

# 安徽大学 2020—2021 学年第二学期

## 《数学分析（中）》考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
阅卷人					

### 一、计算题（共 42 分）

得 分	
-----	--

1. 计算下列不定积分（每小题 6 分）：

(1)  $\int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx;$

(2)  $\int (x^2 - 1)e^{2x} dx;$

(3)  $\int x \tan x \sec^2 x dx;$

2. 计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

(1)  $\int_1^2 \frac{x^4 + 4\ln x + x}{x^3} dx$

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x |2\sin x - 1|^{2021} dx$

(3)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$

(4)  $\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} dx.$

二、分析判断题（共 22 分）

得 分	
-----	--

1. 判断下列反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分）：

(1)  $\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2} dx ;$

(2)  $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \cos x dx ;$

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 4 分）：

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} ;$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{4n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{2n})^n}.$$

三、求解题（共 15 分）

得 分	
-----	--

1. 设  $f(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt$ ，计算  $f'(x)$ ，并求  $f(x)$  在  $x=0$  的幂级数展开式。（7 分）

2. 求曲线  $x = a(t + \cos t)$ ， $y = a \sin t$ ， $t \in [0, \pi]$  的弧长 ( $a > 0$ )。（8 分）

四、证明题（每题 7 分，共 21 分）

得 分	
-----	--

1. 证明幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2 + (-1)^{n+1}]^n}{n} x^n$  的收敛域为  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ，并求其和函数。

2. 证明函数列  $\{S_n(x)\} = \{x^n - x^{2n}\}$  在  $[0, 1]$  上点态收敛，但不一致收敛。

3. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导数,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ 。证明:

(1)  $\int_0^1 e^x |f(x) + f'(x)| dx \geq e$ ;

(2)  $\int_0^1 |f(x) - f'(x)|^2 dx \geq \frac{2}{e^2}$ 。