院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装订线

安徽大学2020-2021学年第一学期
《高等代数（上）》期末考试试卷（B卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题3分，共15分)

得分	

1. 设n阶方阵A的行列式$|A| = d \neq 0$, 矩阵$B = A^*A^{-1}$. 则行列式$|B| =$ ____________.

2. 设A, B都是3阶方阵. 将A第2行的(-3)倍加到第1行得到矩阵A_1, 互换B的第2列与第3列得到第B_1. 已知$A_1B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则$AB =$ ________________.

3. 设行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ -3 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$, M_{ij}与A_{ij}分别为D中(i,j)位置元素的余子式和代数余子式. 则$M_{14} - 2M_{34} - A_{44} =$ ________________.

4. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$是线性空间$V$的一个基, $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\eta_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\eta_4 = \varepsilon_1$. 若向量α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下的坐标为$(1, -1, 1, -1)$，则$\alpha$在基$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$下的坐标为________________.

5. 设$\mathbb{F}^2, \mathbb{F}^3$分别是2维和3维行向量空间. 已知线性映射$\varphi\colon \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^3$满足$\varphi((1,-1)) = (1, 0, -1)$, $\varphi((1,1)) = (1, -2, 3)$, 则$\varphi((2,-3)) =$ ____________.

二、选择题 (每小题2分，共10分)

得分	

6. 设A是$m \times n$矩阵, B是$n \times m$矩阵, 且$|AB| \neq 0$. 则　　(　　)

   (A)　A, B的秩都为n　　(B)　A, B的秩分别为n, m.

   (C)　A, B的秩都为m.　(D)　A, B的秩分别为m, n.

7. 设线性空间V向量组(I): $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由向量组(II): $\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出. 下列命题正确的是 (　　)

(A) 若向量组(I)线性无关, 则$s\le t$. (B) 若向量组(I)线性无关, 则$s\ge t$.

(C) 若向量组(II)线性相关, 则$s\le t$. (D) 若向量组(II)线性相关, 则$s\ge t$.

8. 设V是数域$\mathbb{F}$上所有n阶对称矩阵按照矩阵加法和数乘构成的线性空间. 则$\mathbb{F}$- 线性空间V的维数为 (　　)

(A) $\dfrac{n(n-1)}{2}$. (B) $\dfrac{n(n+1)}{2}$. (C) n^2-1. (D) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

9. 设A,B,C都是n阶可逆矩阵, O是n阶零矩阵. $M=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$, 则$M^{-1}=$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ -A^{-1}CB^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}A^{-1} & -B^{-1}CA^{-1}\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$.

10. 设$V_1,\cdots,V_s$都是线性空间V的子空间, $s\ge 3$, 则和$V_1+\cdots+V_s$是直和充分必要条件是 (　　)

(A) $V=\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$. (B) 对任意$2\le k\le s$, $V_k\cap(\sum\limits_{i=1}^{k-1}V_i)=\{0\}$.

(C) $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s=\{0\}$ (D) 对任意$1\le i\ne j\le s$, $V_i\cap V_j=\{0\}$..

三、计算题 (每小题10分, 共40分)

得分	

11. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & x\end{vmatrix}$, 其中$x\ne a_i, i=1,\cdots,n$.

答题勿超装订线

装　订　线

12. 设在4维行向量空间$\mathbb{F}^4$中, V_1是由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的子空间, V_2 是由β_1,β_2生成的子空间, 其中$\alpha_1=(1,-2,1,3)$, $\alpha_2=(1,-3,1,5)$, $\alpha_3=(0,-1,0,2)$, $\beta_1=(1,0,3,-2)$, $\beta_2=(-3,7,-9,-8)$. 求V_1+V_2的一个基与维数, 以及$V_1\cap V_2$的维数.

13. 设$\mathbb{F}$是数域, V与W分别是2维和3维$\mathbb{F}$上线性空间, 且线性映射$\varphi\colon V\to W$在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 与W的基η_1,η_2,η_3下的矩阵为$\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\\3&-1\end{pmatrix}$. 求$\varphi$在$V$的基$\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2$和$W$的基$\eta_1,\eta_1+\eta_2,\eta_1+\eta_2+\eta_3$ 下的矩阵.

14. 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4-x_5=3 \\ 2x_1-3x_2+5x_3-6x_4-x_5=4 \\ -x_1+5x_2+8x_3+4x_4+3x_5=-9 \\ x_1-x_2+4x_3-5x_4+2x_5=1. \end{cases}$$

的通解及其导出组的一个基础解系.

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

得分	

四、证明题(每小题10分, 共30分)

15. 设n阶方阵A满足$A^2-3A+2I=0$. 证明$\mathrm{rank}(A-2I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$, 其中$I$为$n$阶单位阵.

16. 设A,B都是n阶方阵, $BA^T=O$, 其中A^T为矩阵A的转置, 矩阵$M=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$. 证明：$|MM^T|=|A|^2|B|^2$.

17. 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, α是n维非零列向量, $A^m\alpha = 0$, 且$A^{m-1}\alpha \neq 0$, m为正整数. 证明: 向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$线性无关.

五、论述题(共5分, 开放式回答，无标准答案)

得分	

18. 请谈谈你对矩阵的等价标准形的理解和认识.