

参考答案与评分标准

一、填空题 (每空 4 分, 填写不完整或结果没有化简均不得分)。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 10 & 55 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad 4, 2, 3, 3, 2.$$

二、简答题 (每小题 5 分, 判断正误 1 分, 说明理由 4 分, 可酌情给分)。

1. 错误。例如: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = O$ 。
2. 错误。例如: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。 $Ax = 0$ 的解 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Bx = 0$ 的解 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。两个解集不同, A 与 B 相抵。
3. 正确。由两个向量组等价, 得它们有相同的秩 r 。 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是线性相关的 $\Leftrightarrow r < k \Leftrightarrow \beta_1, \dots, \beta_k$ 是线性相关的。
4. 错误。例如: 设 $m \neq n$, φ 是零映射, 则 $\text{Ker}\varphi$ 与 U 同构, $V/\text{Im}\varphi$ 与 V 同构。

三、解答题 (每小题 16 分, 需给出详细解答过程, 可酌情给分。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。)

1. $A = \alpha^T \beta - I$, 其中 $\alpha = (1, 2, \dots, n)$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n})$ 。
 $|A| = (-1)^n |I - \alpha^T \beta| = (-1)^n (1 - \beta \alpha^T) = (-1)^n (1 - n) \neq 0$ 。故 A 可逆。
设 $A^{-1} = \lambda \alpha^T \beta - I$, 由 $A^{-1} A = I$ 可解得 $\lambda = \frac{1}{\beta \alpha^T - 1} = \frac{1}{n-1}$ 。
故 $A^{-1} = (b_{ij})$, 其中 $b_{ij} = \begin{cases} \frac{2-n}{n-1}, & i = j \\ \frac{i}{j(n-1)}, & i \neq j \end{cases}$ 。
(3 分) (5 分) (5 分) (3 分)
2. f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 在 V 的基 $x^2, x, 1$ 下的坐标分别构成方阵
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ 。
 $\det(A) = -4$, $\det(B) = 4$ 。故 f_1, f_2, f_3 和 g_1, g_2, g_3 都是 V 的基。
从 f_1, f_2, f_3 到 g_1, g_2, g_3 的过渡矩阵 $P = A^{-1}B$ 。
经计算 A^{-1} 或解线性方程组 $AX = B$, 可得 $P = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 15 \\ -8 & -15 & -24 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ 。
(4 分) (4 分) (3 分) (5 分)
3. $\text{Im}\varphi = \{X \in V | X^T = X\}$, $\dim(\text{Im}\varphi) = \frac{n(n+1)}{2}$ 。
 $\text{Ker}\varphi = \{X \in V | X^T = -X\}$, $\dim(\text{Ker}\varphi) = \frac{n(n-1)}{2}$ 。
对于任意 $X \in V$, $X = Y + Z$, 其中 $Y = \frac{1}{2}(X + X^T) \in \text{Im}\varphi$, $Z = \frac{1}{2}(X - X^T) \in \text{Ker}\varphi$ 。
故 $V = \text{Im}\varphi + \text{Ker}\varphi$ 。
另外, 若 $X \in \text{Im}\varphi \cap \text{Ker}\varphi$, 则 $X = O$ 。综上, $V = \text{Im}\varphi \oplus \text{Ker}\varphi$ 。
(4 分) (4 分) (4 分) (4 分)