

安徽大学 2014—2015 学年第二学期

《数学分析（中）》考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

学号

姓名

专业

年级

院/系

线  
订  
装  
超  
勿  
打  
表

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

得分

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$  的值为\_\_\_\_\_;
2. 设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续，且  $f(x) = \ln x - \int_1^2 f(x) dx$ ，则  $\int_1^2 f(x) dx$  的值为\_\_\_\_\_;
3. 心形线  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) 所围成的图形的面积为\_\_\_\_\_;
4. 设  $x_n = \sqrt[n]{n+2} + (-1)^{n+1}$ ，则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n =$  \_\_\_\_\_。

二、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

得分

计算下列积分：

$$(1) \int x^2 \cos x dx$$

$$(2) \int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx .$$

$$(3) \int_0^1 x(1-3x^2)^3 dx$$

$$(4) \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$$

三、讨论题（共 28 分）

得分

1. 判断下列级数的敛散性（每小题 6 分，共 18 分）

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[\sqrt{3} + (-1)^n]^n}{3^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 2015}$$

2. 判别下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 5 分，共 10 分）

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x^2} dx ;$$

$$(2) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + \ln x} dx ;$$

四、求解题（共 20 分）

得分	
----	--

求幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$  的收敛半径、收敛域及和函数。

五、证明题（第 1 题 6 分，第 2 题 4 分，共 10 分）

得分

1. (1) 设  $u_n(x)(n=1,2,\dots)$  在  $[a,+\infty)$  上连续， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  发散，证明：

函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $(a,+\infty)$  上不一致收敛；

(2) 证明：函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  在  $(1,+\infty)$  上内闭一致收敛，但不是一致收敛。

2. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上非负连续且单调减少，证明：对于  $0 < \alpha < \beta < 1$ ，有

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geq \frac{\alpha}{\beta} \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$