安徽大学 2022-2023 学年第一学期《高等代数(上)》期中考试试题

（闭卷 2 小时；满分 100 分）

备注：请将答案写到答题纸上，试题卷上答题不计分

年级__________ 专业__________姓名__________学号__________

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知A,B都是n阶方阵，则下列说法错误的是(　　).

A. 若$AB=A+B$，则$AB=BA$;

B. 若$AB=A-B$，则A可逆的充要条件是B可逆;

C. 若A、B可逆，则$A+B$可逆;

D. 若A的所有 k 阶子式全为零的充要条件是 $r(A)<k$.

2. 下列命题错误的是(　　).

A．已知A是一个$m\times n$的实矩阵，则$r(A^TA)=r(A)$;

B．设A,B分别是$s\times m, m\times n$的矩阵，则$r(A)+r(B)-m\le r(AB)$;

C．设$A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，$f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$，则$f(A)g(B)=g(B)f(A)$;

D．已知方阵A满足$A^k=0$，其中k是正整数，则$I-A$可逆.

3. 已知A,B都是n阶上三角矩阵，且A,B的主对角元素分别为$a_{ii},b_{ii}(i=1,2,...,n)$下列命题错误的是(　　).

A．AB还是上三角矩阵，且AB的主对角元素为$a_{ii}b_{ii}(i=1,2,...,n)$;

B．A^T,B^T是下三角矩阵;

C．A^*不一定总是上三角矩阵;

D．A可逆时，A^{-1}也是上三角矩阵，且A^{-1}的主对角线元素全为$a_{ii}^{-1}(i=1,2,...,n)$.

4.下列关于矩阵的相关命题错误的是(　　).

A. 设A,B都是n阶矩阵，A可逆，且$B^2+BA+A^2=0$，则B和$A+B$都可逆;

B. 若行列式$D=|a_{ij}|$每行元素的和和每列元素的和都等于 0，则D的各元素的代数余子式不一定相等;

C. 已知A是一个$m\times n$矩阵，$r(A)=r$，则A可以表示r个秩为 1 的矩阵的和;

D. A是反称矩阵的充要条件是 $A^T=-A$.

5. 已知A,B分别是n,m阶可逆方阵，则$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$的伴随矩阵是(　　)

A. $\begin{pmatrix}0&A^*\\B^*&0\end{pmatrix}$; B. $(-1)^{mn}\begin{pmatrix}0&B^*\\A^*&0\end{pmatrix}$ C. $(-1)^{mn}\begin{pmatrix}0&|A|B^*\\|B|A^*&0\end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix}0&|AB|B^{-1}\\|AB|A^{-1}&0\end{pmatrix}$.

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

6. n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$定义中的项$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$的符号为____________.

7. 设有行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 11 & -8 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$，则$M_{21} - 2A_{22} + 3A_{23} - 4A_{24} =$____________.

8. 设$f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则$f(A) =$____________.

9. 排列$n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为____________.

10. 设$A = (a_{ij})$是n阶可逆实矩阵，$n \geq 3$ 且n为奇数，A_{ij}为a_{ij}在行列式$|A|$中的代数余子式，若$A_{ij} = 2a_{ij} (i, j = 1,2, \dots, n)$，则$|A| =$____________.

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

11. 考虑下面线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2ax_3 = 2, \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - ax_3 = 1. \end{cases}$$

问：a, b为何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多个解？且在方程组有解的情况下求出所有解.

12. 设分块矩阵$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$，其中 A,B 分别为 r,s 阶可逆矩阵. 问: M 是否可逆？若 M 可逆，试求M^{-1}.

13. 求矩阵方程$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 6 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$的解.

14. 计算n行列式$D_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} \end{vmatrix} (c_1 c_2 \cdots c_{n-1} \neq 0)$.

四、证明题（每小题 10 分，共 30 分）

15. 证明线性方程组$x_i - x_{i+1} = a_i, i = 1, \dots, n-1, x_n - x_1 = a_n$（$a_i \in \mathbb{F}, i = 1,2, \dots, n$）有解的充要条件是$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$.

16. 设$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$，$B \in \mathbb{F}^{n \times p}$，证明：$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

17. 设 A 是秩为 r 的$m \times n$矩阵. 证明：存在$m \times r$矩阵 B 与$r \times n$矩阵 C，使得$A = BC$，且 $r(B)$=$r(C)$=r.