

安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《数学分析（中）》考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

学号

姓名
订装超勿答题
专业
年级
院/系

线
订
装
超
勿
打
印
表

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

得分

- 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -2x, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$,
则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 _____ (填可积或不可积);
- 设 $x_n = n + (-1)^n \frac{n^2 + 3n - 1}{n}$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$;
- 曲线 $y = \ln \sin x (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的弧长为 _____;
- 已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = \frac{1}{1+x} - x \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx$ 的值为 _____。

二、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

得分

- 计算下列积分:

$$(1) \int (2^x + e^x)^2 dx;$$

$$(2) \int \sec^4 x dx;$$

$$(3) \int_1^2 \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{2x^2} dx ;$$

$$(4) \int_0^1 x \arcsin x dx$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$(6) \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx$$

三、分析与求解题（共 34 分）

得分

1. 判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）(12 分)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n^2 + 1)^n}}{3(n+1)^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^n \sqrt{n}}, \text{ 其中 } a > 0.$$

2. 判断下列反常积分的敛散性 (12 分)

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx (r > 0);$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^p} dx (p > 0).$$

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} x^{n+1}$ 的收敛域及和函数。(10 分)

四、证明题（共 20 分）

得 分

1. 设 $S_n(x) = x^n - x^{2n}$, 证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于 $S(x) \equiv 0$, 但非一致收敛。(7 分)

2. 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 中的每一个函数 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $u'_n(x) \leq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 都收敛, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。(5 分)

3. (8 分) (1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 证明: $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$;

(2) 利用上述不等式证明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续, 且 $\int_a^b f(x)dx \leq 1$, 则

$$(\int_a^b f(x)\sin xdx)^2 + (\int_a^b f(x)\cos xdx)^2 \leq 1.$$