安徽大学 2019—2020 年第二学期

数学分析（中）期末试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一、计算题（共 44 分）

1. 求下列数列的上极限和下极限（每小题 4 分，共 8 分）：

（1）$x_n = \sqrt[n]{n} + 3(-1)^n$

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，故知

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 4$， $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -2$ ....4 分

（2）$x_n = \sqrt{1+(-1)^n} + \cos\dfrac{n\pi}{2}$

解：因为 $x_{4n} = \sqrt{2}+1$， $x_{4n-1} = 0$， $x_{4n-2} = \sqrt{2}-1$， $x_{4n-3} = 0$， 所以

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}+1$， $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ....4 分

2. 计算下列积分（每小题 6 分，共 36 分）：

（1）$\int e^x \sin(e^x+1)dx$；

解：原式 $= \int e^x \sin(e^x+1)dx = \int \sin(e^x+1)d(e^x+1) = -\cos(e^x+1) + C$

....6 分

（2）$\int (\ln\sin x)\sec^2 x dx$；

解：原式 $= \int (\ln\sin x) d\tan x = (\ln\sin x)\tan x - \int \tan x d(\ln\sin x)$

$= (\ln\sin x)\tan x - \int \tan x \dfrac{\cos x}{\sin x} dx$

$= (\ln\sin x)\tan x - x + C$ ....6 分

（3）$\int_0^1 \dfrac{1+x}{1+x^2} dx$；

解：原式 $= \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2} dx = \arctan x\Big|_0^1 + \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2} d(x^2+1)$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$ ....6 分

（4）$\int_0^1\frac{x-1}{\sqrt{2-x}}dx$；

解：令 $t=\sqrt{2-x}$，则原式$=-\int_{\sqrt{2}}^1\frac{2-t^2-1}{t}2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}(1-t^2)dt$

$$=2\int_1^{\sqrt{2}}dt-2\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=2(\sqrt{2}-1)-\frac{2}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1)-\frac{2}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}$$ ....6 分

（5）$\int_{-1}^1x^2(1+x^{2019})(e^x+e^{-x})dx$；

解：原式$=\int_{-1}^1x^2(e^x+e^{-x})dx+\int_{-1}^1x^{2021}(e^x+e^{-x})dx$。由于 $x^{2021}(e^x+e^{-x})$ 为奇函数，故

$$\int_{-1}^1x^{2021}(e^x+e^{-x})dx=0,$$

所以原式$=\int_{-1}^1x^2(e^x+e^{-x})dx=2\int_0^1x^2(e^x+e^{-x})dx=2(e-5e^{-1})$ ....6 分

（6）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+2}dx$；

解：原式$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^2+1}d(x-1)=\arctan(x-1)\Big|_0^{+\infty}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x-1)-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}$$ ....6 分

二、求解题（共 16 分）

1. 求曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$t\in[0,\pi]$ 的弧长 $(a>0)$。（7 分）

解：由弧长公式知，所求曲线弧长为

$$l=\int_0^\pi\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{[a(-\sin t+\sin t+t\cos t)]^2+[a(\cos t-\cos t+t\sin t)]^2}dt$$

$$=a\int_0^\pi tdt=\frac{1}{2}a\pi^2$$ ....7 分

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$的收敛半径、收敛域及和函数。（9 分）

解：（1）由于$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n(n+1)}}=1$，

故此幂级数的收敛半径为$R=\frac{1}{1}=1$ ……………………………………3 分

（2）由于当$x=\pm 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$收敛，所以此幂级数的收敛域为$[-1,1]$ ………2 分

（3）令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}(-1\le x\le 1)$，则当$-1<x<1$时，

$$S'(x)=\frac{d}{dx}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}]=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n},$$

$$S''(x)=\frac{d}{dx}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}]=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}。$$

于是当$-1<x<1$时，$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt+S'(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt+0=\ln(1+x)$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt+S(0)=\int_0^x\ln(1+t)dt+0=(1+x)\ln(1+x)-x。$$

又$S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}[(1+x)\ln(1+x)-x]=2\ln 2-1$，

$S(-1)=\lim_{x\to -1^+}S(x)=\lim_{x\to -1^+}[(1+x)\ln(1+x)-x]=1$。

所以$S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)-x, & -1<x\le 1,\\ 1, & x=-1\end{cases}$ ……………………………4 分

三、分析判断题（共 28 分）

1. 判断下列反常积分的敛散性（每小题 4 分，共 8 分）：

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}+1}dx$

解：当$x\ge 1$时，$0<\frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}+1}<\frac{\sqrt{x}}{x^2}=x^{-\frac{3}{2}}$。又$\int_1^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx$ 收敛，故由比较判别法知，

$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}+1}dx$ 收敛。…………………………………………4 分

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x+\cos x}dx$

解：因为当 $x\ge 1$ 时，$[\frac{1}{x+\cos x}]'=\frac{-(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2}\le 0$，故 $\frac{1}{x+\cos x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少。易见 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\cos x}=0$。又 $\forall A\in[1,+\infty),\left|\int_1^A\sin xdx\right|=|\cos 1-\cos A|\le 2$，故由 Dirichlet 判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x+\cos x}dx$ 收敛 ……………………………………………… 4 分

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分，共 20 分）：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(3+\frac{1}{n})^n}$

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n}{(3+\frac{1}{n})^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1$，故由 Cauchy 判别法知，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(3+\frac{1}{n})^n}$ 收敛 ……………………………………………… 5 分

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{n!(n+2)}$

解：令 $x_n=\frac{n^{n+1}}{n!(n+2)}$。由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!(n+3)}\cdot\frac{n!(n+2)}{n^{n+1}}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{n+2}{n+3}(1+\frac{1}{n})^{n+1}]=e>1,$$

故由达朗贝尔判别法知，原级数发散。……………………………… 5 分

（3）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

解：首先此级数为交错级数，又数列 $\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}(n\ge 2)$ 单调减少且趋于 0，故此级数为 Leibniz 级数，所以它收敛。……………………………………………… 5 分

（4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^2$

解：当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[n]{2}-1=e^{\frac{\ln 2}{n}}-1\sim\frac{\ln 2}{n}$，$(\sqrt[n]{2}-1)^2\sim(\frac{\ln 2}{n})^2$。又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{\ln 2}{n})^2$ 收敛，故由比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^2$ 收敛。……………………………… 5 分

四、证明题（每题 6 分，共 12 分）

1. 证明函数列 $\{S_n(x)\}=\left\{\dfrac{nx^{\frac{1}{n}}}{n+1}\right\}$ **在** $(0,1]$ **上点态收敛于** $S(x)\equiv 1$**，但在** $(0,1]$ **上非一致收敛。**

证明：（1）因为 $\forall x\in(0,1]$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx^{\frac{1}{n}}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=1$，

故 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,1]$ 上点态收敛于 $S(x)\equiv 1$ …………………………… 3 分

（2）取 $x_n=\dfrac{1}{n^n}$，$n=1,2,\cdots$，则数列 $\{x_n\}\subset(0,1]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|S_n(x_n)-S(x_n)\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n\frac{1}{n}}{n+1}-1\right|=1>0$，

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,1]$ 上非一致收敛 …………………………………… 3 分

2. 设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上有一阶连续导数，且** $f(a)=f(b)=0$**，证明：**

（1） $\forall x\in[a,b]$， $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$；

（2） $\int_a^b f^2(x)dx\ \le\dfrac{(b-a)^2}{8}\int_a^b[f'(x)]^2dx$ 。

证明：（1） $\forall x\in[a,b]$， $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$， $f(x)=-\int_x^b f'(t)dt$，故有

$$|f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt，\ |f(x)|\le\int_x^b|f'(t)|dt，$$

进而可知 $2|f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt+\int_x^b|f'(t)|dt=\int_a^b|f'(t)|dt$ ，$|f(x)|\le\dfrac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$ …… 3 分

（2）由（1）的证明知，当 $x\in[a,\frac{a+b}{2}]$ 时， $|f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt$，

$$|f(x)|^2\le[\int_a^x|f'(t)|dt]^2\le\int_a^x 1^2dt\cdot\int_a^x[f'(t)]^2dt\le(x-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f'(t)]^2dt\ 。$$

类似地，利用（1）的证明，当 $x\in[\frac{a+b}{2},b]$ 时， $|f(x)|\le\int_x^b|f'(t)|dt$，

$$|f(x)|^2\le[\int_x^b|f'(t)|dt]^2\le\int_x^b 1^2dt\cdot\int_x^b[f'(t)]^2dt\le(b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f'(t)]^2dt\ 。$$

所以 $\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f^2(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)dx$

$$\le\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left\{(x-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f'(t)]^2dt\right\}dx++\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left\{(b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f'(t)]^2dt\right\}dx$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f'(t)]^2dt+\frac{(b-a)^2}{8}\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f'(t)]^2dt=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b[f'(x)]^2dx$$ …… 3 分