安徽大学 2016-2017 学年第一学期

《数学分析(上)》期末考试试题（A卷）参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题4分，共16分)

1. 设$S=\{\sin x \mid 0<x<\frac{3}{4}\pi\}$, 则$S$的最大值是___1___, 下确界是___0___.

2. 设$f(x)=\sqrt{x^2+x}-3x$, 则当$C=$ ___-2___, $p=$ ___1___时, $f(x)$等价于Cx^p $(x\to\infty)$.

3. 已知抛物线方程 $y=3x^2-2x+1$. 则过此抛物线上$(1,2)$点的法线方程是___$x+4y-9=0$___.

4. 设 $\begin{cases} x &= a\cdot\cos\sqrt{t} \\ y &= b\cdot\sin\sqrt{t} \end{cases}$, $0<t<\pi/2$. 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ___$-\dfrac{b}{a}cot\sqrt{t}$___.

二、求以下数列的极限（本大题有4小题，共24分）

1. 解：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+3n+1}{2n^3-n^2-2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot\dfrac{1}{n}+3\cdot\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n}-2\cdot\dfrac{1}{n^2}-3\cdot\dfrac{1}{n^3}}\quad\cdots\cdots 4分$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots 6分$$

2. 解：当 n 为偶数时，
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\quad\cdots\cdots 1分$$

当 n 为奇数时，
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\quad\cdots\cdots 2分$$

故有 $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{n+1}\cdot 2$ $\cdots\cdots$ 5分

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+2}=0$,所以原式极限为 0 $\cdots\cdots$ 6分

3.令 $x_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n+2)^2$, $y_n = n^3$. 显见 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的无穷大量.因之考虑到用$Stolz$定理,即先计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$. 3分

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+2)^2}{n^3 - (n-1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+8n+4}{3n^2-3n+1} = \dfrac{4}{3}$. 5分

故根据$Stolz$定理有， $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{4}{3}$ 6分

4. 解：分析极限中的和式 $\dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{2n+1}}$,

易见, $$\frac{n}{n+\sqrt{2n+1}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{2k+1}} \le \frac{n}{n+1}$$ 3分

而显然 $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{2n+1}} = 1,$$ 5分

故知原式极限是 1. .... 6分

三、求以下函数的极限（本大题有4小题，共24分）

1.解：由二项式定理 $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^{n-k} b^k$, 知

$$(1-\alpha x^3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha^k x^{3k}$$ 2分

将之代入原式即得

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha^k x^{3k} - 1 \right] = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha^k x^{3(k-1)}$$ 5分

$$= -\alpha + \sum_{k=2}^{n} \lim_{x\to 0} (-1)^k \alpha^k x^{3(k-1)} = -\alpha\ .$$ 6分

2.解：显然，当 $x \to 0$ 时， $\sin 2x$与 $\tan 4x$ 均为无穷小量,故可利用 $L'Hospital$ 法则,........... 1分

得 $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x \cdot 2}{\sec^2 4x \cdot 4}$$ 5分

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \cos^2 4x = \frac{1}{2}$$ 6分

3.解：显然,当 $x \to 0$ 时 $\cos x - \sec x$与 $\ln(1-x^2)$ 均为无穷小量,故可利用 $L'Hospital$ 法则,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sec x}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\tan x\cdot\sec x}{\dfrac{-2x}{1-x^2}}\cdots\cdots 1分$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)(\sin x+\tan x\cdot\sec x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1-x^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdots\cdots 5分$$

$$=\frac{1}{2}\cdots\cdots 6分$$

4.解：利用$Taylor$公式处理分子各项有,

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$， $x\cdot e^x=x+x^2+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{6}+o(x^4)$

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$， $\left(1-\dfrac{6}{x}\right)\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)-6+x^2-o(x^3)$ …… 4分

由上知原式等于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(x+x^2+\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\left(-6+x+x^2-\dfrac{x^3}{6}-o(x^3)\right)-6\right]$…… 5分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right]=\frac{2}{3}\cdots\cdots 6分$$

四、计算题（本大题有2小题，共12分）

1. 解：据题设条件知$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+1}{x^2+x}$ …… 3分

因之, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cdot(x^2+x)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$…… 5分

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2+2x-4x^2-4x-1}{(x^2+x^2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}\cdots\cdots 6分$$

2.解：方程两边对 x 求导,得

$$y'\sin x+y\cdot\cos x+e^y+xe^y\cdot y'=0\cdots\cdots 4分$$

整理以上方程, $y'(\sin x+xe^y)=-(e^y+y\cdot\cos x)$

故而有 $y'=\dfrac{y\cdot\cos x+e^y}{\sin x+xe^y}$ …… 6分

五、证明题（本大题有3小题，共24分）

1. 证明：由于f,g在$[a,b]$上连续,故而其亦在$[a,b]$上一致连续.

即$\forall\epsilon,\exists\delta_f,\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta_f,|f(x')-f(x'')|<\epsilon$

$\exists\delta_g,\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta_g,|g(x')-g(x'')|<\epsilon$ 4分

取$\delta=min\{\delta_f,\delta_g\}$,则当$|x'-x''|<\delta$时, ... 5分

$|[pf(x')+qg(x')]-[pf(x'')+qg(x'')]|=|p(f(x')-f(x''))+q(g(x')-g(x''))|$

$\leq p|f(x')-f(x'')|+q|(g(x')-g(x'')|<(p+q)\epsilon$ 7分

又因为 p 与 q 是给定的实数,故据定义知 $pf+qg$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 8分

2.证明：据已知条件,f在(a,b)内只有有限个不可导点,不妨设之为$x_1\cdots x_n$. . . . . 1 分

因此,f在$[a,x_1]$上连续,(a,x_1)内可导.则据$Lagrange$定理有$\xi_1\in(a,x_1)$

$s.t.$ $\qquad f(x_1)-f(a)=f'(\xi_1)(x_1-a)$

基于同样的原因,易见$\exists\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$ $s.t.,f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\qquad k=2,3,\cdots,n.$
而对$[x_n,b]$,亦有$\xi_{n+1}\in(x_n,b)$ $s.t.,$ $f(b)-f(x_n)=f'(\xi_{n+1})(b-x_n)$ 6分

所以$|f(b)-f(a)|\leq(x_1-a)|f'(\xi_1)|+(x_2-x_1)|f'(\xi_2)|+\cdots+(b-x_n)|f'(\xi_{n+1})|$

取$\xi\in\{\xi_1,\ldots\xi_{n+1}\}$ $s.t.,$ $|f'(\xi)|\geq|f'(\xi_k)|,$ $k=1,\cdots,n+1.$

使得 $\qquad |f(b)-f(a)|\leq|f'(\xi)|\cdot(b-a)$ 8分

3.证明：由已知条件,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,知$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

又因为$f''(x)$存在.故而$f(x)$在$x=0$处连续.所以$f(0)=0$. 3分

再注意到$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\dfrac{f(x)}{x}=1$ 5分

故据$Taylor$公式有, $\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2=x+f''(\xi)\cdot\dfrac{x^2}{2}$ 7分

另据已知条件 $f''(x)<0$,故而$f(x)\leq x$ 8分