安徽大学2017-2018学年第二学期
《高等代数（下）》考试试卷（A卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线　装订线

一、填空题（每小题4分，共20分）

得分	

1. 多项式$2x^4-x^3+2x-3$的所有有理根为________.

2. 设3阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$, 则矩阵A^2-3A的行列式为________.

3. 二次型$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3+x_3^2$的秩为________.

4. 设$\alpha=(a_1,a_2),\beta=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$上的内积义为$(\alpha,\beta)=a_1b_1+2a_2b_2$, 则$(0,1),(1,1)$在该内积下的夹角为________.

5. 设5阶矩阵A的Jordan标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$, 则$A$的极小多项式为________.

二、选择题（每小题4分，共20分）

得分	

6. 下列说法**错误**的是　(　　)

(A)　设$p(x),f(x)\in\mathbb{F}(x)$, 若$p(x)$为$f(x)$的$k$重因式, 则$p(x)$为$f'(x)$的$k-1$重因式.

(B)　设非零多项式$f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, $d(x)=(f(x),g(x))$, 则$(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)})=1$.

(C)　设$f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, 若$(f(x),g(x))=1$当且仅当$(f^2(x),g^2(x))=1$.

(D)　设$f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, $f(x)$没有重因式当且仅当$(f(x),f'(x))=1$.

7. 下列说法**错误**的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) A为n阶满秩矩阵当且仅当A不存在零特征值.

(B) 相似的矩阵具有相同的迹.

(C) 相似的矩阵具有相同的行列式.

(D) 特征值的代数重数小于等于它的几何重数. .

8. 设$\mathscr{A}$为n维线性空间V上的线性变换, 下列条件中**不能**作为$\mathscr{A}$可对角化充要条件的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) $\mathscr{A}$有n个线性无关的特征向量.

(B) $\mathscr{A}$的特征多项式仅有单根.

(C) $\mathscr{A}$的极小多项式仅有单根.

(D) $\mathscr{A}$每个特征值的几何重数等于它的代数重数.

9. 下列说法**正确**的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) 合同的矩阵具有相同的行列式.

(B) 若实对称矩阵A的所有顺序主子式非负, 则A为半正定矩阵.

(C) 若实对称矩阵所有偶数阶主子式大于零, 所有奇数阶主子式小于零, 则A为负定矩阵.

(D) 若A, B为n阶正定矩阵, 则AB为正定矩阵.

10. 下列说法**错误**的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) 任意维数大于零的线性空间都可以定义不同的内积.

(B) 欧氏空间的标准正交基是唯一的.

(C) 设α, β为欧氏空间中的任意两个向量, 则$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2\|\alpha\|^2+2\|\beta\|^2$.

(D) 正交矩阵特征值的模长为1.

三、计算题 (每小题10分，共30分)

得分	

11. 设$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$, 求$(f(x), g(x))$.

答题勿超装订线

装 订 线

12. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量, 并由此写出$A$的Jordan标准形.

13. 化实二次型$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$为**规范形**, 并给出对应的非退化线性替换.

答题勿超装订线

装订线

四、证明题(每小题10分，共30分)

得分	

14. 证明: 若$(x-1)|f(x^n)$, 则$(x^n-1)|f(x^n)$.

15. 设A为n阶方阵, 证明: A的特征值全为零当且仅当存在非负整数m, 使得$A^m=0$.

16. 设A为m阶正定矩阵, B为$m \times n$的矩阵, 证明: B^TAB正定矩阵当且仅当B的秩为n.

安徽大学2017-2018学年第一学期《高等代数(下)》参考答案与评分标准(A卷)

一、填空题(每小题4分, 共20分)

1. $\underline{1}$. 2. $\underline{16}$. 3. $\underline{3}$. 4. $\underline{\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}}$. 5. $\underline{(x-1)^2(x-2)^2}$

二、选择题(每小题4分, 共20分)

6. A. 7. D. 8. B. 9. C. 10. B.

三、计算题(每小题10分, 共30分)

11. **解:**

$$
\begin{array}{r|l|r|l}
 & g(x) & f(x) & \\
q_2(x)=x+1 & x^2-x-1 & x^4-x^3-4x^2+4x+1 & q_1(x)=x^2-3 \\
 & x^2-x-2 & x^4-x^3-4x^2+3x+3 & \\
\cline{2-3}
 & r_2(x)=1 & r_1(x)=x-2 & q_3(x)=x-2 \\
 & & x-2 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

故$(f(x),g(x))=r_2(x)=1$. ....(10分)

12. **解:** 求解$|\lambda I-A|=0$, 得$\lambda=2$(3重). ....(3分)

求解线性方程组$(2I-A)x=0$, 基础解系为$\eta_1=(0,1,0)^T,\eta_2=(1,0,1)^T$. η_1,η_2为特征值2两个线性无关的特征向量. ....(6分)

A的Jordan标准形为$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. ....(10分)

13. **解:** 令$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

…………………………………………………………………………………………(2分)

实施如下变换

$$(A\ \ I)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第2列加到第1列}]{\text{第2行加到第1行}}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列}\times 2]{\text{第2行}\times\ 2}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -6 & 0 & 2 & 0\\ -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1列}\times\text{(-1)加到第2列}]{\text{第1行}\times\text{(-1)加到第2行}}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1列加到第3列}]{\text{第1行加到第3行}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列加}\times\text{(-2)加到3列}]{\text{第2行}\times\text{(-2)加到第3行}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1,2,3行分别乘}\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt6}]{\text{第1,2,3行分别乘}\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt6}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{交换2,3两列}]{\text{交换2,3两行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

. . . . (8分)

取

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

作非退化线性替换$X = PY$，则$f(X) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

. . . . (10分)

四、证明题(每小题10分, 共30分)

14. **证:** 由于$(x-1)|f(x^n)$, 故1是多项式$f(x^n)$的根, 即$f(1^n) = f(1) = 0$. . (5分)

由于$f(1) = 0$, 故1是$f(x)$的根, 即$(x-1)|f(x)$. 从而, $(x^n - 1)|f(x^n)$. . . . .(10分)

15. **证:** 先证充分性. 设λ是A的任一特征值, x为A关于λ的特征向量, 即$Ax = \lambda x$. 由$A^m x = \lambda^m x = 0$, 得$\lambda^m = 0$, 即$\lambda = 0$. . . . . (5分)

下证必要性. 设A的Jordan标准形为

$$J = \begin{pmatrix} J(0, m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(0, m_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J(0, m_k) \end{pmatrix}.$$

则存在可逆矩阵P, 使得$A = PJP^{-1}$. 注意到对任意$i(1 \le i \le k)$, $J(0, m_i)^{m_i} = 0$. 取$m = \max_i m_i$, 则$J^m = 0$. 因此, $A^m = PJ^mP^{-1} = 0$. . . . . (10分)

15. **证:** 先证必要性. B^TAB为正定矩阵, 则对于任意$X \neq 0$, 使得

$$X^TB^TABX = (BX)^TA(BX) > 0.$$

由于A为正定矩阵, 则$BX = 0$不存在非零解. 因而, $r(B) = n$. .... (5分)

再证充分性. 若$r(B) = n$, 则$BX = 0$不存在非零解, 即任意$X \neq 0$, 则$BX \neq 0$. 由于A是正定矩阵, 则$(BX)^TA(BX) = X^TB^TABX > 0$. 因而, B^TAB为正定矩阵.
.... (10分)