安徽大学 2024—2025 学年第一学期《数学分析（下）》 参考答案

一、 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $u=xyz$, 则 $\mathrm{d}u\big|_{(1,2,3)}=\underline{6\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y+2\mathrm{d}z}.$

2. 平面 $x-y+z=2$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 的交线在点 $(1,1,2)$ 处切线的参数方程为

$$\underline{\begin{cases} x=-t+1 \\ y=3t+1, t\in\mathbb{R}. \\ z=4t+2 \end{cases}}$$ （表示方式不唯一）

3. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $(0,0)$ 处的 3 阶 Taylor 多项式为

$\underline{1+(x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3).}$

4. 设 $f(u,v)$ 一阶连续可偏导， $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$ 且 $\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(1,2)}=1, \dfrac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(1,2)}=4,$ 则 $f(1,2)=\underline{3}.$

5. 设 $F(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x^2}\mathrm{d}x,$ 则 $F'(\alpha)=\underline{\mathrm{e}^{\alpha(1+\alpha)^2}-\mathrm{e}^{\alpha^3}+\int_{\alpha}^{1+\alpha}x^2\mathrm{e}^{\alpha x^2}\mathrm{d}x.}$

二、 计算题（共 60 分）

6. （8 分）设 $u(x,y,z)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{z+u}-xy-yz-zu=0$ 确定的隐函数，求 $u(x,y,z)$ 在 P$(1,1,0)$ 处的方向导数的最大值.

解：由 $\mathrm{e}^{z+u}-xy-yz-zu=0$ 可得
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{\mathrm{e}^{z+u}-z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x+z}{\mathrm{e}^{z+u}-z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{u+y-\mathrm{e}^{z+u}}{\mathrm{e}^{z+u}-z} \end{cases}.$$ （4 分）

在 P$(1,1,0)$ 处 $u(1,1,0)=0\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\mathrm{P}}=1, \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\mathrm{P}}=1, \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\mathrm{P}}=0.$ （6 分）

$u(x,y,z)$ 在 P$(1,1,0)$ 处的方向导数的最大值为 $u(x,y,z)$ 在 P 处梯度的模长，故所求为

$$\left|\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\mathrm{P}},\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\mathrm{P}},\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\mathrm{P}}\right)\right|=\left|(1,1,0)\right|=\sqrt{2}.$$ （8 分）

7. （8 分）求 $u=x-2y+2z$ 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最值.

解：令 $F(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$ 由 Lagrange 乘子法得

$$\begin{cases} F_x'=1+2\lambda x=0 \\ F_x'=-2+2\lambda y=0 \\ F_y'=2+2\lambda z=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$ （4 分）

可能的极值点为$\left(x,y,z\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$或$\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.　(6 分)

由于连续函数在有界闭集上必能取到最小值与最大值(或由问题的几何意义知)，上述两点即为最值点. 故最大值为$u\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=3$, 最小值为$u\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-3$. (8 分)

8. (8 分)计算二重积分$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$x=0, y=0, x+y=1$围成的区域.

解：作变换$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$, 即$\begin{cases}x=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\\ y=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\end{cases}$, 则

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{v}{u}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (4\text{ 分})$$

$$\int_0^1\mathrm{d}u\int_{-u}^{u}e^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e-\frac{1}{e}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right). \quad (8\text{ 分})$$

9. (8 分)计算三重积分$\iiint_V|ax+by+cz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$V$为单位球体$x^2+y^2+z^2\le 1$; a,b,c为常数，满足$a^2+b^2+c^2=4$.

解：作正交变换$\begin{cases}u=\frac{1}{2}(ax+by+cz)\\ v=a_2x+b_2y+c_2z\\ w=a_3x+b_3y+c_3z\end{cases}$,

$$\iiint_V|ax+by+cz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint_V|u|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \quad (4\text{ 分})$$

$$=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\pi. \quad (8\text{ 分})$$

10. (8 分)求$\iint_\Sigma|y|\sqrt{z}\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2 (z\le 1)$.

解：$\iint_\Sigma|y|\sqrt{z}\mathrm{d}S=\iint_D|y|\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (4 分)

$$=2\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin\theta\cdot r\cdot\sqrt{1+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r \quad (6\text{ 分})$$

$$=4\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r=2\int_0^1 t\sqrt{1+4t}\mathrm{d}t=\frac{25\sqrt{5}+1}{30}. \quad (8\text{ 分})$$

11. (10 分)求平面向量场$\left(xy^2+y^2e^x+x^2+y, x^2y+2ye^x-x+y^2\right)$沿曲线

$L: r(t)=(\cos t, 2\sin t)\ (0\le t\le\pi)$的第二型曲线积分，曲线正向为沿$t$增加的方向.

解：在L上补上线段$C: r(t)=(t,0), -1\le t\le 1$, 方向指向 X 轴正向. 则由 Green 公式得

$$I=\oint_{L+C}\left(xy^2+y^2e^x+x^2+y\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y+2ye^x-x+y^2\right)\mathrm{d}y=\iint_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi. \quad (4\text{ 分})$$

且$I_1=\oint_C\left(xy^2+y^2e^x+x^2+y\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y+2ye^x-x+y^2\right)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. (8 分)

故所求积分为$I-I_1=-2\pi-\dfrac{2}{3}$. （10 分）

12.（10 分）求第二型曲面积分

$\iint_{S^+}\left(f(x,y,z)+2x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2f(x,y,z)+y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(f(x,y,z)+2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$f(x,y,z)$为连续函数，$S^+$是平面$x-y+z=1$在第四卦限部分（$x>0,y<0,z>0$区域）的上侧.

解：所求积分$=\iint_{S^+}\left(f(x,y,z)+2x,2f(x,y,z)+y,f(x,y,z)+2z\right)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S^+}\left(f(x,y,z)+2x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+2z\right)\mathrm{d}S=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S^+}\left(2x-y+2z\right)\mathrm{d}S$ （4 分）

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_D\left(y+2\right)\cdot\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(y+2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （7 分）

$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_0^{y+1}(y+2)\mathrm{d}x=\int_0^1 y(y+1)\mathrm{d}y=\dfrac{5}{6}.$ （10 分）

三、 分析证明题（共 20 分）

13. （6 分）设$F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$且$F$可微，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$

证明：

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0\Rightarrow F_1'\cdot\left(1+\frac{1}{y}z_x'\right)+F_2'\cdot\left(\frac{1}{x}z_x'-\frac{z}{x^2}\right)=0\Rightarrow z_x'=\frac{yzF_2'-x^2yF_1'}{x^2F_1'+xyF_2'}=\frac{\frac{yz}{x^2}F_2'-yF_1'}{F_1'+\frac{y}{x}F_2'}.$$

（2 分）

同理得

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0\Rightarrow F_1'\cdot\left(\frac{1}{y}z_y'-\frac{z}{y^2}\right)+F_2'\cdot\left(1+\frac{1}{x}z_y'\right)=0\Rightarrow z_y'=\frac{xzF_1'-xy^2F_2'}{y^2F_2'+xyF_1'}=\frac{\frac{z}{y}F_1'-yF_2'}{F_1'+\frac{y}{x}F_2'}.$$

（4 分）

故$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\dfrac{\frac{yz}{x^2}F_2'-yF_1'}{F_1'+\frac{y}{x}F_2'}+y\cdot\dfrac{\frac{z}{y}F_1'-yF_2'}{\frac{y}{x}F_2'+F_1'}=\dfrac{(\frac{yz}{x}-y^2)F_2'-(xy-z)F_1'}{\frac{y}{x}F_2'+F_1'}=z-xy.$ （6 分）

14. （8 分）设$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$,其中$\varphi(x,y)$在点$(0,0)$处的某邻域内连续，证明：函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充要条件是$\varphi(0,0)=0.$

证明：“$\Rightarrow$”： $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，则可偏导，即

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$存在，其相应的左右极限分别为$-\varphi(0,0)$和$\varphi(0,0)$，两者必须相等，故有$\varphi(0,0)=0.$ （4 分）

“$\Leftarrow$”：同上有$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=0$，同理有$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{|\Delta y|\varphi(0,\Delta y)}{\Delta y}=0.$ 设

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

$\left(\dfrac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\sqrt{2},\ \lim\limits_{\rho\to 0}\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)=0\right)$. 即有：

$f(\Delta x,\Delta y)=f(0,0)+f_x^{'}(0,0)\Delta x+f_y^{'}(0,0)\Delta y+o(\rho),\rho\to 0.$ 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. (8 分)

15.（6 分）证明：$g(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $(1,4)$ 上连续.

证明：$g(\alpha)=\int_0^1\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$ 其中 0 是 I_1 的瑕点，由 $\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\sim\dfrac{1}{x^{\alpha-3}}\quad\left(x\to 0+\right),$ 知当 $\alpha<4$ 时 I_1 收敛；而当且仅当 $\alpha>1$ 时 I_2 收敛，故 $g(\alpha)$ 的定义域为 $(1,4)$.　（3 分）

又对于任意 $[a,b]\subset(1,4),\left|\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\right|=\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\le\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^b}\left(x\in(0,1],\alpha\in[a,b]\right)$ 且

$\int_0^1\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^b}\mathrm{d}x$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知 I_1 在 $[a,b]$ 上一致收敛；同理，I_2 在 $[a,b]$ 上也一致收敛. 故 $g(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由 $[a,b]$ 的任意性知 $g(\alpha)$ 在 $(1,4)$ 上连续.　（6 分）