

《数学分析(中)》期末考试试题 (B卷) 参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题4分, 共16分)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \underline{0}$ .

2. 已知  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \sin \frac{n}{3}\pi$ , 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}e}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}e}$ .

3. 已知曲线  $r = 2 \sin^3 \frac{\theta}{3}, 0 \leq \theta \leq 4\pi$  则此曲线弧长为  $\underline{4\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}}$ .

4. 已知幂级数  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n^2 \cdot 3^n}$ , 则其收敛半径为  $\underline{\sqrt[3]{3}}$ , 收敛域为  $\underline{(-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}]}$

二、计算题 (本大题有6小题, 每小题5分, 共30 分)

1.  $\int \frac{x^3 + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2} dx$

解:  $\frac{x^3 + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2} = 1 + \frac{2x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)(x+1)}$

$$\frac{2x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)} \dots\dots\dots 3\text{分}$$

对上式右端通分并与左端比较系数得  $A = -2, B = \frac{7}{3}, C = \frac{5}{3}$

所以, 原式 =  $\int 1 + \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{7}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1} dx$   
 $= x - 2 \ln |x-1| + \frac{7}{3} \ln |x-2| + \frac{5}{3} \ln |x+1| + C \dots\dots\dots 5\text{分}$

2.  $\int \sin(\ln x) dx$

解: 令  $I = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x d \sin(\ln x)$   
 $= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned}
&= x \sin(\ln x) - [x \cos(\ln x) - \int x d \cos(\ln x)] \\
&= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx \dots\dots\dots 4 \text{分}
\end{aligned}$$

即  $I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$

解得  $I = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C \dots\dots\dots 5 \text{分}$

3.  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

解: 令  $x = a \sec t$ , 则  $t = \arccos \frac{a}{x}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{a \sec t \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)}} d(a \sec t) \\
&= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \sec t \tan t \cdot a} dt \dots\dots\dots 3 \text{分}
\end{aligned}$$

$$= \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

4.  $\int \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{x^4} dx$

解: 令  $x = \frac{1}{a} \sin t$ , 则  $\cot t = \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{ax}$

$$\text{原式} = \int \frac{a^4 \sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin^4 t} d\left(\frac{1}{a} \sin t\right) \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\begin{aligned}
&= a^3 \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} dt \\
&= a^3 \int \cot^2 t \csc^2 t dt \\
&= -a^3 \int \cot^2 t d \cot t \dots\dots\dots 4 \text{分}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a^3}{3} \cot^3 t + C \\
&= -\frac{(1 - a^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + C \dots\dots\dots 5 \text{分}
\end{aligned}$$

5. 求  $\int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx$

解: 原式  $= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-3x} d(\sin 3x)$   
 $= \int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 3x dx$   
 $= -\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-3x} d(\cos 3x) \dots\dots\dots 3$ 分  
 $= \frac{1}{3} - \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx$

所以  $\int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 5$ 分

6. 求曲线  $r = 3 \cos \theta$ ,  $r = \sqrt{3} + \cos \theta$ ,  $(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$  所围图形面积.

解: 面积  $S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [(3 \cos \theta)^2 - (\sqrt{3} + \cos \theta)^2] d\theta \dots\dots\dots 3$ 分  
 $= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8 \cos^2 \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 3) d\theta$   
 $= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta - \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$   
 $= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - 3 \dots\dots\dots 5$ 分

### 三、分析与求解题 (本大题共38分)

(一)、分析级数的敛散性 (包括条件收敛与绝对收敛)

1) (7分)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n}\right)$

解: 由于  $1 - \sin \frac{\pi}{n} = 1 - 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} = \left(\sin \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{\pi}{2n}\right)^2 \dots\dots\dots 3$ 分

所以当  $n \geq 3$  时, 有  $\left(\cos \frac{\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 5$ 分

因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ , 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n}\right)$  发散.  $\dots\dots\dots 7$ 分

2) (8分)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^k n}{n}, \quad (k \text{ 是一个正整数})$

解: 该级数为交错级数, 且当  $n > e^k$  时,  $a_n = \frac{\ln^k n}{n}$  单调递减趋于零..... 5分

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n}$  发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^k n}{n}$  条件收敛. .... 8分

3) (8分)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{a}{a+b^n}, \quad (a, b > 0)$

解: (1) 当  $b > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{a}{a+b^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a+b^n}} = \frac{1}{b} < 1$

故此时原级数绝对收敛. .... 3分

(2) 当  $b = 1$  时, 原级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{a}{a+1}$ , 由于  $a_n = \frac{a}{\sqrt[n]{n}(a+1)}$  单调递减趋于零.

所以该交错级数收敛. 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n}(a+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n(a+1)}$  发散. 故此时原级数条件收敛. .... 5分

(3) 当  $0 < b < 1$  时, 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$  收敛且  $\{\frac{a}{a+b^n}\}$  单调有界, 故原级数收敛.

又  $|x_n| \sim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  发散. 故原级数条件收敛. .... 8分

## 2、分析下列广义积分的敛散性

1. (7分)  $\int_7^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^q}, \quad (p, q \in \mathbb{R}^+)$

解: 因为  $\frac{x^p}{1-x^q} = \frac{1}{x^{-p}-x^{q-p}} \sim -\frac{1}{x^{q-p}} \quad (x \rightarrow +\infty)$  ..... 4分

当  $q-p > 1$  时, 积分  $\int_7^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^q}$  收敛, 其余情形发散. .... 7分

2. (8分)  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx, \quad (r \in \mathbb{R}^+)$

解: (1) 当  $r > 1$  时,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$  绝对收敛:

因为  $\left| \frac{\cos x}{x^r} \right| \leq \frac{1}{x^r}, \quad (x \in [1, +\infty))$ , 又  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$  在  $r > 1$  时收敛, 故  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^r} \right| dx$  收敛. .... 3分

(2) 当  $0 < r \leq 1$  时,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$  条件收敛:

因为  $u \geq 1, |\int_1^u \cos x dx| = |\sin u - \sin 1| \leq 2$  又当  $r > 0$  时  $\frac{1}{x^r}$  单调递减趋于 0,  $(x \rightarrow +\infty)$ .

故由狄利克雷判别法知  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$  在  $r > 0$  时收敛. 但  $\left| \frac{\cos x}{x^r} \right| \geq \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1 + \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}$

考察积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ , 由于  $\left| \int_2^u \cos t dt \right| \leq 2, \frac{1}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$  知该积分收敛, 又因为积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  发散, 故  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^r} \right| dx$  发散.

综上, 此时  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$  条件收敛. .... 8分

#### 四、证明题 (本大题有3小题, 共20分)

1. (7分) 设  $S_n(x) = x^n - x^{2n}$ . 证明:  $\{S_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上逐点收敛于  $S(x) \equiv 0$ , 但非一致收敛.

**证明:** 首先, 容易看出  $\lim_n S_n(x) = 0$ , 当  $x = 0$  或  $1$  时. 又易见, 当  $x \in (0, 1)$  时,

$$|x^n - x^{2n}| < x^n + x^{2n} < 2x^n.$$

另一方面,  $\forall \epsilon > 0, N = \lceil \frac{\ln \epsilon}{\ln x} \rceil, \forall n > N, x^n < \epsilon$ . 所以,  $\lim_n S_n(x) = 0, \forall x \in (0, 1)$ . .... 4分

另外, 取序列  $\{x_n = (1 - 1/n)^n\}_{n \geq 2}$ . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \neq 0.$$

所以,  $\{S_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上非一致收敛. .... 7分

2. (5分) 设函数列  $\{u_n(x)\}$  中的每一个函数  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $u'_n(x) \leq 0$ . 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  均收敛, 证明: 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

**证明:** 由于  $\sum_n u_n(x)$  在  $x = a$  和  $x = b$  处均收敛, 因而据 Cauchy 收敛原理知,  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N$ , 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(a) \right| < \epsilon, \quad \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(b) \right| < \epsilon.$$

..... 3分

另一方面, 由于每一个函数  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $u'_n(x) \leq 0$ . 故而  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上单调. 因此,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(a) \right|, \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(b) \right| \right\},$$

即知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛. .... 5分

3. (8分) 设  $r \in \mathbb{R}$ . 已知非负函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续; 若  $\int_a^b f(x) dx \leq 1$ , 则

$$\left( \int_a^b f(x) \cos rx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \sin rx \right)^2 \leq 1.$$

**证明:** 易见  $\forall u \in \mathbb{R}, \int_a^b (uf(x) + g(x))^2 dx \geq 0$ . 即知,

$$u^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2u \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0.$$

因之, 其判别式恒非正. 亦即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x) \cos kx dx\right)^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \left(\sqrt{f(x)} \cos kx\right) dx\right)^2 \\ &\leq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \cos^2 kx dx \\ &\leq \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx.\end{aligned}$$

..... 5分

同理,

$$\left(\int_a^b f(x) \sin kx dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x) \sin^2 kx dx.$$

所以,

$$\left(\int_a^b f(x) \cos rx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin rx\right)^2 \leq \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx + \int_a^b f(x) \sin^2 kx dx \leq 1.$$

..... 8分