

安徽大学2019-2020学年第一学期 《高等代数（上）》考试试卷（B卷）

（闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题4分, 共20分)

得分

1. 排列 $2n, 1, 2n-1, 2, \dots, n+1, n$ 的逆序数为_____.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 5 \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 2 & -3 & x & 1 \\ 6 & 5 & -2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

3. 已知 $\alpha = (3, 2, 1), \beta = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$. 设矩阵 $A = \alpha^T \beta$, 则 $A^{2020} =$ _____.

4. 已知3阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____.

5. 设 V 是数域 F 上的3维线性空间, 若向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标为 $(1, 1, 2)^T$, 则 α 在基 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ 下的坐标为_____.

二、选择题 (每小题3分, 共15分)

得分

6. 设 A 是 n 阶实方阵. 则下列条件中与行列式 $|A| \neq 0$ 等价的所有条件是 ()

- ① A 的列向量组可构成 \mathbb{R}^n 的一个基; ② A 能写成若干初等矩阵的乘积形式;
③ 齐次线性方程组 $AX = 0$ 仅有零解; ④ 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 有解;
⑤ A 可以仅通过初等行变换化为 I_n .

(A) ① ② ③ ⑤. (B) ① ② ③. (C) ② ③ ⑤. (D) ① ② ③ ④ ⑤.

7. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则下列说法**正确**的是 ()
- (A) 若 A, B 为反对称矩阵, 则 AB 为反对称矩阵.
- (B) 若齐次线性方程组 $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 则 $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(BA)$.
- (C) 若 $A + B = AB$, 则 $AB + BA = O$.
- (D) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$ 或 $BA = O$.
8. 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 关于线性方程组 $AX = \beta$, 下列说法**错误**的是 ()
- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = \beta$ 的解, 则 $2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ 是 $AX = 0$ 的解.
- (B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = \beta$ 线性无关的三个解, 则 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是 $AX = 0$ 线性无关的两个解.
- (C) 若 A 为行满秩矩阵, 则方程组 $AX = \beta$ 有解.
- (D) 若 A 为列满秩矩阵, 则方程组 $AX = \beta$ 有解.
9. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则 ()
- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.
- (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关.
- (C) α_1, α_2 线性相关.
- (D) α_1, α_2 线性无关.
10. 设 φ 是 V 到 W 的单线性映射, $\alpha_i \in V (i = 1, 2, \dots, s)$, 则下列说法**错误**的是 ()
- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_s)$ 线性无关.
- (B) 若 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_s)$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.
- (C) 若 V 中任意向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 则 W 中任意向量可由 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_s)$ 线性表示.
- (D) $\dim W \geq \dim V$.

三、计算题 (每小题10分, 共30分)

得分	
----	--

11. 求行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & x_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$, 其中对任意 $i, x_i \neq a_i$

12. 求方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = -2, \end{cases}$$

的通解.

13. 设 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为实数域 \mathbb{R} 上所有 2×2 的矩阵全体在矩阵加法和数与乘法下构成的线性空间.

(1) 给出 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 一个基.

(2) 求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 的一个极大无关组与秩.

四、证明题(每小题10分，共30分)

得分	
----	--

14. 设 A, B 均为 n 阶方阵，且 $A + B = AB$. 证明： $AB = BA$.

15. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关当且仅当 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关.

16. 设 φ 为 V 到 V 的线性映射, 且 $\varphi \circ \varphi = \varphi$. 证明: $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Im}\varphi$

五、简答题(本题5分)

得分	
----	--

17. 请以一个实例简要描述本学期学习的标准形思想. (开放回答, 无标准答案)