安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《数学分析（上）》　参考答案

一、(6 分)用极限的定义证明：若数列$\{a_n\}$的奇数项及偶数项收敛于同一极限a，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

证明：由$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a$知，对$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,s.t.n>N_1$时$|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$; 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$知，对$\exists N_2,s.t.n>N_2$时$|a_{2n}-a|<\varepsilon$.（2 分）

取$N=2\max\{N_1,N_2\}+1$,则当$n>N$时，

(1) 若n为奇数，则由$\dfrac{n-1}{2}>\dfrac{N-1}{2}\geq N_1$知，$\left|a_{2\frac{n-1}{2}+1}-a\right|=|a_n-a|<\varepsilon$成立；

(2) 若n为偶数，则由$\dfrac{n}{2}>\dfrac{N}{2}>N_2$知，$\left|a_{2\frac{n}{2}}-a\right|=|a_n-a|<\varepsilon$成立.（5 分）

故当$n>N$时，总有$|a_n-a|<\varepsilon$. 由极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.（6 分）

二、计算下列极限（每题 6 分，共 36 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$

解：$\sqrt[n]{\cos^2 1}<\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}<\sqrt[n]{n}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 由两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}=1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{n+1}$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{-1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\sqrt{n^2+2}\,\pi)$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(\sqrt{n^2+2}\,\pi-n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\pi$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}+1}\pi=\pi$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\sin x}-\cos x}{\tan^2 x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\sin x}-\cos x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x+\dfrac{x^2\sin^2 x}{2}+o(x^2)-1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(2-\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x(2-\cos x)}=\dfrac{1}{2}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(2-\cos x)}=e^{\frac{1}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-\sqrt{1+6x}-\mathrm{e}^{-3x}}{\ln\left(1-x^2\right)}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)-\left(1+3x+\dfrac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}36x^2\right)-\left(1-3x+\dfrac{9x^2}{2}\right)+o(x^2)}{-x^2}=1.$

三、计算与求解(**每题 7 分，共 28 分**)

1. 求$\left(x^2e^x\right)^{(10)}$.

解：$\left(x^2e^x\right)^{(10)}=\sum\limits_{0\le k\le 10}C_{10}^k\left(x^2\right)^{(k)}\left(e^x\right)^{(10-k)}$（4 分）

$=e^x\left(C_{10}^0x^2+C_{10}^1\cdot 2x+C_{10}^2\cdot 2\right)=\left(x^2+20x+90\right)e^x$.（7 分）

2. 求 $f(x)=e^x\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 余项的三阶 Taylor 公式(展开到 x^3).

解：$f(x)=e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$（4 分）

$=x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.（7 分）

3. 求函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大、最小值和上凸和下凸区间.

解：$f'(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$，$f''(x)=(4x^3-6x)e^{-x^2}$.（2 分）

由 $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x\cdot e^{x^2}}=0$, 知最值一定存在. 且最值点处的导数为 0，故最大值点为 $x_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，最小值点为 $x_{\min}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 最大值为 $f_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, 最小值为 $f_{\min}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. （5 分）

由 $f''(x)=0$ 得 $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 故：

在$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$和$\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$上，$f''(x)<0$，函数上凸；在$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0\right)$和$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$上，$f''(x)>0$，函数下凸. （7 分）

4. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}$， $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(t-\arctan t\right)}{\mathrm{d}\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)}=\frac{t}{2}$； $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{d}\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)}=\frac{1+t^2}{4t}$. （6 分）

故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}$， $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}$.（7 分）

四、分析与证明题(共 30 分).

1. (6 分)证明：当 $x\in(0,1]$ 时， $\sin^2 x<\sin x^2$.

证明：设 $f(x)=\sin^2 x-\sin x^2$, 则 $f(0)=0$ 且 $f'(x)=2\sin x\cos x-2x\cdot\cos x^2$. （2 分）
注意到在 $(0,1]$ 上 $\sin x<x, \cos x\le\cos x^2$, 故有 $f'(x)<0$. 于是 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上严格单调递减；（5 分）
故 $f(x)<f(0)=0$, 即： $\sin^2 x<\sin x^2$. （6 分）

2. (8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,a)$ 上有二阶连续导数， $f'(0)=1, f''(0)\neq 0$ 且 $0<f(x)<x\left(x\in(0,a)\right)$. 令 $x_{n+1}=f(x_n)$，其中 $x_1\in(0,a)$.
(1) 证明：$\left\{x_n\right\}$ 收敛并求其极限
(2) $\left\{nx_n\right\}$ 是否收敛？若收敛，则求其极限.

(1) 证明：由 $0<f(x)<x\left(x\in(0,a)\right)$ 和 $x_1\in(0,a)$ 知 $x_n\in(0,a)$ 且 $x_{n+1}=f(x_n)<x_n$. 故 $\left\{x_n\right\}$ 严格单调递减且有下界 0，故 $\left\{x_n\right\}$ 收敛. （2 分）
设 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则 $x^*\ge 0$ 且 $x^*=f(x^*)$. 显然 $f(0)=0$ 且在 $[0,a)$ 上 $f(x)$ 只有唯一的不动点 0，故 $x^*=0$. （4 分）

(2) $\left\{nx_n\right\}$ 收敛. 将 $f(x)$ 在 0 处进行 Taylor 展开：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$. 代入 $x=x_n$ 得： $x_{n+1}=x_n+\frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2$, 其中 $\xi_n\in(x_{n+1},x_n)$. 注意到 $x_n\in(0,a)$ 且 $\left\{x_n\right\}$ 单调递减趋于 0，由 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$ （6 分）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\left(x_n+\frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2\right)}{x_n-\left(x_n+\frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+o(x_n^2)}{-\frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2}=-\frac{2}{f''(0)}.$$ （8 分）

也可由 Stolz 定理和 L`Hospital 法则得到.

3. （7 分）证明：若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists M>a,s.t.\,x\ge M$ 时，$\left|f(x)-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续知 $\exists\delta_1>0,s.t.$ 当 $\left|x_1-x_2\right|<\delta_1$ 且 $x_1,x_2\in[a,M+1]$ 时，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$. （3 分）

又当 $x_1,x_2\in[M,+\infty)$ 时，$\begin{cases}\left|f(x_1)-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ \left|f(x_2)-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$，故有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(x_1)-A\right|+\left|f(x_2)-A\right|<\varepsilon$. （5 分）

故取 $\delta=\min\{\delta_1,1\}$ 时，对任意的 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$，只要 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$，则 $x_1,x_2\in[a,M+1]$ 或 $x_1,x_2\in[M,+\infty)$ 成立，不论哪种情形都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$. 于是由定义知，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. （7 分）

4. （9 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$ 且 $f_+^{'}(a)\cdot f_-^{'}(b)>0$. 证明：

（1） 存在 $\xi\in(a,b), f(\xi)=0;$

（2） 存在 $a<\xi_1<\xi_2<b, f^{'}(\xi_1)=f(\xi_1), f^{'}(\xi_2)=f(\xi_2);$

（3） 存在 $\eta\in(a,b), f^{''}(\eta)=f(\eta).$

证明：(1). 不妨设 $f_+^{'}(a)=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,\ f_-^{'}(b)=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0.$ 则存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 使得

$f(x)>f(a)=0\left(x\in[a,a+\delta_1]\right)$ 和 $f(x)<f(b)=0\left(x\in[b-\delta_2,b]\right)$. 由连续函数介值定理知，存在 $\xi\in(a,b),s.t.\,f(\xi)=0.$ （3 分）

(2). 令 $g(x)=e^{-x}\cdot f(x)$. 则 $g(a)=g(b)=g(\xi)=0.$ 由 Rolle 中值定理，存在 $\xi_1\in(a,\xi)$ 和 $\xi_2\in(\xi,b)$ 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$ 代入即得 $f^{'}(\xi_1)=f(\xi_1), f^{'}(\xi_2)=f(\xi_2)$. （6 分）

(3). 令 $h(x)=e^{x}\left(f'(x)-f(x)\right)$. 则 $h(\xi_1)=h(\xi_2)=0.$ 由 Rolle 中值定理知，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $h'(\eta)=0.$ 代入即得 $f^{''}(\eta)=f(\eta).$ （9 分）