

安徽大学 2016-2017 学年第二学期

《数学分析(中)》期末考试试题 (B卷) 参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题4分, 共16分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \underline{0}$.

2. 已知 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \sin \frac{n}{3}\pi$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}e}$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}e}$.

3. 已知曲线 $r = 2 \sin^3 \frac{\theta}{3}, 0 \leq \theta \leq 4\pi$ 则此曲线弧长为 $\underline{4\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}}$.

4. 已知幂级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n^2 \cdot 3^n}$, 则其收敛半径为 $\underline{\sqrt[3]{3}}$, 收敛域为 $\underline{(-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})}$.

二、计算题 (本大题有6小题, 每小题5分, 共30 分)

1. $\int \frac{x^3 + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2} dx$

解: $\frac{x^3 + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2} = 1 + \frac{2x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)(x+1)}$

$\frac{2x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}$ 3分

对上式右端通分并与左端比较系数得 $A = -2$, $B = \frac{7}{3}$, $C = \frac{5}{3}$

所以, 原式 = $\int 1 + \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{7}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1} dx$

= $x - 2 \ln|x-1| + \frac{7}{3} \ln|x-2| + \frac{5}{3} \ln|x+1| + C$ 5分

2. $\int \sin(\ln x) dx$

解: 令 $I = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x d \sin(\ln x)$
 $= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned}
&= x \sin(\ln x) - [x \cos(\ln x) - \int x d \cos(\ln x)] \\
&= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx \dots \text{4分}
\end{aligned}$$

即 $I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$

解得 $I = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C \dots \text{5分}$

3. $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - a^2}} dx$

解: 令 $x = a \sec t$, 则 $t = \arccos \frac{a}{x}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{a \sec t \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)}} d(a \sec t) \\
&= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \sec t \tan t \cdot a} dt \dots \text{3分} \\
&= \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C \dots \text{5分}
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{x^4} dx$

解: 令 $x = \frac{1}{a} \sin t$, 则 $\cot t = \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{ax}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{a^4 \sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin^4 t} d\left(\frac{1}{a} \sin t\right) \dots \text{2分} \\
&= a^3 \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} dt \\
&= a^3 \int \cot^2 t \csc^2 t dt \\
&= -a^3 \int \cot^2 t d \cot t \dots \text{4分} \\
&= -\frac{a^3}{3} \cot^3 t + C \\
&= -\frac{(1 - a^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + C \dots \text{5分}
\end{aligned}$$

$$5. \text{求} \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx$$

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-3x} d(\sin 3x)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-3x} \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{3} - \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 3x dx$$

6. 求曲线 $r = 3 \cos \theta$, $r = \sqrt{3} + \cos \theta$, $(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$ 所围图形面积.

解： 面积 $S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [(3 \cos \theta)^2 - (\sqrt{3} + \cos \theta)^2] d\theta$ 3分

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8 \cos^2 \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 3) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\theta) d2\theta - \sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta - \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

三、分析与求解题（本大题共38分）

(一)、分析级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛)

$$1) \text{ (7分)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n}\right)$$

解：由于 $1 - \sin \frac{\pi}{n} = 1 - 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} = \left(\sin \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{\pi}{2n} \right)^2$ 3分

所以当 $n \geq 3$ 时,有 $\left(\cos \frac{\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 \geq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 5分

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{\pi}{n}\right)$ 发散. 7分

2) (8分) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^k n}{n}$, (k 是一个正整数)

解: 该级数为交错级数, 且当 $n > e^k$ 时, $a_n = \frac{\ln^k n}{n}$ 单调递减趋于零..... 5分

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^k n}{n}$ 条件收敛..... 8分

3) (8分) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{a}{a+b^n}$, ($a, b > 0$)

解:(1) 当 $b > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{a}{a+b^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{a+b^n}} = \frac{1}{b} < 1$
故此时原级数绝对收敛..... 3分

(2) 当 $b = 1$ 时, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{a}{a+1}$, 由于 $a_n = \frac{a}{\sqrt{n}(a+1)}$ 单调递减趋于零.

所以该交错级数收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\sqrt{n}(a+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n(a+1)}$ 发散. 故此时原级数条件收敛..... 5分

(3) 当 $0 < b < 1$ 时, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛且 $\{\frac{a}{a+b^n}\}$ 单调有界, 故原级数收敛.

又 $|x_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 故原级数条件收敛..... 8分

2、分析下列广义积分的敛散性

1.(7分) $\int_7^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^q} dx$, ($p, q \in \mathbb{R}^+$)

解: 因为 $\frac{x^p}{1-x^q} = \frac{1}{x^{-p}-x^{q-p}} \sim -\frac{1}{x^{q-p}}$ ($x \rightarrow +\infty$) 4分

当 $q-p > 1$ 时, 积分 $\int_7^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^q} dx$ 收敛, 其余情形发散..... 7分

2. (8分) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$, ($r \in \mathbb{R}^+$)

解:(1) 当 $r > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$ 绝对收敛:

因为 $\left| \frac{\cos x}{x^r} \right| \leq \frac{1}{x^r}$, ($x \in [1, +\infty)$), 又 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ 在 $r > 1$ 时收敛, 故 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^r} \right| dx$ 收敛..... 3分

(2) 当 $0 < r \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$ 条件收敛:

因为 $u \geq 1$, $|\int_1^u \cos x dx| = |\sin u - \sin 1| \leq 2$ 又当 $r > 0$ 时 $\frac{1}{x^r}$ 单调递减趋于0, ($x \rightarrow +\infty$).

故由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$ 在 $r > 0$ 时收敛. 但 $\left| \frac{\cos x}{x^r} \right| \geq \frac{\cos^2 x}{x^r} = \frac{1 + \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}$

考察积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, 由于 $\left| \int_2^u \cos t dt \right| \leq 2, \frac{1}{t} \rightarrow 0 \ (t \rightarrow +\infty)$ 知该积分收敛, 又因为积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 发散, 故 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^r} \right| dx$ 发散.

综上, 此时 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^r} dx$ 条件收敛..... 8分

四、证明题 (本大题有3小题, 共20分)

1. (7分) 设 $S_n(x) = x^n - x^{2n}$. 证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上逐点收敛于 $S(x) \equiv 0$, 但非一致收敛.

证明: 首先, 容易看出 $\lim_n S_n(x) = 0$, 当 $x = 0$ 或 1 时. 又易见, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$|x^n - x^{2n}| < x^n + x^{2n} < 2x^n.$$

另一方面, $\forall \epsilon > 0, N = \lceil \frac{\ln \epsilon}{\ln x} \rceil, \forall n > N, x^n < \epsilon$. 所以, $\lim_n S_n(x) = 0, \forall x \in (0, 1)$ 4分

另外, 取序列 $\{x_n = (1 - 1/n)^n\}_{n \geq 2}$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \neq 0.$$

所以, $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛..... 7分

2. (5分) 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 中的每一个函数 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $u'_n(x) \leq 0$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 均收敛, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明: 由于 $\sum_n u_n(x)$ 在 $x = a$ 和 $x = b$ 处均收敛, 因而据 Cauchy 收敛原理知, $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N$, 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_n(a) \right| < \epsilon, \quad \left| \sum_{k=n+1}^m u_n(b) \right| < \epsilon.$$

.... 3分

另一方面, 由于每一个函数 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $u'_n(x) \leq 0$. 故而 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调. 因此,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_n(x) \right| \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^m u_n(a) \right|, \left| \sum_{k=n+1}^m u_n(b) \right| \right\},$$

即知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛..... 5分

3. (8分) 设 $r \in \mathbb{R}$. 已知非负函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; 若 $\int_a^b f(x) dx \leq 1$, 则

$$\left(\int_a^b f(x) \cos rx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin rx dx \right)^2 \leq 1.$$

证明: 易见 $\forall u \in \mathbb{R}, \int_a^b (uf(x) + g(x))^2 dx \geq 0$. 即知,

$$u^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2u \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0.$$

因之, 其判别式恒非正. 亦即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x) \cos kx dx \right)^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot (\sqrt{f(x)} \cos kx dx) \right)^2 \\ &\leq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx \\ &\leq \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx. \end{aligned}$$

..... 5分

同理,

$$\left(\int_a^b f(x) \sin kx dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x) \sin^2 kx dx.$$

所以,

$$\left(\int_a^b f(x) \cos rx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin rx dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x) \cos^2 rx dx + \int_a^b f(x) \sin^2 rx dx \leq 1.$$

..... 8分