安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等代数（上）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

题 号	一	二	三、1	三、2	三、3	三、4	总分
得 分							

一、填空题（每空 4 分，共 20 分）填写不完整或结果没有化简均不得分。

得分	

1. 设$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$是$1,2,\ \dots,\ 6,7$的排列，其逆序数为10。则排列$x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1$的逆序数为__________。

2. 在方阵 $A=\begin{pmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ x & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x \\ 9 & 4 & x & 0 \end{pmatrix}$的行列式中，$x^3$的系数为__________。

3. 分别求方阵$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2022}=$__________， $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-2022}=$__________，以及

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$ __________。

二、简答题（每问 5 分，共 20 分）判断叙述是否正确并简要说明理由。

得分	

1. 设二阶方阵A满足$A^2=I$,则总有$A=\pm I$。

2. 设 n 阶实方阵B满足$BB^T=O$,则总有$B=O$。

3. 设$n\geq 2$,考虑$\mathbb{R}^n$中的线性子空间X,Y。则其并$\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}$是线性子空间当且仅当$\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}$。

4. 对于任意 n 阶方阵A，总存在方阵B使得$A=B^*$。

三、解答题（每小题 15 分，共 60 分）需给出详细解答过程。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。

1. 解矩阵方程$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&-4\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&13\\5&10&5\end{pmatrix}$。

得分	

2. 设n阶方阵$A=(a_{ij})$，其中$n\geq 2$，$a_{ij}=\begin{cases}a+x, & j=1\\ x-j, & i=j\geq 2\\ j, & i\neq j且j\geq 2\end{cases}$。

得分	

这里，x和a均为未定元。试计算行列式$|A|$。

3. 给定四维向量组$a_1=(1,2,\ -1,1)$, $a_2=(1,3,\ -1,2)$, $a_3=(2,5,0,5)$,

得分	

$a_4=(1,2,1,3)$,$a_5=(5,12,1,13)$。试求出其所有的极大线性无关组。

4. 设n阶实方阵A满足$A^2+A=2I$。考虑$U=\{\alpha\in\mathbb{R}^n\mid A\alpha=\alpha\}$且

得分	

$V=\{\alpha\in\mathbb{R}^n\mid A\alpha=-2\alpha\}$。这里，$\mathbb{R}^n$表示$n$维实的列向量空间。

试证明：U和V均为$\mathbb{R}^n$的线性子空间，且满足$\mathbb{R}^n=U\oplus V$。

参考答案与评分标准

一、填空题（每空 4 分，填写不完整或结果没有化简均不得分）。

11， 3，$\begin{pmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 1-2^{2022} & 1 \end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^{2022}} & 0 \\ \frac{1}{2^{2022}}-1 & 1 \end{pmatrix}$， $2^{1011}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

二、简答题（每小题 5 分，判断正误 1 分，说明理由 4 分，可酌情给分）。

1. 错误。例如：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$A^2=I$。

2. 正确。计算$\mathrm{tr}(BB^T)=\sum_{i,j} b_{i,j}^2$，为零，又$B$为实方阵，故$B=0$。

3. 正确。首先，我们总有$\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}\subseteq\mathrm{X}+\mathrm{Y}$，且$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ 总是线性子空间。若$\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}$是线性子空间，则对加法封闭。故，$\mathrm{X}+\mathrm{Y}\subseteq\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}$。

4. 错误。回顾B^*的 rank 只能取值为$n,1,0$。故，存在方阵A，其不是任何方阵的伴随方阵。

三、解答题（每小题 15 分，需给出详细解答过程，可酌情给分。禁止使用课本习题结论或其他参考书中的结论。）

1. 两边乘以$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，同时除以-3，得到如下

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

两边取转置，等同于解两个非齐次方程。 (5 分)

得到结果如下：

$$X\text{的转置}=\begin{pmatrix}(5-3t)/2 & (5-3s)/2\\ (3-t)/2 & (-1-s)/2\\ t & s\end{pmatrix}$$

这是，s, t 为参数。取转置，即可得到所求。 (15 分)

2. 第一列中提取(x+a)，故$|A|=(x+a)|A'|$，其中A'是将 A 的第一列全换成 1 所得的新方阵。

(3 分)

注意到在$|A'|$中，x 的次数为 n-1，首项系数为 1。

注意到，x=4, 6, …, 2n，行列式为 0. 故，$|A'|=(x-4)(x-6)\ldots(x-2n)$。

(12 分)

故，$|A|=(x+a)\,(x-4)(x-6)\ldots(x-2n)$。 (15 分)

3. 对矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 2 & 12\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5 & 3 & 13\end{pmatrix}$作行变换为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$，故秩为 3。 （5 分）

考虑相应的三元子集，共 10 组，我们发现仅有的极大无关组为

$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，$\{\beta_1,\beta_2,\beta_4\}$，$\{\beta_1,\beta_2,\beta_5\}$，$\{\beta_1,\beta_3,\beta_4\}$，$\{\beta_1,\beta_3,\beta_5\}$，$\{\beta_1,\beta_4,\beta_5\}$

（这里需要论证一番）

故，将这些\beta 换为相应的 a 即可，共六组。 （15 分）

4. 根据定义（加法和数乘封闭），可以验证U和V均为$\mathbb{R}^n$的线性子空间。 （3 分）

可以直接证明$U \cap V = 0$（需细节）。（6 分）

对于任意向量α,考虑分解

$\alpha = (A - I)\alpha + (A + 2I)\alpha,$

前者落在 V 中，后者落在 U 中（需要论证）。证毕！（15 分）