安徽大学 2024—2025 学年第一学期《数学分析（上）》B 卷参考答案

一、　（4 分）分别写出数列$\{a_n\}$以a为极限，不以a为极限的定义.

解：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$：$\forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 使得当$n > N$时有$|a_n - a| < \varepsilon$；　（2 分）

$\{a_n\}$不以a为极限：$\exists \varepsilon_0 > 0,$ 使得对任意N，有$n_0 > N$使得$|a_{n_0} - a| \ge \varepsilon_0$. ；（2 分）

二、计算下列极限（**每小题 5 分**，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{4n^2 - 5n - 11}$.

解：原式$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{4n^2 - 5n - 11} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2/n^2 + 2\sqrt{n}/n^2 + 3/n^2}{4n^2/n^2 - 5n/n^2 - 11/n^2} = \dfrac{1}{4}$..

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2}{2n+1} + \dfrac{3}{3n+1} + \ldots + \dfrac{n}{nn+1}\right)$

解：由于$\dfrac{n}{n+1} \le \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2}{2n+1} + \dfrac{3}{3n+1} + \ldots + \dfrac{n}{nn+1} \le \dfrac{n}{n} = 1.$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$，夹逼原理知原式等于 1.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2}{n^3}$.

解：利用 Stolz 定理，原式$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{n^3 - (n-1)^3} = \dfrac{4}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^3} \mathrm{e}^{-x^2}$.

解：原式$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^3 \ln(1+\sin\frac{1}{x}) - x^2} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right) - x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x})^x$.

解：原式

$$= \lim_{x\to\infty} (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})^{2\cdot\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} (1 + 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} (1 + \sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left((1 + \sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}} \right)^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}} = e$$

6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x+x\cos x+\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3\cos x-x\sin x}=\dfrac{4}{3}.$

三、 计算与求解（每小题 8 分，共 24 分）

1. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

解：由条件得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3,$ 首先由

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

且 $f'(0)=0.$ （3 分）

由 Taylor 公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$ 代入

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$ 得

$3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+(1+\frac{1}{2}f''(0))x+o(x)\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\frac{1}{2}f''(0))x+o(x)}{x}=1+\frac{1}{2}f''(0),$ 故 $f''(0)=4.$ （8 分）

综合得：$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=4.$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由关系式 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$ 和 $y''(0).$

解：方程两边对 x 求导得 $e^y y'+y+xy'=0$ （3 分）

在求导得 $e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0$ （5 分）

注意到 $y(0)=1,$ 代入 $x=0, y=1,$ 得 $y'(0)=-\dfrac{1}{e}, y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$ （8 分）

3. 求常数 a,b 使 $f(x)=\begin{cases}x^2+b & x>2\\ ax+1, & x\le 2\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，并求 $f'(2).$

解：由 $f(x)$ 连续得 $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=f(2)=4+b=2a+1$； （2 分）

由于

$$f_+'(2)=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2-4}{x-2}=4,$$

$$f_-'(2)=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{ax-2a}{x-2}=a,$$

由可导性知 $f_+'(2)=f_-'(2)\Rightarrow a=4.$ （6 分）

故 $a=4, b=5.$ 且此时 $f'(2)=4.$ （8 分）

四、 分析与证明题(共 42 分).

1. (6 分)设数列$\{a_n\}$由$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}(n\geqslant 1)$定义，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$存在并求此极限.

证明:首先由$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$知$\{a_n\}$单调增.若$\{a_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在，在等式$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$两边令$n\to\infty$得$a=a+\dfrac{1}{a}\Rightarrow a$无解，矛盾. 故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. (3 分)

由 Stolz 定理有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}^2-a_n^2}{n+1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{a_n^2}\right)=2,$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}.$ (6 分)

2. (8 分) 证明 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^ab^bc^c$，其中$a,b,c$均为正数.

证明：设 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1$ ，$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0,$ (3 分)

由 $f(x)$在$x>0$严格下凸的，由詹森不等式可得

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{1}{3}(f(a)+f(b)+f(c)) \qquad (5 分)$$

即有 $\dfrac{a+b+c}{3}\ln\dfrac{a+b+c}{3}\le\dfrac{1}{3}\ln a^ab^bc^c.$ 从而有

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{1}{3}\ln a^ab^bc^c.$$

再由对数函数是严格增的，可得$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^ab^bc^c$. (8 分)

3.(8 分) 设 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导.证明：存在$\xi\in(0,\pi)$使得$f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi.$

证明：构造辅助函数$F(x)=f(x)\sin x$，容易验证$F(x)$在$[0,\pi]$上满足 (3 分) Rolle 中值定理条件，从而存在$\xi\in(0,\pi)$使得$\left(f(x)\sin x\right)'\Big|_{x=\xi}=0$，即

$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$. (8 分)

4.(10 分)设函数$f(x)$在区间I上有定义，令$\omega_f(\delta)=\sup\limits_{\substack{x,y\in I\\|x-y|<\delta}}|f(x)-f(y)|$.

证明：(a) $\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)$ 存在，

(b) $f(x)$在区间I上一致连续 等价于$\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)=0$.

证:(a).由定义知$\omega_f(\delta)\ge0,$并且关于单调递增,即δ随着δ趋于 0 而单调减少,因此$\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)$存在.

(b)必要性:假设 $f(x)$在I上一致连续，因此$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$当$x',x''\in I$, $|x'-x''|<\delta_1$ 时有

$\left|f(x')-f(x'')\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而

$\omega_f(\delta_1)=\sup\limits_{\substack{x',x''\in I\\ |x'-x''|<\delta_1}}\left|f(x')-f(x'')\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ 故 $0<\delta<\delta_1$ 时，$0\le\omega_f(\delta)\le\omega_f(\delta_1)\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)=0$.　　　　　　　　（5 分））

充分性：由 $\lim\limits_{\delta\to0+}\omega_f(\delta)=0$ 知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$ 使得 $0\le\omega_f(\delta_1)<\varepsilon$，故对于任意的 $x',x''\in I$，当 $\left|x'-x''\right|<\delta_1$ 时有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\le\sup_{\substack{x',x''\in I\\ |x'-x''|<\delta_1}}\left|f(x')-f(x'')\right|=\omega_f(\delta_1)<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 I 上一致连续.　　（10 分）

5.（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且在 $[0,1]$ 上满足 $|f(x)|\le A,\ |f''|\le B$ 证明：

$|f'(x)|\le 2A+\dfrac{1}{2}B,\ x\in[0,1]$.

证明：$\forall c\in[0,1]$, f 在该点的 Taylor 公式为

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-c)^2,x\in[0,1] \qquad （2 分）$$

其中 $\xi\in[0,1]$. 分别代入 $x=0,1$ 代入有 $\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(0-c)^2 \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 \end{cases}$,

两式相减得：$f'(c)=f(1)-f(0)-\dfrac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right]$.　　（5 分）

从而有 $\left|f'(c)\right|\le\left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\dfrac{1}{2}\left[\left|f''(\xi_2)\right|(1-c)^2+\left|f''(\xi_1)\right|c^2\right]\le 2A+\dfrac{B}{2}\left[(1-c)^2+c^2\right]$.

由于 $(1-x)^2+x^2\le1,\ x\in[0,1]$ 故 $\left|f'(c)\right|\le 2A+\dfrac{B}{2}$.（10 分）