院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

安徽大学 2021—2022 学年第 2 学期

《高等代数（下）》　考试试卷（A 卷）

（闭卷　满分 100 分　时间 120 分钟）

考场登记表序号______________

题　号	一	二、1	二、2	二、3	二、4	总分
得　分						
阅卷人						

得分	

一、填空题（每空 5 分，共 40 分）。答案不完整或没有化简均不得分。

设实方阵$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，欧氏空间$V=\mathbb{R}^{4\times 1}$，$V$的内积$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$。

1. 多项式x^6+1在$\mathbb{R}$上的不可约分解为________________________________。
2. A的极小多项式$m(\lambda)=$______________，特征值 0 的几何重数=______________。
3. λ-方阵$\lambda I-A$的 Smith 标准形为$\begin{bmatrix}\quad&&\\&\quad&\\&&\quad\end{bmatrix}$。
4. $B=A^2$的 Jordan 标准形为$\begin{bmatrix}\quad&&\\&\quad&\\&&\quad\end{bmatrix}$。
5. V上的实二次型$Q_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$的规范形为________________________________，$Q_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-\lambda Q_1(\boldsymbol{x})$是正定的当且仅当实数$\lambda$满足________________________。
6. 对V的一组基$\alpha_1=(-1,0,0,1)^T,\alpha_2=(0,-1,0,1)^T,\alpha_3=(0,0,-1,1)^T,\alpha_4=(0,0,0,-1)^T$作 Schmidt 正交化，得$V$的标准正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$，则$\beta_4=$____________________。

二、解答题（每小题 15 分，共 60 分）。需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

得分	

1. 设实系数多项式$f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=x^2-x+1$。
   求次数最小的$u(x),v(x)\in\mathbb{R}[x]$，使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$。

得分	

2. 设A是置换方阵，即A的行向量是单位方阵的行向量的一个排列。证明：存在可逆复方阵 P，使得$P^{-1}AP$是对角阵。

3. 设$Q(\boldsymbol{x})$是一个n阶实二次型，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$使得$Q(\alpha) < 0 < Q(\beta)$。

证明：存在$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^n$，使得$Q(\gamma_1) = Q(\gamma_2) = 0$且$\gamma_1, \gamma_2$线性无关。

得分	

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

4. 设A是n阶实正交方阵，$\alpha + \mathrm{i}\beta$是A的属于特征值λ的特征向量，其中$\lambda \neq \pm 1$，α, β是实向量，i是虚数单位。证明：α与β模相等，且相互正交。

得分	

参考答案与评分标准

一、填空题（每空 5 分）。答案不完整或没有化简均不得分。

① $(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$　　② λ^4　　③ 1　　④ $\mathrm{diag}(1,1,1,\lambda^4)$

⑤ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$　　⑥ $x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$　　⑦ $-2<\lambda<\frac{2}{3}$　　⑧ $-\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$

二、解答题（每小题 15 分）。需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。可酌情给部分分数。

1. 解法一：设$\begin{cases} u(x)=ax+b \\ v(x)=cx+d \end{cases}$，得线性方程组$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。　(6 分)

   解线性方程组，得$(a,b,c,d)=\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$。　(9 分)

   解法二：作初等行变换，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & x^2-x+1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2x \\ 0 & 1 & x^2-x+1 \end{bmatrix}$　(6 分)

   $\to\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ 0 & 1 & x^2-x+1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ \frac{1-x}{2} & \frac{x+1}{2} & 1 \end{bmatrix}$，得$\begin{cases} u(x)=\frac{1-x}{2} \\ v(x)=\frac{x+1}{2} \end{cases}$　(9 分)

2. 由于n元排列只有$n!$个，故存在正整数k使得$A^k=I$。　(5 分)

   由A的化零多项式x^k-1无重根，得A的极小多项式也无重根。　(5 分)

   根据 Jordan 标准形（或课本中的定理 6.3.4），A可相似于对角阵。　(5 分)

3. 设$Q(x\alpha+\beta)=ax^2+bx+c$，其中$a=Q(\alpha)<0, c=Q(\beta)>0$。　(5 分)

   $ax^2+bx+c=0$有两根$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。$\gamma_i=x_i\alpha+\beta$满足$Q(\gamma_i)=0$。　(5 分)

   由$Q(\alpha)<0<Q(\beta)$，知α,β线性无关，从而γ_1,γ_2线性无关。　(5 分)

4. 记$v=\alpha+\mathrm{i}\beta$。由$Av=\lambda v$和$A^TA=I$，得$\overline{v^T}v=|\lambda|^2\overline{v^T}v$，故$|\lambda|=1$。　(5 分)

   由$\lambda\neq\pm1$，以及$v^Tv=\lambda^2v^Tv$，得$v^Tv=0$。　(5 分)

   再由$v^Tv=(\alpha^T\alpha-\beta^T\beta)+(2\alpha^T\beta)\mathrm{i}$，得$\|\alpha\|=\|\beta\|$且$(\alpha,\beta)=0$。　(5 分)