安徽大学 2018—2019 年第二学期

数学分析（中）期末试卷（B 卷）参考答案及评分标准

一、计算题（共 39 分）

1. 计算下列不定积分（每小题 5 分）：

(1) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int \frac{1}{(\ln x)^2}d\ln x = -\frac{1}{\ln x}+C$ ....5 分

(2) $\int (x+1)e^{2x}dx = \int (x+1)d(\frac{e^{2x}}{2}) = \frac{e^{2x}}{2}(x+1)-\frac{1}{2}\int d(\frac{e^{2x}}{2})$

$= \frac{e^{2x}}{2}(x+1)-\frac{e^{2x}}{4}+C$ ....5 分

(3) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx-\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}de^x+\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}de^{-x}$

$= \ln(e^x+\sqrt{e^x-1})+\arcsin e^{-x}+C$ ....5 分

2. 计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x} = [\tan x-\sec x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2-\sqrt{2}$

....6 分

（2）$\int_{-2}^{2} \max(1,x^2,x^3)dx = \int_{-2}^{-1} x^2dx+\int_{-1}^{1} dx+\int_{1}^{2} x^3dx = \frac{97}{12}$ ....6 分

（3）$\int_{-1}^{1} \frac{x\sin^2 x}{(x^4+2x^2+1)}dx = 0$（其中被积函数是奇函数）.................6 分

（4）$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx = \lim_{A\to+\infty}(\ln x-\ln\sqrt{1+x^2})\,|_1^A = \ln\sqrt{2}$

...................................6 分

二、分析判断题（共 28 分）

1. 判断下列反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 4 分）：

（1）$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x|\sin x|+1}dx$；

解：$\dfrac{1}{1+x|\sin x|}\ge\dfrac{1}{1+x}$，又$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x}dx$发散，故由比较判别法知

$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x|\sin x|+1}dx$发散。............ ....4 分

（2）$\int_1^{+\infty}\sin(x^2)dx$

解：首先$\int_1^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{x\sin(x^2)}{x}dx$。由于$\forall A\ge 1,\left|\int_1^{A}x\sin(x^2)dx\right|=\left|(\dfrac{1}{2}\cos(x^2))\Big|_1^A\right|\le 1$。又$\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，故由 Dirichlet 判别法知，$\int_1^{+\infty}\sin(x^2)dx$收敛。

当$x\ge 1$时，$\left|\sin(x^2)\right|\ge\sin^2(x^2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x^2\ge 0$。类似上面，由 Dirichlet 判别法易知$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2}\cos 2x^2dx$收敛，而$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2}dx$发散，故知$\int_1^{+\infty}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x^2)dx$发散，从而根据比较判别法，$\int_1^{+\infty}\left|\sin(x^2)\right|dx$发散，所以$\int_1^{+\infty}\sin(x^2)dx$条件收敛。..........................4 分

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分）：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$；

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{n!})=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n=\dfrac{1}{e}<1$，故由达朗贝尔判别法知，
原级数收敛。..5 分

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{5^n}$

解：因为$0<\dfrac{\pi}{5^n}<\dfrac{\pi}{2}$，而$2^n\sin\dfrac{\pi}{5^n}<\pi(\dfrac{2}{5})^n$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi(\dfrac{2}{5})^n$收敛，由比较判别法知，原级数收敛。... 5 分

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(n+1)}{n}$

解：此级数为交错级数。易见数列$\left\{\dfrac{\ln(n+1)}{n}\right\}$单调减少且趋于 0, 因此此级数为 Leibniz 级数，所以收敛。............... ....5 分

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n!(\dfrac{3}{n})^n$

解：令$u_n=(-1)^{n-1}n!(\dfrac{3}{n})^n$，由于$\lim\limits_{x\to\infty}|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{3}{e}>1$。根据达朗贝尔公式性质可知，

如对应的正项级数发散，则原级数自身也发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n!(\frac{3}{n})^n$发散。....... ....5 分

三、求解题（共 20 分）

1. 求由曲线$y^2=4(x+1)$与$y^2=4(1-x)$所围成的图形的面积，以及此图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积。（8 分）

解：（1）题给的两曲线的交点是$(0,2),(0,-2)$，两曲线与 x 轴的交点是$(-1,0),(1,0)$，曲线所围成的图形在第一象限部分的面积$S_1=\int_0^1\sqrt{4(1-x)}dx=-2\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$，再由对称性可知，所求图形的面积$S=4S_1=4\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$。....................................5 分

（2）先计算两曲线所围成的图形在第一象限部分绕x轴旋转所得旋转体的体积V_1：

$$V_1=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 4(1-x)dx=-2\pi(1-x)^2\Big|_0^1=2\pi,$$

于是根据对称性，所求旋转体的体积$V=2V_1=4\pi$。............................8 分

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径、收敛域及和函数。（12 分）。

解：

（1）由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$，故其收敛半径为$R=1$。..............3 分

（2）因为当$x=\pm1$时，$|\frac{x^n}{n(n+1)}|\le\frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$收敛。因此收敛域为$[-1,1]$。................6 分

（3）令$g(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，

则$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$。故$g'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$，

进一步有$g(x)=\int_0^x g'(t)dt=\int_0^x-\ln(1-t)dt=(1-x)\ln(1-x)+x$。

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & 0<|x|\le1\\ 0, & x=0.\end{cases}$。..........................12 分

四、证明题（共 13 分）

1. 证明函数列$\{S_n(x)\}=\{\sqrt{n}xe^{-nx}\}$在$[0,1]$上一致收敛。(6 分)

证明：由于 $\forall x\in[0,1]$，$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}xe^{-nx}=0$，故函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上点态收敛于 $S(x)\equiv 0$。 ....3 分

又 $d_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=\max\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=S_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{\sqrt{ne}}$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $S(x)\equiv 0$....... ....6 分

2. （7 分）（1）设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 发散，证明：

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上不一致收敛；

（2）证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，但不是一致收敛。

证明：

(1)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致收敛，则

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}^+,\forall x\in(a,+\infty),|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$，由于 $u_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，令上式中 $x\to a$，则 $|u_{n+1}(a)+u_{n+2}(a)+\cdots+u_{n+p}(a)|<\varepsilon$，由级数收敛的柯西收敛准则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 收敛，因此与题意矛盾，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上不一致收敛。…....3 分

(2) $\forall 0<a<A<+\infty$，$ne^{-nx}\le ne^{-na}$，因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{ne^{-na}}=e^{-a}<1$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ne^{-na}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，

从而在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛。…..5 分

因为固定 $x\in(0,+\infty)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{-nx}=0$，取 $x_n=\frac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(ne^{-nx_n}-0)=+\infty$，

所以 ne^{-nx} 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛。............... 7 分