安徽大学2018-2019学年第二学期
《高等代数（下）》期末考试试卷（A卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、填空题 (每小题3分，共15分)

得分	

1. 多项式$f(x)=3x^3+2x^2+2x-1$的所有有理根为____________.

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&y\\2&-1&x\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$相似. 则$x=$________, $y=$________.

3. 设向量$\alpha=(1,2,1)$, $\beta=(1,1,1)$, I_3为3阶单位阵. 则矩阵$A=2I_3+\alpha^T\beta$的全部特征值为__________________.

4. 设A是3阶实对称阵, 且$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$, $\alpha_3=(1,a,b)^T$分别为A的属于特征值$1,-1,3$的特征向量. 则$a=$_______, $b=$_______.

5. 设$\mathbb{R}^{2\times2}$是所有2阶实方阵构成的欧氏空间，其内积定义为$(A,B)=\mathrm{tr}(A^TB)$, 其中$A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$, $\mathrm{tr}(A^TB)$为矩阵A^TB的迹. 则在该欧氏空间中, $\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}$到$\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}$的距离为____________.

二、选择题 (每小题3分，共15分)

得分	

6. 设$\mathbb{F}$是数域, $f(x),g(x),h(x)\in\mathbb{F}[x]$. 则下列说法**正确**的是 (　　)

   (A) 若存在$u(x),v(x)$, 使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=h(x)$, 则$h(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式.

   (B) 若$h(x)\mid f(x)g(x)$, 且$(f(x),g(x))=1$, 则必有$h(x)\mid f(x)$, 或$h(x)\mid g(x)$.

   (C) 若$f(x),g(x),h(x)$互素, 则$f(x),g(x),h(x)$必然两两互素.

   (D) 若$h(x)\mid f(x)g(x)$, 且$h(x)$不可约, 则必有$h(x)\mid f(x)$, 或$h(x)\mid g(x)$.

7. 设$A(\lambda), B(\lambda)$都是数域$\mathbb{F}$上n阶λ-矩阵. 则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充分必要条件是 (　　)

(A) $A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的秩. (B) $A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的行列式.

(C) $A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的不变因子. (D) $A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的初等因子组.

8. 设n阶矩阵A, B相似, $k = 1, 2, \cdots, n$. 则A与B有相同的 (　　)

(A) 特征子空间. (B) 根子空间.

(C) k阶顺序主子式. (D) 所有k阶主子式的和.

9. 设$\mathscr{A}$是n维欧氏空间V上的正交变换. 则下列说法**不正确**的是 (　　)

(A) $\mathscr{A}$在任一正交基下的矩阵都是正交阵.

(B) $\mathscr{A}$将正交基变为正交基.

(C) 若n是奇数, 则$\mathscr{A}$必有实特征值1或-1.

(D) 对任意$\alpha, \beta \in V$, α与β的夹角等于$\mathscr{A}(\alpha)$与$\mathscr{A}(\beta)$的夹角.

10. 设A是负定阵. 则下列说法**不正确**的是 (　　)

(A) 存在可逆阵P, 使得$A = -PP^T$. (B) A的所有顺序主子式小于零.

(C) $-A$是正定阵. (D) A可逆，且A的正惯性指数为零.

三、计算题 (第11、12、14题每题10分, 第13题15分, 共45分)

得分	

11. 设$f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$. 求$(f(x), g(x))$, 以及多项式$u(x), v(x)$, 使得$u(x)f(x) + v(x)g(x) = ((f(x), g(x))$.

12. 设$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\-1&1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$. 求$A^n$, n为正整数.

13. 设复矩阵A的特征矩阵$\lambda I - A$的各阶行列式因子分别为$D_1(\lambda) = \cdots = D_6(\lambda) = 1$, $D_7(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2$, $D_8(\lambda) = (\lambda - 3)^4(\lambda + 2)^4$. 求

(1) A的所有不变因子.

(2) A的初等因子组.

(3) A的Jordan标准形.

(4) A的极小多项式.

(5) A的所有两两不同的特征值, 及其代数重数与几何重数.

答题勿超装订线

装 订 线

14. 设实二次型$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-6x_3^2-2x_1x_2-4x_2x_3$. 用合同变换法将$q(x_1,x_2,x_3)$化为规范形，并求对应的非退化线性替换.

四、证明题(第15、16题每题10分，第17题5分，共25分)

得分	

15. 设$\mathbb{F}$是数域, $f(x),p(x)\in\mathbb{F}[x]$, 且$p(x)$不可约. 证明：若$p(x)$是$f(x)$ 的k重因式, 则$p(x)$为$f'(x)$的$k-1$重因式, 其中$k\geq 2$为正整数.

16. 设A是n阶实对称阵. 证明: A是半正定阵的**充分必要条件**是存在n阶半正定实对称阵B, 使得$A = B^2$.

17. 设A, B都是n阶矩阵, 且$AB = BA$. 证明: 若A有n个互不相同的特征值, 则B可对角化.

安徽大学2018-2019学年第二学期《高等代数(下)》期末考试(A卷)参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad x=\frac{1}{3}\quad}$. 2. $\underline{\quad x=4, y=2\quad}$. 3. $\underline{\quad 6,2,2\quad}$. 4. $\underline{\quad a=0, b=1\quad}$.

5. $\underline{\quad \sqrt{3}\quad}$.

二、选择题 (每小题3分, 共15分)

6. D. 7. C. 8. D. 9. A. 10. B.

三、计算题 (第11、12、14题每题10分, 第13题15分, 共45分)

11. 解:

$f(x)=g(x)(x+1)+(x^2+x-2)$

$g(x)=(x^2+x-2)(x-2)+(x-1)$

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

由此可知，$(f(x),g(x))=x-1$. ....(5分)

$x-1=g(x)-[f(x)-g(x)(x+1)](x-2)$

$=-(x-2)f(x)+[1+(x+1)(x-2)]g(x)=-(x-2)f(x)+(x^2-x-1)g(x)$.

取$u(x)=-(x-2)$, $v(x)=x^2-x-1$, 则有$u(x)f(x)+v(x)g(x)=x-1$. (10分)

12. 解: $|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -2\\ 1 & \lambda-1 & -2\\ 1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

故A的特征值为$\lambda_1=1$ (二重), $\lambda=2$ (单重).

对于特征值$\lambda_1=1$的线性无关的特征向量为$\alpha_1=(2,0,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$.

对于特征值$\lambda_2=2$的线性无关的特征向量为$\alpha_3=(1,1,1)^T$. .... (5分)

故令$P=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则有$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}$.

又因为$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

故$A^n=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2-2^n&0&2^{n+1}-2\\1-2^n&1&2^{n+1}-2\\1-2^n&0&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$. .... (10分)

13. 解: (1) A的不变因子为$d_1(\lambda)=\cdots=d_6(\lambda)=1$,

$d_7(\lambda)=\dfrac{D_7(\lambda)}{D_6(\lambda)}=(\lambda-3)(\lambda+2)^2$,

$d_8(\lambda)=\dfrac{D_8(\lambda)}{D_7(\lambda)}=(\lambda-3)^3(\lambda+2)^2$. .... (3分)

(2) A的初等因子组为$(\lambda-3),(\lambda-3)^3,(\lambda+2)^2,(\lambda+2)^2$. .... (6分)

(3) A的Jordan标准形为$\begin{pmatrix}3&&&&&&&\\&3&&&&&&\\&1&3&&&&&\\&&1&3&&&&\\&&&&-2&&&\\&&&&1&-2&&\\&&&&&&-2&\\&&&&&&1&-2\end{pmatrix}$. .... (9分)

(4) A的极小多项式$m(\lambda)=(\lambda-3)^3(\lambda+2)^2$. .... (12分)

(5) A的特征值$\lambda_1=3$的代数重数为4, 几何重数为2;

A的特征值$\lambda_2=-2$的代数重数为4, 几何重数为2. .... (15分)

14. 解. 二次型$q(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-2\\0&-2&-6\end{pmatrix}$.

对A作合同变换

$$\begin{pmatrix}\dfrac{A}{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-2\\0&-2&-6\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-6\\1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\\1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\dots\dots\dots\dots(8分)$$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\\1&1&-\sqrt{2}\\0&1&-\sqrt{2}\\0&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ 令$Q=\begin{pmatrix}1&1&-\sqrt{2}\\0&1&-\sqrt{2}\\0&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. 则作非退化线性替换$X=QY$,

可得规范形$q(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$. ....(10分)

四、证明题 (第15、16题每题10分, 第17题5分, 共20分)

15. 证: 由题设可知，$f(x)=p^k(x)g(x)$, $p(x)\nmid g(x)$.

于是，$f'(x)=kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)+p^k(x)g'(x)=p^{k-1}(kp'(x)g(x)+p(x)g(x))$.

显然，$p^{k-1}(x)\mid f'(x)$. ....(6分)

又因为$p(x)\nmid p'(x)$, 所以$p(x)\mid(kp'(x)g(x))$.

从而$p(x)\nmid(kp'(x)g(x)+p(x)g(x))$, 故$p^k(x)\nmid f'(x)$.

即$p(x)$为$f'(x)$的$k-1$重因式. ....(10分)

16. 证: ($\Longleftarrow$) 若$A = B^2$, 其中B为实对称阵.

则$A = B^T B$. 故A为半正定阵……………………………………………(5分)

($\Longrightarrow$) 设A是实对称阵. 则存在正交阵Q, s.t. $A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^T$,

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的特征值. 因为$A$为半正定阵，所以$\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

令$B = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^T$.

则$A = B^2$. ……………………………………………………(10分)

17. 证: 设A有n个互不相同的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 则存在可逆阵$P$, s.t.

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = A_1$. ……………………………(2分)

设$B_1 = P^{-1}BP$. 则$A_1 B_1 = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = B_1 A_1$.

因为A_1为对角阵，且对角线上元素两两不同，所以B_1也是对角阵. 从而B也可对角化……………………………………………………………(5分)