

安徽大学2020-2021学年第二学期《高等代数(下)》 期末考试(A卷)参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题4分, 共20分)

1. $(n+1)!$;

2. 0;

3. 0;

4.
$$\begin{cases} 0 & n \geq 3, \\ (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) & n = 2, \\ a_1 + b_1 & n = 1 \end{cases};$$

5. $-\frac{16}{27}$

二、计算题 (每小题10分, 共40分)

6.解: 法1. 原式 =
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 15 & 80 & 255 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 15 & 80 & 255 \end{vmatrix} \quad (4分)$$

=
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 15 & 50 & 210 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 50 & 210 \end{vmatrix} = 120. \quad (10分)$$

法2. 考虑范德蒙行列式
$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x \\ 1 & 4 & 9 & 16 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & x^3 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & x^4 \end{vmatrix}$$

= $12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (6分)

则原行列式即为 $D(x)$ 中 x^3 项系数的相反数, 故原行列式 = 120. (10分)

$$7. \text{解: 原式} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \quad (\text{所有列全加到第一列})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{第} i \text{行减第} i-1 \text{行})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (5 \text{分})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{所有列全加到第一列})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}. \quad (10 \text{分})$$

8. 解: 因为 $A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & f(a, b, c) \\ 0 & c^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 故 $a = \pm 1, c = \pm 1$. (4分)

当 $a = 1, c = 1$ 时, 则 $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $b = 0$.

同理, 若 $a = -1, c = -1$, 可得 $b = 0$.

当 $a = 1, c = -1$, 则对任意 b , 有 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 此时, b 可取任意值.

同理, 若 $a = -1, c = -1$, b 可取任意值. (10分)

9. 解: 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

因此当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 原方程有唯一解. (4分)

$$\text{此时 } D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

由Cramer法则,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{-(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)}, \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{1}{(\lambda + 2)}, \\ x_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)}. \end{aligned} \quad (10分)$$

10.证明: 假设 $\mathbb{R} \subsetneq P \subset \mathbb{C}$, 则存在 $a + bi \in P$, 其中 $b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$.

因此, $i = \frac{1}{b}(a + bi) - \frac{a}{b} \in P$ (5分)

于是, 对任意复数 $x + yi \in P, x, y \in \mathbb{R}$. 从而 $P = \mathbb{C}$ (10分)

11.证明: (用数学归纳法) 当 $n = 1, 2$ 时, 结论显然成立.

假设对于任意的 $1 \leq k \leq n - 1$, 有 $D_k = \cos n\alpha$.

则将 D_n 按最后一行展开可得

$$D_n = 2 \cos \alpha D_{n-1} - D_{n-2}. \dots\dots\dots (5分)$$

$$= 2 \cos \alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha. \dots\dots\dots (10分)$$

12.证明: 若 A 为 n 阶数量阵, 显然 A 与任意 n 阶方阵可交换. (2分)

设 $A = (a_{ij})$. 记 $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$. 则 $AD = (ja_{ij}), DA = (ia_{ij})$. 由 $AD = DA$ 可知, 对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$, 都有 $a_{ij} = 0$.

故 $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ (6分)

记 E_{ij} 为 (i, j) 位置元素为 1, 其余元素均为零的 n 阶矩阵. 则对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 有 $AE_{ij} = a_{ii}E_{ij}, E_{ij}A = a_{jj}E_{ij}$. 从而 $a_{ii} = a_{jj}$.

由此可知, A 为数量阵. (10分)

13. 证明: (1) 由 $A + B = AB$ 可得: $(A - I)(B - I) = I$. 故 $A - I, B - I$ 均可逆. (3分)

(2) 由 (1) 知 $A - I$ 与 $B - I$ 互逆. 故 $(B - I)(A - I) = I$. 从而 $BA = A + B = AB$. (6分)

(3) 由 $A + B = AB$ 可得: $(A - I)B = A$. 故 $B = (A - I)^{-1}A$.

$$\text{计算可得 } B = (A - I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (10分)$$