

院/系 _____ 年级 _____ 专业 _____ 姓名 _____ 学号 _____

线 订 装 超 勿 题 答

安徽大学 2015—2016 学年第二学期

《数学分析（中）》考试试卷（B 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					
阅卷人					

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

得 分

1. 设 $x_n = \sqrt[n]{n}[3 + (-1)^n]$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n =$ _____;

2. 已知 $\arcsin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____;

3. 已知反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 条件收敛, 则 p 的取值范围为 _____;

4. 函数 $\int_0^x e^{-t^2} dt$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开式是 _____。

二、计算题（每小题 5 分，共 35 分）

得 分

1. 计算下列不定积分:

(1) $\int x(x + 2\sqrt{x^2 + 1}) dx$;

(2) $\int (\ln x)^2 dx$;

$$(3) \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx;$$

2. 计算下列定积分及反常积分:

$$(1) \int_0^1 x^4 (x-1)^2 dx$$

$$(2) \int_0^1 (x+1) \arctan x dx$$

$$(3) \int_0^1 x^3 \ln x dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2}$$

三、讨论题（共 20 分）

得分	
----	--

判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分，共 20 分）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n \cdot n!};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}};$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n};$

四、求解与证明题（共 33 分）

得 分	
-----	--

1. （8 分）用 $V(a)$ 表示曲线 $y = \frac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}$ 与 x 轴所界区域在 $x \in [0, a]$

的部分绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积，求常数 ξ 使得下式成立

$$V(\xi) = \frac{1}{9} \lim_{a \rightarrow +\infty} V(a)。$$

2. （10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n!}$ 的收敛半径、收敛域及和函数。

3. (8 分) 设 $S_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, 证明当 $\alpha < 1$ 时, $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

4. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $0 \leq f(x) \leq x^2$, 证明:

(1) $\forall x \in [0,1], \int_0^x f(t) dt \leq \frac{x^3}{3}$;

(2) $\int_0^1 x^3 f(x) dx \geq \frac{3}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$ 。