一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

| 得 分 | |
|---|---|

1. 设 $y = xe^{-2x}$，则 $dy = \underline{e^{-2x}(1-2\text{x})dx}$；

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x<0,\\ a+b\ln(x+1), & x\ge 0,\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，

则 $a = \underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$， $b = \underline{\quad \frac{-1}{8} \quad}$；

3. 设 $E=\{\frac{2^n}{n!}|n=2,3,\cdots\}$,则 $\sup E = \underline{\quad 2\_\quad}$, $\inf E = \underline{\quad 0 \quad}$。

二、计算题（共 48 分）

| 得 分 | |
|---|---|

1、计算数列极限（每小题 6 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2\sqrt{n}+3}{4n^2-n-1}$；

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2\sqrt{n}+3}{4n^2-n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2/n^2+2\sqrt{n}/n^2+3/n^2}{4n^2/n^2-n/n^2-1/n^2}=\frac{1}{4}.$$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{n+\frac{1}{3}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}})$；

**解：** $$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{1}{n}}<\frac{n}{n+\frac{1}{n}}$$

由于，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\frac{1}{n}}=1$，

所以由夹逼定理得，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{n+\frac{1}{3}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}})=1$.

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sin n$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sin n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0.$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{n^4+1}$

解，令 $x_n=1+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$，$y_n=n^4+1$，
则数列$\{y_n\}$严格增且趋于$+\infty$。
因此利用 Stolz 定理得到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{n^4+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3}{(n+1)^4-n^4}=2.$$

2、计算函数极限：（每小题 6 分）

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-1}{x^3+4x+3}$；

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^3+4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x^3}{1+4/x^2+3/x^3}=2$$

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\tan 5x}$；

解：$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\tan 5x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{3}{\sin 3x}\cos 3x}{\dfrac{5}{\tan 5x}\sec^2 5x}=\lim_{x\to0^+}\frac{3\sin 5x}{5\tan 3x}=1.$$

（3）$\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

解：$$\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-2}{\cos 2x}\sin 2x}{2x}}=e^{-2}\ .$$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right)$

解：$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-x\ln(1+\frac{1}{x})\right),$$

令$t=\dfrac{1}{x}$，则

原式$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\frac{1}{t}\ln(1+t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}.$

答　题　勿　超　装　订　线

装　订　线

三、求解题（本大题有两题，21 共分）

| 得 分 | |
|---|---|

1．设 $x=t-\sin t, y=t\cos t$，求由此参数方程确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；（10 分）

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{1-\cos t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{1+\cos t\sin t-t\cos t-2\sin t}{(1-\cos t)^3}.$$

2．确定曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的上凸区间和下凸区间，并求其拐点。（11 分）

解：$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}.$

$y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2},$

令$y''$=0，得到$x=\pm 1.$

当

$x\in(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$时，$y''<0,$故在此区间为上凸；

$x\in$(-1, 1)时，$y''>0,$故在此区间为下凸.

其中 $(-1,\ln 2)$与$(1,\ln 2)$ 为曲线的两个拐点.

四、分析与证明题（每小题 7 分，共 21 分）

| 得 分 | |
|---|---|

1． 设数列$\{a_n\}$满足$|a_{n+1}-a_n|\le\dfrac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\{a_n\}$收敛。

证明：

$\forall\varepsilon>0,$ 取$N=[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}]+1.$当$n>N$时，

令$m=n+p>N$， $(p\in \mathrm{Z}^+).$

$|a_m-a_n|\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$

$$\le\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon.$$

故$\{a_n\}$为基本数列，由 Cauchy 收敛准则得到，数列$\{a_n\}$收敛。

2.证明：

（1）数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}]=0$；

（2）函数$x^3$在$[0,+\infty)$上不一致连续。

证明（1）：

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=0.$$

**(2)：**

令$x_n'=(n+1)^{\frac{1}{3}},x_n''=(n)^{\frac{1}{3}}$，由（1）可知，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0,$ 但$(x_n')^3-(x_n'')^3=n+1-n=1.$

故函数$x^3$在$[0,+\infty)$上不一致收敛。

答 题 勿 超 装 订 线

3. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导、有界，并且满足$|2f(x)+f'(x)|\le 1\ (\forall x\in(-\infty,+\infty))$，证明：

（1）对于$a<b$，有$\left|e^{2b}f(b)-f(a)e^{2a}\right|\le\frac{1}{2}(e^{2b}-e^{2a})$；

（2）$\forall x\in(-\infty,+\infty),\ |f(x)|\le\frac{1}{2}$。

证明（1）：

令$F(x)=e^{2x}f(x),G(x)=e^{2x}$.

由于$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导、有界,故$f(x)$在有限区间$[a,b]$上连续、可导，

因此$F(x),G(x)$在$[a,b]$上连续、可导。由 Cauchy 中值定理知，$\exists\xi\in(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$,满足

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{e^{2b}f(b)-e^{2a}f(a)}{e^{2b}-e^{2a}}=\frac{e^{2\xi}(2f(\xi)+f'(\xi))}{2e^{2\xi}}=\frac{2f(\xi)+f'(\xi)}{2}.$$

又，$|2f(x)+f'(x)|\le 1\ (\forall x\in(-\infty,+\infty))$

故：对于$a<b$，有$\left|e^{2b}f(b)-f(a)e^{2a}\right|\le\frac{1}{2}(e^{2b}-e^{2a})$。

（2）：在结论（1）中令 b=x，则有

$$\left|e^{2x}f(x)-f(a)e^{2a}\right|\le\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{2a})$$，(x>a).

$$|e^{2x}f(x)|\le\left|e^{2x}f(x)-f(a)e^{2a}\right|+|f(a)|e^{2a}\le\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{2a})+|f(a)|e^{2a}.$$

即：

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}+(|f(a)|-\frac{1}{2})e^{-2(x-a)}.$$

在上式中令 $a\to-\infty$,即得 $\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2}$

（因为结论 1 对任意的 $a<x$ 均成立，故可以令 $a\to-\infty$）.

.