安徽大学2021-2022学年第一学期

《高等代数（上）》期中考试试题

（闭卷　时间120分钟）

年级______________ 专业______________ 姓名______________ 学号______________

一、填空题 (每小题4分，共20分)

1. 若n阶行列式D仅有的非零元素为$1,2,\dots,n+1$, 则D最大可能的值为______________.

2. 设行列式$D=\begin{vmatrix}1&0&4&1\\2&-1&-1&2\\0&2&0&1\\2&4&-1&2\end{vmatrix}$, 则$4M_{14}+M_{24}+M_{44}=$______________.

3. 行列式$\begin{vmatrix}x+1&2&3&4\\-2&x&2&-3\\-8&7&x-1&-5\\6&-5&-2&x\end{vmatrix}$中$x^3$项的系数为____________.

4. 设n阶方阵A的(i,j)元为a_i+b_j, 则$|A|=$______________.

5. 设A为3阶方阵, 且$|A|=\frac{1}{2}$, 则$|(3A)^{-1}-2A^*|=$______________.

二、计算题(每小题10分, 共40分)

6. 计算行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&16&81&256\end{vmatrix}$.

7. 计算行列式$\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\2&3&4&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&1&2&\dots&n-1\end{vmatrix}$.

8. 设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, 其中$a,b,c$为实数，试求$a,b,c$一切可能的值使得$A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. 讨论λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解？并在有唯一解时求出解的表达式.

三、**证明题**(每小题10分，共40分)

10. 数域P满足$\mathbb{R}\subseteq P\subseteq\mathbb{C}$, 证明：$P$为$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$.

11. 证明：n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha.$$

12. 证明：矩阵A与任意n阶方阵可交换**当且仅当**A为n阶数量矩阵.

13. 设A,B都是n阶方阵，且$AB=A+B$,

(1) 证明: $A-I$与$B-I$均可逆.

(2) 证明：$AB=BA$.

(3) 当$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 时, 求方阵B.