安徽大学2020-2021学年第一学期《高等代数(上)》期末考试(B卷)参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad d^{n-2} \quad}$. 2. $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$. 3. $\underline{\quad 0 \quad}$. 4. $\underline{\quad (-1, 2, -2, 2) \quad}$.

5. $\underline{\quad (2, 1, -4) \quad}$.

二、选择题 (每小题2分, 共10分)

6. C. 7. A. 8. B. 9. D. 10. B.

三、计算题 (每小题10分, 共40分)

11. 解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3分)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{x-a_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x-a_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)\right). \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10分)$$

12. 解: $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$. ....(2分)

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&-3\\-2&-3&-1&0&7\\1&1&0&3&-9\\3&5&2&-2&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&7\\0&1&1&0&-7\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可知, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组。故$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$为$V_1+V_2$的一组基, 从而$\dim(V_1+V_2)=3$. ....(7 分)

又因为α_1,α_2为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组, $\dim V_1=2$; β_1,β_2线性无关,

$\dim V_2=2$. 于是$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=1$. ...(10分)

13. 解: $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A$, 其中$A=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\\3&-1\end{pmatrix}$. ....(2分)

$(\varepsilon_1',\varepsilon_2')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)P$, 其中$P=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

$(\eta_1',\eta_2',\eta_3')=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)Q$, 其中$Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

故φ在基$\varepsilon_1',\varepsilon_2'$与基$\eta_1',\eta_2',\eta_3'$下的矩阵为$Q^{-1}AP$, 其中$Q^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3&-4\\-2&-3\\3&4\end{pmatrix}$. (10分)

14. 解. 原方程组增广矩阵为$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1&-3&-1&3\\2&-3&5&-6&-1&4\\-1&5&8&4&3&-9\\1&-1&4&-5&2&1\end{pmatrix}$. ....(2分)

对$\bar{A}$作初等行变换得$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&0&7&0&-2&-1\\0&1&3&0&1&-2\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

以x_1,x_2,x_4为约束变量, 以x_3,x_5为自由变量.

在其导出组中, 令$x_3=1, x_5=0$，得$\xi_1=(-7,-3,1,0,0)^T$,

令$x_3=0, x_5=1$, 得$\xi_2=(2,-1,0,1,1)^T$.

故ξ_1, ξ_2为其导出组一个基础解系. .... (7分)

令$x_3=x_5=0$，得其特解为$\gamma_0=(-1,-2,0,0,0)^T$.

为$\gamma_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$, 其中$k_1, k_2$为任意常数. .... (10分)

四、证明题 (每小题10分, 共30分)

15. 证: 由$A^2-3A+2I=0$可知, $(A-2I)(A-I)=O$.

故$\mathrm{rank}(A-2I)+\mathrm{rank}(A-I)\leq n$. .... (3分)

又因为

$\mathrm{rank}(A-2I)+\mathrm{rank}(A-I)=\mathrm{rank}(A-2I)+\mathrm{rank}(I-A)$

$\geq \mathrm{rank}(A-2I+I-A)=\mathrm{rank}(I)=n$.

综上可知, $\mathrm{rank}(A-2I)+r(A-I)=n$. .... (10分)

16. **证:** 因为$M^T=(A^T \quad B^T)$, ... (3分)

所以$MM^T=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ O & BB^T \end{pmatrix}$.

从而, $|MM^T|=|AA^T||BB^T|=|A|^2|B|^2$. .... (10分)

17. **证:** 设数$k_0, k_1, \cdots, k_{m-1}$满足$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$. ... (2分)

上式两边同时左乘A^{m-1}, 则有$k_0A^{m-1}\alpha=0$. 故$k_0=0$,

且$k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$.

两边再同时左乘A^{m-2}，可知$k_1=0$. 依此类推, 可得$k_2=\cdots=k_{m-1}=0$.

综上可知, $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$线性无关. .... (10分)

五、论述题 (共5分)

18. 本题无标准答案.