参考答案

一、（8 分）由数列极限定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n)=1$$

证明：由于$\left|\sqrt{n^2+2n-1}-n-1\right|=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n+1}<\dfrac{2}{n}$，

故$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\sqrt{n^2+2n-1}-n-1\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{2}{\varepsilon}$。取$N=[\dfrac{2}{\varepsilon}]+1$，

当$n>N$时，$\left|\sqrt{n^2+2n-1}-n-1\right|<\varepsilon$，故由数列极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n)=1$。

二、计算题（共 40 分）

1、计算数列极限（每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n+3}{3n^3-n^2-1}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n+3}{3n^3-n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}=\dfrac{2}{3}$ 。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n})$；

解：由于$\left|\cos(2n+1)\right|\le 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n})=0$。......5 分

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}{(n-1)^3}$；

解：根据 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}{(n-1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^2}{(n-1)^3-(n-2)^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^3-3n^2+3n-1-(n^3-6n^2+12n-8)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{3n^2-9n+7}=\frac{4}{3}\text{。}$$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{n^2+1}-\dfrac{1}{n^2+2}+\dfrac{1}{n^2+3}-\dfrac{1}{n^2+4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2+n})$

解：当 n 为偶数时，$0<(\dfrac{1}{n^2+1}-\dfrac{1}{n^2+2})+(\dfrac{1}{n^2+3}-\dfrac{1}{n^2+4})+\cdots+(\dfrac{1}{n^2+n-1}-\dfrac{1}{n^2+n})$

$$=\frac{1}{n^2+1}-(\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n^2+3})-\cdots-(\frac{1}{n^2+n-2}-\frac{1}{n^2+n-1})-\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}\text{；}$$

当 n 为奇数时，$0<(\dfrac{1}{n^2+1}-\dfrac{1}{n^2+2})+\cdots+(\dfrac{1}{n^2+n-2}-\dfrac{1}{n^2+n-1})+\dfrac{1}{n^2+n}$

$$=\frac{1}{n^2+1}-(\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{n^2+3})-\cdots-(\frac{1}{n^2+n-1}-\frac{1}{n^2+n})\le\frac{1}{n^2+1}\text{。}$$

故对一切正整数 n, 有

$$0<\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1},$$

$$0<n(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+n})\le\frac{n}{n^2+1}。$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$，故由夹逼定理知，

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+n})=0。$$

2. 计算下列函数极限（每小题 5 分）：

（1） $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{3x^2-x-2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(3x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{3x+2}=\frac{2}{5}$。

（2） $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos4x+\sin^2x-1}{x^2}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos4x+\sin^2x+1)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-4\sin4x+2\sin x\cos x}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(-4\sin4x+2\sin x\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{-16\cos4x+2\cos2x}{2}=-7。$$

（3） $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan^2x)}{(e^{2x}-1)\sin3x}$

解：由于当 $x\to0$ 时，$\ln(1+\tan^2x)\sim\tan^2x\sim x^2, e^{2x}-1\sim2x, \sin3x\sim3x$

从而原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x\cdot3x}=\frac{1}{6}$。

（4） $\lim\limits_{x\to0}(e^x-x-\frac{1}{3}x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(e^x-x-\frac{x^2}{3})}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^x-x-\frac{x^2}{3})}{x^2}}$，

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^x-x-\frac{x^2}{3})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{[\ln(e^x-x-\frac{x^2}{3})]'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-\frac{2}{3}x}{2x(e^x-x-\frac{1}{3}x^2)}=\frac{1}{6}$，

故原式 $=e^{\frac{1}{6}}$。

三、求解题（每题 10 分，共 20 分）：

1. 设$f(x)=x^2e^{3x}$，试求$f(x)$的n阶微分$d^nf(x)$。

解：首先，$df(x)=(x^2e^{3x})'dx=(3x^2e^{3x}+2xe^{3x})dx=xe^{3x}(3x+2)dx$。

当$n\ge 2$时，$d^nf(x)=(x^2e^{3x})^{(n)}dx^n=[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{3x})^{(n-k)}(x^2)^{(k)}]dx^n$

$$=[C_n^0(e^{3x})^{(n)}x^2+C_n^1(e^{3x})^{(n-1)}(x^2)'+C_n^2(e^{3x})^{(n-2)}(x^2)'']dx^n$$

$$=3^{n-2}e^{3x}(9x^2+6nx+n(n-1))dx^n.$$

2. 设函数$y=f(x)$由参数方程$x=2t-\cos t,y=1+\sin^2 t$确定，求其二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：首先$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\sin^2 t)'}{(2t-\cos t)'}=\frac{2\sin t\cos t}{2+\sin t}=\frac{\sin 2t}{2+\sin t}$，

从而$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{\sin 2t}{2+\sin t})'\frac{1}{(2t-\cos t)'}=\frac{4\cos 2t+2\sin t\cos 2t-\sin 2t\cos t}{(2+\sin t)^3}$。

四、证明题（每题 8 分，共 32 分）：

1. 设$0<x_1<2,\ x_{n+1}=1-\sqrt{1-\frac{1}{2}x_n}$，$n=1,2,\cdots$，证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解：易见，当$n\ge 2$时，$0<x_n<1$。又

$$x_{n+1}=1-\sqrt{1-\frac{1}{2}x_n}=\frac{x_n}{2(1+\sqrt{1-\frac{1}{2}x_n})}<x_n,$$

可见数列$\{x_n\}$严格单调减少且有界，故数列$\{x_n\}$收敛.

令$\lim_{n\to\infty}x_n=l$，则由（1）知，$0\le l\le x_2<1$。在题给递推关系式两边令$n\to\infty$可得：

$l=1-\sqrt{1-\frac{1}{2}l}$，由此解得$l=0$，所以$\lim_{n\to\infty}x_n=0$。

2. 证明函数$\ln(x^2+1)$在$[0,+\infty)$上一致连续。

证：$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty),x_1<x_2$，由 Lagrange 微分中值定理可知，$\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\ln(x_2^2+1)-\ln(x_1^2+1)=\frac{2\xi}{\xi^2+1}(x_2-x_1)\le x_2-x_1。$$

由此可知，当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$时，$\left|\ln(x_1^2+1)-\ln(x_2^2+1)\right|\le|x_1-x_2|$。

$\forall\varepsilon>0$，令$\delta=\varepsilon$，当$x_1,x_2\in[0,+\infty),|x_1-x_2|<\delta$时，$\left|\ln(x_1^2+1)-\ln(x_2^2+1)\right|\le|x_1-x_2|<\varepsilon$，

故$\ln(x^2+1)$在$[0,+\infty)$ 上一致连续。

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，$f(0)=-1,f(1)=0$，证明：

（1）存在$c\in(0,1)$，使得$f(c)=-c$；

(2) 存在$\xi\in(0,c)$，使得$f'(\xi)=-\frac{2\xi-1}{c}$。

证：（1）令 $F(x)=f(x)+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$,故由连续函数零点存在定理知，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F(c)=0$，即有 $f(c)=-c$。

（2）令 $G(x)=cf(x)+x^2-x$，则 $G(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 上可导。又

$$G(0)=cf(0)=-c\text{，}\quad G(c)=cf(c)+c^2-c=-c\text{，}\quad G(0)=G(c)\text{，}$$

从而由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,c)$，使得 $G'(\xi)=0$，即得 $f'(\xi)=-\dfrac{2\xi-1}{c}$。

4. （1）设 $0<\alpha<1$，证明：当 $x>0$ 时，

$$1-\alpha x<\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}<1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2\text{；}$$

（2）利用（1）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})^n$。

证：（1）写出函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha}}$ 在 $x=0$ 处一阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：

$$\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2=1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2(1+\theta x)^{\alpha+2}}x^2\,(0<\theta<1)\text{。}$$

由于 $0<\alpha<1$，故当 $x>0$ 时，$0<\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2(1+\theta x)^{\alpha+2}}x^2<\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2$，即有

$$1-\alpha x<\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}<1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2\text{。}$$

（2）由（1）知，对于正整数 n, k, 有

$$\frac{1}{n}(1-\frac{k}{2n^2})<\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}<\frac{1}{n}[1-\frac{k}{2n^2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}]=\frac{1}{n}(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3k^2}{8n^4})\text{。}$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{k}{2n^2})=1-\dfrac{n(n+1)}{4n^3}=1-\dfrac{n+1}{4n^2}$，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3k^2}{8n^4})<1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{n\cdot 3n^2}{8n^5}=1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{3}{8n^2}\text{，}$$

故有 $(1-\dfrac{n+1}{4n^2})^n<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})^n<(1-\dfrac{n+1}{4n^2}+\dfrac{3}{8n^2})^n$。

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{n+1}{4n^2})^n=e^{-\frac{1}{4}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{n+1}{4n^2}+\dfrac{3}{8n^2})^n=e^{-\frac{1}{4}}$，于是根据夹逼定理得：

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})^n=e^{-\frac{1}{4}}\text{。}$$