安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等代数（下）》考试 A 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $x=2$；　　2. $y=-2$；3. $B=2\lambda^2-3\lambda+4$；　4. 个数为 1；　5. C_1。

二、简答题（每小题 5 分，共 15 分）

6、答：（1）有 n 个线性无关的特征向量；（2）有 n 个不同的特征值；（3）有 n 个特征值，且每个特征值的代数重数等于几何重数；（4）有 n 个特征值，且 σ 的最小多项式是互不相同的一次因式的乘积；（5）空间 V 可以分解成特征子空间的直和。

7、答：（1）A 的正惯性指数为 n；（2）合同于单位矩阵；（3）A 的所有顺序主子式全大于 0；（4）A 的所有主子式全大于 0；（5）存在可逆矩阵 P 使得 $A=PP^T$。

8、答：（1）保持长度不变，即 $\|\sigma(\alpha)\|=\|\alpha\|$；（2）保持内积不变，即 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$；（3）将标准正交基变为标准正交基；（4）在任意标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

9、解：用辗转相除法得 $u(x)=-\dfrac{1}{3}(x-1)$ 和 $v(x)=\dfrac{1}{3}(2x^2-2x-3)$，　…………5 分

并求得 $\big(f(x),g(x)\big)=x-1$。　…………10 分

注：省略的部分视具体步骤给分。

10、解：（1）先求出行列式因子：$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1, D_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$，

接着求出不变因子：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$。　…………5 分

（2）写出初等因子组：$(\lambda-1)^4$。　…………7 分

（3）写出 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 或 $J=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$　…………10 分

注：没有过程，只写出 Jordan 标准形的给 3 分。

11、解：先求矩阵的特征值与特征向量.

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$。 ………3 分

对于特征值 $\lambda_1=1$，求解齐次线性方程组 $(I-A)X=0$, 解出两个线性无关的特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T, \alpha_2=(0,1,2)^T$。

对于特征值 $\lambda_2=2$，求解齐次线性方程组 $(2I-A)X=0$，解出 $\alpha_3=(2,1,1)^T$ 为属于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量。 ………6 分

令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，于是

$$A^n = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^n \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4+2^{n+2} & 2-2^{n+1} \\ 0 & -1+2^{n+1} & 1-2^n \\ 0 & -2+2^{n+1} & 2-2^n \end{bmatrix}。$$ ………10 分

12、解：(1) 该二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，特征多项式为 $|\lambda I_3 - A| = \lambda(\lambda-3)^2$，

故 A 的特征多项式为 $\lambda_1=3$（二重），$\lambda_2=0$。 ………3 分

属于特征值 $\lambda_1=3$ 的线性无关特征向量为 $\alpha_1=(1,1,0)^T, \alpha_2=(1,0,1)^T$；属于特征值 $\lambda_2=0$ 的特征向量为 $\alpha_3=(-1,1,1)^T$。 ………6 分

对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作 Schmidt 正交化得

$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)^T$,

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(1,-1,2)^T$,

$\beta_3=\alpha_3=(-1,1,1)^T$。 一个特征值对应一类标准正交基

再单位化得

$$\xi_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T, \xi_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T, \xi_3=(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T。$$

令$Q=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$，作正交线性替换$X=QY$，则原二次型可化为

$$3y_1^2+3y_2^2.$$ …………10 分

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

13、证明：先写出n元二次型的矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}。$$ ………5 分

它的顺序主子式为

$$D_1=1>0, D_2=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0,\cdots,D_k=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}_k=\frac{k+1}{2^k}>0,\ k=3,4,\cdots,n。$$

故A是正定矩阵。 …………10 分

14、证明：先令$x=y-1$，代入$f(x)=x^p+px+1$ …………3 分

得到$g(y)=f(y-1)=y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}-\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p$。 ………6 分

由于p为素数，（1）p不能整除 1；（2）$p\,|\,C_p^1, p\,|\,C_p^2,\cdots,p\,|\,C_p^{p-2}, p\,|\,(C_p^{p-1}+p), p\,|\,p$；

（3）p^2不能整除p，故$g(y)$在有理数域上不可约。 …………8 分

从而$f(x)$在有理数域上不可约。 …………10 分

五、开放性试题（10 分）

15、答:（1）欧式空间内积的定义是，欧式空间上的一个二元正定的双线性函数称为内积；或欧式空间上的一个二元实值线性函数，满足对称性，齐次性，可加性和非负性，则该函数称为欧式空间的内积。 …………4 分

（2）引入内积的意义主要体现在三个方面：（i）使得欧式空间的向量具有长度，夹角，距离等度量概念,弥补了一般线性空间中向量的度量性质的缺失；（ii）使得欧式空间具有标准正交基，从而为研究欧式空间提供了很多方便；（iii）可以在欧式空间中研究一些特殊的变换，如正交变换和对称变换，从而极大地丰富了欧式空间的研究内容，同时也拓广了与其他一些问题的研究，如二次型，实对称矩阵等之间的联系。 …………10 分