

安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《数学分析 (中)》考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
阅卷人					

一、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

得 分

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -2x, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上_____ (填可积或不可积);

2. 设 $x_n = n + (-1)^n \frac{n^2 + 3n - 1}{n}$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____;

3. 曲线 $y = \ln \sin x (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的弧长为_____;

4. 已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = \frac{1}{1+x} - x \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx$ 的值为_____。

二、计算题 (每小题 5 分, 共 30 分)

得 分

1. 计算下列积分:

(1) $\int (2^x + e^x)^2 dx$;

(2) $\int \sec^4 x dx$;

$$(3) \int_1^2 \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{2x^2} dx ;$$

$$(4) \int_0^1 x \arcsin x dx$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5} dx$$

$$(6) \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx$$

三、分析与求解题（共 34 分）

得 分	
-----	--

1. 判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（12 分）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n^2+1)^n}}{3(n+1)^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^n \sqrt{n}}$, 其中 $a > 0$ 。

2. 判断下列反常积分的敛散性（12 分）

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx (r > 0);$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx \quad (p > 0)。$$

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} x^{n+1}$ 的收敛域及和函数。(10 分)

四、证明题（共 20 分）

得 分	
-----	--

1. 设 $S_n(x) = x^n - x^{2n}$ ，证明： $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于 $S(x) \equiv 0$ ，但非一致收敛。（7 分）

2. 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 中的每一个函数 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导， $u'_n(x) \leq 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 都收敛，证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。（5 分）

3. (8 分)(1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 证明: $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$;

(2) 利用上述不等式证明: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负连续, 且 $\int_a^b f(x)dx \leq 1$, 则

$$(\int_a^b f(x) \sin x dx)^2 + (\int_a^b f(x) \cos x dx)^2 \leq 1。$$