院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《 高等代数（下） 》考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1、多项式 $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$ 的全部有理根是____________________。

2、已知复矩阵 A 可以对角化，它的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda^2+1)$，那么矩阵 A 的极小多项式为____。

3、设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，令 $B=2I+2A-A^n$，则 $\mathrm{tr}B=$ A的特征值为-1,1,5 。

4、已知实对称矩阵 A 的秩和符号差分别是 4 和 -2，则 A 的负特征值个数为______。

5、定义欧氏空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的内积为：$(A,B)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$. 设有两个矩阵

$$C_1=\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&-1\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}0&-1\\2&1\end{bmatrix},$$

则模长小的矩阵是________。

二、简答题（每小题 5 分，共 15 分）

得 分	

6、判断一个 n 阶矩阵 A 可对角化的条件有哪些？（至少写 3 条）

7、判断一个n阶实对称矩阵A是负定矩阵的条件有哪些？（至少写 3 条）

8、叙述“线性变换的秩”的定义，并指出该定义的合理性。

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

得 分	

9、求 $f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+17x^3+6x^2-20x+8$在实数域 $\mathbf{R}$ 上的典型分解式。

10、已知复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 求（1）$A$ 的不变因子；（2）A 的 Jordan 标准形。

11、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 & 2a & 2 \\ 0 & 1 & 4b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，通过正交线性替换 $X=PY$ 化为标准型 $f=y_2^2+2y_3^2$. 求参数 a , b 及所用的正交替换。

12、设欧氏空间 R^3 上的内积为：$(\alpha,\beta)=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$，$\alpha=(a_1,a_2,a_3),\beta=(b_1,b_2,b_3)$.
已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，且矩阵 A 属于特征值 $1,2$ 的特征向量分别为

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^T\ ,\alpha_2=(1,-2,-1)^T\ .$$

(1) 求 A 属于特征值 3 的特征向量； (2) 求出矩阵 A 的表达式。

四、证明题（每小题 15 分，共 30 分）

得 分	

13、证明：n 元二次型 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$ 是正定二次型。

14、证明：($Eisenstein$ 判别法) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 为整系数多项式。若存在素数 p 满足 (1) (1) $p \mid a_i$，$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$；(2) p 不能整除 a_n；(3) p^2 不能整除 a_0；则 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约。