

安徽大学 2009—2010 学年第二学期

《 数学分析 (中) 》考试试卷 (B 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							
阅卷人							

一、填空题 (每空 5 分, 共 15 分)

得 分	
-----	--

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$ 的值为_____.

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 点的幂级数展开为_____.

3. 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1+x}} dx$ 收敛, 则 α 的范围为_____.

二、计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

得 分	
-----	--

1. 试求 $\int_1^3 \frac{1}{x+x^2} dx$.

2. 试求 $\int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{(x^4 + 2x^2 + 1)} dx$

3. 求积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

4. 试求 $\int_0^1 |x-a| \cdot x dx$

三、应用题 (11 分)

得分	
----	--

求旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$
的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长。

得 分	
-----	--

四、讨论下列级数的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 5 分，共 15 分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

2. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, 其中 $x \in (0, \pi)$, $\alpha > 0$

五、分析题（每小题 10 分，共 30 分）

得 分	
-----	--

1. 试求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ 的收敛域及和函数.

2. 问参数 α 取什么值时，函数序列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

在 $[0,1]$ 上

(i) 一致收敛

(ii) 可以在积分号下取极限，即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

3. 确定函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x}$ 的定义域及其在定义域上的连续性和可微性。

得分	
----	--

六、证明题（5 分）

证明：若 f 在 $[a, b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b xf(x) dx = 0$ ，则在 $[a, b]$ 内至少存在两点 x_1, x_2 ，使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 。