院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答题勿超装订线 ……装……订……线……

安徽大学2017-2018学年第二学期
《高等代数（下）》考试试卷（B卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题 (每小题4分，共20分)

得分	

1. 多项式$3x^4+5x^3+x^2+5x-2$的所有有理根为________.

2. 设3阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$, 则矩阵$2A^2-A$的行列式为________.

3. 二次型$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x^3-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$的秩为________.

4. 设$\alpha=(a_1,a_2),\beta=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$上的内积义为$(\alpha,\beta)=a_1b_1+3a_2b_2$, 则$(1,0),(2,1)$在该内积下的夹角为________.

5. 设5阶矩阵A的Jordan标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$, 则$A$的极小多项式为________.

二、选择题 (每小题4分，共20分)

得分	

6. 下列说法**错误**的是 (　　)

(A) 设$p(x)$为不可约多项式, 若$p(x)$为$f(x)$的k重因式, 则$p(x)$为$f'(x)$的$k-1$重因式.

(B) 设非零多项式$f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, $d(x)=(f(x),g(x))$, 则$(f(x),\frac{g(x)}{d(x)})=1$.

(C) 设$f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, 若$(f(x),g(x))=1$当且仅当$(f(x),g^2(x))=1$.

(D) 设$f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, $f(x)$没有重因式当且仅当$(f(x),f'(x))=1$.

7. 下列说法**错误**的是 ( )

(A) 方阵A为n阶满秩矩阵当且仅当$Ax=0$仅有零解.

(B) 相似的矩阵具有相同的初等因子.

(C) 相似的矩阵具有相同的特征向量.

(D) 特征值的代数重数大于等于它的几何重数. .

8. 设$\mathscr{A}$为n维线性空间V上的线性变换, 下列条件中**不能**作为$\mathscr{A}$可对角化充要条件的是 ( )

(A) $\mathscr{A}$有n个不同的特征值.

(B) $\mathscr{A}$每个特征值的特征值子空间与其根子空间相同.

(C) $\mathscr{A}$的极小多项式仅有单根.

(D) $\mathscr{A}$每个特征值的几何重数等于它的代数重数.

9. 下列说法**正确**的是 ( )

(A) 合同的矩阵具有相同的规范形.

(B) 若实对称矩阵A的所有顺序主子式非负, 则A为半正定矩阵.

(C) 若实对称矩阵所有奇数阶主子式小于零, 则A为负定矩阵.

(D) 若A,B为n阶正定矩阵, 则AB为正定矩阵.

10. 下列说法**错误**的是 ( )

(A) 欧氏空间的内积与向量长度可以相互确定.

(B) 任一非平凡的欧氏空间都存在标准正交基.

(C) 正交矩阵可作为标准正交基到标准正交基的过渡矩阵.

(D) 正交矩阵的实特征值为1.

三、计算题 (每小题10分，共30分)

得分	

11. 设$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$, 求$(f(x),g(x))$.

12. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$, 使得$P^{-1}AP$为对角形.

13. 化实二次型$q(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$为规范形.

四、证明题(每小题10分，共30分)

得分	

14. 设$f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 证明: $(f^2(x),g^2(x))=(f(x),g(x))^2$.

15. 设A,B均为n阶方阵, 证明: AB与BA具有相同的特征多项式.

16. 设A为m阶正定矩阵, B为$m \times n$的矩阵, 证明: $B^T AB$正定矩阵当且仅当B的秩为n.

安徽大学2017-2018学年第一学期《高等代数(下)》
参考答案与评分标准(B卷)

一、填空题(每小题4分, 共20分)

1. $-2, \frac{1}{3}$.　　2. 18.　　3. 2.　　4. $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.　　5. $(x-1)^2(x-2)^2$

二、选择题(每小题4分, 共20分)

6. B.　　7. C.　　8. A.　　9. A.　　10. D.

三、计算题(每小题10分, 共30分)

11. **解:**

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=$	$2x^3-x^2-5x+4$	$4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$	$q_1(x)=2x$
$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$	$2x^3+x^2-3x$	$4x^4-2x^3-10x^2+8x$	
	$-2x^2-2x+4$	$r_1(x)=-6x^2-3x+9$	$q_3(x)=$
	$-2x^2-x+3$	$-6x^2+6x$	$6x+9$
	$r_2(x)=-x+1$	$-9x+9$	
		$-9x+9$	
		0	

于是$(f(x),g(x))=-r_2(x)=x-1$ ....(10分)

12. **解:** 矩阵A的特征多项式为$f(\lambda)=(\lambda-3)\lambda^2$. 所以$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$. ....(3分)

对于特征值0, 解齐次方程组$(0I-A)X=0$, 基础解系为$\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$. 将其标准正交化可得$\eta_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T$, $\eta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$.

对于特征值3, 解齐次线性方程组$(3I-A)X=0$, 基础解系为$\xi_3=(1,1,1)^T$. 将其标准正交化, 可得$\eta_3=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$. ....(8分)

令$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, 则$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{0, 0, 3\}$.

......(10分)

13. **解:** 令$X = (x_1, x_2, x_3)^T$，则$f(x_1, x_2, x_3) = X^TAX$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

......(2分)

矩阵A的特征值为$-1-\sqrt{3}, 2, -1+\sqrt{3}$. ......(8分)

因此, 二次型的规范形为$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. ......(10分)

四、证明题(每小题10分, 共30分)

14. **证:** 令$d(x) = (f(x), g(x))$, $f(x) = d_1(x)f_1(x)$, $g(x) = d_1(x)g_1(x)$.

不难证明, $(f_1(x), g_1(x)) = 1$. ......(5分)

进而, $(f_1^2(x), g_1^2(x)) = 1$, 即$(f^2(x), g^2(x)) = d^2(x)$. ......(10分)

15. **证:** 注意到

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix},$$

......(6分)

$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$是相似的, 故具有相同的特征多项式, 即$f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$. (10分)

15. **证:** 先证必要性. B^TAB为正定矩阵, 则对于任意$X \neq 0$, 使得

$$X^TB^TABX = (BX)^TA(BX) > 0.$$

由于A为正定矩阵, 则$BX = 0$不存在非零解. 因而, $r(B) = n$. ......(5分)

再证充分性. 若$r(B)=n$, 则$BX=0$不存在非零解, 即任意$X\neq 0$, 则$BX\neq 0$. 由于A是正定矩阵, 则$(BX)^TA(BX)=X^TB^TABX>0$. 因而, B^TAB为正定矩阵.

…………………………………………………………………… (10分)