2017-2018 第一学期《数学分析》（上）
B卷答案及评分标准

一、填空题（每题3分，共9分）

1. 2;　0;（对一个得2分，对2个得3分）　2. $(1,2)$;　3. 0.

二、计算下列数列的极限（每小题6分，共24分）

1.（6分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\=&\frac{1}{2}\quad\textbf{(6分)}\end{aligned}$$

2. （6分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sin n!}$;

解：易知

$$1\leq\sqrt[n]{2+\sin n!}\leq\sqrt[n]{3},\quad\textbf{(3分)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1,$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sin n!}=1.$ **（3分）**

3.（6分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$;

解：

记$x_n=1^4+2^4+\cdots+n^4$, $y_n=n^5$. 由于$n\to\infty$时，$y_n\to+\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^5-(n-1)^5}=\frac{1}{5},\qquad\textbf{（4分）}$$

由Stoltz公式可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}=\frac{1}{5}\qquad\textbf{（2分）}$$

4.（6分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$;

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)^n \qquad \textbf{（2分）}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}\right]^{\frac{n(2n+1)}{n^2}}\\
=&e^2 \quad \textbf{（4分）}
\end{aligned}$$

三、计算下列函数的极限（每小题6分，共24分）

1. （6分）求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{e^{\tan x^2}-1}$;

解：由于$x\to0$时，$\sin x^2\sim x^2$, $e^{\tan x^2-1}\sim\tan x^2\sim x^2$, **（3分）** 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{e^{\tan x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\tan x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1 \quad \textbf{（3分）}$$

2. （6分）求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

解：由于$x\to0$时，$e^x-1\sim x$, **（2分）** 所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\\
=&\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \qquad \text{（等价无穷小替换）}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} \qquad \text{（运用L'Hospital 法则）}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2} \quad \text{(再次运用L'Hospital 法则)}\\
=&\frac{1}{2} \quad \textbf{（4分）}
\end{aligned}$$

3. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
=&\lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}}\\
=&e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})} \quad \textbf{(3分)}
\end{aligned}$$

由于$x\to 0$时，$\ln(1+x)\sim x$, 所以$\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})=\ln(1+\cos x-1-\frac{x^2}{2})\sim \cos x-1-\frac{x^2}{2}$.
于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^2}\\
=&-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}\\
=&-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}-\frac{1}{2}\\
=&-1
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=e^{-1} \quad \textbf{(3分)}$$

4. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{2x^4}$.

解：由Taylor 公式知，当$x\to 0$时,

$$\begin{aligned}
e^x=&1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\cos x=&1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})
\end{aligned}$$

所以, $x\to 0$时，成立

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{x^2}{2}}&=1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) \quad \textbf{(3分)}
\end{aligned}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{2x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]}{2x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{2x^4}\\
=&\frac{1}{24}\quad \textbf{(3分)}
\end{aligned}
$$

四、计算函数的导数与微分 （每小题10分，共20分）

1. 求由方程$\tan y-yx+x^2=0$所确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

解：在原方程两边同时对x求导，得

$$y'\sec^2 y-(y'x+y)+2x=0$$

整理得$y'=\dfrac{y-2x}{\sec^2 y-x}$. **（6分）** 在此等式两边再次对$x$求导，得

$$y''=\frac{(y'-2)(\sec^2 y-x)-(y-2x)\left[2y'\sec^2 y\tan y-1\right]}{(\sec^2 y-x)^2}\quad \textbf{(4分)}$$

2. 设$y=x^2\sin x$, 求函数y 的40阶微分.

解：$d^{40}y=y^{(40)}dx^{40}$. **（3分）** 又

$$
\begin{aligned}
y^{(40)}=(x^2\sin x)^{(40)}=&x^2(\sin x)^{(40)}+C_{40}^1(\sin x)^{(39)}(x^2)'+C_{40}^2(\sin x)^{(38)}(x^2)''\\
=&x^2\sin x-80x\cos x-1560\sin x\quad \textbf{(6分)}
\end{aligned}
$$

所以

$$d^{(40)}y=(x^2\sin x-80x\cos x-1560\sin x)dx^{40}\qquad \textbf{（1分）}$$

五、证明题（本大题有3小题, 共23分）

1. (7分) **证明**：函数$y=2+\ln(x-1)$在区间$[\dfrac{3}{2},+\infty)$上一致连续;

证明 记$f(x)=2+\ln(x-1)$. $\forall x_1,x_2\in[\frac{3}{2},+\infty)$, 由Lagrange中值定理知

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2),$$

其中ξ在x_1与x_2之间. 即

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\xi-1}(x_1-x_2)$$

易知$\xi>\frac{3}{2}$, 所以$\frac{1}{\xi-1}<2$. 故

$$|f(x_1)-f(x_2)|<2|x_1-x_2| \quad \textbf{(4分)}$$

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}, \forall x_1,x_2\in[\frac{3}{2},+\infty):|x_1-x_2|<\delta$, 恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

由一致连续的定义知，函数$y=2+\ln(x-1)$在$[\frac{3}{2},+\infty)$上一致连续. **（3分）**

2. (7分) 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上一阶导函数连续，在开区间$(0,1)$二阶可导，且满足$|f''(x)|\le1$. 已知函数$f(x)$ 在$(0,1)$内的取到最大值$\dfrac{1}{4}$. 证明：

$$|f(0)|+|f(1)|\le1$$

证明 设$f(x_0)=\dfrac{1}{4}$, 则$x_0\in(0,1)$. 易知$x=x_0$是函数$f(x)$在$[0,1]$内的一个极大值点。由Fermat定理知，$f'(x_0)=0$. **（2分）** 在区间$[0,x_0]$和$[x_0,1]$上分别运用Taylor中值定理，得

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}x_0^2, \quad \xi\in(0,x_0)$$
$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2, \quad \eta\in(x_0,1)$$

注意到$f'(x_0)=0$, 有

$$|f(0)|\le|f(x_0)|+\frac{|f''(\xi)|}{2}x_0^2$$
$$|f(1)|\le|f(x_0)|+\frac{|f''(\eta)|}{2}(1-x_0)^2$$

上两式相加，并利用条件$f(x_0)=\dfrac{1}{4}$, $|f''(x)|\le1$对一切$x\in(0,1)$成立，可得

$$\begin{aligned}|f(0)|+|f(1)|\le&2f(0)+\frac{1}{2}\left(x_0^2+(1-x_0)^2\right)\\=&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x_0^2+(1-x_0)^2\right]\end{aligned}$$

由于对$\forall x_0 \in [0,1]$成立$x_0^2+(1-x_0)^2 \le 1$, 所以

$$|f(0)|+|f(1)| \le 1 \quad \textbf{（5分）}$$

证毕.

3. (9分) 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明：对任意正数a, b

(1) 存在$x_0 \in (0,1)$使得$f(x_0)=\dfrac{a}{a+b}$;

(2) 存在$\xi, \eta \in (0,1)$, $\xi \neq \eta$, 使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

证明 (1) 由题设知$[0,1] \subset R_f$. 而$\dfrac{a}{a+b} \in (0,1)$, 由连续函数的介值定理知，存在$x_0 \in [0,1]$使得$f(x_0)=\dfrac{a}{a+b}$. **(5分)**

(2) 分别在区间$[0,x_0]$和$[x_0,1]$上运用Lagrange中值定理

$$f(x_0)=f(0)+f'(\xi)x_0, \quad \xi \in (0,x_0)$$
$$f(x_0)=f(1)+f'(\eta)(x_0-1), \quad \eta \in (x_0,1)$$

结合$f(0)=0, f(1)=1, f(x_0)=\dfrac{a}{a+b}$，有

$$f'(\xi)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{x_0}$$
$$f'(\eta)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{1-x_0}$$

进一步可得

$$\frac{a}{f'(\xi)}=(a+b)x_0$$
$$\frac{b}{f'(\eta)}=(1-x_0)(a+b)$$

两式相加即得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b \quad \textbf{（4分）}$$

证毕