

安徽大学 2014—2015 学年第二学期

《数学分析 (中)》考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题 3 分, 共 12 分)

得 分	
-----	--

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ 的值为_____;
2. 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 且 $f(x) = \ln x - \int_1^2 f(x) dx$, 则 $\int_1^2 f(x) dx$ 的值为_____;
3. 心形线 $r = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ 所围成的图形的面积为_____;
4. 设 $x_n = \sqrt[n]{n+2} + (-1)^{n+1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____。

二、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

得 分	
-----	--

计算下列积分:

(1) $\int x^2 \cos x dx$

(2) $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$.

$$(3) \quad \int_0^1 x(1-3x^2)^3 dx$$

$$(4) \quad \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$$

三、讨论题（共 28 分）

得分	
----	--

1. 判断下列级数的敛散性（每小题 6 分，共 18 分）

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[\sqrt{3} + (-1)^n]^n}{3^n}$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 2015}$$

2. 判别下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 5 分，共 10 分）

(1)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x^2} dx \quad ;$$

$$(2) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + \ln x} dx ;$$

四、求解题（共 20 分）

得 分	
-----	--

求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ 的收敛半径、收敛域及和函数。

五、证明题（第 1 题 6 分，第 2 题 4 分，共 10 分）

得分	
----	--

1. (1) 设 $u_n(x) (n=1,2,\dots)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 发散, 证明:

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上不一致收敛;

(2) 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 但不是一致收敛。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续且单调减少, 证明: 对于 $0 < \alpha < \beta < 1$, 有

$$\int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \frac{\alpha}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$