

# 安徽大学2020-2021学年第二学期《高等代数(下)》

## 期末考试(A卷)参考答案与评分标准

### 一、填空题 (每小题4分, 共20分)

1.  $(n+1)!;$

2.  $0;$

3.  $0;$

4.  $\begin{cases} 0 & n \geq 3, \\ (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) & n = 2, \\ a_1 + b_1 & n = 1 \end{cases};$

5.  $-\frac{16}{27}$

### 二、计算题 (每小题10分, 共40分)

6. 解: 法1. 原式 = 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 15 & 80 & 255 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 15 & 80 & 255 \end{vmatrix} \quad (4\text{分})$$
  

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 15 & 50 & 210 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 50 & 210 \end{vmatrix} = 120. \quad (10\text{分})$$

法2. 考虑范德蒙行列式  $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x \\ 1 & 4 & 9 & 16 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & x^3 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & x^4 \end{vmatrix}$   
 $= 12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4). \dots \quad (6\text{分})$   
 则原行列式即为  $D(x)$  中  $x^3$  项系数的相反数, 故原行列式 = 120. \dots \quad (10分)

7. 解：原式 =  $\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$  (所有列全加到第一列)

$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$  (第*i*行减第*i*-1行)

$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$  (5分)

$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$  (所有列全加到第一列)

$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}. (10分)$

8. 解: 因为  $A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & f(a, b, c) \\ 0 & c^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 故  $a = \pm 1, c = \pm 1$ . (4分)

当  $a = 1, c = 1$  时, 则  $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 故  $b = 0$ .

同理, 若  $a = -1, c = -1$ , 可得  $b = 0$ .

当  $a = 1, c = -1$ , 则对任意  $b$ , 有  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 故  $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 此时,  $b$  可取任意值.

同理, 若  $a = -1, c = -1$ ,  $b$  可取任意值. (10分)

9. 解: 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

因此当  $\lambda \neq -2$  且  $\lambda \neq 1$  时, 原方程有唯一解. (4分)

$$\text{此时 } D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

由 Cramer 法则,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{-(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{1}{(\lambda + 2)},$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)}. \quad (10 \text{分})$$

10. 证明：假设  $\mathbb{R} \subsetneq P \subset \mathbb{C}$ , 则存在  $a + bi \in P$ , 其中  $b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ .

因此,  $i = \frac{1}{b}(a + bi) - \frac{a}{b} \in P$ . ..... (5分)

于是, 对任意复数  $x + yi \in P, x, y \in \mathbb{R}$ . 从而  $P = \mathbb{C}$ . ..... (10分)

11. 证明：(用数学归纳法) 当  $n = 1, 2$  时, 结论显然成立.

假设对于任意的  $1 \leq k \leq n-1$ , 有  $D_k = \cos n\alpha$ .

则将  $D_n$  按最后一行展开可得

$$D_n = 2 \cos \alpha D_{n-1} - D_{n-2}. ..... (5分)$$

$$= 2 \cos \alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha. ..... (10分)$$

12. 证明：若  $A$  为  $n$  阶数量阵, 显然  $A$  与任意  $n$  阶方阵可交换. ..... (2分)

设  $A = (a_{ij})$ . 记  $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ . 则  $AD = (ja_{ij})$ ,  $DA = (ia_{ij})$ . 由  $AD = DA$  可知, 对任意  $1 \leq i \neq j \leq n$ , 都有  $a_{ij} = 0$ .

故  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ . ..... (6分)

记  $E_{ij}$  为  $(i, j)$  位置元素为 1, 其余元素均为零的  $n$  阶矩阵. 则对任意  $1 \leq i, j \leq n$ , 有  $AE_{ij} = a_{ii}E_{ij}$ ,  $E_{ij}A = a_{jj}E_{ij}$ . 从而  $a_{ii} = a_{jj}$ .

由此可知,  $A$  为数量阵. ..... (10分)

13. 证明：(1) 由  $A + B = AB$  可得:  $(A - I)(B - I) = I$ . 故  $A - I, B - I$  均可逆.

(3分)

(2) 由 (1) 知  $A - I$  与  $B - I$  互逆. 故  $(B - I)(A - I) = I$ . 从而  $BA = A + B = AB$ .

(6分)

(3) 由  $A + B = AB$  可得:  $(A - I)B = A$ . 故  $B = (A - I)^{-1}A$ .

计算可得  $B = (A - I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  ..... (10分)