# 安徽大学2020-2021学年第一学期《高等代数(上)》期末考试(A卷)参考答案与评分标准

**一、填空题** (每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad -8 \quad}$. 2. $\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. 3. $\underline{\quad 0 \quad}$. 4. $\underline{\quad (0,1,0,1) \quad}$.

5. $\underline{\quad (2,5,-6) \quad}$.

**二、选择题** (每小题2分, 共10分)

6. D. 7. B. 8. A. 9. C. 10. B.

**三、计算题** (每小题10分, 共40分)

**11. 解:**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1+a_1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2+a_2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3分)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{a_i} & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right). \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10分)$$

**12. 解:** $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$. ................................(2分)

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&-2&-4&1&-4\\-1&1&3&2&2\\1&2&0&1&-2\\1&-1&-3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-4&1&-4\\0&1&1&3&6\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可知, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组。故$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为$V_1+V_2$的一组基, 从而$\dim(V_1+V_2)=3$. ........................................(7分)

又因为$\alpha_1,\alpha_2$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组, $\dim V_1=2$; $\beta_1,\beta_2$线性无关, $\dim V_2=2$.

于是$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=1$. ...............(10分)

**13. 解:** $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2)A$, 其中$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$. ...............(2分)

$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P$, 其中$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$(\eta_1',\eta_2')=(\eta_1,\eta_2)Q$, 其中$Q=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

故$\varphi$在基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$与基$\eta_1',\eta_2'$)下的矩阵为$Q^{-1}AP$, 其中

$Q^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&4&-4\\0&-1&2\end{pmatrix}$. ........................................(10分)

**14. 解.** 原方程组增广矩阵为$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -5 & -2 & -1 & 2 & -1\\ -3 & 4 & -4 & 6 & -2 & 10\\ 1 & -5 & -6 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix}$. ……(2分)

对$\bar{A}$作初等行变换得$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 0 & 4 & -14\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

以$x_1,x_2,x_4$为约束变量, 以$x_3,x_5$为自由变量.

在其导出组中, 令$x_3=1,x_5=0$，得$\xi_1=(-4,-2,1,0,0)^T$,

令$x_3=0,x_5=1$, 得$\xi_2=(-4,-1,0,-1,1)^T$.

故$\xi_1,\xi_2$为其导出组一个基础解系. ……………………………………(7分)

原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1+4x_3+4x_5=-14\\ x_2+2x_3+x_5=-5\\ x_4+x_5=-2\end{cases}$$

令$x_3=x_5=0$，得其特解为$\gamma_0=(-14,-5,0,-2,0)^T$.

为$\gamma_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$, 其中$k_1,k_2$为任意常数. ……………………………(10分)

**四、证明题** (每小题10分, 共30分)

**15. 证:** 设$B=A-A^T$. 则$B^T=A^T-A=-B$. 故$B$为反对称矩阵. ….(3分)

又因为$n$为奇数, 所以$|B|=|B^T|=|-B|=(-1)^n|B|=-|B|$, 故$|B|=0$.

从而$BX=0$必有非零解. ……………………………………………(10分)

16. **证:** (反证) 假设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1+\beta_2$线性相关. 因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关, 故$\beta_1+\beta_2$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出. 即$\beta_1+\beta_2\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$. ......................(5分)

又因为$\beta_1$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出, 所以$\beta_2=(\beta_1+\beta_2)-\beta_1\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$.

这与$\beta_1$不可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出矛盾! 故假设不成立，即$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1+\beta_2$线性无关. ..............................................................(10分)

17. **证:** (1) $AB\in\mathbb{F}^{m\times m}$可逆，故$\mathrm{rank}(AB)=m$. ........................(2分)

因为$\mathrm{rank}(A)\le m$且$\mathrm{rank}(A)\ge r(AB)=m$, 所以$\mathrm{rank}(A)=m$.

同理$\mathrm{rank}(B)=m$. ..............................................(6分)

(2) 证法1.

$BA\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 由Sylvester公式, $\mathrm{rank}(BA)\ge\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-m=m$. 因为$r(BA)\le r(A)=m$，故$r(BA)=m$. ....................................(10分)

证法2.

由(1) $\mathrm{rank}(A)=m$, 故存在可逆阵$P_1,Q_1$，使得$A=P_1(I_m\quad O)Q_1$.

$\mathrm{rank}(B)=m$, 故存在可逆阵$P_2,Q_2$, 使得$Q=P_2\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}Q_2$.

故$BA=P_2\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}Q_2P_1(I_m\quad O)Q_1=P_2\begin{pmatrix}Q_2P_1&O\\O&O\end{pmatrix}Q_1$.

由此可知$\mathrm{rank}(BA)=\mathrm{rank}(Q_2P_1)=m$. ..............................(10分)

**五、论述题** (共5分)

18. 本题无标准答案, 结论描述部分3分，理解部分2分.