

学号

姓名

专业

年级

院/系

线  
订  
装  
超  
勿  
题  
答

# 安徽大学2015-2016学年第二学期 《高等代数（下）》考试试卷（A卷）

（闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

## 一、填空题（每小题4分，共20分）

得分	
----	--

1. 设欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的内积定义为 $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$ ，其中 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ ，则向量 $(1, -1, 1)$ 的长度为\_\_\_\_\_.
2. 设矩阵 $A$ 的初等因子组为 $(\lambda + 1)$ ,  $(\lambda - 2)^2$ ,  $(\lambda - 2)^4$ ,  $(\lambda + 2)$ ,  $(\lambda + 2)^3$ ，则 $A$ 的极小多项式为\_\_\_\_\_.
3. 设多项式 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ . 则 $f(x)$ 的有理根为\_\_\_\_\_.
4. 设 $A$ 为4阶实对称矩阵，且 $A$ 的特征值为 $-3, -1, 0, 2$ . 则 $xI_4 + A$ 为正定矩阵的充分必要条件是\_\_\_\_\_.
5. 已知3阶矩阵 $A$ 的特征值为 $1, -1, 0$ . 设 $f(x) = x^2 - 2x$ ,  $B = f(A)$ ，则 $B$ 的特征值为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题（每小题3分，共15分）

得分	
----	--

6. 设 $\mathbb{F}$ 为数域， $p(x), f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ，且 $p(x)$ 为不可约多项式，则下列说法不正确的是  
( )
  - (A) 若 $p(x) \mid f^k(x)$ ,  $k \geq 2$ ，则 $p(x) \mid f(x)$ .
  - (B) 若 $p(x)$ 的次数大于1，则 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中无根.
  - (C)  $(p(x), f(x)) = 1$ ，或者 $(p(x), f(x)) = p(x)$ .
  - (D)  $p'(x)$ 也是不可约多项式.

7. 设 $A$ 为 $n$ 阶正交阵. 则下列说法**不正确**的是 ( )
- (A) 若 $n$ 为奇数, 则 $A$ 必有实特征向量. (B)  $A$ 的实特征值只能是1或者-1.
- (C) 若复数 $a + bi$ 为 $A$ 的特征值, 则 $a^2 + b^2 = 1$ . (D) 若 $n$ 为偶数, 则 $A$ 没有实特征向量.
8. 设 $\mathcal{A}$ 为复线性空间 $V$ 上的线性变换. 则**不能**作为 $\mathcal{A}$ 可对角化等价条件的是 ( )
- (A)  $\mathcal{A}$ 的每个根子空间的维数都等于对应特征值的几何重数.
- (B)  $\mathcal{A}$ 的极小多项式的根都是单根.
- (C)  $\mathcal{A}$ 的特征多项式的根都是单根.
- (D)  $\mathcal{A}$ 的初等因子都是一次因式.
9. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$ , 其中 $A_1$ 为 $n-1$ 阶实对称阵,  $\alpha$ 为 $n-1$ 维实列向量. 则 $A$ 为正定阵的充分必要条件是 ( )
- (A)  $A$ 的正惯性指数等于 $A$ 的秩. (B)  $A$ 的所有特征值都是非负数.
- (C)  $A_1$ 为正定阵, 且 $|A| > 0$ . (D)  $A_1$ 为正定阵, 且 $a_{nn} > 0$ .
10. 设 $A, B$ 均为 $n$ 阶实对称矩阵, 且 $A$ 与 $B$ 合同, 则 $A$ 与 $B$ 有相同的 ( )
- (A) 行列式的符号. (B) 特征值. (C) 迹. (D) 各阶顺序主子式.

### 三、计算题 (每小题10分, 共40分)

得分	
----	--

11. 设 $f(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 1$ ,  $g(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ . 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$ .

12. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的Jordan标准形.

13. 设  $\mathbb{F}^{2 \times 2}$  为  $\mathbb{F}$  上全体  $2 \times 2$  矩阵构成的线性空间. 对于任意  $A, B \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ , 定义双线性函数  $f(A, B) = \text{trace}(A^T B)$ . 求  $f$  在基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的度量矩阵, 其中  $E_{ij}$  为  $(i, j)$  位置为1, 其余位置为0的  $2 \times 2$  矩阵.

14. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . 求正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q$  为对角阵.

四、证明题(第15题10分, 第16题15分, 共25分)

得分	
----	--

15. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为欧氏空间 $V$ 上线性变换, 且对任意 $\alpha, \beta \in V$ ,  $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{B}(\beta))$ .  
 证明: 若 $W$ 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 则 $W$ 的正交补 $W^\perp$ 为 $\mathcal{B}$ 的不变子空间.

16. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2 = A$ . 证明:

(1)  $A$ 的特征值只能是1或0;

(2)  $A$ 可对角化;

(3)  $\text{trace}(A) = \text{rank}(A)$ .