安徽大学 2015—2016 学年第二学期

《数学分析（中）》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

题　号	一	二	三	四	总　分
得　分					
阅卷人					

院/系＿＿＿＿　年级＿＿＿＿　专业＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿

装　订　线　答题勿超装订线

得 分	

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 设 $x_n = \sqrt[n]{n}[3+(-1)^n]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$＿＿＿＿＿；

2. 已知 $2x+\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx =$＿＿＿＿＿＿＿＿；

3. 已知反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{1+x^p}dx$ 条件收敛，则 p 的取值范围为＿＿＿＿＿＿＿；

4. 函数 $\int_0^x e^{-2t^2}dt$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式是＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

得 分	

二、计算题（每小题 5 分，共 35 分）

1. 计算下列不定积分：

（1）$\int x(x+2\sqrt{x^2-1})dx$；

（2）$\int x^2 \ln x dx$；

（3）$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

2. 计算下列定积分及反常积分：

（1）$\int_0^1 x^4(x^2+1)^2\,dx$

（2）$\int_0^1 x\arctan x\,dx$

（3）$\int_0^2 (\ln x)^2\,dx$

（4）$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x+2e^{-x})^2}$

三、讨论题（共 20 分）

得 分	

判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分，共 20 分）

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}n^3 e^{-n}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$；

四、求解与证明题（共 33 分）

得 分	

1.（8 分）用$V(a)$表示曲线$y=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}$与 x 轴所界区域在$x\in[0,a]$

的部分绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积，求常数ξ使得下式成立

$$V(\xi)=\frac{1}{9}\lim_{a\to+\infty}V(a)。$$

2.（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+2}}{n!(n+2)}$的收敛半径、收敛域及和函数。

3.（8 分）设 $S_1(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，令 $S_{n+1}(x)=\int_0^x S_n(t)dt$, $n=1,2,\cdots$。证明函数列 $\left\{S_n(x)\right\}$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛于 $S(x)\equiv 0$。

4.（7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $0\le f(x)\le x$，证明：

（1）$\forall x\in[0,1], \int_0^x f(t)dt\le \frac{x^2}{2}$；

（2）$\int_0^1 x^2 f(x)dx \ge \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$。