

安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《数学分析 (中)》考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
阅卷人					

一、计算题 (共 39 分)

得 分	
-----	--

1. 计算下列不定积分 (每小题 5 分):

(1)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$  ;

(2)  $\int (2x+1) \ln(x+1) dx$  ;

(3)  $\int \frac{x e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}} dx$  ;

2. 计算下列定积分或反常积分（每小题 6 分）：

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$

(2)  $\int_0^2 x^2 |x-1| dx$

(3)  $\int_0^1 \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$

(4)  $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$

二、分析判断题（共 28 分）

得 分	
-----	--

1. 判断下列反常积分的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 4 分）：

(1)  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan e^x}{2x^2+1} dx;$

(2)  $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx;$

2. 判断下列级数的敛散性（每小题 5 分）：

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(n+1)!};$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{3n^2});$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2+1}}$$

### 三、求解题（共 20 分）

得分	
----	--

1. 求由曲线  $y^2 = 4(x+1)$  与  $y^2 = 4(1-x)$  所围成的图形的面积, 以及此图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。(8 分)

2. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$  的收敛半径、收敛域及和函数。(12 分)

四、证明题 (共 13 分)

得 分	
-----	--

1. 证明函数列  $\{S_n(x)\} = \left\{ \frac{1}{1+x^n} \right\}$  在  $[\frac{3}{2}, +\infty)$  上一致收敛于  $S(x) \equiv 0$ 。(7 分)

3. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$  ( $0 < x < +\infty$ ), 证明:

(1) 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$  在  $(0, +\infty)$  上内闭一致收敛;

(2)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有连续的导数。(6 分)