

安徽大学 2024—2025 学年第一学期

《数学分析（上）》 考试试卷（A 卷）

（闭卷 满分 100 分 时间 120 分钟）

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、（6 分）用定义证明：函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

二、计算下列极限（每小题 6 分，共 36 分）

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\tan \frac{1}{n-1} - \tan \frac{1}{n+1} \right).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 \sin \frac{1}{n} \right)^n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin(2\pi n! e).$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} e^{-x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$

三、 计算与求解（每小题 7 分，共 21 分）

- 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.
- 设函数 $y = y(x)$ 由关系式 $\sin(xy) + y = x$ 确定，求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.
- 求常数 a, b 使 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ a \sin x + b, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，并求 $f'(0)$.

四、分析与证明题(共 37 分).

- (7 分) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且 $f(0) + f(1) = 2, f(2) = 1$, 证明：存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.
- (8 分) 设 $0 < p < 1$, 证明：不等式 $|x^p - y^p| \leq |x - y|^p$ 对任意 $x, y \geq 0$ 成立.
- (6 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的凸函数，二阶可导且有上界. 证明： $f(x)$ 单调递减.
- (8 分) 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} (n \geq 1)$ 定义，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 存在，并求此极限.
- (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1), |f''(x)| \leq 2 (\forall x \in [0, 1])$. 证明： $|f'(x)| \leq 1$.