安徽大学2018-2019学年第二学期
《高等代数（下）》期中考试试卷

（闭卷　时间100分钟）

一、计算题.

1. (5分) 设多项式$f(x)=2x^3-3x^2+4x+3$. 求$f(x)$的有理根.

2. (5分) 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,b_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$都是$n$维列向量，矩阵$A=\alpha\beta^T+I_n$. 求$A$的所有特征值.

3. (10分) 设$f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$, $g(x)=x^3-x^2-4x+4$. 求$(f(x),g(x))$, 以及$u(x),v(x)$，使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

4. (10分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&0&4&-1\\0&-1&4&-1\\0&0&3&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

   (1) 求A的特征值与特征向量;　(2) 求A的Jordan标准形.

5. (20分) 设矩阵A的初等因子组为$(\lambda-2)$, $(\lambda+3)$, $(\lambda+3)$, $(\lambda-2)^2$, $(\lambda+3)^3$.

   (1) 求A的Jordan标准形.

   (2) 求A的不变因子与行列式因子.

   (3) 求A的特征多项式与极小多项式.

   (4) 求A所有特征子空间的维数.

二、证明题.

1. (10分) 设$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)$, 且$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)$两两互素, $g_i(x)=\dfrac{f(x)}{f_i(x)}$, $i=1,2,\cdots,k$. 证明: $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_k(x)$互素.

2. (10分) 设多项式$f(x)=x^p+px+2p-1$. 证明：若p为素数，则$f(x)$在有理数域$\mathbb{Q}$上不可约.

3. (10分) 设$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\varphi(x)\in\mathbb{F}[x]$. 证明：若$\lambda_0$是$A$的特征值, 则$\varphi(\lambda_0)$是$\varphi(A)$的特征值.

4. (20分) 设$\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换，且$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$. 证明：

   (1) $V=\mathrm{Ker}\mathscr{A}\oplus\mathrm{Im}\mathscr{A}$.

   (2) $\mathscr{A}$可对角化.

   (3) $\mathscr{A}$在任一组基下的矩阵A满足$\mathrm{rank}A=\mathrm{trace}(A)$.