一、（8 分）由数列极限定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n)=1$$

二、计算题（（每小题 5 分，共 40 分）

1、计算数列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n+3}{3n^3-n^2-1}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n+1)\ln(1+\dfrac{1}{n})$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}{(n-1)^3}$；

（4） $\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}-\frac{1}{n^2+4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+n})$

2. 计算下列函数极限：

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^2-x-2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x+\sin^2 x-1}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{(e^{2x}-1)\sin 3x}$

(4) $\lim_{x\to 0}(e^x - x - \frac{1}{3}x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

三、求解题（每题 10 分，共 20 分）：

1. 设 $f(x)=x^2e^{3x}$，试求 $f(x)$ 的 n 阶微分 $d^n f(x)$ 。

2. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $x=2t-\cos t, y=1+\sin^2 t$ 确定，求其二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

四、证明题（每题 8 分，共 32 分）：

1. 设 $0 < x_1 < 2,\ x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}x_n}$，$n = 1, 2, \cdots$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

2. 证明函数 $\ln(x^2 + 1)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，$f(0) = -1, f(1) = 0$，证明：

（1）存在 $c \in (0,1)$，使得 $f(c) = -c$；

(2) 存在 $\xi \in (0, c)$，使得 $f'(\xi) = -\frac{2\xi - 1}{c}$。

4. （1）设$0<\alpha<1$，证明：当$x>0$时，

$$1-\alpha x<\frac{1}{(1+x)^{\alpha}}<1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^{2};$$

（2）利用（1）计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^{2}+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}\right)^{n}$。