安徽大学 2021—2022 学年第 1 学期

《高等代数（上）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三、1	三、2	三、3	总分
得 分						
阅卷人						

得分	

一、填空题（每空 4 分，共 32 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

1. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$A^{-1}=\begin{bmatrix}&&&&\\&&&&\\&&&&\end{bmatrix}$，$A^{10}=\begin{bmatrix}&&&&\\&&&&\\&&&&\end{bmatrix}$，$A^TA=\begin{bmatrix}&&&&\\&&&&\\&&&&\end{bmatrix}$，
   行列式$|A^T+A|=$________，$\mathrm{rank}(A^T-A)=$________。
2. 设V是数域F上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in V$线性无关，$U$是$\{\alpha_i-\alpha_j|1\le i<j\le 4\}$生成的子空间，$W$是$\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1\}$生成的子空间，则
   $\dim(U)=$________，$\dim(W)=$________，$\dim(U\cap W)=$________。

得分	

二、简答题（每问 5 分，共 20 分）判断叙述是否正确并简要说明理由。

设A,B都是数域F上的n阶方阵，U,V分别是数域F上的m,n维线性空间。

1. 若$A^2=B^2$，则$A=B$或$A=-B$。
2. 线性方程组$Ax=0$与$Bx=0$的解集相同当且仅当A与B相抵
3. 若V中两个向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$与$\beta_1,\cdots,\beta_k$等价，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是线性相关的当且仅当$\beta_1,\cdots,\beta_k$是线性相关的。
4. 设线性映射$\varphi: U\to V$，则商空间$V/\mathrm{Im}\varphi$与 $\mathrm{Ker}\varphi$同构。

三、解答题（每小题 16 分，共 48 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

得分	

1. 设n阶实方阵$A=(a_{ij})$，其中$n\ge 2$，$a_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ \frac{i}{j}, & i\ne j\end{cases}$，$1\le i,j\le n$。

   证明A可逆，并求$|A|$和A^{-1}。

得分	

2. 设数域F上的线性空间$V=\{ax^2+bx+c|a,b,c\in F\}$，$x$是未定元。
   设$f_k=(x-k)^2$，$g_k=(x+k)^2$，$k=1,2,3$。
   证明f_1,f_2,f_3和g_1,g_2,g_3都是V的基，并求从f_1,f_2,f_3到g_1,g_2,g_3的过渡矩阵。

得分	

3. 设数域F上的线性空间$V=F^{n\times n}$，$V\to V$的线性映射$\varphi(X)=X+X^T$。
   求 $\mathrm{Im}\varphi$和 $\mathrm{Ker}\varphi$的维数，并证明$V=\mathrm{Im}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\varphi$。