院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答题勿超装订线

装订线

安徽大学2019-2020学年第一学期
《高等代数（上）》考试试卷（A卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题4分，共20分)

得分	

1. 若排列$i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$的逆序数为k, 则排列$i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$的逆序数为________.

2. 行列式$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & x & 2 & -2 \\ -1 & 3 & x & -1 \\ 6 & -5 & -2 & x \end{vmatrix}$中$x^3$项的系数为____________.

3. 已知$\alpha=(1,2,3), \beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. 设矩阵$A=\alpha^\top\beta$, 则$A^{2020}=$ __________.

4. 已知3阶矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则$|A|=$ ______________.

5. 设V是数域$\mathbb{F}$上的3维线性空间，若向量α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_2$下的坐标为$(1,2,3)^\top$, 则$\alpha$ 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$下的坐标为__________.

二、选择题 (每小题3分，共15分)

得分	

6. 设A是n阶方阵. 则下列条件中与行列式$|A|=0$等价的所有条件是 (　　)

① A的行向量组线性相关；② A不能写成若干初等矩阵的乘积形式；

③ 齐次线性方程组$AX=0$有非零解；④ 非齐次线性方程组$AX=\beta$有解；

⑤ $\mathrm{rank}(A)=n-1$.

(A) ①②③④. (B) ①②③. (C) ②③⑤. (D) ①②③④⑤.

7. 设A,B,C为n阶方阵，则下列说法**正确**的是 ( )

(A) 若A,B为对称矩阵, 则AB为对称矩阵.

(B) 若$AB=AC$, 则$B=C$.

(C) 若$A+B=AB$, 则$AB=BA$.

(D) 若$AB=O$, 则$A=O$或$B=O$或$A+B=O$.

8. 设$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 关于线性方程组$AX=\beta$, 下列说法**错误**的是 ( )

(A) 若$m<n$, 则方程组有解.

(B) 若β可由A列向量组线性表示, 则方程组有解.

(C) 若$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A|\beta)$, 则方程组有解.

(D) 若A为行满秩矩阵，则方程组有解.

9. 设向量β,α_1,α_2线性相关，向量组β,α_2,α_3线性无关，则 ( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(C) β可由α_1,α_2线性表示.

(D) α_1可由β,α_2线性表示

10. 设φ是V到W的满线性映射, $\alpha_i\in V\,(i=1,2,\cdots,s)$, 则下列说法**错误**的是 ( )

(A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关, 则$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_s)$线性无关.

(B) 若$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_s)$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

(C) 若V中任意向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则$W$中任意向量可由$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_s)$线性表示.

(D) $\dim W\le\dim V$.

三、计算题 (每小题10分，共30分)

得分	

11. 求行列式$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$, 其中$x_i\ne a(i=1,2,3,\cdots,n)$.

答题勿超装订线

装 订 线

12. 求方程组$\begin{cases} x_1 \quad\quad -4x_3-5x_4=-6, \\ x_1-5x_2+x_3-10x_4=9, \\ 3x_1-7x_2 \quad\quad -2x_4=13, \\ -x_1+5x_2-4x_3-2x_4=-15 \end{cases}$的通解.

13. 设$\mathbb{F}_4[x]$为数域$\mathbb{F}$上所有次数**小于**4的多项式集合, 在多项式加法和数与多项式的乘法下构成的线性空间.

(1) 给出$\mathbb{F}_4[x]$一个基.

(2) 求$x^3+2x+1, x^3+2x^2+1, 2x^3+x^2+3x, 2x^3+5x^2-x+4, x^3-x^2+3x-1$的一个极大无关组与秩.

答题勿超装订线

装……订……线

四、证明题(每小题10分，共30分)

得分	

14. 设A, B均为n阶方阵，且$A+B=AB$. 证明：$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

15. 如果向量β可由向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表示，且表示法唯一. 证明：向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关.

16. 设φ为V到W的线性映射, 且φ在V和W的某两个基下的矩阵为A. 证明：φ为单射当且仅当齐次线性方程组$AX=0$仅有零解.

五、简答题(本题5分)

得分	

17. 请给出本学期高等代数中你认为最漂亮的一个定理，并简要说明理由.(开放回答, 无标准答案)