

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

得 分

1. 1. 设 $y = xe^{-2x}$ ，则 $dy =$ _____；

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x < 0, \\ a + b \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，
则 $a =$ _____， $b =$ _____；

3. 设 $E = \{\frac{2^n}{n!} | n = 2, 3, \dots\}$ ，则 $\sup E =$ _____， $\inf E =$ _____。

二、计算题

得 分

1、计算数列极限（每小题 6 分）

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{4n^2 - n - 1}$ ；

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{3}} + \dots + \frac{1}{n+\frac{1}{n}})$ ；

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \sin n$ ；

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{n^4+1}$$

2、计算函数极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-1}{x^3+4x+3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \tan 5x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

三、求解题

得 分	
-----	--

1. 设 $x = t - \sin t, y = t \cos t$, 求由此参数方程确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$; (10 分)

2. 确定曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 上凸区间和下凸区间, 并求其拐点。(11 分)

四、分析与证明题

得分	
----	--

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n} (n=1,2,\cdots)$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛。

2. 证明:

(1) 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}] = 0$;

(2) 函数 x^3 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导、有界, 并且满足 $|2f(x) + f'(x)| \leq 1 (\forall x \in (-\infty, +\infty))$, 证明:

(1) 对于 $a < b$, 有 $|e^{2b}f(b) - f(a)e^{2a}| \leq \frac{1}{2}(e^{2b} - e^{2a})$;

(2) $\forall x \in (-\infty, +\infty), |f(x)| \leq \frac{1}{2}$ 。