

安徽大学2019-2020学年第一学期
《数学分析（上）》考试试卷（B卷）
(闭卷 时间120分钟)

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每空3分, 共9分)

得分	
----	--

- 函数 $f(x) = x^2 + (1-x)^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为_____.
- 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), n = 1, 2, \dots$, 则数列 $\{x_n\}$ 的上确界为_____.
- 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0, f'(0)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} =$ _____.

二、计算数列极限 (每题6分, 共24分)

得分	
----	--

- (6分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) \cos n\pi$.

2. (6分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a^{n-1}}{n+1}$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

3. (6分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

4. (6分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$.

三、计算函数极限 (每题6分, 共24分)

得分	
----	--

1. (6分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-3}$.

2. (6分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 5 \sin 5x}{4x}$.

3. (6分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+\sin x)}$.

4. (6分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x^2}}$.

四、解答题(每题8分, 共16分)

得分	
----	--

1. (8分) 求曲线 $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 在 $t = 1$ 处的切线方程和法线方程.

2. (8分) 设 $y = x^2 \cos 3x$, 求 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

五、证明题(共27分)

得分

1. (5分) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

2. (7分) 设函数 $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{2x}$ 定义在 $[a_0, +\infty)$ 上, $a_0 > 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[a_0, +\infty)$ 上一致连续.

3. (8分) 证明不等式: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

4. (7分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $|f''(x)| \leq 1$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取到最大值 $\frac{1}{4}$,
证明: $|f(0)| + |f(1)| \leq 1$.