院/系 ________ 年级 ________ 专业 ________ 姓名 ________ 学号 ________

答题勿超装订线

安徽大学 2024 – 2025 学年第一学期
《高等代数 (上)》期末考试试卷 (B 卷)

(闭卷, 时间 120 分钟)

考场登记表序号 ______________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题 (每空 2 分, 共 10 分)

得分

1. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是线性空间 V 的一个基, $\eta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_4 = \varepsilon_4$. 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, -2)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标为 $\underline{(1, 1, -3, -1)}$.

2. 已知 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

记 A_{ij} 为 D 中 (i, j) 位置元素的代数余子式. 则 $A_{44} + A_{45} = \underline{\ 18\ }$.

3. 若一个 n 阶行列式 $(n > 1)$ 中元素或为 1 或为 -1, 则该行列式的值必为 $\underline{偶数}$. (填" 奇数" 或者" 偶数")

4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶上三角矩阵按照矩阵的加法和数乘构成的线性空间, 则线性空间 V 的维数为 $\underline{\frac{n(n+1)}{2}}$.

5. 设 A 为三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $|A| = 1/2$, 则 $|(4A)^{-1} - 2A^*| = \underline{-\frac{27}{32}}$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

得分

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $AB = O$ 且 $B \neq O$, 则必有 (D)

   A. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ B. $|B| \neq 0$

   C. $|B| = 0$ D. $|A| = 0$

7. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, I_n 为 n 阶单位矩阵. 若 $B = I_n + AB$, $C = A + CA$, 则 $B - C$ 等于 (A)

   A. I_n B. $2I_n$ C. $-I_n$ D. $-2I_n$

8. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同解, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其导出组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则下列是方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 通解的是 (B)

   A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \frac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$ B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$

   C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \frac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$ D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2) + \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$

9. 下列说法错误的是 (C)

   A. 行列式 A 的第 (i, j) 元素的代数余子式等于其余子式乘以 $(-1)^{i+j}$

   B. 将行列式 $|A|$ 的第一行元素都乘以 2, 第二行元素都乘以 1/2, 行列式值不变

   C. 行列式转置后的值等于原行列式值的相反数

   D. 将行列式的第一行和第二行对换, 再将第一列和第二列对换, 其值不变

10. 设 A, B 为 n 阶方阵, $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 C^* 等于 (C)

   A. $\begin{pmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} |A||B|A^* & O \\ O & |A||B|B^* \end{pmatrix}$

三、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

得分

11. 计算 $n - 1$ $(n \geq 2)$ 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 2^2 - 2 & 2^3 - 2 & \cdots & 2^n - 2 \\ 3^2 - 3 & 3^3 - 3 & \cdots & 3^n - 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 - n & n^3 - n & \cdots & n^n - n \end{vmatrix}.$$

解答 加边法.

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&2^2-2&2^3-2&\cdots&2^n-2\\0&3^2-3&3^3-3&\cdots&3^n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&n^2-n&n^3-n&\cdots&n^n-n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}$$

$$=n!\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}i!.$$

□

12. 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0,\\9x_1-x_2+14x_3+2x_4=1,\\3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=1,\\4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=2\end{cases}$$

的通解及其导出组的一个基础解系.

解答 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为行阶梯形:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3&2&0\\9&-1&14&2&1\\3&2&5&-4&1\\4&5&7&-10&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&-6&1\\9&-1&14&2&1\\3&2&5&-4&1\\4&5&7&-10&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&-6&1\\0&7&1&-14&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

- $\eta=(1/7,2/7,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个特解.
- 方程组的导出组同解于

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3-6x_4=0,\\7x_2+x_3-14x_4=0.\end{cases}$$

分别另 $(x_3,x_4)=(1,0)$ 和 $(x_3,x_4)=(0,1)$ 可得上述齐次方程组的基础解系为

$$\xi_1=\Big(-\frac{11}{7},-\frac{1}{7},1,0\Big)^{\mathrm{T}},\quad \xi_2=(0,2,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

- 所以原方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\Big(\frac{1}{7},\frac{2}{7},0,0\Big)^{\mathrm{T}}+k_1\Big(-\frac{11}{7},-\frac{1}{7},1,0\Big)^{\mathrm{T}}+k_2(0,2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

□

13. 已知三维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$; (II): $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 求 (II) 到 (I) 的过渡矩阵;

(2) 已知向量 α 在 (I) 下的坐标为 $(1,3,-2)$, 求 α 在 (II) 下的坐标.

解答 (1) 注意到, $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

所以 (II) 到 (I) 的过渡矩阵是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\1/2&-1&2\\1/2&0&1\end{pmatrix}.$$

(2) 由 (1) 可得

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)A^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1/2\\-13/2\\-3/2\end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 (II) 下的坐标为 $(1/2,-13/2,-3/2)$.

□

14. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3,2,1)$ 生成的子空间为 V_1; 由 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7)$ 生成的子空间为 V_2. 求 V_1+V_2 的一个基.

解答 因为

$$V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一个极大无关组就是 V_1+V_2 的一个基. 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}})$ 作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&2&1\\2&1&3&-1&-1\\1&1&2&0&3\\0&1&1&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&1&0&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 是 V_1+V_2 的一个基.

□

院/系 ________ 年级 ________ 专业 ________ 姓名 ________ 学号 ________

答题勿超装订线

四、证明题 (每小题 10 分, 共 30 分)

得分

15. 设 n 阶可逆矩阵 A 的每行元素之和均为 a, k 为任意正整数. 证明:

(1) $A(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}=a(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) A^k 的每行元素之和均为 a^k.

证明 (1) 略.

(2) 利用数学归纳法可以证明: $A^k(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}=a^k(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$.

$\square$

16. 设 A,B 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个 n 阶矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-BA)-n.$$

证明 利用分块初等变换, 得

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & A-ABA \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & BA \\ O & A-ABA \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n & BA \\ A & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n-BA & BA \\ O & A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I_n-BA & O \\ O & A \end{pmatrix}.$$

所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & A-ABA \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n-BA & O \\ O & A \end{pmatrix},$$

即 $n+\operatorname{rank}(A-ABA)=\operatorname{rank}(I_n-BA)+\operatorname{rank}(A)$.

$\square$

17. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性空间 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{\varphi}^2=I$, 但 $\boldsymbol{\varphi}$ 本身不是恒等映射 I. 令

$$U=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\},\quad W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})=-\boldsymbol{\alpha}\}.$$

证明: $V=U\oplus W$.

证明 容易验证 U 和 W 都是 V 的子空间. 注意到, 显然有 $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$. 因此只需要证明 $V=U+W$ 即可.

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 令

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})}{2},\quad \boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})}{2},$$

则由 $\varphi^2=I$ 易知 $\varphi(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}$, 即 $\boldsymbol{\beta}\in U$; $\varphi(\gamma)=-\gamma$, 即 $\gamma\in W$. 故 $V=U+W$.

$\square$

五、论述题 (共 5 分, 开放式回答, 无标准答案)

得分

18. 请谈谈你对线性无关、线性相关的理解和认识.