学号 ______ 姓名 ______ 专业 ______ 年级 ______ 院/系 ______

答 题 勿 超 装 订 线

装 ---- 订 ---- 线

安徽大学 2013—2014 学年第二学期

《 数学分析（中） 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	五	六	总 分
得　分							
阅卷人							

一、填空题（每小题 4 分，共 12 分）

得 分	

1. 设 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n=$ ________，$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n=$ ________.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\dfrac{1}{n+n}\right)$ 的值为________________.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos^2 t dt}{\sin x}$ 的值为________.

二、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

得 分	

1. 试求 $\int\arctan x dx$

2．试求$\int_0^{8\pi}|\sin x|dx$

3. 求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx$

4．试求$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

得 分	

三、应用题（6 分）

求心脏线 $r=a(1-\cos\theta), 0\le\theta\le 2\pi$ 的弧长.

得 分	

四、讨论题（共 30 分）

1. 下列级数的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 6 分，共 18 分）

（1）. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

(2). $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$

(3). $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$

2.求下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 6 分，共 12 分）

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$ （ $\alpha>0$ ）

（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ （ $p>0,q>0$ ）

五、分析题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

1. 试分析函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\sin nx$ ，$x\in(0,+\infty)$ 的连续性, 可导性.

2.求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$ 的收敛域，并求和函数.

得 分	

六、证明题（每小题各 6 分，共 12 分）

1.证明：级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-\mathrm{x})$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，但 $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n(1-\mathrm{x})$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

2.设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，证明不等式：

（1）Schwarz 不等式：$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$ ；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，$f(a)=0$，利用 Schwarz 不等式，

证明：$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b\left[f'(x)\right]^2 dx$.