安徽大学 2013—2014 学年第二学期

数学分析（中）期末试卷（A 卷）答案

一、填空题（每小题 4 分，共 12 分）

1. 设 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n=$ ___1____，$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n=$ ___0___.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\dfrac{1}{n+n})$ 的值为______$\ln 2$ ______.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos^2 tdt}{\sin x}$ 的值为_____1_____.

二、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\int\arctan xdx=x\arctan x-\int\dfrac{x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

2. $\int_0^{8\pi}|\sin x|\,dx=8\int_0^{\pi}\sin xdx=16$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x+1}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\dfrac{1}{2})\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pi$

4.

$$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\left[\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right]=2\left[-\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right]$$

$$=-4\sqrt{x}\Big|_0^1=-4$$

三、应用题（6 分）

求心脏线 $r=a(1-\cos\theta),0\le\theta\le 2\pi$ 的弧长.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta=8a$$

得 分	

四、讨论题（共 30 分）

1. 下列级数的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 6 分，共 18 分）

（1）. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2e^{-n}} = e^{-1} < 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} = \frac{(n+1)^2 e^{-n-1}}{n^2 e^{-n}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2 e^{-1} = e^{-1} < 1$

由柯西判别法或达朗贝尔判别法，该正项级数收敛。

(2). $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$

解：当 $n > 9$ 时 $\left\{\frac{\ln^2 n}{n}\right\}$ 单调递减趋于 0，所以 $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ 为 Leibniz 级数，所以收敛。

又 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{3} - \frac{\ln^3 2}{3}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛。

(3). $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$

解：因为 $-\ln\cos\frac{\pi}{n} = -\ln\left[1-(1-\cos\frac{\pi}{n})\right] \square\ 1-\cos\frac{\pi}{n} \square\ \frac{\pi^2}{2n^2}$

又 $\sum_{n=3}\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛，所以正项级数 $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$ 收敛

2. 求下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛与条件收敛）（每小题 6 分，共 18 分）

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ （$\alpha > 0$）

解：$\forall A > 1, \left|\int_1^A \cos x dx\right| = \left|\sin A - \sin 1\right| \le 2,$ 又 $\frac{1}{x^\alpha}(\alpha > 0)$ 单调减少趋于 0，由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ （$\alpha > 0$）收敛；

又 $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$，$\therefore$ 当 $\alpha > 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛，$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 收敛，$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 绝对收敛；

当 $0 < \alpha \le 1$ 时，$\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \ge \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} = \frac{1+\cos 2x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} + \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}$，$\because$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 当 $0 < \alpha \le 1$ 时发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$ 当 $0 < \alpha \le 1$ 时收敛，$\therefore \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|dx$ 发散，从而当 $0 < \alpha \le 1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 条件收敛。

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ （$p>0,q>0$）

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$,

$\forall q>0,\because \lim\limits_{x\to 0+}x^p\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1,\therefore$ 当 $p<1$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；

$\forall p>0,\because \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}{\sin^p x\cos^q x}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{t^q}{\sin^q t}=1,\ \therefore$ 当 $q<1$ 时 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；

从而当 $p<1$ 且 $q<1$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛，其余情况发散。

五、分析题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

1. 试分析函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\sin nx$ ， $x\in(0,+\infty)$ 的连续性, 可导性.

解：$\forall 0<a<A<+\infty,\forall x\in[a,A],\left|e^{-nx}\sin nx\right|\le e^{-nx}\le e^{-na}$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-na}}=e^{-a}<1,\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-na}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\sin nx$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\sin nx$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续；

$\forall 0<a<A<+\infty,\forall x\in[a,A],\left|\left(e^{-nx}\sin nx\right)'\right|=\left|n(\sin nx-\cos nx)e^{-nx}\right|\le 2ne^{-na}$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{ne^{-na}}=e^{-a}<1,\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ne^{-na}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-nx}\sin nx\right)'$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\sin nx$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导。

2.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$ 的收敛域，并求和函数.

解：收敛半径为 1，收敛域为 $(-1,1)$ ，

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$ ，$f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$ ，$\therefore\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n$ ，

令 $g(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ ，则 $\int_0^x g(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$,

所以 $g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$，所以 $f(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ ，$\therefore S(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

六、证明题（每小题各 6 分，共 12 分）

1.证明：级数$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-\mathrm{x})$ 在$[0,1]$上一致收敛，但$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n(1-\mathrm{x})$在$[0,1]$上不一致收敛.

证明：设 $a_n=(-1)^n$，$\therefore\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\right|\le 1;b_n(x)=x^n(1-x),\{b_n(x)\}$ 关于 n 单调，且 $\forall x\in[0,1],b_n(x)\to 0(n\to+\infty)$; 又

$\because \sup_{x\in[0,1]}|b_n(x)-0|=\sup_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\to 0(n\to+\infty)$,

$\therefore b_n(x)\rightrightarrows 0(n\to+\infty),\forall x\in[0,1]$

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-\mathrm{x})$ 在$[0,1]$上一致收敛。

$\because$ $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n(1-\mathrm{x})=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \mathrm{x}=1\end{cases}$, $\therefore S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k(1-x)=1-x^n$,

$\therefore S_n(x)-S(x)=\begin{cases}x^n, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $\because \sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[0,1]}x^n=1\not\to 0$, $\therefore$ $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n(1-\mathrm{x})$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

2.设$f(x)$ 和$g(x)$ 在$[a,b]$ 上都可积，证明不等式：

（1）Schwarz 不等式：$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$ ；

（2）设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有连续导数，$f(a)=0$，利用 Schwarz 不等式，

证明：$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx$.

证：（1）$\int_a^b\left(f(x)+\lambda g(x)\right)^2dx\ge 0$, 即$\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx\ge 0$, 对$\forall\lambda$成立，$\therefore$ $\left[2\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\le 0$,

即$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$。

（2）$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2\le\int_a^x f'^2(t)dt\int_a^x 1^2dt=(x-a)\int_a^x f'^2(t)dt$,

$\therefore\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b(x-a)dx\int_a^b f'^2(t)dt=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)dx.$