安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等代数(上)》考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线　　装　订　线

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

得　分	

1. 设 3 阶方阵 $A=(2\alpha_1,\alpha_2,\beta)$，$B=\left(3\alpha_1,2\alpha_2,\gamma\right)$，其中 α_1，α_2，β，γ 为三维列向量，若 $|A|=6,\left|B\right|=6,$，则 $|A-B|=$ __________________.

2. 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的解向量，已知 $\alpha_1=(2,0,5,-1)$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,9,8,8)$，则该方程组的通解为______________________.

3. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，且记 D 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式分别记作 M_{ij} 和 A_{ij}，则 $A_{31}-3M_{32}-2A_{33}-2M_{34}=$____________.

4. 对于任意 $\alpha=(x_1,x_2)\in\mathrm{R}^2$，定义线性映射 $\varphi:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^3,\varphi(\alpha)\mapsto(x_1,x_1-x_2,x_1+x_2)$，则映射 φ 在基 $\varepsilon_1'=(1,0),\varepsilon_2'=(1,1)$ 和基 $\eta_1'=(1,0,0),\eta_2'=(1,1,0),\eta_3'=(1,1,1)$ 下的表示矩阵为

__________________.

5. 向量 $(2,3,4)$ 在基 $\varepsilon_1=(1,1,1),\ \varepsilon_2=(0,1,1),\ \varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的坐标为________________.

二. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得　分	

6. 设A，B 均是n 阶方阵，I 为n阶单位阵，以下论断**正确**的是（　　）.

A. 若 $AB=0$，则 $A=0$或 $B=0$.

B. 若 $AC=BC$ ，且$C\neq 0$，则 $A=B$.

C. 若 $AB=I$，则秩$(A)=$秩(B).

D.若 $A^2B=AB$，则 $A=0$或 $A=I$.

7. 设齐次线性方程组$AX=0$是线性方程组$AX=b$的导出组,下列命题**不正确**的是（　　）.

A. 若 $AX=0$ 仅有零解，则 $AX=b$有唯一解.

B. 若 $AX=b$ 有唯一解，则 $AX=0$仅有零解.

C. 若η是 $AX=0$的通解，X_0是 $AX=b$的特解，则$\eta+X_0$是 $AX=b$的通解.

D. 若 X_1,X_2是 $AX=b$的解，则 X_1-X_2是 $AX=0$的解.

8. 若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，则（　　　）

A．当$r<s$时，则向量组 I 线性相关.

B．当$r>s$时，则向量组 I 线性相关.

C．当$r<s$时，则向量组 I 线性无关.

D．当$r>s$时，则向量组 I 线性无关.

9. 设V_1,V_2都是V 的子空间，和V_1+V_2是直和，　则下列命题中**错误**的是（　　　）

A．和V_2+V_1是直和.

B．$V_1\bigcap V_2=\{0\}$.

C．V 中任意一个向量α在V_1+V_2上均可以唯一地表示为$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

D．$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

10．下列说法**正确**的是：（　　　）

A．任意方阵均可写成一些初等矩阵的乘积形式.

B．方阵的初等变换不改变矩阵的行列式.

C．初等矩阵的逆矩阵仍为本身.

D．可逆矩阵可仅通过初等行变换转化为单位矩阵.

三. 计算题（每小题 10 分，共 40 分）

得　分	

11. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & a \end{vmatrix} (x \neq y).$$

12. 当a,b取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=0 \\ -x_1+4x_2-5x_3=a \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \\ -x_1+2x_2+(b-2)x_3=-1 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多解？当方程组有无穷多解时，求其全部解.

13. 设向量组$\alpha_1=(1,2,1,3)$，$\alpha_2=(1,1,-1,1)$，$\alpha_3=(1,3,3,5)$，$\alpha_4=(4,5,-2,6)$，$\alpha_5=(-3,-5,-1,-7)$.
求该向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用所求极大线性无关组线性表示.

14. 设σ为V到W的线性映射，其中V为 5 维线性空间且$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$为$V$的一个基，$W$为 4 维线性空间且$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$为$W$的一个基. σ在这两个基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -12 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

求$\mathrm{Ker}\sigma$与$\mathrm{Im}\sigma$及其它们的维数.

得　分	

四. 证明题（第 15 小题 10 分，第 16 小题 15 分，共 25 分）

15. 证明：如果 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n\geq 2)$， A^* 为 A 的伴随矩阵，那么

$$\text{秩}\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & \text{当秩}(A)=n, \\ 1, & \text{当秩}(A)=n-1, \\ 0, & \text{当秩}(A)<n-1. \end{cases}$$

16. 设 V_1,V_2 是数域 F 上线性空间 V 的子空间，证明维数公式

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim\left(V_1\bigcap V_2\right).$$