2017-2018 第二学期《数学分析》（中）A卷答案及评分标准

一计算题 （共48分）

1.（24分）

(1)(6分)$\int x^3\cos(x^4+1)dx$

$$
\begin{aligned}
&\int x^3 cos(x^4+1)dx\\
=&\frac{1}{4}\int\cos(x^4+1)d(x^4+1)\\
=&\frac{1}{4}\sin(x^4+1)+C \quad \cdots\cdots 6\text{分}
\end{aligned}
$$

(2) （6分）$\int x^2\sqrt{x+1}dx$

令$\sqrt{x+1}=t$. $\cdots\cdots 2$分. 则$x=t^2-1$, $dx=2tdt$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\int x^2\sqrt{x+1}dx\\
=&(t^2-1)^2t\cdot 2tdt\\
=&2\int(t^6-2t^4+t^2)dt\\
=&2\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]+C\\
=&\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C \quad \cdots\cdots 4\text{分}
\end{aligned}
$$

(3)(6分) $\int x^2\arctan x dx$

$$
\begin{aligned}
&\int x^2\arctan x dx\\
=&\frac{1}{3}\int\arctan x dx^3\\
=&\frac{1}{3}\left[x^3\arctan x-\int x^3 d\arctan x\right]\\
=&\frac{1}{3}\left[x^3\arctan x-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx\right]\\
=&\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C \quad \cdots\cdots 6\text{分}
\end{aligned}
$$

(4)(6分) $\int \frac{2x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x+\sin x}{1+\cos x}dx \\
=&\int \frac{2x}{1+\cos x}dx+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx \\
=&-\ln|1+\cos x|+2\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx \\
=&-\ln|1+\cos x|+2\int \frac{x}{\sec^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2} \\
=&-\ln|1+\cos x|+2\int xd\tan\frac{x}{2} \\
=&-\ln|1+\cos x|+2\left[x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx\right] \\
=&-\ln|1+\cos x|+2x\tan\frac{x}{2}+4\ln|\cos\frac{x}{2}|+C \quad \cdots\cdots 6分
\end{aligned}$$

2. 求下列定积分（每小题6分，计24分）

(1)(6分) $\int_0^1(1+3^x)^2dx$;

$$\begin{aligned}
&\int_0^1(1+3^x)^2dx \\
=&\int_0^1(1+2\cdot 3^x+3^{2x})dx \\
=&x+2\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{2}\frac{3^{2x}}{\ln 3} \\
=&x+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+\frac{3^{2x}}{2\ln 3} \quad \cdots\cdots 6分
\end{aligned}$$

(2)(6分) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\cos x)^{2018}dx$;

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\cos x)^{2018}dx \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x(\cos x)^{2018}dx \\
=&-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2019}d\cos x \\
=&-2\left[\frac{(\cos x)^{2020}}{2020}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
=&\frac{1}{1010} \qquad \cdots\cdots 6\text{分}
\end{aligned}$$

(3)(6分) $\int_0^1 x^3\ln x dx$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^3\ln x dx \\
=&\frac{1}{4}\int_0^t \ln x dx^4 \qquad \cdots\cdots 3\text{分} \\
=&\frac{1}{4}\left((x^4\ln x)|_0^1 - \int_0^1 x^4 d\ln x\right) \\
=&-\frac{1}{4}\int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{16} \qquad \cdots\cdots 3\text{分}
\end{aligned}$$

(4)(6分) $\int_0^3 x^3[x]dx$

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 x^3[x]dx \\
=&\int_0^1 x^3[x]dx + \int_1^2 x^3[x]dx + \int_2^3 x^3[x]dx \\
=&\int_1^2 x^3dx + 2\int_2^3 x^3dx \\
=&\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 + 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 \\
=&\frac{15}{4} + \frac{130}{4} = \frac{145}{4} \qquad \cdots\cdots 6\text{分}
\end{aligned}$$

二、讨论题（25分）

1. 判断下列级数的敛散性（每小题5分）

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$;

解：记$u_n = n^3 e^{-n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^3 e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1 \quad \cdots\cdots 4分$$

所以依据Cauchy 判别法可知，数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$ 收敛. $\quad\cdots\cdots 1$分

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!}$;

解: 记$u_n = \frac{(3n)^n}{n!}$. 则有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{[3(n+1)]^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3n)!} \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{3(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{3(n+1)}{3n}\right)^n \\
=&3e > 1 \quad \cdots\cdots 4分
\end{aligned}$$

由达朗贝尔判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!}$发散. $\cdots\cdots 1$分

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2}}{n!}$.

解:

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \bar{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^{n^2}}\right| \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n+1} |a|^{[(n+1)^2 - n^2]} \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a|^{2n+1}}{n+1} \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a|^{2n+1} - |a|^{2(n-1)+1}}{n+1-n} \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}} |a|^{2n-1}[a^2 - 1]
\end{aligned}$$

易知，当$|a| \leq 1$时，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, 所以由达朗贝尔判别法知，原级数绝对收敛$\cdots\cdots$3分；当$|a| > 1$时，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, 所以原级数发散. $\cdots\cdots$2分

2. 判别下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题5分）

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}dx$;

解: 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}/\frac{1}{1+x^3} = \frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots 3分$$

且反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$发散，所以反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}dx$发散. $\cdots\cdots$2分

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x\cos x}{x^p}dx$, $\quad p > 0$.

解: 易知

$$\left|\frac{\sin^2 x\cos x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$$

而$p > 1$时反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，由积分的比较判别法可知: $p > 1$时，反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x\cos x}{x^p}dx$绝对收敛；$\cdots\cdots$2分

一方面，当$0 < p \leq 1$时，$\frac{1}{x^p}$在$[1, +\infty]$上单调减少且趋于0，又

$$\int_1^A \sin^2 x\cos x dx = \int_1^A \sin^2 x d\sin x = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_A^1 \leq \frac{2}{3}$$

由Dirichlet 判别法知反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x\cos x}{x^p}dx$在$0 < p \leq 1$时收敛；另一方面，由于$x \geq 1$时，成立

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin^2 x\cos x}{x^p}\right| &\geq \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{x^p} = \frac{\sin^2 2x}{4x^p}\\ &= \frac{1-\cos 4x}{8x^p} = \frac{1}{8x^p} - \frac{\cos 4x}{8x^p}\end{aligned}$$

而当$0 < p \leq 1$时$\int_1^{+\infty}\frac{1}{8x^p}dx$发散. 由Dirichlet 判别法可知: $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{8x^p}dx$在$0 < p \leq 1$时收敛. 所以反常积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin^2 x\cos x}{x^p}\right|dx$发散. 因此原反常积分在$0 < p \leq 1$时条件收敛. $\cdots\cdots$3分

三、求解题(15分)

1. (7分) 求曲线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

的弧长，其中$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

解: 由弧长公式知

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt \quad \cdots\cdots 3\text{分} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3a\sin t\cos^2 t)^2 + (3a\cos t\sin^2 t)^2}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t dt = \frac{3}{2}a \quad \cdots\cdots 4\text{分} \end{aligned}$$

2. (8分) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$的收敛半径、收敛域及和函数.

解：记$a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$. 则可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}} = 1$$

所以该幂级数的收敛半径$R = 1$. 因此，该幂级数的收敛区间是$(-1,1)$. 易知，$x = \pm1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$发散，所以该幂级数的收敛域为$(-1,1)$ $\cdots\cdots$4分. 记$s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$, $x \in (-1,1)$. 于是

$$xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1)$$

于是

$$(xs(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1)$$

因此

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

于是

$$s(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| & , \quad x\neq 0;\\ 1 & , \quad x=0. \quad \cdots\cdots 4\text{分}\end{cases}$$

四、证明题(12分)

1.（6分）证明函数列$\{e^{-2nx}\}$ 在$(0,1)$ 上不一致收敛.

证明：易知, 对每一个$x\in(0,1)$, 成立

$$e^{-2nx}=\frac{1}{e^{2nx}}\to 0,\quad n\to\infty \quad \cdots\cdots 3\text{分}$$

取$x_n=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$. 易见$\{x_n\}\subset(0,1)$. 记$s_n(x)=e^{-2nx}$, $n=1,2,\cdots$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}(s_n(x_n)-s(x_n))=\lim_{n\to\infty}e^{-2n\cdot\frac{1}{n}}=e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

所以函数列$\{e^{-2nx}\}$ 在$(0,1)$上不一致收敛. 证毕 $\cdots\cdots 3$分

2. (6分）设$x_n>0$, $n=1,2,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)n\ln n\right]=l>0$. 证明：

（1）当n充分大时，数列$\{x_n\}$单调减少；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ 收敛.

证明：

（1）条件

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)n\ln n\right]=l>0$$

可化为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_{n+1}}n\ln n=l>0$$

由于$x_n>0$, $n=1,2,\cdots$, 所以当n充分大时，(存在自然数N, 当$n>N$时)，$x_n-x_{n+1}>0$. 即n充分大时，数列$\{x_n\}$单调递减。

由于n 充分大时$\{x_n\}$单调递减及$x_n>0$，根据数列的单调有界定理知, 数列$\{x_n\}$收敛. $\cdots\cdots 3$分

(2) 为证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$收敛，只需证明数列$\{x_n\}$满足：$x_n\to 0$, $n\to\infty$. 反证. 假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lambda>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\ln n(x_n-x_{n+1})\right]=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\left[n\ln n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)\right]=\lambda l>0$$

故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} x_n - x_{n+1}$ 与级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 同敛散。由级数的积分判别法知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$发散，因此$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n+1})$发散. 但实际上$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n+1}) = x_1 - \lambda$, 即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n+1})$是收敛的，矛盾。因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 由Leibniz判别法知: 当$n$充分大时，级数$\sum\limits_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k$是收敛的，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$收敛. 证毕$\cdots\cdots$3分