安徽大学 2016-2017 学年第一学期

《数学分析(上)》期末考试试题（B卷）参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题4分，共16分)

1. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{3x^2+2x-1}-(ax+b)]=0$, 则$a=$ $\underline{\quad\sqrt{3}\quad}$, $b=$ $\underline{\quad\dfrac{\sqrt{3}}{3}\quad}$.

2. 设$S=\{x^2-x\mid 0<x<1\}$, 则S的最小值是 $\underline{\quad-\dfrac{1}{4}\quad}$, 上确界是$\underline{\quad 0\quad}$.

3. 曲线 $y=e^x-2x^2+5x-3$ 的拐点的横坐标是$\underline{\ 2\ln 2\ }$.

4. 设$\begin{cases} x &= a\cdot\sin t^2 \\ y &= b\cdot\cos t^2\end{cases}$, $0<t<\pi/2$. 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ $\underline{\quad-\dfrac{b}{a}\tan t^2\quad}$.

二、求以下数列的极限（本大题有4小题，共24分）

1. 解：$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+n^5}{5^{n+1}+(n+1)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{n^5}{5^n}}{5+\dfrac{(n+1)^5}{5^n}}\cdots\cdots 4分$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^5}{5^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{(n+1)^5}{5^n}\right)}=\frac{1}{5}\cdots\cdots 6分$$

2. 解：$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\ln n^k}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\cdot\ln(n\cdot\ln n^k)}\cdots\cdots 3分$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+\ln k+\ln(\ln n)}{n}}\cdots\cdots 5分$$

$$=e^0=1\cdots\cdots 6分$$

3.解：当n为奇数时,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\cdots 2分$$

当n 为偶数时,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$ ……4分

故原极限等于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$ ……6分

4. 解：显然$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^{\sqrt{2n}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{2n}}$ ……1分

因为 $\forall R$,当$n>\left(\frac{\ln R}{\ln\frac{3}{2}}\right)^2$ 时,有$\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{2n}}>R$……3分

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2n}}=\infty$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^{\sqrt{2n}}=\infty.$ ……6分

三、求以下函数的极限（本大题有4小题，共24分）

1.解：由二项式定理 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, 知

$$(1+mx)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^kx^k\ ,\ (1+nx)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^kx^k$$ ……2分

将之代入原式即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^kx^k-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^kx^k\right]=\lim_{x\to 0}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^kx^{k-2}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^kx^{k-2}\right]$$ ……5分

$$=\frac{mn(n-m)}{2}+\left[\sum_{k=3}^{n}\lim_{x\to 0}\binom{n}{k}m^kx^{k-2}+\sum_{k=3}^{m}\binom{m}{k}n^kx^{k-2}\right]=\frac{mn(n-m)}{2}.$$ ……6分

2.解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$ ……2分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{(\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$ ……5分

$$=-\frac{1}{2}$$ ……6分

3.解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{a+bx+cx^2}-\sqrt{a-bx+cx^2})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}+\sqrt{a-bx+cx^2}}$ ……2分

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2b}{\sqrt{\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c}+\sqrt{\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c}} \cdots\cdots 5分$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2b}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c}+\sqrt{\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c}\right)} = \frac{b}{\sqrt{c}} \cdots\cdots 6分$$

4.解：利用$Taylor$公式处理分子各项有,

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $x\cdot e^x = x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$

$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, $\left(1-\frac{6}{x}\right)\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-6+x^2-o(x^3) \cdots\cdots 4分$

由上知原式等于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\left(-6+x+x^2-\frac{x^3}{6}-o(x^3)\right)-6\right] \cdots\cdots 5分$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right] = \frac{2}{3} \cdots\cdots 6分$$

四、计算题（本大题有2小题，共12分）

1. 解：据题设条件知$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{2x^3+x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^3+x}}\cdot(6x^2+1) = \frac{e^{\sqrt{2x^3+x}}\cdot(6x^2+1)}{2\sqrt{2x^3+x}} \cdots\cdots 3 分$

因之, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(6x^2+1)e^{\sqrt{2x^3+x}}}{2\sqrt{2x^3+x}}\cdot\frac{(6x^2+1)}{2\sqrt{2x^3+x}}+\frac{12xe^{\sqrt{2x^3+x}}}{\sqrt{2x^3+x}}-\frac{(6x^2+1)^2}{2(2x^3+x)^{\frac{3}{2}}}\right] \cdots\cdots 5 分$

$$= \frac{(6x^2+1)^2\cdot e^{\sqrt{2x^3+x}}}{16x^3+8x}+\frac{12xe^{\sqrt{2x^3+x}}}{\sqrt{2x^3+x}}-\frac{(6x^2+1)^2}{2(2x^3+x)^{\frac{3}{2}}} \cdots\cdots 6 分$$

2.解：方程两边对 x 求导,得

$$y'\sec x+y\cdot\sec x\cdot\tan x-2xe^y-x^2\cdot e^y\cdot y' = 0 \cdots\cdots 4分$$

整理以上方程, $y'(\sec x-x^2\cdot e^y) = 2x\cdot e^y-y\cdot\sec x\cdot\tan x$

故而有 $\frac{dx}{dy} = y' = \frac{2x\cdot e^y-y\cdot\sec x\cdot\tan x}{\sec x-x^2\cdot e^y} \cdots\cdots 6分$

五、证明题（本大题有3小题，共24分）

1. 证明：由于f,g在$[a,b]$上连续,故而其亦在$[a,b]$上一致连续.

即$\forall\epsilon,\exists\delta_f,\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta_f,|f(x')-f(x'')|<\epsilon$

$\exists\delta_g,\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta_g,|g(x')-g(x'')|<\epsilon$ 4分

取$\delta=min\{\delta_f,\delta_g\}$,则当$|x'-x''|<\delta$时, ... 5分

$|[pf(x')+qg(x')]-[pf(x'')+qg(x'')]|=|p(f(x')-f(x''))+q(g(x')-g(x''))|$

$\leq p|f(x')-f(x'')|+q|(g(x')-g(x'')|<(p+q)\epsilon$ 7分

又因为 p 与 q 是给定的实数,故据定义知 $pf+qg$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 8分

2.证明：不妨设$\{x_n\}$单调递增，并记$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$ 1分

因为$\{x_{n_k}\}$仍为递增数列,所以$x_{n_k}\leq a\quad(k=1,2,\cdots)$ 2分

则对$\forall k$,有$k\leq n_k$,从而$x_k\leq x_{n_k}\leq a$ 4分

由此知对$\forall k$,有$x_k\leq a$,即$\{x_n\}$有上界a,由单调有界定理知$\{x_n\}$一定是收敛的 7分

同理可证$\{x_n\}$单调递减的情形 8分

3.证明：由已知条件, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, 知$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

又因为$f''(x)$存在. 故而$f(x)$在$x=0$处连续. 所以$f(0)=0$. 3分

再注意到$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ 5分

故据$Taylor$公式有, $\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+f''(\xi)\cdot\frac{x^2}{2}$ 7分

另据已知条件 $f''(x)<0$,故而$f(x)\leq x$ 8分