学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学2017-2018学年第一学期
《高等代数（上）》考试试卷（B卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题 (每小题4分，共20分)

得分	

1. 设4阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$A$的列向量组, 且行列式$|A|=2$. 矩阵$B=(\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2)$，则行列式$|B|=$__________.

2. 设A是n阶矩阵，A^*是A的伴随矩阵. 若$\mathrm{rank}(A)=n-2$，则$\mathrm{rank}(A^*)=$__________.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&1&1&2\\3&0&2&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$. 则$A$的等价标准形为____________________.

4. 向量$(a,b)^T\in\mathbb{F}^2$在基$(2,-1)^T$，$(1,2)^T$下的坐标为______________.

5. 设$\varphi\colon V\to W$为线性映射，其中V,W分别是4维和3维线性空间. 若φ在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$和$W$的基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&5&0\\4&1&2&5\\3&0&1&2\end{pmatrix}$，

   则φ在V的基$\varepsilon_4,\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3$和$W$的基$\eta_3,\eta_2,\eta_1$下的矩阵为____________________.

二、选择题 (每小题4分，共20分)

得分	

6. 设A是$n\times n$矩阵. 则下列条件中与“A可逆”等价的所有条件是　　(　　)

   ① A的列向量组线性无关；② $|A|\neq 0$；③ 齐次线性方程组$AX=0$无非零解；
   ④ 非齐次线性方程组$AX=\beta$有解；⑤ A的伴随矩阵A^*可逆.

   (A)　①②③.　(B)　①②③④.　(C)　①②③⑤.　(D)　①②③④⑤.

7. 设n阶矩阵A的秩为$n-2$，$\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$为非齐次线性方程组$AX=\beta$三个线性无关的解. 则下列说法**不正确**的是 (　　)

(A) 若$k_0+k_1+k_2=0$，则$k_0\gamma_0+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2$为$AX=0$的解.

(B) 若$k_0+k_1+k_2=1$，则$k_0\gamma_0+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2$为$AX=\beta$的解.

(C) $AX=\beta$的通解为$\gamma_0+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2$，$k_1,k_2$为任意常数.

(D) $\gamma_1-\gamma_0,\gamma_2-\gamma_0$是$AX=0$的一个基础解系.

8. 设V是线性空间，(I)：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与(II)：$\beta_1,\cdots,\beta_t$均是V中向量组，且$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性无关. 则下列说法证明**正确**的是 (　　)

(A) 若(I)可由(II)线性表出，则$s\geq t$. (B) 若(I)可由(II)线性表出，则$t\geq s$.

(C) 若(II)可由(I)线性表出，则$s\geq t$. (D) 若(II)可由(I)线性表出，则$t\geq s$.

9. 设$\varphi\colon V\to W$是线性映射. 则下列说法正确的是 (　　)

(A) 若$\dim V=\dim W$，则φ是同构映射. (B) 若$\dim V>\dim W$，则φ一定是满射.

(C) 若φ是单射，则$\dim V\geq\dim W$. (D) 若φ是满射，则$\dim V\geq\dim W$.

10. 设$V_1,V_2,\cdots,V_s$都是线性空间V的子空间，则$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$的充分必要条件是 (　　)

(A) $\dim V=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_s$.

(B) 对任意$\alpha\in V$，存在唯一一组$\alpha_i\in V_i$, $i=1,2,3$, 使得$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$.

(C) $V=V_1+V_2+V_3$，且对任意$i\neq j$, $V_i\cap V_j=\{0\}$.

(D) $V=V_1+V_2+V_3$，且$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s=\{0\}$.

三、计算题 (每小题10分，共40分)

得分	

11. 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$.

12. 设矩阵$B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&3\\1&2&2\end{pmatrix}$，且$AB=A+B$. 求矩阵$A$.

13. 设$\varphi\colon V\to W$是线性映射，且在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$和$W$的基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\2&1&1&1&1\\3&2&2&1&3\\-1&0&0&-1&1\end{pmatrix}$. 求$\mathrm{Ker}\varphi$和$\mathrm{Im}\varphi$的基.

14. 在$\mathbb{R}^4$中，设V_1是由向量组$\alpha_1=(-1,0,1,0)$, $\alpha_2=(0,1,2,1)$, $\alpha_3=(2,1,0,1)$ 生成的子空间，V_2是由向量组$\beta_1=(1,-1,-1,-1)$, $\beta_2=(-1,1,3,1)$, $\beta_3=(1,-1,1,-1)$ 生成的子空间. 求子空间V_1+V_2的维数和基.

答题勿超装订线

装　　订　　线

四、证明题(每小题10分，共20分)

得分	

15. 设φ: $V \to W$是单线性映射. 证明：V中向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关当且仅当$\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_s)$线性相关.

16. 设$\mathscr{A},\mathscr{B}$都是线性空间V上的线性变换, 且$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明：$\mathrm{Ker}\mathscr{B}$，$\mathrm{Im}\mathscr{B}$都是$\mathscr{A}$的不变子空间.