学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《 高等代数（下） 》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题号、型	一、填空题	二、简答题	三、计算题	四、证明题	总分
得　分					
阅卷人					

一、填空题（共 35 分）

1（**5** 分）、已知多项式 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3,\ g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，那么 $(f(x),g(x))=$______________。

2（**20** 分）、已知复矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2$，请写出与 A 相似的所有可能的 Jordan 标准形（不计较排列次序），并把下面表格填写完整（若列不够，可增加）。

与 A 相似的所有可能的 Jordan 标准形					……
对应的初等因子组					
对应的不变因子					
对应的行列式因子					
对应的 A 的极小多项式					

3（**5** 分）、已知线性变换 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\varepsilon_2$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&-3&3\\0&0&-2\end{bmatrix}$，则 σ 在 V 的基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_3$下的矩阵为________________。

4（**5 分**）、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\0&1&3\\0&0&-2\end{bmatrix}$，设 $B=A^3-2A^*-2I$，则 $|B|-tr(B)=$ ____________。

二、简答题（每小题 5 分，共 10 分）

5、举例并说明理由：在有理数域 Q 上存在任意高次的不可约多项式。

6、设 $\sigma:V\to V$ 为线性变换且两个不同的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$，$\iota:V\to V$ 是恒等变换。已知 $\dim V=6$ 且 $V=W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}$，其中 $W_{\lambda_1}=\ker\sigma^2$ 的维数为 2，$W_{\lambda_2}=\ker(\sigma+2\iota)^2$ 的维数为 4。试写出 σ 在一些基下所有可能的 Jordan 标准形（不计较排列次序）。

三、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

7、求 $f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+17x^3+6x^2-20x+8$ 在实数 $\mathbf{R}$ 上的典型分解式.

8、已知 $\dim V=3$，线性变换 $\sigma:V\to V$ 作用在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\varepsilon_2$ 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

（1）求一个非奇异矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$；

（2）求 V 的一个基，使得 σ 在该基下的矩阵为 Jordan 标准形 J；

四、证明题（共 35 分）

9（10 分）、证明：若 $(f,g)=1$，则存在一对多项式 u,v 满足 $\deg u<\deg g,\deg v<\deg f$，使得 $uf+vg=1$ 成立。

10（10 分）、设 n 阶矩阵 A 有 k 个不同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，且可以对角化。证明：存在 k 个 n 阶矩阵 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 满足 $\sum_{i=1}^{k}A_i=I_n$ 且 $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i$ 成立。

11（15 分）、证明：n 阶矩阵 A 可以对角化的充分必要条件是与下面每一条等价：

（1）A 有 n 个线性无关的特征向量；

（2）$F^n=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_2}$，其中 $V_{\lambda_i}=\{X\mid AX=\lambda_iX\}$；

（3）A 的每一个特征值的几何重数等于代数重数。