安徽大学 2020—2021 年第二学期

数学分析（中）期末试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一、计算题（共 42 分）

1．计算下列不定积分（每小题 6 分）：

（1）$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}dx = \int \arctan x d\arctan x = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$ ……………………6 分

（2）$\int (x^2-1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-1)de^{2x} = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}d(x^2-1)$

$=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int xde^{2x} = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$ ……………………………………6 分

（3）$\int x\tan x\sec^2 xdx = \int x\tan xd\tan x = \frac{1}{2}\int xd\tan^2 x$

$=\frac{1}{2}x\tan^2 x - \frac{1}{2}\int \tan^2 xdx = \frac{1}{2}x\tan^2 x - \frac{1}{2}\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\frac{1}{2}x\tan^2 x - \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C$ ……………………………6 分

2．计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

（1）$\int_1^2 \frac{x^4+4\ln x+x}{x^3}dx = \int_1^2 (x+\frac{4}{x^3}\ln x + \frac{1}{x^2})dx = \int_1^2 (x+\frac{1}{x^2})dx + 4\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$

$=(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x})\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \ln xd\frac{1}{x^2} = 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + 2\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx$

$=2 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{x^2}\Big|_1^2 = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ ……………………………6 分

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x|2\sin x-1|^{2021}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x|2\sin x-1|^{2021}dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x|2\sin x-1|^{2021}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x(1-2\sin x)^{2021}dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(2\sin x-1)^{2021}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-2\sin x)^{2021}d(1-2\sin x)+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-1)^{2021}d(2\sin x-1)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2022}(1-2\sin x)^{2022}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2022}(2\sin x-1)^{2022}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2022}$$ ……………………………………………6 分

（3）令 $t=\sqrt{x^2+1}$，$\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)t^2dt=\int_1^{\sqrt{2}}(t^4-t^2)dt$

$$=(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$$ ……………………………………6 分

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{(e^x+1)^2}d(e^x+1)=-\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{e^x+1}$

$$=-\frac{x}{e^x+1}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}$$

$$=-\ln(e^{-x}+1)\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$$ ……………………………6 分

二、分析判断题（共 22 分）

1．判断下列反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分）：

（1）$\int_0^1\frac{\sin x^p}{x^2}dx$；

解：① 当 $p>0$时，$\frac{\sin x^p}{x^2}\sim\frac{1}{x^{2-p}}(x\to 0^+)$，因而

当 $p>1$时，$2-p<1$，$\int_0^1\frac{\sin x^p}{x^2}dx$ 收敛，且为绝对收敛；

当 $0<p\le 1$时，$2-p\ge 1$，$\int_0^1\frac{\sin x^p}{x^2}dx$ 发散。 ……………………………2 分

② 当 $p<0$ 时，令 $t=x^p$，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx=-\frac{1}{p}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{p}+1}}dt$，故知：

当 $-1\le p<0$ 时，$\frac{1}{p}+1\le 0$，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx=-\frac{1}{p}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{p}+1}}dt$ 发散；

当 $p<-1$ 时，$0<\frac{1}{p}+1<1$，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx=-\frac{1}{p}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{p}+1}}dt$ 条件收敛。 .... 2 分

③ 当 $p=0$ 时，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx=\int_0^1 \frac{\sin 1}{x^2}dx$ 发散。

综上可知：当 $p>1$ 时，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx$ 绝对收敛；当 $-1\le p\le 1$ 时，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx$ 发散；

当 $p<-1$ 时，$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^2}dx$ 条件收敛。 .... 1 分

（2）$\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\cos xdx$

解：① 首先，$\forall A\in[3,+\infty)$, $\left|\int_3^A \cos xdx\right|=\left|\sin A-\sin 1\right|\le 2$。

当 $x\ge 3$ 时，$[\frac{\ln x}{x}]'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，故 $\frac{\ln x}{x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调减少。又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$，故由 Dirichlet 判别法知，$\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\cos xdx$ 收敛。 .... 3 分

② 当 $x\ge 3$ 时，$\left|\frac{\ln x}{x}\cos x\right|\ge\frac{\ln x}{x}\cos^2 x=\frac{\ln x}{2x}+\frac{\ln x}{2x}\cos 2x\ge 0$。

又 $\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{2x}dx$ 发散，由 Dirichlet 判别法知 $\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{2x}\cos 2xdx$ 收敛，从而 $\int_3^{+\infty}(\frac{\ln x}{2x}+\frac{\ln x}{2x}\cos 2x)dx$ 发散，因而利用比较判别法，$\int_3^{+\infty}\left|\frac{\ln x}{x}\cos x\right|dx$ 发散，故 $\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\cos xdx$ 条件收敛。..... 2 分

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 4 分）：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$，故由达朗贝尔判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛。 .... 4 分

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{4n}$

解：易见当$n\to\infty$时，$\sin\frac{1}{4n}\sim\frac{1}{4n}$。又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$发散，故由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{4n}$发散。

…………………………………………4 分

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{2n})^n}$

解：因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{2n})^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2+\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}<1$，故知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{2n})^n}$绝对收敛，当然收敛。 ……………………………………4 分

三、求解题（共 15 分）

1. 设$f(x)=\int_0^{2x}e^{-t^2}dt$，计算$f'(x)$，并求$f(x)$在$x=0$的幂级数展开式。（7 分）

解：（1） $f'(x)=e^{-(2x)^2}(2x)'=2e^{-4x^2}$。 ……………………………………3 分

（2）由于$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)$，从而$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}(-\infty<t<+\infty)$，故

$$f(x)=\int_0^{2x}e^{-t^2}dt=\int_0^{2x}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}]dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^{2x}t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{n!(2n+1)}x^{2n+1}(-\infty<x<+\infty),$$

这即为$f(x)$在$x=0$的幂级数展开式。 ……………………………………4 分

2. 求曲线$x=a(t+\cos t)$，$y=a\sin t$，$t\in[0,\pi]$的弧长$(a>0)$。（8 分）

解：根据弧长计算公式，该曲线的弧长为

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{[a(1-\sin t)]^2+[a(\cos t)]^2}\,dt$$ ……………………………………4 分

$$=\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin t}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{[\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}]^2}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right|dt$$

$$=\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right|dt+\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right|dt$$

$$=\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2})dt+\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2})dt$$

$$=2\sqrt{2}a(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\sqrt{2}a(-\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2})\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$=4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a$ .... 4 分

四、证明题（每题 7 分，共 21 分）

1. 证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^{n+1}]^n}{n}x^n$ 的收敛域为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，并求其和函数。

解：（1）证明：因为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{[2+(-1)^{n+1}]^n}{n}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{2+(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=3$，故此幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$。又当 $x=\pm\frac{1}{3}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^{n+1}]^n}{n}x^n$ 发散（部分和数列分别趋于正无穷大和负无穷大)，所以此幂级数的收敛域为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$。 .... 4 分

（2）令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^{n+1}]^n}{n}x^n$ $(-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3})$，则当 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ 时，

$$S'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^{n+1}]^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{[2+(-1)^{n+1}]^n}{n}x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^{n+1}]^n x^{n-1}$$

$$=3+x+3^3x^2+x^3+\cdots+3^{2n-1}x^{2n-2}+x^{2n-1}+\cdots$$

$$=(3+3^3x^2+\cdots+3^{2n-1}x^{2n-2}+\cdots)+(x+x^3+\cdots+x^{2n-1}+\cdots)$$

$$=\frac{3}{1-9x^2}+\frac{x}{1-x^2},$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt+S(0)=\int_0^x(\frac{3}{1-9t^2}+\frac{t}{1-t^2})dt+0=-\frac{1}{2}\ln\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)。$$

.... 3 分

2. 证明函数列 $\{S_n(x)\}=\{x^n-x^{2n}\}$ 在 $[0,1]$ 上点态收敛，但不一致收敛。

证明：（1）易知 $\forall x\in[0,1]$，$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x^n-x^{2n})=0$，因此函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上点态收敛于 $S(x)\equiv 0$。 .... 4 分

（2）取数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right\}$， $n=1,2,\cdots$， 则数列 $\{x_n\}\subset[0,1]$， 且

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n(x_n)-S(x_n)\right|=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}>0,$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛。 ....3 分

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数， $f(0)=0$， $f(1)=1$。证明：

（1） $\int_0^1 e^x\left|f(x)+f'(x)\right|dx\ge e$；

（2） $\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|^2dx\ge\frac{2}{e^2}$。

证明：（1）由于 $(e^x f(x))'=e^x(f(x)+f'(x))$，故知

$$\int_0^1 e^x\left|f(x)+f'(x)\right|dx=\int_0^1\left|[e^x f(x)]'\right|dx\ge\int_0^1[e^x f(x)]'dx$$

$$=[e^x f(x)]\Big|_0^1=ef(1)-f(0)=e$$ ....3 分

（2）类似（1）可得， $\int_0^1 e^{-x}\left|f(x)-f'(x)\right|dx\ge\frac{1}{e}$。再由 Schwarz 不等式可知

$$\int_0^1 e^{-x}\left|f(x)-f'(x)\right|dx\le[\int_0^1 e^{-2x}dx]^{\frac{1}{2}}\cdot[\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|^2dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[\frac{1}{2}(1-e^{-2})]^{\frac{1}{2}}\cdot[\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|^2dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2}}[\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|^2dx]^{\frac{1}{2}},$$

即有 $\frac{1}{\sqrt{2}}[\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|^2dx]^{\frac{1}{2}}\ge\frac{1}{e}$，从而 $\int_0^1\left|f(x)-f'(x)\right|^2dx\ge\frac{2}{e^2}$。............ ......4 分