安徽大学 2018—2019 年第二学期

数学分析（中）期末试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一、计算题（共 39 分）

1. 计算下列不定积分（每小题 5 分）：

(1) $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}d\ln x = \ln|\ln x| + C$ ……………………………… 5 分

（2） $\int (2x+1)\ln(x+1)dx = \int \ln(x+1)d(x^2+x) = (x^2+x)\ln(x+1) - \int (x^2+x)\frac{1}{x+1}dx$

$= (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + C$ ……………………………… 5 分

（3） $\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}d(e^{2x}+1) = \frac{1}{2}(-2)\int xd(1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}$

$= -\frac{x}{\sqrt{1+e^{2x}}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\frac{x}{\sqrt{1+e^{2x}}} - \int \frac{de^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}}$

$= -\frac{x}{\sqrt{1+e^{2x}}} - \ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}\right| + C$ ……………………………… 5 分

2. 计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin x\cos x)dx = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2} + 1$ ……………………………… 6 分

（2） $\int_0^2 x^2|x-1|dx = \int_0^1 x^2(1-x)dx + \int_1^2 x^2(x-1)dx$

$= (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1 + (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2 = \frac{1}{12} + \frac{15}{4} - \frac{7}{3} = \frac{3}{2}$ ……………………………… 6 分

（3）令 $t = \arctan x$， $\int_0^1 \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\tan t}{(1+\tan^2 t)^2}\sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\tan t}{\sec^2 t}dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\sin 2t dt = -\frac{1}{4}t\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{1}{8}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}$ ……………………………… 6 分

（4）$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{1}{4x^2+4x+5}dx=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+1}d(x+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\cdot\arctan(x+\frac{1}{2})\Big|_{\frac{1}{2}}^{+\infty}=\frac{\pi}{16}$

..................................6 分

二、分析判断题（共 28 分）

1. 判断下列反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 4 分）：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan e^x}{2x^2+1}dx$；

解：因为当 $x\geq 1$时，$0\leq\frac{\arctan e^x}{2x^2+1}<\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x^2}$。又$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，故由比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan e^x}{2x^2+1}dx$ 收敛，从而$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan e^x}{2x^2+1}dx$ 收敛，且为绝对收敛。............. ....4 分

（2）$\int_1^{+\infty}\cos(x^2)dx$

解：首先$\int_1^{+\infty}\cos(x^2)dx=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos(x^2)}{x}dx$。由于 $\forall A\geq 1,\left|\int_1^A x\cos(x^2)dx\right|=\left|\frac{1}{2}\sin(x^2)\Big|_1^A\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\sin(A^2)-\sin 1\right|\leq 1$。又$\frac{1}{x}$ 在$[1,+\infty)$上单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，故由 Dirichlet 判别法知，$\int_1^{+\infty}\cos(x^2)dx$ 收敛。

当 $x\geq 1$时，$\left|\cos(x^2)\right|\geq\cos^2(x^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x^2\geq 0$。类似上面，由 Dirichlet 判别法易知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\cos 2x^2dx$ 收敛，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}dx$ 发散，故知$\int_1^{+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x^2)dx$ 发散，从而根据比较判别法，$\int_1^{+\infty}\left|\cos(x^2)\right|dx$ 发散，所以$\int_1^{+\infty}\cos(x^2)dx$ 条件收敛。..........................4 分

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分）：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(n+1)!}$；

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(n+2)!}\cdot\frac{n!(n+1)!}{n^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n+2}=0<1$，故由达朗贝尔判别法知，原级数收敛。...5 分

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{3n^2})$

解：因为当 $n\to\infty$时，$\ln(1+\frac{1}{3n^2})\sim\frac{1}{3n^2}$。又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2}$ 收敛，故由比较判别法知，原级数

收敛。…………………………………………………………5 分

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}$

解：此级数为交错级数。易见数列$\left\{\sin\frac{\pi}{n}\right\}$当$n\geq 2$时单调减少且趋于 0，因此此级数为 Leibniz 级数，所以收敛。…………………………5 分

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2+1}}$

解：由于$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2+1}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n}}{\sqrt[n]{n}}=e>1$，故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2+1}}$发散。……5 分

三、求解题（共 20 分）

1．求由曲线$y^2=4(x+1)$与$y^2=4(1-x)$所围成的图形的面积，以及此图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积。（8 分）

解：（1）题给的两曲线的交点是$(0,2),(0,-2)$，两曲线与 x 轴的交点是$(-1,0),(1,0)$，曲线所围成的图形在第一象限部分的面积$S_1=\int_0^1\sqrt{4(1-x)}dx=-2\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$，再由对称性可知，所求图形的面积$S=4S_1=4\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$。…………………………5 分

（2）先计算两曲线所围成的图形在第一象限部分绕x轴旋转所得旋转体的体积V_1：

$$V_1=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 4(1-x)dx=-2\pi(1-x)^2\Big|_0^1=2\pi，$$

于是根据对称性，所求旋转体的体积$V=2V_1=4\pi$。…………………………8 分

2．求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$的收敛半径、收敛域及和函数（12 分）。

解：（1）由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}(n+2)\right|}{\left|(-1)^{n}(n+1)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$，故其收敛半径为$R=1$……………4 分

（2）因为当$x=\pm1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$发散，故其收敛域为$(-1,1)$……………8 分

（3）令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$，则当$-1<x<1$时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)t^n)dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}=\frac{x}{1+x}，从而有$$

$$S(x)=(\int_0^x S(t)dt)'=(\frac{x}{1+x})'=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x\in(-1,1))$$ 。……………………………12 分

四、证明题（共 13 分）

1．证明函数列$\{S_n(x)\}=\left\{\frac{1}{1+x^n}\right\}$在$[\frac{3}{2},+\infty)$上一致收敛于$S(x)\equiv 0$．(7 分)

证明：由于$\forall x\in[\frac{3}{2},+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=0$，故函数列$\{S_n(x)\}$在$[\frac{3}{2},+\infty)$上点态收敛于$S(x)\equiv 0$。……………………………3 分

又$d_n=\sup\limits_{x\in[\frac{3}{2},+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup\limits_{x\in[\frac{3}{2},+\infty)}\frac{1}{1+x^n}=\frac{1}{1+(\frac{3}{2})^n}$，故有$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，所以$\{S_n(x)\}$在$[\frac{3}{2},+\infty)$上一致收敛于$S(x)\equiv 0$。……………………………7 分

2．设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}\ (0<x<+\infty)$，证明：

（1）函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛；

（2）$f(x)$在$(0,+\infty)$上有连续的导数。(6 分)

证明：(1) $\forall[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$，当$x\in[\alpha,\beta],n=1,2,\cdots$时，$\left|\frac{e^{-nx}}{n}\right|\le\frac{e^{-n\alpha}}{n}$。又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n\alpha}}{n}$收敛（因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{-n\alpha}}{n}}=e^{-\alpha}<1$），故由 Weierstrass 判别法知，函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，进而可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛。……………………………3 分

（2）因为：

①$\frac{e^{-nx}}{n^2}(n=1,2,\cdots)$在$(0,+\infty)$上有连续的导数；

②当$x\in(0,+\infty),n=1,2,\cdots$时，$\left|\frac{e^{-nx}}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$。又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}$在$(0,+\infty)$上一致收敛，当然点态收敛，$f(x)$即为它的和函数；

③由（1）知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{e^{-nx}}{n^2})'=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，设其和函数为$\sigma(x)$，则知$\sigma(x)$在$(0,+\infty)$上连续。

于是根据一致收敛的函数项级数的可导性定理，$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，$f'(x)=\sigma(x)$。又$\sigma(x)$在$(0,+\infty)$上连续，从而$f'(x)$在$(0,+\infty)$上连续，即$f(x)$在$(0,+\infty)$上有连续的导数。……………………………6 分