

安徽大学 2020—2021 学年第二学期  
《数学分析（中）》考试试卷（A 卷）  
(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
阅卷人					

学号 \_\_\_\_\_  
姓名 \_\_\_\_\_  
专业 \_\_\_\_\_  
年级 \_\_\_\_\_  
院/系 \_\_\_\_\_  
答题勿超装订线  
  
\_\_\_\_\_

一、计算题（共 42 分）

得分 \_\_\_\_\_

1. 计算下列不定积分（每小题 6 分）：

$$(1) \int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx;$$

$$(2) \int (x^2 - 1)e^{2x} dx;$$

$$(3) \int x \tan x \sec^2 x dx;$$

2. 计算下列定积分或反常积分 (每小题 6 分):

$$(1) \int_1^2 \frac{x^4 + 4 \ln x + x}{x^3} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x |2 \sin x - 1|^{2021} dx$$

$$(3) \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} dx.$$

二、分析判断题（共 22 分）

得 分	
-----	--

1. 判断下列反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）(每小题 5 分):

$$(1) \int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2} dx ;$$

$$(2) \int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \cos x dx ;$$

2. 判断下列级数的敛散性 (每小题 4 分):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} ;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{4n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{2n}\right)^n}.$$

三、求解题（共 15 分）

得分

1. 设  $f(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt$ , 计算  $f'(x)$ , 并求  $f(x)$  在  $x=0$  的幂级数展开式。(7 分)

2. 求曲线  $x = a(t + \cos t)$ ,  $y = a \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$  的弧长( $a > 0$ )。(8 分)

四、证明题（每题 7 分，共 21 分）

得分

1. 证明幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2 + (-1)^{n+1}]}{n} x^n$  的收敛域为  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ，并求其和函数。

2. 证明函数列  $\{S_n(x)\} = \{x^n - x^{2n}\}$  在  $[0, 1]$  上点态收敛，但不一致收敛。

3. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导数,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ 。证明:

$$(1) \int_0^1 e^x |f(x) + f'(x)| dx \geq e;$$

$$(2) \int_0^1 |f(x) - f'(x)|^2 dx \geq \frac{2}{e^2}.$$