

安徽大学 2019—2020 年第二学期

数学分析 (中) 期末试卷 (A 卷) 参考答案及评分标准

一、计算题 (共 44 分)

1. 求下列数列的上极限和下极限 (每小题 4 分, 共 8 分):

(1) $x_n = \sqrt[n]{n} + 3(-1)^n$

解: 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 故知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 4, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -2 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $x_n = \sqrt{1 + (-1)^n} + \cos \frac{n\pi}{2}$

解: 因为 $x_{4n} = \sqrt{2} + 1$, $x_{4n-1} = 0$, $x_{4n-2} = \sqrt{2} - 1$, $x_{4n-3} = 0$, 所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

2. 计算下列积分 (每小题 6 分, 共 36 分):

(1) $\int e^x \sin(e^x + 1) dx$;

解: 原式 $= \int e^x \sin(e^x + 1) dx = \int \sin(e^x + 1) d(e^x + 1) = -\cos(e^x + 1) + C$

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) $\int (\ln \sin x) \sec^2 x dx$;

解: 原式 $= \int (\ln \sin x) d \tan x = (\ln \sin x) \tan x - \int \tan x d(\ln \sin x)$

$$= (\ln \sin x) \tan x - \int \tan x \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= (\ln \sin x) \tan x - x + C \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(3) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$;

解: 原式 $= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d(x^2 + 1)$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(4) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{2-x}} dx;$

解: 令 $t = \sqrt{2-x}$, 则原式 $= -\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2-t^2-1}{t} 2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} (1-t^2)dt$

$$= 2\int_1^{\sqrt{2}} dt - 2\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2(\sqrt{2}-1) - \frac{2}{3}t^3 \Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2(\sqrt{2}-1) - \frac{2}{3}t^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(5) $\int_{-1}^1 x^2(1+x^{2019})(e^x + e^{-x})dx;$

解: 原式 $= \int_{-1}^1 x^2(e^x + e^{-x})dx + \int_{-1}^1 x^{2021}(e^x + e^{-x})dx$ 。由于 $x^{2021}(e^x + e^{-x})$ 为奇函数, 故

$$\int_{-1}^1 x^{2021}(e^x + e^{-x})dx = 0,$$

所以原式 $= \int_{-1}^1 x^2(e^x + e^{-x})dx = 2\int_0^1 x^2(e^x + e^{-x})dx = 2(e-5e^{-1}) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+2} dx;$

解: 原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1} d(x-1) = \arctan(x-1) \Big|_0^{+\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x-1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

二、求解题 (共 16 分)

1. 求曲线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ 的弧长 ($a > 0$)。(7 分)

解: 由弧长公式知, 所求曲线弧长为

$$l = \int_0^\pi \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{[a(-\sin t + \sin t + t \cos t)]^2 + [a(\cos t - \cos t + t \sin t)]^2} dt$$

$$= a \int_0^\pi t dt = \frac{1}{2} a \pi^2 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ 的收敛半径、收敛域及和函数。(9 分)

解：(1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n(n+1)}} = 1$,

故此幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{1} = 1$ 3 分

(2) 由于当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ 收敛, 所以此幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$ 2 分

(3) 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}$ ($-1 \leq x \leq 1$), 则当 $-1 < x < 1$ 时,

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$S''(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

于是当 $-1 < x < 1$ 时, $S'(x) = \int_0^x S''(t) dt + S'(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt + 0 = \ln(1+x)$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt + S(0) = \int_0^x \ln(1+t) dt + 0 = (1+x) \ln(1+x) - x.$$

$$\text{又 } S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(1+x) \ln(1+x) - x] = 2 \ln 2 - 1,$$

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [(1+x) \ln(1+x) - x] = 1.$$

$$\text{所以 } S(x) = \begin{cases} (1+x) \ln(1+x) - x, & -1 < x \leq 1, \\ 1, & x = -1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

三、分析判断题 (共 28 分)

1. 判断下列反常积分的敛散性 (每小题 4 分, 共 8 分):

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x} + 1} dx$$

解: 当 $x \geq 1$ 时, $0 < \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x} + 1} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}$. 又 $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$ 收敛, 故由比较判别法知,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x} + 1} dx \text{ 收敛。} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \cos x} dx$$

解：因为当 $x \geq 1$ 时， $[\frac{1}{x + \cos x}]' = \frac{-(1 - \sin x)}{(x + \cos x)^2} \leq 0$ ，故 $\frac{1}{x + \cos x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少。易

见 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \cos x} = 0$ 。又 $\forall A \in [1, +\infty)$ ， $|\int_1^A \sin x dx| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2$ ，故由 Dirichlet 判别

法知， $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \cos x} dx$ 收敛 4 分

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分，共 20 分）：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3 + \frac{1}{n})^n}$$

解：由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{(3 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$ ，故由 Cauchy 判别法知，

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3 + \frac{1}{n})^n}$ 收敛 5 分

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{n!(n+2)}$$

解：令 $x_n = \frac{n^{n+1}}{n!(n+2)}$ 。由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!(n+3)} \cdot \frac{n!(n+2)}{n^{n+1}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{n+3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right] = e > 1,$$

故由达朗贝尔判别法知，原级数发散。..... 5 分

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

解：首先此级数为交错级数，又数列 $\left\{ \frac{1}{n \ln n} \right\} (n \geq 2)$ 单调减少且趋于 0，故此级数为 Leibniz

级数，所以它收敛。..... 5 分

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^2$$

解：当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\sqrt[n]{2} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1 \sim \frac{\ln 2}{n}$ ， $(\sqrt[n]{2} - 1)^2 \sim \left(\frac{\ln 2}{n}\right)^2$ 。又 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln 2}{n}\right)^2$ 收敛，故由

比较判别法知， $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^2$ 收敛。..... 5 分

四、证明题（每题 6 分，共 12 分）

1. 证明函数列 $\{S_n(x)\} = \left\{ \frac{nx^{\frac{1}{n}}}{n+1} \right\}$ 在 $(0,1]$ 上点态收敛于 $S(x) \equiv 1$ ，但在 $(0,1]$ 上非一致收敛。

证明：（1）因为 $\forall x \in (0,1]$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^{\frac{1}{n}}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ ，

故 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,1]$ 上点态收敛于 $S(x) \equiv 1$ 3 分

（2）取 $x_n = \frac{1}{n^n}$ ， $n=1,2,\dots$ ，则数列 $\{x_n\} \subset (0,1]$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \frac{1}{n}}{n+1} - 1 \right| = 1 > 0$ ，

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,1]$ 上非一致收敛 3 分

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，且 $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：

（1） $\forall x \in [a,b]$ ， $|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx$ ；

（2） $\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$ 。

证明：（1） $\forall x \in [a,b]$ ， $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ ， $f(x) = -\int_x^b f'(t) dt$ ，故有

$$|f(x)| \leq \int_a^x |f'(t)| dt, \quad |f(x)| \leq \int_x^b |f'(t)| dt,$$

进而可知 $2|f(x)| \leq \int_a^x |f'(t)| dt + \int_x^b |f'(t)| dt = \int_a^b |f'(t)| dt$ ， $|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx$ 3 分

（2）由（1）的证明知，当 $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ 时， $|f(x)| \leq \int_a^x |f'(t)| dt$ ，

$$|f(x)|^2 \leq \left[\int_a^x |f'(t)| dt \right]^2 \leq \int_a^x 1^2 dt \cdot \int_a^x [f'(t)]^2 dt \leq (x-a) \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2 dt。$$

类似地，利用（1）的证明，当 $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ 时， $|f(x)| \leq \int_x^b |f'(t)| dt$ ，

$$|f(x)|^2 \leq \left[\int_x^b |f'(t)| dt \right]^2 \leq \int_x^b 1^2 dt \cdot \int_x^b [f'(t)]^2 dt \leq (b-x) \int_{\frac{a+b}{2}}^b [f'(t)]^2 dt。$$

$$\text{所以 } \int_a^b f^2(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x) dx$$

$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left\{ (x-a) \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2 dt \right\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left\{ (b-x) \int_{\frac{a+b}{2}}^b [f'(t)]^2 dt \right\} dx$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2 dt + \frac{(b-a)^2}{8} \int_{\frac{a+b}{2}}^b [f'(t)]^2 dt = \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b [f'(x)]^2 dx \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$