安徽大学 2022-2023 学年第二学期《高等代数（下）》期末考试（A 卷）参考答案与评分标准

一、填空题（每空 4 分， 共 40 分）

1. -2或-1，$-\frac{1}{2}$或-1.　2. 正惯性指数为 2.　3. $\frac{1-\sqrt{10}}{3} < a < \frac{1+\sqrt{10}}{3}$.

4. 维数为2.　5. $\sqrt{2}$，夹角为$\frac{\pi}{2}$.　6. $x = 2,\ y = -1$.　7. 1或-1。

二、解答题（共计 60 分）

1. 解. 设相应特征值为λ，则$\begin{pmatrix} b & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$.　（5 分）

由此可得

$$-3b - 2 + a = -3\lambda, -6 + 3 + a = \lambda, -9 - 1 + 4a = \lambda a$$

故$a^2 - 7a + 10 = 0$. 从而$a = 5, b = 3$, 或$a = 2, b = -1$.　（10 分）

2. （每小题 5 分， 共 25 分）

解. （1） 按定义验证.

（2）所得的标准正交基为

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{\sqrt{6}}{3}x,\quad \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),\ \frac{5\sqrt{14}}{4}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).$$

（3）直接验证$(\sigma(f), \sigma(g)) = (f, g)$.

（4） 直接计算得

$$\sigma(1) = 1,\quad \sigma(x) = -x,\quad \sigma(x^2) = x^2,\quad \sigma(x^3) = x^3 - \frac{6}{5}x.$$

故矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（5）σ的特征值分别为 1 和-1 . 属于特征值 1 的特征子空间的基：1，x^2, $x^3 - \frac{3}{5}x$；属于特征值-1的特征子空间的基：x

3. 解. （1）矩阵 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. （5 分）

（2）矩阵A的特征多项式$f(\lambda)=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2(\lambda-2)$, 故$A$的特征值为$\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=2$.

属于特征值$\lambda_1=\frac{1}{2}$的线性无关的特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$,

属于特征值$\lambda_2=2$的线性无关的特征向量为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. （8 分）

对$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$做 Schmidt 正交化得$\xi_1,\xi_2,\xi_3$，得到正交阵

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

则$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$.

令$(x_1,x_2,x_3)=P(y_1,y_2,y_3)$，得原二次型的标准形$\frac{1}{2}{y_1}^2+\frac{1}{2}{y_2}^2+2{y_3}^2$. （10 分）

（3）秩为 3，正定的。 （15 分）

4. 证明. 对n用数学归纳法. （2 分）

当$n=1$时，结论显然成立. 假设结论对$n-1$阶矩阵成立.

设$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 因为$AB=BA$，故$A$与$B$有共同特征向量$\alpha_1$. （5 分）

将α_1扩充成为$\mathbb{C}^n$的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$， 令$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 则$Q$可逆，且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\ Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\mu & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}.$$

其中A_1,B_1都是$n-1$阶方阵，且$A_1B_1=B_1A_1$. 由归纳假设，存在$n-1$阶可逆阵P_1，使得$P_1^{-1}A_1P_1$，$P_1^{-1}B_1P_1$同为上三角阵. 令$P=Q\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & P_1^{-1}A_1P_1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & P_1^{-1}B_1P_1\end{pmatrix}$$

同为上三角阵. （10 分）