

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等代数（上）》 考试试卷（A 卷）  
(闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题号	一	二	三、1	三、2	三、3	三、4	总分
得分							
阅卷人							

一、填空题（每空 4 分，共 20 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。 得分

1. 设  $1, 2, \dots, 6, 7$  的排列  $621i5j7$  是偶排列。则  $i = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

2. 在方阵  $\begin{pmatrix} y+1 & 2 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2y & 1 \\ 9 & 4 & 0 & y \end{pmatrix}$  的行列式中,  $y^3$  的系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 求方阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  的逆方阵为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 考虑  $\mathbb{R}^4$  中由向量组  $(1, -1, 1, -1), (3, 3, -1, 1), (3, 0, 1, -1), (1, 2, -1, 1)$  生成的线性子空间  $U$ , 则  $U$  的维数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 求方阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2023} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、简答题（每问 5 分，共 20 分）判断叙述是否正确并简要说明理由。

得分

1. 设 2 阶实方阵  $A$  和  $B$  满足  $A^2 = B^2$ , 则总有  $(A + B)(A - B) = 0$ .

2. 设 3 阶非零实方阵  $X$  满足  $X = X^*$ , 其中  $X^*$  为伴随方阵。则总有  $|X| = 1$ .

3. 考虑  $\mathbb{R}^n$  中的线性子空间  $X, Y$  满足其并  $X \cup Y$  也是线性子空间。则有  $X \subseteq Y$  或  $Y \subseteq X$ .

4. 设  $n$  阶方阵  $A$  可逆。则其转置  $A^T$  也是可逆的。

三、解答题（每小题 15 分，共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. 解矩阵方程  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ .

得分

2. 考虑  $n$  个非零实数  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 以及  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$ , 满足

得分

$$a_{ij} = \begin{cases} b_i, & j = i + 1 \\ b_n, & i = n, j = 1, \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

试计算：行列式 $|A|$ 以及方阵 $A^n$ 。

3. 设 $A$ 和 $B$ 均为 $n$ 阶可逆方阵。证明： $A - B$ 可逆当且仅当 $A^{-1} - B^{-1}$ 可逆。

得分

4. 考虑全体2阶实方阵组成的线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。

得分

令 $U = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ 对称方阵}\}$ ,  $V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \text{ 反对称方阵}\}$ 。

试证明： $U$ 和 $V$ 均为 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的线性子空间，且满足 $\mathbb{R}^{2 \times 2} = U \oplus V$ 。