安徽大学 2020—2021 年第二学期
数学分析（中）期末试卷（B 卷）参考答案及评分标准

一、计算题（共 42 分）

1．计算下列不定积分（每小题 6 分）：

（1）$\int x\cos(2x)dx=\int\frac{1}{2}xd\sin(2x)=\frac{1}{2}x\sin(2x)-\frac{1}{2}\int\sin(2x)dx$ ………………4 分

$=\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C$ ………………2 分

(2) $\int\sin(2x)\cos(4x)dx=\int\frac{1}{2}(\sin(6x)-\sin(2x))dx$ ………………4 分

$=-\frac{\cos(6x)}{12}+\frac{\cos(2x)}{4}+C$ ………………2 分

(3) $\int(x^2-1)(x^3-3x+1)^{2020}dx=\int\frac{1}{3}(x^3-3x+1)^{2020}d(x^3-3x+1)$ ………………4 分

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2021}(x^3-3x+1)^{2021}+C$ ………………2 分

2．计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

（1） $\int_1^2\frac{2x^3+2x+1}{x^2}dx=\int_1^2(2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})dx=(x^2+2\ln|x|-\frac{1}{x})\Big|_1^2$ ………………4 分

$=4-1+2\ln 2-\frac{1}{2}+1=\frac{7}{2}+2\ln 2$ ………………………2 分

（2）令 $x=t^3$，$\int_0^8\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\int_0^2\frac{1}{1+t}3t^2dt=\int_0^2 3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$ ………………4 分

$=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\Big|_0^2=3\left(\frac{4}{2}-2+\ln 3\right)=3\ln 3$ ………………2 分

（3）令 $t=\sqrt{x}$ ，$\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx=\int_0^1\arctan t d(t^2)=t^2\arctan t\,|_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$ …………4 分

$$=\arctan 1-\int_0^1 1-\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}-1+\arctan t\,|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$$ ....2 分

（4）令 $t=e^x$，$\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}=\arctan t\,|_1^{+\infty}$ ....4 分

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$ ....2 分

二、分析判断题（共 25 分）

1．判断下列级数或反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分）：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n-\ln n}$；

解：① 当 $x\geq 1$ 时，$(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}\geq 0$，故 $x-\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加。

因此当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n-\ln n}$ 单调减少且趋于 0．根据 Leibniz 交错级数法则，

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n-\ln n}$ 收敛。 ....3 分

② 易见当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n-\ln n}\sim\frac{1}{n}$，又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散。

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n-\ln n}$ 条件收敛。 ....2 分

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^3)}{x^2}dx$．

解：由于当 $x\geq 1$ 时，$\left|\frac{\cos(x^3)}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$。又 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，故利用比较判别法，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos(x^3)}{x^2}\right|dx$

收敛，即知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^3)}{x^2}dx$ 绝对收敛。 ....5 分

2．判断下列级数的敛散性（每小题 5 分）：

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$；

解：当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

故由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ 收敛。 ....5 分

（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$；

解：当 $n\to\infty$ 时，$1-\cos\frac{2\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{n}\sim\frac{2\pi^2}{n^2}$，又 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\pi^2}{n^2}$ 收敛，

故由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$收敛。 ....5 分

（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^n}$；；

解：$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^n}}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{2+(-1)^n}{2}=\frac{3}{2}>1$，

故由 Cauchy 判别法知，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^n}$ 发散。 ....5 分

三、求解题（共 18 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^{-x}\sin(t^2)dt$，计算 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的幂级数展开式。（9 分）

解：（1） $f'(x)=\sin(-x)^2(-x)'=-\sin(x^2)$ ....3 分

（2）由于 $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty<x<+\infty)$。从而 $\sin(t^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!}$，故

$$f(x)=\int_0^{-x}\sin(t^2)dt=\int_0^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!},\quad(-\infty<x<+\infty)$$

这即为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的幂级数展开式。 ....6 分

2. 求由曲线 $y=x-x^2\,(0\le x\le 1)$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。（9 分）

解：和 x 轴垂直的平面与旋转体的截面是半径为 $x-x^2$ 的圆盘，

其面积为 $\pi(x-x^2)^2$， ....3 分

所以旋转体的体积为：

$$\int_0^1 \pi(x-x^2)^2\,dx=\int_0^1 \pi(x^2+x^4-2x^3)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{30}\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

四、证明题（每题 5 分，共 15 分）

1. 证明幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n n}$的收敛域为$[-3,3)$，并求其和函数。

解：（1）证明：因为$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n n}}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3}$，故此幂级数的收敛半径为$R=3$。

当$x=-3$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛。又当$x=3$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，

所以此幂级数的收敛域为$[-3,3)$。 ………………………………2 分

（2）令$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n n}$，$x\in[-3,3)$。当$x\in(-3,3)$时，

$$S'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3-x}$$

因此，当$x\in(-3,3)$时，$S(x)=\int_0^x S(t)dt+S(0)=\int_0^x\frac{1}{3-t}dt+0=\ln 3-\ln(3-x)$，

又 $S(-3)=\lim_{x\to-3^+}S(x)=\lim_{x\to-3^+}[\ln 3-\ln(3-x)]=-\ln 2$，故当$x\in[-3,3)$时，

$$S(x)=\ln 3-\ln(3-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

2. 设函数列$S_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2n}$，证明$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上点态收敛，但不一致收敛。

证明：（1）任意$x\in[0,+\infty)$，$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2n}=e^{2x}$，

因此函数列$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上点态收敛于$S(x)=e^{2x}$。 ………………2 分

（2）取数列$\{x_n\}=\{n\}$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{n\}\subset[0,+\infty)$，且

$$\lim_{n\to+\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{2n}-2^{2n}\right)=+\infty$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛。 ....3 分

3. 设$f(x)$在[a, b]上二阶可导，且$f''(x)\ge 0$ 。证明：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

证明：（1）因为$f''(x)\ge 0$，$f(x)\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$

（即$f(x)$的图像在点$x=\frac{a+b}{2}$处切线之上），

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\ge\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\\ &=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\\ &=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)\end{aligned}$$

..................3 分

此处利用$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0$.

（2）因为$f''(x)\ge 0$，当$a\le x\le b$，$f(x)$的图像在过点$x=a$和点$x=b$处直线之下，即

$$f(x)\le f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad a\le x\le b$$

所以，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\le\int_a^b f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)dx\\ &=f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b\\ &=f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2}\\ &=\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)\end{aligned}$$

..................2 分