

# 安徽大学 2020—2021 学年第二学期

## 《数学分析（中）》考试试卷（B 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
阅卷人					

### 一、计算题（共 42 分）

得 分	
-----	--

1. 计算下列不定积分（每小题 6 分）：

(1)  $\int x \cos 2x dx$  ;

(2)  $\int \sin(2x) \cos(4x) dx$  ;

(3)  $\int (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^{2020} dx$  ;

2. 计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

(1)  $\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2} dx$

(2)  $\int_0^8 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$

(3)  $\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx$

(4)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx .$

二、分析判断题（共 25 分）

得 分	
-----	--

1. 判断下列级数或反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分）：

(1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n - \ln n}$  ;

(2)  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^3)}{x^2} dx$  ;

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分）：

(1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$  ;

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right) ;$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{2^n} .$$

三、求解题（共 18 分）

得 分	
-----	--

1. 设  $f(x) = \int_0^{-x} \sin(t^2) dt$  , 计算  $f'(x)$  , 并求  $f(x)$  在  $x=0$  的幂级数展开式。(9 分)

2. 求由曲线  $y = x - x^2 (0 \leq x \leq 1)$  及  $x$  轴所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体的体积。(9 分)

四、证明题（每题 5 分，共 15 分）

得 分	
-----	--

1. 证明幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n}$  的收敛域为  $[-3, 3)$ ，并求其和函数。

2. 设函数列  $S_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{2n}$ ，证明  $\{S_n(x)\}$  在  $[0, \infty)$  上点态收敛，但不一致收敛。

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f''(x) \geq 0$  。证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$$