安徽大学 2016-2017 学年第二学期

《数学分析(中) 》期末考试试题（A卷）参考答案及评分标准

一、填空题（本大题有4小题，共16分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -2x, & x\text{ 无有理数}.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上$\underline{\quad\text{不可积}\quad}$;

2. 设 $x_n=n+(-1)^n\cdot\frac{n^2+3n-1}{n}$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=\underline{\quad+\infty\quad}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=\underline{\quad-3\quad}$;

3.曲线 $y=\ln\sin x\ (\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的弧长为$\underline{\ -\ln(\sqrt{2}-1)\quad}$;

4.已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=\frac{1}{1+x}-x\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为$\underline{\quad\frac{2}{3}\ln 2\quad}$。

二、计算题（每小题5分,共30分）

1.计算下列积分:

(1)$\int(2^x+e^x)^2\,\mathrm{d}x$

解：原式 $=\displaystyle\int(2^{2x}+2^{x+1}e^x+e^{2x})\,\mathrm{d}x$

$$=\int 2^{2x}\,\mathrm{d}x+\int 2^{x+1}e^x\,\mathrm{d}x+\int e^{2x}\,\mathrm{d}x\ \cdots\cdots 3\text{分}$$

$$=2^{2x-1}\frac{1}{\ln 2}+\frac{2^{x+1}e^x}{1+\ln 2}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}+\frac{2^{2x}}{\ln 2}+\frac{2^{x+2}e^x}{1+\ln 2})+C\ \cdots\cdots 5\text{分}$$

(2) $\displaystyle\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x$

解：原式 $=\displaystyle\int\sec^2 x\,\mathrm{d}\tan x$

$$=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\tan x\ \cdots\cdots 3\text{分}$$

$$=\int 1+\tan^2 x\,\mathrm{d}\tan x$$

$$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C\ \cdots\cdots 5\text{分}$$

(3) $\int_1^2 \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{2x^2}\,\mathrm{d}x$

解：原式 $= \int_1^2 \frac{x^3+2x^2+2x+1}{2x^2}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 (x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x$ 4分

$= 2+\ln 2$ 5分

(4) $\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$

解:

$$\begin{aligned}\text{原式} =&\frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin x \mathrm{d}x^2\\ =&\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}\arcsin x\\ =&\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

.... 3分

令$x=\sin t$，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\\ =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\,\mathrm{d}t\\ =&\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos u\,\mathrm{d}u\\ =&\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

所以，$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$. 5分

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

解：原式 $= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+2)^2+1}\,\mathrm{d}x$

令 $t=x+2$

则原式 $= \int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ 3分

$= \arctan t|_2^{+\infty}$

$= \dfrac{\pi}{2} - \arctan 2$ ……………………………………………………………… 5分

(6) $\int_0^{+\infty} e^{-3x}\cos 3x\,\mathrm{d}x$

解：原式 $= \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}(\sin 3x)$

$= \dfrac{1}{3}e^{-3x}\sin x|_0^{\infty} + \displaystyle\int_0^{\infty} \sin x e^{-3x}\mathrm{d}x$ ……………………………………… 2分

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\sin 3x\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}(\cos 3x)$ ……………………………………………… 4分

$= \dfrac{1}{3} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cos 3x\mathrm{d}x$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cos 3x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}$ ……………………………………………………… 5分

三、分析与求解题（共34分）

1. 判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（15分）

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$;

解：$1-\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}\ (n\to\infty)$ ……………………………………… 3分

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$ 收敛。……………………………………………………… 5分

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n^2+1)^n}}{3(n+1)^n}$;

解：令 $a_n=\frac{\sqrt{(2n^2+1)^n}}{3(n+1)^n}$

而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=2>1$, ... 3分

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n^2+1)^n}}{3(n+1)^n}$ 不收敛。 5分

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^n\sqrt{n}}$,其中$a>0$。

解：因为 $r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{a^n\sqrt{n}}\right|}=\frac{1}{a}$

故当 $a>1$ 时, $r=1/a<1$, 因此原级数绝对收敛; 2分

当 $a=1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散, 则原级数条件收敛; 4分

当 $a<1$ 时, $r=1/a>1$, 因此原级数发散. 5分

2. 判断下列反常积分的敛散性（10分）

(1)$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^r}\,\mathrm{d}x\ \ (r>0)$;

解：当 $r>1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^r}\mathrm{d}x$绝对收敛:

因为$\left|\frac{\cos x}{x^r}\right|\le\frac{1}{x^r},\quad(\ \ x\in[1,+\infty)\ \ )$,又$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}\mathrm{d}x$在 $r>1$ 时收敛,故$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^r}\right|\mathrm{d}x$收敛。
.... 2分

当 $0<r\le 1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^r}\mathrm{d}x$条件收敛:

因为 $u\ge 1$,$|\int_1^u\cos x\mathrm{d}x|=|\sin u-\sin 1|\le 2$, 又当 $r>0$ 时$\frac{1}{x^r}$单调递减趋于0, $(x\to+\infty)$.

由狄利克雷判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^r}\mathrm{d}x$在 $r>0$ 时收敛。 4分

但$\left|\frac{\cos x}{x^r}\right|\ge\frac{cos^2x}{x}=\frac{1+\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos 2x}{2x}$

考察积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$,由于$\left|\int_2^u\cos t\mathrm{d}t\right|\le 2,\frac{1}{t}\to 0\quad(t\to+\infty)$知该积分收

敛,又因为积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$发散,则$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^r}\right|\mathrm{d}x$发散,

故$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^r}\mathrm{d}x$条件收敛。……5分

(2)$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x\ \ (p>0)$。

解：由于 $\frac{\ln(1+x^2)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-2}}\ \ (x\to 0^+)$, 故 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{p-2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^p}=1$. ……3分

所以

当 $p<3$ 时, $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛;……4分

当 $p\geq 3$ 时, $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散。……5分

3. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}x^{n+1}$的收敛域及和函数。(9分)

解：令 $a_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}x^{n+1}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+3}\right|=1$,则该级数收敛半径 $R=1$,

当 $x=-1$ 时级数发散, 当 $x=1$ 时级数收敛, 所以幂级数收敛域为$D=(-1,1]$。……3分

令 $f(x)=x\cdot S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}\cdot x^{n+2}$

利用逐项求导得 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{n+1}=\frac{x}{x+1}$……4分

所以,当$x\neq 0$时, $S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=1-\frac{1}{x}\ln(1+x)$. 而当$x=0$时, 显然 $S(x)=0$. ……5分

四、证明题 (共20分)

1. (7分) 设$S_n(x)=x^n-x^{2n}$. 证明: $\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上逐点收敛于$S(x)\equiv 0$, 但非一致收敛.

证明: 首先, 容易看出$\lim_n S_n(x)=0$, 当$x=0$或1时. 又易见, 当$x\in(0,1)$时,

$$\left|x^n-x^{2n}\right|<x^n+x^{2n}<2x^n.$$

另一方面, $\forall\epsilon>0, N=\lceil\frac{\ln\epsilon}{\ln x}\rceil,\forall n>N,\ x^n<\epsilon$. 所以, $\lim_n S_n(x)=0,\ \forall x\in(0,1)$. ……4分

另外, 取序列$\{x_n=(1-1/n)^n\}_{n\geq 2}$. 则

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)=\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)\neq 0.$$

所以, $\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛……7分

2. (5分) 设函数列$\{u_n(x)\}$中的每一个函数$u_n(x)$在$[a,b]$上可导, 且$u_n'(x)\le 0$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$均收敛, 证明: 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

证明: 由于$\sum_n u_n(x)$在$x=a$和$x=b$处均收敛, 因而据Cauchy收敛原理知, $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall m>n>N$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_n(a)\right|<\epsilon,\quad \left|\sum_{k=n+1}^{m}u_n(b)\right|<\epsilon.$$

....3分

另一方面, 由于每一个函数$u_n(x)$在$[a,b]$上可导, 且$u_n'(x)\le 0$. 故而$u_n(x)$在$[a,b]$上单调. 因此,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_n(x)\right|\le\max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_n(a)\right|,\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_n(b)\right|\right\},$$

即知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛...5分

3. (8分) (1) 设$f(x),g(x)$均在$[a,b]$上可积, 证明不等式$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

(2) 利用上述不等式证明: 已知非负函数$f(x)$在$[a,b]$上连续; 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le 1$, 则$\left(\int_a^b f(x)\cos rx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin rx\right)^2\le 1$, 其中$r\in\mathbb{R}$.

证明: 易见$\forall u\in\mathbb{R}$, $\int_a^b\left(uf(x)+g(x)\right)^2\mathrm{d}x\ge 0$. 即知,

$$u^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2u\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0.$$

因之, 其判别式恒非正. 亦即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\left(\sqrt{f(x)}\cos kx\mathrm{d}x\right)\right)^2\\&\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x\\&\le\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

....2分

同理,

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x.$$

所以,

$$\left(\int_a^b f(x)\cos rx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin rx\right)^2\le\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x\le 1.$$

....4分