

安徽大学 2020—2021 学年第二学期
《数学分析（中）》考试试卷（B 卷）
(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总 分 |
|-----|---|---|---|---|-----|
| 得 分 | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | |

学号 _____
姓名 _____
专业 _____
年级 _____
院/系 _____
答 题 不 超 装 订 线

订

一、计算题（共 42 分）

得分 _____

1. 计算下列不定积分（每小题 6 分）：

$$(1) \int x \cos 2x dx ;$$

$$(2) \int \sin(2x) \cos(4x) dx ;$$

$$(3) \int (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^{2020} dx ;$$

2. 计算下列定积分或反常积分 (每小题 6 分):

$$(1) \int_1^2 \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2} dx$$

$$(2) \int_0^8 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$(3) \int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

二、分析判断题（共 25 分）

得分

1. 判断下列级数或反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分）：

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n - \ln n};$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^3)}{x^2} dx;$$

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分）：

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) ;$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{2^n} .$$

三、求解题（共 18 分）

得分

1. 设 $f(x) = \int_0^{-x} \sin(t^2) dt$ ，计算 $f'(x)$ ，并求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的幂级数展开式。（9 分）

2. 求由曲线 $y = x - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。（9 分）

四、证明题（每题 5 分，共 15 分）

得 分

1. 证明幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ 的收敛域为 $[-3, 3)$ ，并求其和函数。

2. 设函数列 $S_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{2n}$ ，证明 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, \infty)$ 上点态收敛，但不一致收敛。

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$ 。证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$$