《高等代数（上》期末考试试卷答案（B 卷）

一、**填空题** (每小题 3 分，共 15 分)

1. 8;　　2. $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;　　3. ± 1;　　4. $(-1,2,-2,2)^T$;　　5. $(2,1,-4)$.

二、**选择题** (每小题 2 分，共 10 分)

6. D;　　7. C;　　8. A;　　9. D;　　10. B.

三、**计算题** (每小题 10 分，共 40 分)

11. 解：各列累加到第一列得

$$D_n = (\lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & \lambda + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_n \end{vmatrix}.$$

(5 分)

再第 i 行 $(2 \le i \le n)$ 减去第一行得

$$D_n = (\lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i).$$

(5 分)

12. 解：通过对 $(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T)$ 竖排作行变换得 $\dim(V_1+V_2) = 3, \dim(V_1) = 2, \dim(V_2) = 2.$ (6 分)

由维数公式得 $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1+V_2) = 1.$ (4 分)

13. 解：基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 基 η_1, η_2, η_3 到基 $\eta_1, \eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2+\eta_3$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (5 分)

则 φ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 到 W 的基 $\eta_1, \eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2+\eta_3$ 下的矩阵为 $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (5 分)

14. 解：对该线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换得阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-4, \end{pmatrix}$$

故原方程有解当且仅当 $a = 4$. (5 分)

当 $a=4$ 时, 导出组的一个基础解系为 $\xi_1=(2,1,0,0,0),\xi_2=(-3,0,-2,1,0)$, 原方程组的一个特解为 $\gamma_0=(2,0,4,0,-2)$. 故原方程组的通解为

$$\gamma_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数. (5 分)

四、证明题 (每小题 10 分, 共 30 分)

15. 解: 只需证明以 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 为未定元的如下方程组

$$\begin{cases} c_{n-1}a_1^{n-1}+c_{n-2}a_1^{n-2}+\cdots+c_1a_1+c_0=b_1, \\ c_{n-1}a_2^{n-1}+c_{n-2}a_2^{n-2}+\cdots+c_1a_2+c_0=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ c_{n-1}a_n^{n-1}+c_{n-2}a_n^{n-2}+\cdots+c_1a_n+c_0=b_n, \end{cases}$$

有唯一解, 其中 $b_1,\cdots,b_n$ 为常数项. (5 分)

该线性方程组的系数矩阵的行列式为范德蒙行列式, 由克莱姆法则上述方程组有唯一解. (5 分)

16. 解: (1) 由 $AB=A+B$ 可得 $(A-I)B=A$, 进而 $(A-I)(B-I)=I$, 故 $A-I$ 与 $B-I$ 均可逆. (5 分)

(2) 由 $(A-I)(B-I)=I$ 得 $(B-I)(A-I)=I$, 展开得

$$(B-I)(A-I)=BA-A-B+I=BA-AB+I=I,$$

故 $AB=BA$. (3 分)

(3) 由 (1) 知 $(A-I)B=A$ 且 $A-I$ 可逆, 故 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. (2 分)

17. 解: 设 $k_0\alpha+k_1A\alpha+k_2A^2\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$, 其中 $k_i\in\mathbb{F}$, $i=0,1,\cdots,m-1$. 用 A^{m-1} 作用在 $k_0\alpha+k_1A\alpha+k_2A^2\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha$ 上得 $k_0A^{m-1}\alpha=0$, 由于 $A^{m-1}\alpha\neq0$, 则 $k_0=0$. (5 分)

对每个 $1\leq i\leq m-1$, 用 A^{m-i} 以 i 从小到大的顺序依次作用在 $k_{i-1}A^{i-1}\alpha+k_iA^i\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha$ 上得 $k_{i-1}A^{m-1}\alpha=0$, 由于 $A^{m-1}\alpha\neq0$, 则 $k_{i-1}=0$. 故向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关. (5 分)

五、论述题 (共 5 分, 开放式回答, 无标准答案)