安徽大学 2024—2025 学年第一学期《数学分析（上）》参考答案

一、（6 分）用定义证明：函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

证明：$\forall\varepsilon>0,$ 取 $\delta=\varepsilon,$ 则对任意 $x_1,x_2\in[1,+\infty),$ 只要 $|x_1-x_2|<\delta,$ 就有

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|=2\left|\sin\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\cos\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right|\le\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|\le|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon,$$ 故 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

二、计算下列极限（**每小题** 6 **分**，共 36 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\tan\dfrac{1}{n-1}-\tan\dfrac{1}{n+1}\right).$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\tan'(\xi_n)\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2-1}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\xi_n}=2\cdot1=2.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+2\sin\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+2\sin\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot2\sin\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^2.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin(2\pi n!\mathrm{e}).$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_n}{(n+2)!}\right)\right)(0<\theta_n<3)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_n}{(n+1)(n+2)}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)=2\pi.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\mathrm{e}^{-x}.$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x\cdot\ln(\cos x)}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin x+x\cos x+\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3\cos x-x\sin x}=\dfrac{4}{3}.$

注：以上解答方法不唯一.

三、 计算与求解（每小题 7 分，共 21 分）

1．设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

解：由条件得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3,$ 首先由

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

且 $f'(0)=0.$ （3 分）

由 Taylor 公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$ 代入

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$ 得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+(1+\tfrac{1}{2}f''(0))x+o(x)\right)$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\frac{1}{2}f''(0))x+o(x)}{x}=1+\frac{1}{2}f''(0),$ 故 $f''(0)=4.$（7 分）

综合得：$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=4$.

2．设函数 $y=y(x)$ 由关系式 $\sin(xy)+y=x$ 确定，求 $y'(0)$ 和 $y''(0).$

解：方程两边对 x 求导得 $\cos(xy)\cdot(y+xy')+y'=1\Rightarrow y'=\dfrac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}$（3 分）

$$\Rightarrow y''=\frac{\left[y\cdot\sin(xy)\cdot(y+xy')-y'\cos(xy)\right]\left(x\cos(xy)+1\right)-\left(1-y\cos(xy)\right)\cdot\left(\cos(xy)-x\sin(xy)\cdot(y+xy')\right)}{\left(x\cos(xy)+1\right)^2}$$

（5 分）

注意到 $y(0)=0,$ 代入 $x=0,$ 得 $y'(0)=1, y''(0)=-2.$（7 分）

3．求常数 a,b 使 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\ge 0\\ a\sin x+b, & x<0\end{cases}$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上可导，并求 $f'(0).$

解：由 $f(x)$ 连续得 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=f(0)=1=b$；（2 分）

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{a\sin(\Delta x)+b-1}{\Delta x}=a,$ 由可导性知 $f_+'(0)=f_-'(0)\Rightarrow a=1.$（6 分）

故 $a=1, b=1.$ 且此时 $f'(0)=1.$（7 分）

四、分析与证明题(共 37 分).

1．（7 分）$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)=2,\ f(2)=1,$ 证明：存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f'(\xi)=0.$

证明：由于$\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$介于$f(0)$与$f(1)$之间，故由连续函数介值定理知，存在$\eta\in[0,1]$使得$f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}=1=f(2)$.（3 分）

再在$[\eta,2]$上由 Rolle 中值定理即知，存在$\xi\in(\eta,2)\subset(0,2)$使得$f'(\xi)=0$.（7 分）

2. （8 分）设$0<p<1,$证明：不等式$\left|x^p-y^p\right|\le\left|x-y\right|^p$对任意$x,y\ge 0$成立.

证明：不妨设$x\ge y,$则

$\left|x^p-y^p\right|\le\left|x-y\right|^p\Leftrightarrow x^p-y^p\le(x-y)^p\Leftrightarrow 1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^p\le\left(1-\dfrac{y}{x}\right)^p\Leftrightarrow 1-t^p\le(1-t)^p$对任意$t\in[0,1]$成立.（3 分）

令$f(t)=1-t^p-(1-t)^p$, 则$f(0)=f(1)=0$且由

$f'(t)=-pt^{p-1}+p(1-t)^{p-1}=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$, 以及$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^p<0$知$\max\limits_{t\in[0,1]}f(t)=0$, 即

$f(t)=1-t^p-(1-t)^p\le 0$. 故原不等式成立.（8 分）

3. （6 分）设$f(x)$是定义在$[0,+\infty)$上的凸函数，二阶可导且有上界. 证明：$f(x)$单调递减.

证明：反证. 若$f(x)$非单调递减，则存在$\exists 0\le x_1<x_2$, s.t $f(x_1)<f(x_2)$.（2 分）

由$f(x)$凸且二阶可导知$f''(x)\ge 0$, 故$f'(x)$单调增. 于是对任意$x>x_2$有

$f(x)-f(x_2)=f'(\xi)(x-x_2)\ge\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)$（4 分）

$\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)+f(x_2)\to+\infty,\ x\to+\infty$. 这与$f(x)$有上界矛盾. 故$f(x)$单调递减.（6 分）

4. （8 分）设数列$\{a_n\}$由$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}(n\geqslant 1)$定义，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$存在并求此极限.

证明：首先由$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$知$\{a_n\}$单调增. 若$\{a_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在，在等式$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$两边令$n\to\infty$得$a=a+\dfrac{1}{a}\Rightarrow a$无解，矛盾. 故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.（4 分）

由 Stolz 定理有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}^2-a_n^2}{n+1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{a_n^2}\right)=2$,（7 分）

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$. （8 分）

5. （8 分）设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)$, $\left|f''(x)\right|\le 2(\forall x\in[0,1])$. 证明：$\left|f'(x)\right|\le 1$.

证明：$\forall x,y\in[0,1],\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2$.（2 分）

分别代入 $y=0,1$ 代入有 $\begin{cases} f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}x^2 \\ f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2 \end{cases}$ ，两式相减得：

$f'(x)=\dfrac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$.（5 分）

故 $|f'(x)|\le\left|\dfrac{f''(\xi_1)}{2}\right|x^2+\left|\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\right|(1-x)^2\le x^2+(1-x)^2=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\le 1,\ x\in[0,1].$ (8 分）