安徽大学2020-2021学年第一学期
《高等代数（上）》期末考试试卷（A卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

学号____________ 姓名____________ 专业____________ 年级____________ 院/系____________

答　题　勿　超　装　订　线

装　订　线

一、填空题 (每小题3分，共15分)

得分	

1. 设A是4阶方阵, 且行列式$|A| = -2.$, 则行列式$|4A^{-1} + A^*| =$ ____________.

2. 设A, B都是3阶方阵. 将A第3行的(-2)倍加到第2行得到矩阵A_1, 互换B的第1列与第2列得到第B_1. 已知$A_1B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则$AB =$ ____________________.

3. 设行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$, M_{ij}与A_{ij}分别为D中(i, j)位置元素的余子式和代数余子式. 则$-A_{24} - 2M_{34} - A_{44} =$ ____________________.

4. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$是线性空间$V$的一个基, $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\alpha_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\alpha_4 = \varepsilon_1$. 若向量α在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标为$(1, -1, 1, -1)$，则$\alpha$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下的坐标为____________________.

5. 设$\mathbb{F}^2$,$\mathbb{F}^3$分别是2维和3维行向量空间. 已知线性映射φ: $\mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^3$满足$\varphi((1, 1)) = (1, 0, 2)$, $\varphi((2, 1)) = (1, -1, 4)$, 则$\varphi((-3, 2)) =$ ____________.

二、选择题 (每小题2分，共10分)

得分	

6. n阶排列$n(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1$是偶排列的充分条件是 (　　)

   (A) n是奇数. (B) $n = 4k - 1$, 其中k为正整数.

   (C) n是偶数. (D) $n = 4k - 3$, 其中k为正整数.

7. 已知$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是$m\times n$矩阵A的列向量组，β是m维列向量. 则线性方程组$AX=\beta$有解的充分必要条件是 ( )

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关. (B) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta)$.
(C) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$的秩为$n$. (D) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关.

8. 设V是数域$\mathbb{F}$上所有n阶反对称矩阵按照矩阵加法和数乘构成的线性空间. 则$\mathbb{F}$- 线性空间V的维数为 ( )

(A) $\dfrac{n(n-1)}{2}$. (B) $\dfrac{n(n+1)}{2}$. (C) n^2-1. (D) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

9. 设A,B,C都是n阶可逆矩阵, O是n阶零矩阵. $M=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$, 则$M^{-1}=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ C^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} A^{-1} & C^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$.

10. 设$V_1,\cdots,V_s$都是线性空间V的子空间, $s\geq 3$, 则和$V_1+\cdots+V_s$是直和充分必要条件是 ( )

(A) $V=\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$. (B) 对任意$1\leq k\leq s-1$, $V_k\cap(\sum\limits_{i=k+1}^{s}V_i)=\{0\}$.
(C) $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s=\{0\}$ (D) 对任意$1\leq i\neq j\leq s$, $V_i\cap V_j=\{0\}$..

三、计算题 (每小题10分, 共40分)

得分	

11. 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2+a_2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$, 其中$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

答题勿超装订线

装 订 线

12. 设在4维行向量空间$\mathbb{F}^4$中, V_1是由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的子空间, V_2 是由β_1,β_2生成的子空间, 其中$\alpha_1=(1,-1,1,1)$, $\alpha_2=(-2,1,2,-1)$, $\alpha_3=(-4,3,0,-3)$, $\beta_1=(1,2,1,0)$, $\beta_2=(4,2,-2,1)$. 求V_1+V_2的一个基与维数, 以及$V_1\cap V_2$的维数.

13. 设$\mathbb{F}$是数域, V与W分别是3维和2维$\mathbb{F}$上线性空间, 且线性映射$\varphi\colon V\to W$在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 与W的基η_1,η_2下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$. 求$\varphi$在$V$的基$\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2-\varepsilon_3$和$W$的基$\eta_1,\eta_1+\eta_2$下的矩阵.

14. 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \qquad\quad - x_4+ x_5= -2 \\ 2x_1-5x_2-2x_3- x_4+2x_5= -1 \\ -3x_1+4x_2-4x_3+6x_4-2x_5= 10 \\ x_1-5x_2-6x_3+4x_4+3x_5= 3. \end{cases}$$

的通解及其导出组的一个基础解系.

答题勿超装订线

装……订……线

四、证明题(每小题10分, 共30分)

得分	

15. 设A是n阶方阵, 其中n为奇数, A^T为A的转置. 证明：齐次线性方程组$(A-A^T)X=0$必有非零解.

16. 设线性空间V中向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, β_1可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出, 且向量β_2不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出. 证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1+\beta_2$线性无关.

17. 设$\mathbb{F}$是数域, $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $m \le n$, 且AB 是可逆阵. 证明：

(1) A与B的秩都为m.

(2) BA的秩为m

五、论述题(共5分, 开放式回答，无标准答案)

得分	

18. 请简要谈谈你对本学期高等代数中印象最深刻的一个结论的理解.