2009-2010 第二学期《数学分析（中）》A 卷答案及评分标准

一. 填空题 (每小题 5 分, 共 15 分)

1. $\frac{1}{2e}$;

2. $\frac{1}{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n, x \in (0,2)$

3. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$;

二. 计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 解：原式 $=\int_1^3(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = \ln x|_1^3 - \ln(x+1)|_1^3$

....5 分

从而所求值为 $\ln\frac{3}{2}$. ....6 分

2. 解：易知被积函数为奇函数，故由对称性可知积分值为 0. ....6 分

3. 解：令 $t = \sqrt{x}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^{+\infty} e^{-t}2tdt = -\int_0^{+\infty} 2tde^{-t}$$

....3 分

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 2$$

....6 分

4. 解：(i)$a > 1$, 则原式 $= \int_0^1(a-x)xdx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$,

....2 分

(ii)$a \le 0$, 则原式 $= \int_0^1(x-a)xdx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$,

....4 分

(iii)$0 < a < 1$, 则原式 $= \int_0^a(a-x)xdx + \int_a^1(x-a)xdx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{3}$

....6 分

三. 应用题 (11 分)

解：

$$l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt$$

....5 分

$$= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 11 分

四. 讨论级数敛散性 (每小题 5 分，共 15 分)

1. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{e}<1$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 4 分

故原级数收敛.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 5 分

2. 解: 显然原级数为莱布尼兹级数，故收敛.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 3 分

又 $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$ 故级数 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散, 从而原级数条件收敛.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 5 分

3. 解：当 $\alpha\le 0$ 时，一般项不趋于 0, 故级数发散.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 1 分

在 $\alpha>1$ 时，由 $|\frac{\sin nx}{n^\alpha}|\le\frac{1}{n^\alpha}$ 知，原级数绝对收敛.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 2 分

当 $0<\alpha<1$ 时，由 A.D. 判别法可知级数收敛，但又由 $|\frac{\sin nx}{n^\alpha}|\ge\frac{\sin^2 nx}{n^\alpha}=\frac{1}{2}\frac{1-\cos 2nx}{n^\alpha}$ 及级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^\alpha}$ 收敛可知，原级数条件收敛.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 5 分

五. 分析题 (每小题 10 分)

1. 解，易知收敛半径为 1 及在 $x=-1$ 点发散.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 2 分

又级数在 $x=1$ 时为莱布尼兹级数，故收敛. 从而收敛域为 $(-1,1]$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 4 分

$$令 f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n,$$

于是在 $x\neq 0$ 时，有

$$f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{x}g(x).$$

而

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6 分

故在 $(-1,1]$ 上有

$$g(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt+g(0)=\ln(1+x).$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

由此得到，在 $x\in(-1,0)\bigcup(0,1]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$, 在 $x=0$ 时，$f(x)=1$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10 分

2.(1) 显然极限函数为 0.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

又

$$\sup_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1}$$

故当 $\alpha<1$ 时，函数列一致收敛.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6 分

(2) 由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}(n^{\alpha-2}-n^{\alpha-1}(1+\frac{1}{n})e^{-n})$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

又 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}(1+\frac{1}{n})e^{-n}=0$,

故 $\alpha<2$ 时，极限号与积分号可交换.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10 分.

3. 解：在 $x>0$ 时，对每一固定的点 x, 级数都是莱布尼兹级数，故函数在 $x>0$ 有意义.

又当 $x\leq 0$ 时，一般项不趋于 0，故定义域为 $(-\infty,0)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

显然级数在 $(-\infty,0)$ 上内闭一致收敛及每一项都连续，故和函数连续.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6 分

而逐项求导后的新级数 $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{\ln n}{n^x}$ 也在 $(-\infty,0)$ 上内闭一致收敛，从而和函数可微.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10 分

六. 证明题 (5 分)

证明：由已知，易知存在一点 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)=0$. 若 f 在 $[a,b]$ 上只有一个零点，则不妨设 $f(x)>0,x\in[a,x_1)$,$f(x)<0,x\in(x_1,b]$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

从而

$$\int_a^b(x_1-x)f(x)dx=\int_a^{x_1}(x_1-x)f(x)dx+\int_{x_1}^b(x_1-x)f(x)dx>0$$

这与

$$\int_a^b (x_1 - x) f(x) dx = x_1 \int_a^b f(x) dx - \int_a^b x f(x) dx = 0$$

矛盾.

. . . . 5 分