

安徽大学 2015—2016 学年第二学期  
 《数学分析（中）》考试试卷（B 卷）  
 （闭卷 时间 120 分钟）

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

学号

姓名

专业

年级

院/系

线  
订  
装  
超  
勿  
题  
答  
禁  
订

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

得分

1. 设  $x_n = \sqrt[n]{n}[3 + (-1)^n]$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
2. 已知  $\arcsin x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
3. 已知反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  条件收敛, 则  $p$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;
4. 函数  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  在  $x=0$  处的 Taylor 展开式是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、计算题（每小题 5 分，共 35 分）

得分

1. 计算下列不定积分:

$$(1) \int x(x + 2\sqrt{x^2 + 1}) dx;$$

$$(2) \int (\ln x)^2 dx;$$

$$(3) \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx ;$$

2. 计算下列定积分及反常积分:

$$(1) \int_0^1 x^4 (x-1)^2 dx$$

$$(2) \int_0^1 (x+1) \arctan x dx$$

$$(3) \int_0^1 x^3 \ln x dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2}$$

三、讨论题（共 20 分）

得 分	
-----	--

判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分，共 20 分）

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n \cdot n!};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n};$$

#### 四、求解与证明题 (共 33 分)

得分	
----	--

1. (8 分) 用  $V(a)$  表示曲线  $y = \frac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}$  与 x 轴所界区域在  $x \in [0, a]$

的部分绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积, 求常数  $\xi$  使得下式成立

$$V(\xi) = \frac{1}{9} \lim_{a \rightarrow +\infty} V(a) .$$

2. (10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n!}$  的收敛半径、收敛域及和函数。

3. (8 分) 设  $S_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ , 证明当  $\alpha < 1$  时,  $\{S_n(x)\}$  在  $[0,1]$  上一致收敛。

4. (7 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续且满足  $0 \leq f(x) \leq x^2$ , 证明:

$$(1) \quad \forall x \in [0,1], \int_0^x f(t) dt \leq \frac{x^3}{3};$$

$$(2) \quad \int_0^1 x^3 f(x) dx \geq \frac{3}{2} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$