

# 安徽大学 2021—2022 学年第一学期数学分析（上）

## 期末试卷（B 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 9 分）

1. 设  $E = \{\frac{\ln n}{n} | n = 2, 3, \dots\}$ , 则  $\inf E = \underline{0}$ ;

2. 曲线  $y = (x+1)e^{\frac{2}{x}}$  的斜渐近线的方程是  $\underline{y = x + 3}$ ;

3. 设  $y = \sec^3 x$ , 则  $dy = \underline{3\sec^3 x \tan x dx}$ 。

二、计算题（共 48 分）

1、计算数列极限（每小题 6 分）

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 5n^2 - 1}{3n^4 + n + 3}$ ;

解：原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{3 + \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = \frac{2}{3}$ 。 .....6 分

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n})$ ;

解：由于  $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq n(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}) \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$ ,

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$ , 所以由夹逼定理得

$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}) = 1$ 。 .....6 分

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sin^4 n + \cos^4 n}$ ;

解：因为  $0 < \sin^4 n + \cos^4 n = 1 - 2\sin^2 n \cos^2 n = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2n > \frac{1}{2}$ , 故

$0 < \frac{1}{\sin^4 n + \cos^4 n} < 2$ 。又  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$ , 故知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sin^4 n + \cos^4 n} = 0$ 。

.....6 分

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n! - n \ln(n+1)}{n}。$$

解：利用 Stolz 定理可得：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n! - n \ln(n+1)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)! - (n+1) \ln(n+2) - [\ln n! - n \ln(n+1)]}{n+1-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \ln(n+1) - (n+1) \ln(n+2)] = -\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = -1。 \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

2、计算函数极限（每小题 6 分）：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{5x^3 + 4x^2 + \sin x}；$$

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{\sin x}{x^3}} = \frac{1}{5}。 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \ln \sin x}{x^2}；$$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x - \ln \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(x^3)'} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{6}。 \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(2x+1) \right]^x；$$

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(2x+1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(2x+1) \right]}。$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(2x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(2x+1) \right]}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \ln \frac{2}{\pi} + \ln[\arctan(2x+1)] \right)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\arctan(2x+1) \cdot [1 + (2x+1)^2]} = -\frac{1}{\pi}，$$

故原式 =  $e^{-\frac{1}{\pi}}$ 。 .....6 分

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x} - x \ln(1+x)}{x^3}$ 。

解：由于  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) (x \rightarrow 0)$ ，

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) (x \rightarrow 0)，$$

$$x \ln(1+x) = x(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) (x \rightarrow 0)，$$

$$\text{故原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}。 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

三、求解题（每小题 10 分，共 20 分）：

1. 设  $x = e^t(1 - \cos t)$ ,  $y = e^t \sin t$ ，求由此参数方程确定的函数的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ；

解：  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(1 - \cos t + \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{1 - \cos t + \sin t}$ ， .....4 分

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin t + \cos t}{1 - \cos t + \sin t} \right) = \left( \frac{\sin t + \cos t}{1 - \cos t + \sin t} \right)'_t \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{(\cos t - \sin t)(1 - \cos t + \sin t) - (\sin t + \cos t)(\sin t + \cos t)}{(1 - \cos t + \sin t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(1 - \cos t + \sin t)} \\ &= \frac{\cos t - \sin t - 2}{e^t(1 - \cos t + \sin t)^3}。 \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

2. 设  $y = x^2 \sin 3x$ ，求  $y^{(50)}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} y^{(50)} &= (x^2 \sin 3x)^{(50)} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k (\sin 3x)^{(50-k)} (x^2)^{(k)} \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= C_{50}^0 (\sin 3x)^{(50)} x^2 + C_{50}^1 (\sin 3x)^{(49)} (x^2)' + C_{50}^2 (\sin 3x)^{(48)} (x^2)'' \\ &= 3^{50} x^2 \sin(3x + \frac{50\pi}{2}) + 100 \cdot 3^{49} x \sin(3x + \frac{49\pi}{2}) + 2450 \cdot 3^{48} \sin(3x + \frac{48\pi}{2}) \\ &= 3^{48} (-9x^2 \sin 3x + 300x \cos 3x + 2450 \sin 3x)。 \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

四、分析与证明题（共 23 分）：

1. (1) 证明  $\cos x^2$  在  $[0, +\infty)$  上不一致连续；

(2) 问  $\alpha$  取什么值时， $x^\alpha \sin \sqrt{x}$  在  $(0, 1]$  上一致连续。（9 分）

证明:

(1) 令  $x'_n = \sqrt{2n\pi}$ ,  $x''_n = \sqrt{2n\pi + \pi}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{2n\pi + \pi}} = 0,$$

但  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(x'_n)^2 - \cos(x''_n)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2 \neq 0$ , 故  $\cos x^2$  在  $[0, +\infty)$  上不一致连续。.....5 分

(2) 由于  $x^\alpha \sin \sqrt{x}$  在  $(0, 1]$  上连续, 又因为:

当  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha + \frac{1}{2}}$  存在;

当  $\alpha < -\frac{1}{2}$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha + \frac{1}{2}} = +\infty$ ,

所以当  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$  时,  $x^\alpha \sin \sqrt{x}$  在  $(0, 1]$  上一致连续。.....4 分

2. 设  $f(x)$  满足:  $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(2n-1)}(a) = 0$ ,  $f^{(2n)}(a) \neq 0$ ,  $n$  为某一正整数, 证明:

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}} = \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}$ ;

(2)  $x = a$  为  $f(x)$  的极值点。(7 分)

证明: (1) 由 Taylor 公式知, 当  $x \rightarrow a$  时,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n} + o((x-a)^{2n}) \\ &= f(a) + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n} + o((x-a)^{2n}), \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}} = \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^{2n})}{(x-a)^{2n}} = \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}$ 。.....3 分

(2) 由 (1) 及题给条件知,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}} = \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} \neq 0$ 。

当  $f^{(2n)}(a) > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}} > 0$ , 可知存在  $\delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x-a| < \delta_1$  时,

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2n}} > 0, \quad f(x) - f(a) > 0, \quad f(x) > f(a), \quad \text{可见 } x = a \text{ 为 } f(x) \text{ 的极小值点。}$$

当  $f^{(2n)}(a) < 0$  时, 类似易知,  $x = a$  为  $f(x)$  的极大值点。.....4 分

3. 设  $f(x)$  在  $[0, 4]$  上连续, 在  $(0, 4)$  上可导,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ , 且  $f(0) = f(4)$ , 证明:

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 4], |f(x_1) - f(x_2)| \leq 1. \quad (7 \text{ 分})$$

证明:  $\forall x_1, x_2 \in [0, 4]$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 根据 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_2 - x_1), \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

再分别在  $[0, x_1]$  及  $[x_2, 4]$  上使用 Lagrange 中值定理,  $\xi_2 \in (0, x_1)$ ,  $\xi_3 \in (x_2, 4)$ , 使得

$$f(x_1) - f(0) = f'(\xi_2)x_1, \quad f(4) - f(x_2) = f'(\xi_3)(4 - x_2),$$

从而有  $|f(x_1) - f(0)| \leq \frac{1}{2}x_1$ ,  $|f(4) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}(4 - x_2)$ . .....4 分

由于  $f(0) = f(4)$ , 故有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(4)| + |f(0) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}(4 - x_2) + \frac{1}{2}x_1,$$

由前面又有,  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ , 故知

$$2|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}(4 - x_2) + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = 2,$$

所以  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$ . .....3 分