

安徽大学2019-2020学年第一学期《高等代数(上)》 参考答案与评分标准(A卷)

一、填空题(每小题4分, 共20分)

1. $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

2. 1.

3. $3^{2019} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\pm\sqrt{3}$.

5. $(-1, -1, 3)^\top$.

二、选择题(每小题3分, 共15分)

6. B . 7. C . 8. A . 9. D . 10. A .

三、计算题(每小题10分, 共30分)

11. 解法一:
$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a-x_1 & x_2-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x_1 & 0 & x_3-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & \cdots & 0 & x_n-a \end{vmatrix} \dots\dots\dots (5\text{分})$$

$$= \prod_{i=1}^n (x_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (x_j - a) \dots\dots\dots (10\text{分})$$

解法二: 令 $D' = \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n - a \end{vmatrix}.$

原行列式 $D = D' + a \sum_{i,j} A_{ij}$, 其中 A_{ij} 为行列式 D' 的 (i, j) 元对应的代数余子式.
(5分)

故,

$$D = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (x_j - a)$$

..... (10分)

12. 解: 设所求方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 A, \bar{A} . 用初等行变换把增广矩阵化为阶梯形:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -5 & 1 & -10 & 9 \\ 3 & -7 & 0 & -2 & 13 \\ -1 & 5 & -4 & -2 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

..... (5分) 由此可知, 原方程组的一个特解为 $\eta = (2, -1, 2, 0)$ (7分)

同时, 原方程组的导出组同解于

$$\begin{cases} x_1 + 11x_4 = 0, \\ x_2 + 5x_4 = 0. \\ x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

上述齐次方程组的基础解系为 $\xi = (-11, -5, -4, 1)$. 所以原方程的通解为

$$X = k(-11, -5, -4, 1) + (2, -1, 2, 0),$$

其中 k 为任意常数. (10分)

13. 解: (1) $F_4[x]$ 的一个基为 $x^3, x^2, x, 1$ (答案不唯一). (3分)

(2) 设 $x^3 + 2x + 1, x^3 + 2x^2 + 1, 2x^3 + x^2 + 3x, 2x^3 + 5x^2 - x + 4, x^3 - x^2 + 3x - 1$ 在该基下的坐标为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为列向量组作矩阵 A , 并对 A 进行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

因为 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$, 且 $\text{rank}(B) = 3$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩为 3. 由于 B 的前 3 列是其列向量组的一个极大无关组, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组. (10分)

四、证明题(每小题10分, 共30分)

14. **证法一:** 由 $A + B = AB$, 知 $A = (A - I)B$. 故 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$ (5分)

同理, $B = A(B - I)$, 故 $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$. 因此, $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. (10分)

证法二: 由 $A + B = AB$, 知 $(A - I)(B - I) = I$. 因此, $A - I$ 为可逆矩阵. (5分)

同时, 由 $A + B = AB$, 知 $A = (A - I)B$. 故 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ (10分)

15. **证:** 反证, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

..... (5分)

由题意, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 即

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s = (l_1 + k_1)\alpha_1 + (l_2 + k_2)\alpha_2 + \dots + (l_s + k_s)\alpha_s,$$

与表示的唯一性矛盾. (10分)

16. **证:** 首先易验证: φ 为单射当且仅当 $\text{Ker}\varphi = \{0\}$ (5分)

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一个基, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为 W 的一个基, 且

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)A.$$

对于任意 $\alpha \in V$, 设 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 的坐标为 X . 由坐标公式, $\alpha \in \text{Ker} \varphi$ 当且仅当 $AX = 0$. 命题得证. (10分)

四、简单题(本题5分)

17. 本题无标准答案, 定理描述准确给2分, 理由充分并能体现高等代数重要思想给3分.