学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2009—2010 学年第二学期

《 数学分析（中） 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	总　分
得　分						
阅卷人						

得 分	

一、填空题（每空 5 分，共 15 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$ 的值为＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 x=1 点的幂级数展开为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

3. 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}\sqrt{1+x}}dx$ 收敛，则 α 的范围为＿＿＿＿＿＿＿

二、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

得 分	

1. 试求 $\int_1^3 \dfrac{1}{x+x^2}dx$.

2．试求 $\int_{-5}^{5}\dfrac{x^3\sin^2 x}{(x^4+2x^2+1)}dx$

3. 求积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

4．试求 $\int_0^1 |x-a| \cdot x dx$

三、应用题（11 分）

得 分	

求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 的一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长。

得 分	

四、讨论下列级数的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 5 分，共 15 分）

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

2. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ ， 其中 $x\in(0,\pi)$，$\alpha>0$

五、分析题（每小题 10 分，共 30 分）

得 分	

1． 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径、收敛域及和函数.

2． 问参数 α 取什么值时，函数序列

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}，\ n=1, 2, 3,\ldots$$

在[0,1]上

(i)一致收敛

(ii)可以在积分号下取极限，即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx\,.$$

3．确定函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x}$ 的定义域及其在定义域上的连续性和可微性。

得 分	

六、证明题（5 分）

证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx = 0$，则在 $[a,b]$ 内至少存在两点 x_1, x_2，使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.