安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等代数（下）考试 A 卷参考答案及评分标准》

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x=-\frac{1}{2}$ 是二重根；　2. $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda^2+1)$ 或 $m(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda^2+1)$；

3.$12-5^n$，$12-5^n-2(-1)^n$；　4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$；　5. $\|C_1\|=\|C_2\|<\|C_3\|$。

二、简答题（每小题 4 分，共 20 分）

6、请说明复数域、实数域和有理数域上不可约多项式的次数情况。

答：复数域上只存在一次不可约多项式；实数域存在一次和二次不可约多项式；
有理数域上存在任意高次不可约多项式。

7、试在双线性函数的概念下给出线性空间V上的二次型和内积的定义。

答：设f为线性空间V上的对称双线性函数，对任意$\alpha\in V$，$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$，
则称q为V上的二次型；

线性空间V上的内积是V上的一个正定对称双线性函数。

8、叙述“双线性函数的秩”的定义，并指出该定义的合理性。

答：双线性函数在线性空间V上一个基下的度量矩阵的秩称为该双线性函数的秩。

合理性：因一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是彼此合同的，从而所有的度量矩阵的秩相等，具有唯一性，该秩是由这个双线性函数确定的，故可定义为双线性函数的秩。

9、从n维欧式空间V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$出发，用 Schmidt 正交化方法求出一个正交基为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，请写出该 Schmidt 正交化公式。

答：$\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_k,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_k,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}\beta_{k-1},\quad k=2,3,\cdots,n。$$

10、试写出所有可能的 3 阶正交矩阵（在合同的意义下）

答：在合同的意义下共四种：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$，。

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

11、将多项式 $f(x)=7x^4+x^3-8x^2+8x+9$ 表示成$x+1$的幂级数形式。

解：用综合除法，$f(x)$被$x+1$去除，得余数如下表达式

$$f(x)=7(x+1)^4-27(x+1)^3+31(x+1)^2-(x+1)-1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

注：视具体步骤给分。

12、已知复矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

（1）写出 A 的 $Jordan$ 标准形 J；　（2）求 A 的极小多项式。

解：（1）矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

特征值为：$\lambda=2$（三重）。 ……………3 分

对应的特征向量是：$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$。

故可的 A 的 $Jordan$ 标准形 $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ ……………6 分

（2）由（1）可得 A 的极小多项式为 $m(A)=(x-2)^2$。 ……………10 分

注：本题（1）的解法不唯一，视具体情况给分。

13、已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，且矩阵 A 属于特征值 $1,2$ 的特征向量分别为

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\ \alpha_2=(1,-2,-1)^T.$$

(1) 求 A 属于特征值 3 的特征向量；(2) 求出矩阵 A 的表达式。

解：设 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$. 由于 A 是实对称矩阵，故属于不同特征值的特征向量互相正交，所以有

$$\begin{cases}(-1)x_1+(-1)x_2+1x_3=0,\\1x_1+(-2)x_2+(-1)x_3=0.\end{cases}$$

此基础解系为 $\alpha_3=(1,0,1)^T$. 即 A 的属于特征值 3 的全部特征向量为 $k\alpha_3,k\neq0$.

……………5 分

(2) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$. 于是

$$A=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{bmatrix}.$$ ……………10 分

四、证明题（每小题 10 分，共 30 分）

14、证明：正交矩阵的实特征值为 ±1。

证明：设 A 是正交矩阵，λ 是特征值，ξ 是对应的特征向量，则 $A\xi=\lambda\xi$，于是

$$\overline{\xi}^T A^T A\xi = \lambda^2 \overline{\xi}^T \xi。$$ ……………5 分

因为$A^T A = I$与$\overline{\xi}^T \xi > 0$，即得$\lambda^2 = 1$。于是$\lambda = \pm 1$。 ……………10 分

15、设V为数域F的n维线性空间。证明：V上的对称双线性函数全体与F上的n阶对称矩阵全体之间存在一一对应关系。

证明：设SBL为V上所有双线性函数构成的全体构构成的集合，SM为F上的n阶对称矩阵全体构成的集合。固定V的一个基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

定义σ: $SBL \to SM$，$\sigma(f) = A = (a_{ij})$，其中A为f在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的度量矩阵。

由f的对称性可知，$a_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\alpha_j, \alpha_i) = a_{ji}$，即$A$为对称阵. ……………5 分

反之，对任意对称阵A，定义φ: $SM \to SBL$，$\varphi(A) = f$如下，对任意$\alpha, \beta \in V$，

$f(\alpha, \beta) = XAY^T$，其中X, Y分别为α, β在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的坐标. 容易证明，$f$为对称双线性函数.

进一步，σ与φ为一对互逆映射，即存在SBL与SM之间的一一对应. ……………10 分

16、设σ为n维欧式空间V上的线性变换。证明以下四个条款等价：

（1）σ保持长度不变；（2）σ保持内积不变；（3）σ将标准正交基变为标准正交基；

（4）σ在标准正交基下矩阵为正交矩阵。

证明：$(1) \Rightarrow (2)$. 由$(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$可得$(\sigma(\alpha+\beta), \sigma(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$，展开

$$(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) + 2(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) + (\sigma(\beta), \sigma(\beta)) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta),$$

于是$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$，即$\sigma$保持内积不变。 ……………3 分

$(2) \Rightarrow (3)$. 设$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$为标准正交基，则$(\sigma(\varepsilon_i), \sigma(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$，从而$\sigma(\varepsilon_1), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)$为一个标准正交基。 ……………6 分

$(3) \Rightarrow (4)$. 设σ在标准正交基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$的矩阵为$A$，即$\sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A$。由于$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$和$\sigma(\varepsilon_1), \cdots, \sigma(\varepsilon_n)$为标准正交基，故$A$为正交矩阵。 ……………8 分

$(4) \Rightarrow (1)$. 假设σ在标准正交基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$的矩阵为正交矩阵$A$，$\forall \alpha = a_a\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$是任意一个向量，则$\|\sigma(\alpha)\|^2 = (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)) = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \|\alpha\|^2$，即有$\sigma$保持长度不变。

……………10 分