

安徽大学 2024-2025 学年第 1 学期
《高等代数（上）》期中考试试卷 A 卷
(闭卷 时间 120 分钟)

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

题号	一	二	三	总分
分数				

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分).

得分

$$1. \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{i-1} & & & & \\ b_1 & \cdots & b_{i-1} & a_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ & & & a_{i+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_n & \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{注: 此行列式中, 除第 } i \text{ 行和主对角线上元素之外, 其余元素均为 } 0).$$

$$2. \text{ 设矩阵 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 则 } |A| \text{ 的所有元素的代数余子式之和为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \text{ 设 } n \text{ 为正整数, 则 } \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 则 } (A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5. \text{ 设 } n \text{ 阶矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0, \text{ 则 } A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \text{ 已知 } A, B, C \text{ 都是行列式为 } 2 \text{ 的 } 3 \text{ 阶矩阵, 则 } \begin{vmatrix} O & -3A \\ B^{-1} & C \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$7. \text{ 设 } A, B \text{ 均为可逆矩阵, 则 } \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 依次是 4 阶行列式 $|A|$ 的第 1、2、3、4 列, $\alpha_3, \alpha_1, \gamma, \alpha_2$ 依次是行列式 $|B|$ 的第 1、2、3、4 列. 又已知 $|A| = a, |B| = b$, 则行列式 $|\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, (\beta + \gamma)|$ 的值为 _____.

9. 设 E_{ij} 是一个 n 阶矩阵, 它的第 (i, j) 元素等于 1, 其他元素全为 0. 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$, 则 $E_{ij}AE_{kl} =$ _____.

10. 已知 3 阶矩阵 A 可逆, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换后得到矩阵 B , 再将矩阵 B 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得到 C , 则满足 $PA^{-1} = C^{-1}$ 的矩阵 P 为 _____.

二、计算题 (每小题 10 分, 共 30 分).

得分	
----	--

11. 问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b, \end{cases}$$

有解? 在有解的情形, 求出全部解.

12. 求 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},$$
 其中 $x_i \neq a_i, i = 1, \dots, n$.

13. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若矩阵 X 满足 $AXB = C$, 求矩阵 X .

三、证明题 (每小题 10 分, 共 40 分).

得分	
----	--

14. 求证: $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$, 其中 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

15. 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. 证明: A 与任意 n 阶方阵可交换, 即对任意 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $AB = BA$, 的充要条件是 A 为数量矩阵.

16. 已知 A 是上三角矩阵, 且设 A 的主对角元素分别为 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, 证明: 若 A 可逆时, 则 A^{-1} 也是上三角矩阵, 并且 A^{-1} 的主对角元素分别为 $a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}$.

17. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = r$, 证明:

(1) (5 分) 存在秩都为 r 的 $m \times r$ 矩阵 B 及 $r \times n$ 矩阵 C , 使得 $A = BC$.

(2) (5 分) 若 A 列满秩, 则存在 $n \times m$ 行满秩矩阵 P , 使得 $PA = I_n$, 其中 I_n 表示 n 阶单位矩阵.