安徽大学 2021—2022 学年第 2 学期《高等代数（下）》

考试试卷（A 卷）参考答案与评分标准

一、填空题（每空 5 分，共 40 分）

① $(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$　　② λ^4　　③ 1　　④ $\mathrm{diag}(1,1,1,\lambda^4)$

⑤ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$　⑥ $x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$　⑦ $-2<\lambda<\frac{2}{3}$　⑧ $-\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$

二、解答题（每题 15 分，共 60 分）

1. **解法一.** 设$\begin{cases} u(x)=ax+b \\ v(x)=cx+d \end{cases}$，得线性方程组$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。　(6 分)

解线性方程组，得$(a,b,c,d)=\frac{1}{2}(-1,1,1,1)$。　(9 分)

解法二. 作初等行变换$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & x^2-x+1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2x \\ 0 & 1 & x^2-x+1 \end{bmatrix}$　(6 分)

$\to\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ 0 & 1 & x^2-x+1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ \frac{1-x}{2} & \frac{x+1}{2} & 1 \end{bmatrix}$,

得$\begin{cases} u(x)=\frac{1-x}{2} \\ v(x)=\frac{x+1}{2} \end{cases}$　(9 分)

解法三. $f(x)=g(x)\cdot 1+2x,\ g(x)=(2x)\cdot(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})+1$，

故$(f(x),g(x))=1$. (6 分)

且 $1=g(x)-[f(x)-g(x)](\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})=\frac{1-x}{2}f(x)+\frac{1+x}{2}g(x)$.

令$u(x)=\dfrac{1-x}{2},v(x)=\dfrac{1+x}{2}$，则$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.　(14 分)

因为$\deg u(x)=1<\deg g(x),\deg v(x)=1<\deg f(x)$，

所以$\dfrac{1-x}{2},\dfrac{1+x}{2}$为满足要求次数最小的多项式. (15 分)

说明：若算出来的$u(x),v(x)$与答案不同，但仍满足等式，得 13 分.

2. **证法一.** 由于n元排列只有$n!$个，故存在正整数k使得$A^k = I$。 (5 分)

由A的化零多项式$x^k - 1$无重根，得A的极小多项式也无重根。 (10 分)

根据 Jordan 标准形（或课本中的定理 6.3.4），A可相似于对角阵。 (15 分)

证法二. 由置换矩阵定义，$A^TA = I$，即A为正交阵. (5 分)

因为正交阵在复数域上可对角化, 所以A可对角化. (10 分)

事实上, 正交阵A必相似于准对角阵$\mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_s)$,

其中$B_i = \pm 1$ 或$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

又因为对任意θ, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$在复数域上可对角化，

所以正交阵A可对角化. (15 分)

3. 证法一. 设$Q(x\alpha + \beta) = ax^2 + bx + c$，其中$a = Q(\alpha) < 0, c = Q(\beta) > 0$。 (5 分)

$ax^2 + bx + c = 0$有两根$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。$\gamma_i = x_i\alpha + \beta$满足$Q(\gamma_i) = 0$。 (5 分)

由$Q(\alpha) < 0 < Q(\beta)$，知α, β线性无关，从而γ_1, γ_2线性无关。 (5 分)

证法二. 设$Q(X) = X^TAX$, 其中A为n阶实对称阵.

由题设可知, A的正负惯性指数均大于等于 1. (5 分)

于是存在n阶可逆阵P，使得$P^TAP = (I_s, -I_t, O)$，其中$s, r \geq 1$.

令$\gamma_1 = P(1, 0, \cdots, 0, \underset{s+1}{1}, 0, \cdots, 0)^T$. 则$Q(\gamma_1) = 0$. (10 分)

令$\gamma_2 = P(1, 0, \cdots, 0, \underset{s+1}{-1}, 0, \cdots, 0)^T$. 则$Q(\gamma_2) = 0$.

显然， γ_1, γ_2都线性无关. (15 分)

4. **证法一.** 记$v = \alpha + \mathrm{i}\beta$。由$Av = \lambda v$和$A^TA = I$，

得$\overline{v^T}v = |\lambda|^2\overline{v^T}v$，故$|\lambda| = 1$。 (5 分)

由$\lambda \neq \pm 1$，以及$v^Tv = \lambda^2 v^Tv$，得$v^Tv = 0$。 (10 分)

再由$v^Tv = (\alpha^T\alpha - \beta^T\beta) + (2\alpha^T\beta)\mathrm{i}$，得$\|\alpha\| = \|\beta\|$且$(\alpha, \beta) = 0$。 (15 分)

证法二. 设$\lambda = a + b\mathrm{i}$，$a, b \in \mathbb{R}$，$a^2 + b^2 = 1,\ b \neq 0$.

则由$A(\alpha + \mathrm{i}\beta) = (a + \mathrm{i}b)(\alpha + \mathrm{i}\beta)$得$A\alpha = a\alpha - b\beta, A\beta = a\beta + b\alpha$. (5 分)

再由$\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$可知

$$\alpha^T\alpha = (A\alpha)^T(A\alpha) = a^2\alpha^T\alpha + b^2\beta^T\beta - 2ab\alpha^T\beta,$$

$$\alpha^T\beta = (A\alpha)^T(A\beta) = ab(\alpha^T\alpha - \beta^T\beta) + (a^2 - b^2)\alpha^T\beta.$$ (10 分)

故$2a\alpha^T\beta = b(\beta^T\beta - \alpha^T\alpha)$，$2b\alpha^T\beta = a(\alpha^T\alpha - \beta^T\beta)$.

联立可知$\alpha^T\beta = 0, \alpha^T\alpha = \beta^T\beta$. (15 分)