2009-2010 第二学期《数学分析（中）》A 卷答案及评分标准

一. 填空题 (每小题 5 分, 共 15 分)

1. $\frac{4}{3}$;

2.

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = x - \frac{1}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots;$$

3. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$;

二. 计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 解：原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}}(1-9x^2)^{10}dx^2 = -\frac{1}{18}\int_0^{\frac{1}{3}}(1-9x^2)^{10}d(1-9x^2)$

…………………………………………………………… 3 分

令 $t = 1-9x^2$, 从而有

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x(1-9x^2)^{10}dx = \frac{1}{18}\int_0^1 t^{10}dt = \frac{1}{198}.$$

…………………………………………………………… 6 分

2. 解：原式 $=\int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx = I_1 + I_2$

…………………………………………………………… 2 分

$I_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x dx = \pi$ …………………………………………… 3 分

对 I_2, 令 $t = x-\pi$ 得

$$I_2 = \int_0^{\pi}(t+\pi)\sin t dt = 3\pi$$

从而 $\int_0^{\pi}|x\sin x|dx = 4\pi.$ …………………………………………… 6 分

3. 解：

$$\text{原式} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^3}dx = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^3}de^{-2x}$$

…………………………………………………………… 3 分

令 $t = e^{-2x}$, 从而有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{t}{(1+t)^3}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}dt - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^3}dt = \frac{1}{16}$$

…………………………………………………………… 6 分

4. 解：令 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$,

于是 $I_n = -\int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)I_{n-1}$

…………………………………………………………… 5 分

从而 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$ …………………………………………… 6 分

三. 应用题 (11 分)

解：由曲线 $y=1-x^2(0\le x\le 1)$,x 轴,y 轴所围的区域的面积为

$$S=\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3},$$

…………………………………………………………………………………… 4 分

又两曲线的交点的横坐标为 $\sqrt{\frac{1}{a+1}}$,

…………………………………………………………………………………… 6 分

则由题意可得

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}(1-x^2-ax^2)dx=\frac{1}{3}$$

…………………………………………………………………………………… 9 分

故 $a=3$. …………………………………………………………………………… 11 分

四. 讨论级数敛散性 (每小题 5 分，共 15 分)

1. 解：由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^n\sqrt{2\pi}e^{-n}}{n^n}==+\infty$$

…………………………………………………………………………………… 4 分

故原级数发散

…………………………………………………………………………………… 5 分

2. 解: 显然原级数为莱布尼兹级数，故收敛.

…………………………………………………………………………………… 3 分

又 $\frac{\ln n}{n}\ge\frac{1}{n}, n\ge 3$ 故级数 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散, 从而原级数条件收敛.

…………………………………………………………………………………… 5 分

3. 解：当 $\alpha\le 0$ 时，一般项不趋于 0, 故级数发散.

…………………………………………………………………………………… 1 分

在 $\alpha>1$ 时，由 $|\frac{\sin nx}{n^\alpha}|\le\frac{1}{n^\alpha}$ 知，原级数绝对收敛.

…………………………………………………………………………………… 2 分

当 $0<\alpha<1$ 时，由 A.D. 判别法可知级数收敛，但又由 $|\frac{\sin nx}{n^\alpha}|\ge\frac{\sin^2 nx}{n^\alpha}=\frac{1}{2}\frac{1-\cos 2nx}{n^\alpha}$ 及级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^\alpha}$ 收敛可知，原级数条件收敛.

…………………………………………………………………………………… 5 分

五. 分析题 (前三题每小题 10 分, 最后一题 5 分)

1.(1) 显然极限函数为 0.

.... 2 分

又

$$\sup_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1}$$

故当 $\alpha<1$ 时，函数列一致收敛.

.... 6 分

(2) 由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}(n^{\alpha-2}-n^{\alpha-1}(1+\frac{1}{n})e^{-n})$,

.... 8 分

又 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}(1+\frac{1}{n})e^{-n}=0$,

故 $\alpha<2$ 时，极限号与积分号可交换.

.... 10 分.

2.(1) 显然 ne^{-nx} 不一致收敛到 0, 故级数不一致收敛.

.... 4 分

(2) 由 Weierstrass 判别法知，级数内闭一致收敛，

.... 7 分

再由 ne^{-nx} 连续，可知和函数连续. .... 10 分

3. 显然收敛半径为 1, 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)^2-1}$ 收敛可知收敛域为 $[-1,1]$.

.... 3 分

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$

于是

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=xg(x)$$

.... 6 分

又 $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1+x^2}$, 故

$$g(x)=\arctan x.$$

于是

$$f'(x)=x\arctan x$$

.... 8 分

故

$$f(x)=\int_0^x t\arctan t dt=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{x}{2}$$

……………………………………………………………… 10 分

4. 证明：设不加括号的级数的前 n 项部分和为 S_n, 加括号的前 n 项部分和为 T_n. 则这两个数列之间的关系为
case(i)$m = n_k$ 时

$$T_k = S_m$$

……………………………………………………………… 2 分

case(ii)$n_k < m < n_{k+1}$ 时，

$$min\{T_k, T_{k+1}\} \leq S_m \leq max\{T_k, T_{k+1}\}$$

故综上可知

$$min\{T_k, T_{k+1}\} \leq S_m \leq max\{T_k, T_{k+1}\},$$

……………………………………………………………… 4 分

从而 S_m 收敛.

……………………………………………………………… 5 分