安徽大学 2022—2023 学年第一学期《数学分析（上）》
期末考试 A 卷参考答案

一、 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \square$, s.t. $n > N$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$. 故 $n > N$ 时，

$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$

二、 计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = e^2.$$

3. $5^n < 2^n + 3^n + 5^n < 3\cdot 5^n \Rightarrow 5 < \left(2^n+3^n+5^n\right)^{\frac{1}{n}} < 5\cdot\sqrt[n]{3}.$ 由两边夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n+5^n)^{\frac{1}{n}} = 5.$$

4. $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{\tan x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\tan x}\ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}x} = e^3.$$

5. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x/\sin x}{2(\pi-2x)(-2)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2} = -\frac{1}{8}.$$

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot 2x} = \frac{1}{2}.$$

三、计算与求解（每小题 7 分，共 21 分）

1. $$\left(xe^{3x}\right)^{(20)} = C_{20}^0 x(e^{3x})^{(20)} + C_{20}^1 x'(e^{3x})^{(19)} = 3^{19}e^{3x}(3x+20).$$

2.

$$(1+ax)\cdot\ln(1+x) = (1+ax)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) = x+(a-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{3}-\frac{a}{2})x^3+o(x^3)$$

$$= x+bx^2+o(x^3). \quad \Rightarrow \begin{cases} a-\frac{1}{2}=b \\ \frac{1}{3}-\frac{a}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{1}{6} \end{cases}$$

3. $x+y+\sin y = 1$ 求导得：$y' = -\dfrac{1}{1+\cos y}$. 故在 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $-\dfrac{1}{2}$. 于是

切线方程为$y=-\frac{1}{2}(x-1)$.或者写为$x+2y-1=0$.

四、分析与证明题(共 37 分).

1.显然$x+p+q\cos x$在$-\left(|p|+|q|+1\right)$取值为负，在$\left(|p|+|q|+1\right)$取值为正，由连续函数介值定理知，$x+p+q\cos x=0$有一个实根. 若有两个实根，则由 Rolle 中值定理知，存在ξ,使得$\left(x+p+q\cos x\right)'(\xi)=0\Rightarrow 1=q\sin\xi$.这与$0<q<1$矛盾.故有且仅有一个实根.

2.令$f(x)=e^x-x-1$,则$f'(x)=e^x-1\begin{cases}>0, & x>0\\ <0, & x<0\end{cases}$，即$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增.故$x=0$是$f(x)$的最小值点. 故有

$f(x)\ge f(0)=0.\Rightarrow e^x\ge x+1$.

3.证明:令$g(x)=f(x)-x$.则$g(x_0)=f(x_0)-x_0>0,\ g(1)=f(1)-1=-1<0$.由介值定理知，$\exists\eta\in(x_0,1)$,s.t.$f(\eta)=0$. 又$g(0)=f(0)-0=0$,由 Rolle 定理知，$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$,s.t.$f'(\xi)=0$. 即存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$.

4. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=2\sqrt{a}\varepsilon$,s.t. 只要$x_1,x_2\in[a,+\infty)$且$|x_1-x_2|<\delta$,则

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\frac{|x_1-x_2|}{2\sqrt{a}}<\varepsilon$. 由定义即知，$f(x)=\sqrt{x}$在$[a,+\infty)$上一致连续.

5.(1)令$g(x)=f(x)-x$,则$g(a)\ge 0,g(b)\le 0.\Rightarrow g(x)=0$在$[a,b]$上有解. 即$f(x)$在$[a,b]$上有不动点$x^*$; 若有两个不动点$x_1^*,x_2^*$,则

$\left|x_1^*-x_2^*\right|=\left|f(x_1^*)-f(x_2^*)\right|\le k\left|x_1^*-x_2^*\right|$,而$0<k<1$，只能是$x_1^*=x_2^*$. 即$f(x)$在$[a,b]$上有唯一的不动点$x^*$.

(2). $\left|x_{n+1}-x^*\right|=\left|f(x_n)-f(x^*)\right|\le k\left|x_n-x^*\right|\le\cdots\le k^n\left|x_1-x^*\right|\to 0$,即$\{x_n\}$收敛于$f(x)$的不动点$x^*$.