得

$$f(x)=f(\frac{1}{4})+f'(\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{4})^2.$$

因为$f''(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$, 所以$\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{4})^2 \geq 0$. 于是成立

$$f(x) \geq f(\frac{1}{4}) + f'(\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4}), \quad x \in [0,1]. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

用x^3替换x, 得

$$f(x^3) \geq f(\frac{1}{4}) + f'(\frac{1}{4})(x^3-\frac{1}{4}), \quad x \in [0,1].$$

两边同时从0到1积分，得

$$\int_0^1 f(x^3)dx \geq \int_0^1 f(\frac{1}{4})dx + \int_0^1 f'(\frac{1}{4})(x^3-\frac{1}{4})dx = f(\frac{1}{4}). \quad \cdots\cdots\cdots 3\text{分}$$

证毕