

安徽大学 2024-2025 学年第 1 学期  
 《高等代数 (上)》期中考试试卷 A 卷  
 (闭卷 时间 120 分钟)

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	总分
分数				

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分).

得分	
----	--

1. 
$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ b_1 & \cdots & b_{i-1} & a_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\ & & & a_{i+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_n & \end{vmatrix} = \quad \text{(注: 此行列式中, 除第 } i \text{ 行}$$
  
 和主对角线上元素之外, 其余元素均为 0).

2. 设矩阵  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ , 则  $|A|$  的所有元素的代数余子式之和为 \_\_\_\_\_.

3. 设  $n$  为正整数, 则  $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{n+1} = \quad \cdot$

4. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $(A^*)^{-1} = \quad \cdot$

5. 设  $n$  阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ , 则  $A^{-1} = \quad \cdot$

6. 已知  $A, B, C$  都是行列式为 2 的 3 阶矩阵, 则  $\begin{vmatrix} O & -3A \\ B^{-1} & C \end{vmatrix} = \quad \cdot$

7. 设  $A, B$  均为可逆矩阵, 则  $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \quad \cdot$

8. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  依次是 4 阶行列式  $|A|$  的第 1、2、3、4 列,  $\alpha_3, \alpha_1, \gamma, \alpha_2$  依次是行列式  $|B|$  的第 1、2、3、4 列. 又已知  $|A| = a, |B| = b$ , 则行列式  $|\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, (\beta + \gamma)|$  的值为 \_\_\_\_\_.

9. 设  $E_{ij}$  是一个  $n$  阶矩阵, 它的第  $(i, j)$  元素等于 1, 其他元素全为 0. 若  $A$  是  $n$  阶矩阵且  $A = (a_{ij})$ , 则  $E_{ij}AE_{kl} =$  \_\_\_\_\_.

10. 已知 3 阶矩阵  $A$  可逆, 将  $A$  的第 1 列与第 2 列交换后得到矩阵  $B$ , 再将矩阵  $B$  的第 1 列的  $-2$  倍加到第 3 列得到  $C$ , 则满足  $PA^{-1} = C^{-1}$  的矩阵  $P$  为 \_\_\_\_\_.

二、计算题 (每小题 10 分, 共 30 分).

得分

11. 问  $a, b$  取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b, \end{cases}$$

有解? 在有解的情形, 求出全部解.

12. 求  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } x_i \neq a_i, i = 1, \dots, n.$$

13. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 若矩阵  $X$  满足  $AXB = C$ ,

求矩阵  $X$ .

三、证明题 (每小题 10 分, 共 40 分).

得分

14. 求证:  $r \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$ , 其中  $r(A)$  表示矩阵  $A$  的秩.

15. 设  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 证明:  $A$  与任意  $n$  阶方阵可交换, 即对任意  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 都有  $AB = BA$ , 的充要条件是  $A$  为数量矩阵.

16. 已知  $A$  是上三角矩阵, 且设  $A$  的主对角元素分别为  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , 证明: 若  $A$  可逆时, 则  $A^{-1}$  也是上三角矩阵, 并且  $A^{-1}$  的主对角元素分别为  $a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}$ .

17. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $\text{r}(A) = r$ , 证明:

(1) (5 分) 存在秩都为  $r$  的  $m \times r$  矩阵  $B$  及  $r \times n$  矩阵  $C$ , 使得  $A = BC$ .

(2) (5 分) 若  $A$  列满秩, 则存在  $n \times m$  行满秩矩阵  $P$ , 使得  $PA = I_n$ , 其中  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵.