

## 安徽大学 2023-2024 学年第 1 学期《高等代数 (上)》 期末考试 B 卷参考答案与评分标准

### 一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分).

1.  $r(A)$  或 秩( $A$ ) 或者  $\text{rank}(A)$  或者  $A$  的秩.    2.  $(1, 0, -2)^T$  或者  $(1, 0, -2)$ .    3.  $\frac{1}{6}A$   
或者  $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .    4.  $3^{k-1}A$  或者  $3^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & 1 & \frac{3}{5} \\ 5 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$ .    5.  $(6, -1, 14)$ .

### 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分).

6. C.    7. B.    8. D.    9. A.    10. A.

### 三、计算题 (每小题 10 分, 共 30 分).

11. 解. 从第二列起将每一列加到第一列上并提出公因子  $n-1$ , 得到

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

.....(4 分)

再将第一行乘以  $-1$  依次加到后面各行, 得到

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

.....(10 分)

12. 解. 因为  $|A| = 1 \neq 0$ , 所以  $X = A^{-1}B$ . .....(4 分)

将  $A, B$  水平并置, 做初等行变换如下:

$$\left( A \mid B \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

因此,  $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  .....(10 分)

13. 解. 将向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

注意到右边阶梯形矩阵中主元所在的列指标为 1, 2, 4, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  是向量组的一个极大线性无关组. 注意到极大线性无关组一般并不唯一, 在本题中, 除了  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  之外,  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  和  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  也都是极大线性无关组, 但  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不是极大线性无关组. .... (10 分)

四、证明题 (每小题 10 分, 共 30 分).

14. 证. 设  $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{F}^{n \times n}$  为  $B$  的列向量组, 则它们为齐次线性方程组  $AX = \mathbf{0}$  的解.

.....(4 分)

于是  $r(B) = \text{秩}(\beta_1, \dots, \beta_l) \leq n - r(A)$ . .... (7 分)

从而  $r(A) + r(B) \leq n$ . .... (10 分)

15. 证. 由于  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta$  线性相关, 则存在不全为零的数  $k_1, \dots, k_r, k \in \mathbb{F}$ , 使得  $k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r + k\beta = 0$ .

若  $k = 0$ , 则  $k_1, \dots, k_r$  不全为零. 于是上式化为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0.$$

这与  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关矛盾. 故  $k \neq 0$ . 从而

$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k}\right)\alpha_r,$   
即  $\beta$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出. .... (6 分)

下证表示法是唯一的. 设

$\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r = b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r$ , 故  $(a_1 - b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_r - b_r)\alpha_r = 0$ .  
由于向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关, 故  $a_i = b_i, i = 1, \dots, r$ . 唯一性得证. .... (10 分)

16. 证法 1. 由线性方程组解的定理知,  $V_1$  的维数是 1,  $V_2$  的维数是  $n - 1$ . .. (3 分)  
若列向量  $\alpha \in V_1 \cap V_2$ , 则  $\alpha$  既是第一个线性方程组的解, 也是第二个线性方程组的解, 不难看出  $\alpha$  只能等于零向量. 因此  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ . .... (6 分)  
又因为

$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 1 + (n - 1) = n = \dim \mathbb{F}^n,$   
故  $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ . .... (10 分)

证法 2. 对任意  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{F}^n$ , 令  $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ . 令  
 $\alpha_1 = (\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a})^T, \alpha_2 = (a_1 - \bar{a}, a_2 - \bar{a}, \dots, a_n - \bar{a})^T$ . 显然,  
 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$ . .... (5 分)  
另一方面, 若  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in V_1 \cap V_2$ , 则  
 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0, a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ . 由此可得  $a_i = 0, 1 \leq i \leq n$ . 从而  $\alpha = 0$ ,  
即  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

故  $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2$ . .... (10 分)

五、简答题 (5 分, 判断叙述是否正确并简要说明理由)

17. 解. 正确. .... (2 分)  
理由如下:

设  $\overline{A}$ 、 $\overline{B}$  的行向量组分别为  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  和  $\beta_1, \dots, \beta_m$ .

$AX = \gamma$  与  $BX = \delta$  同解.

$\iff AX = \gamma, BX = \delta$  以及  $AX = \gamma$  与  $BX = \delta$  的联立方程组同解.

$\iff r(\overline{A}) = r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix} = r(B) = r(\overline{B}).$

$\iff L(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_m) = L(\beta_1, \dots, \beta_m).$

$\iff \overline{A}, \overline{B}$  的行向量组等价. .... (5 分)