

安徽大学2015-2016学年第二学期
《高等代数（下）》考试试卷（A卷）

（闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（每小题4分，共20分）

得分

1. 设欧氏空间 \mathbb{R}^3 的内积定义为 $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3)$, 则向量 $(1, -1, 1)$ 的长度为_____.
2. 设矩阵 A 的初等因子组为 $(\lambda + 1), (\lambda - 2)^2, (\lambda - 2)^4, (\lambda + 2), (\lambda + 2)^3$, 则 A 的极小多项式为_____.
3. 设多项式 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3$. 则 $f(x)$ 的有理根为_____.
4. 设 A 为4阶实对称矩阵, 且 A 的特征值为 $-3, -1, 0, 2$. 则 $xI_4 + A$ 为正定矩阵的充分必要条件是_____.
5. 已知3阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 0$. 设 $f(x) = x^2 - 2x$, $B = f(A)$, 则 B 的特征值为_____.

二、选择题（每小题3分，共15分）

得分

6. 设 \mathbb{F} 为数域, $p(x), f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $p(x)$ 为不可约多项式, 则下列说法不正确的是 ()
 - (A) 若 $p(x) | f^k(x)$, $k \geq 2$, 则 $p(x) | f(x)$.
 - (B) 若 $p(x)$ 的次数大于1, 则 $p(x)$ 在 \mathbb{F} 中无根.
 - (C) $(p(x), f(x)) = 1$, 或者 $(p(x), f(x)) = p(x)$.
 - (D) $p'(x)$ 也是不可约多项式.

7. 设 A 为 n 阶正交阵. 则下列说法不正确的是 ()
- (A) 若 n 为奇数, 则 A 必有实特征向量. (B) A 的实特征值只能是1或者-1.
- (C) 若复数 $a + bi$ 为 A 的特征值, 则 $a^2 + b^2 = 1$. (D) 若 n 为偶数, 则 A 没有实特征向量.
8. 设 \mathcal{A} 为复线性空间 V 上的线性变换. 则不能作为 \mathcal{A} 可对角化等价条件的是 ()
- (A) \mathcal{A} 的每个根子空间的维数都等于对应特征值的几何重数.
- (B) \mathcal{A} 的极小多项式的根都是单根.
- (C) \mathcal{A} 的特征多项式的根都是单根.
- (D) \mathcal{A} 的初等因子都是一次因式.
9. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$, 其中 A_1 为 $n-1$ 阶实对称阵, α 为 $n-1$ 维实列向量. 则 A 为正定阵的充分必要条件是 ()
- (A) A 的正惯性指数等于 A 的秩. (B) A 的所有特征值都是非负数.
- (C) A_1 为正定阵, 且 $|A| > 0$. (D) A_1 为正定阵, 且 $a_{nn} > 0$.
10. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 且 A 与 B 合同, 则 A 与 B 有相同的 ()
- (A) 行列式的符号. (B) 特征值. (C) 迹. (D) 各阶顺序主子式.

三、计算题 (每小题10分, 共40分)

得分	
----	--

11. 设 $f(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 1$, $g(x) = x^4 + 3x^2 + 2$. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式($f(x), g(x)$).

12. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的Jordan标准形.

13. 设 $\mathbb{F}^{2 \times 2}$ 为 \mathbb{F} 上全体 2×2 矩阵构成的线性空间. 对于任意 $A, B \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$, 定义双线性函数 $f(A, B) = \text{trace}(A^T B)$. 求 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的度量矩阵, 其中 E_{ij} 为 (i, j) 位置为 1, 其余位置为 0 的 2×2 矩阵.

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵.

四、证明题(第15题10分, 第16题15分, 共25分)

得分

15. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 均为欧氏空间 V 上线性变换，且对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{B}(\beta))$.
 证明：若 W 为 \mathcal{A} 的不变子空间，则 W 的正交补 W^\perp 为 \mathcal{B} 的不变子空间.

线.....线.....订.....装.....题.....答.....勿.....超.....装.....

16. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$. 证明:

(1) A 的特征值只能是1或0;

(2) A 可对角化;

(3) $\text{trace}(A) = \text{rank}(A)$.