安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《数学分析（上）》　参考答案

一、(6 分) 证明：若数列$\{a_n\}$有界，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明：由$\{a_n\}$有界知，存在$M>0$, 使得$|a_n|<M$;　(2 分)

由$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 对$\forall\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$, 使得当$n>N$时，$|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.　(4 分)

于是当$n>N$时，$|a_n b_n| = |a_n|\cdot|b_n| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. 由极限定义即知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.　(6 分)

二、计算下列极限（每题 6 分，共 36 分）

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^4+2^4+\cdots+n^4}$.

解：显然$1\le\sqrt[n]{1^4+2^4+\cdots+n^4}\le\sqrt[n]{n\cdot n^4}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^5 = 1$，故由两边夹定理即知

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^4+2^4+\cdots+n^4} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

解：原式$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = e$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^k - n^k\right)(0<k<1)$.

解：(1) 由微分中值定理，原式$=\lim\limits_{n\to\infty} k\xi^{k-1}(n<\xi<n+1) = 0$.

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty} n^k\left((1+\frac{1}{n})^k - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^k\dfrac{k}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n^{1-k}} = 0$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-\cos x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{1+x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)} = \dfrac{2}{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解：原式$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}} = e$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^2\sin x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-x(x+1)}{x^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}.$

注：以上并非唯一做法；另外，若思路清晰正确而个别计算错误，建议酌情给过程分.

三、计算与求解(**每题 7 分，共 28 分**)

8. a,b 为何值时，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导?

解：由 $f(x)$ 在 0 处连续知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}=0;$ （3 分）

又 $f(x)$ 在 0 处可导，故 $f_+'(0)=f_-'(0),$ 即

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2(ax)}{x^2}=a^2=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(2a-1)x-0}{x-0}=2a-1\Rightarrow a=1.$ （6 分）

综上，当 $a=1,b=0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导.（7 分）

9. 设函数 $y=f(x)$ 由关系式 $\begin{cases}x=\arctan 2t\\ y+e^y=\ln(e+t^2)\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解：$x=\arctan 2t\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{1+4t^2};$

$y+e^y=\ln(e+t^2)\Rightarrow \mathrm{d}y+e^y\mathrm{d}y=\dfrac{2t}{e+t^2}\mathrm{d}t\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t}{e+t^2}\cdot\dfrac{1}{1+e^y}.$ （3 分）

于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{e+t^2}\cdot\dfrac{1+4t^2}{1+e^y}.$ （5 分）

当 $x=0$ 时，$t=0,y=0.$ 故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0.$（7 分）

注：若观察到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$ 可以不写出 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$

10. 求 $f(x)=e^{\sin x}\cdot\ln(1+x)$ 的带 Peano 余项的三阶 Maclaurin 公式.

解：$f(x)=\left(1+\sin x+\dfrac{\sin^2 x}{2}+\dfrac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)\right)\cdot\ln(1+x)$ （3 分）

$=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$ （5 分）

$=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3).$ （7 分）

11. 设 $f(x)=\sin 2x-x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. 求：(1) $f(x)$ 的最值；(2) 曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解：(1) 由 $f'(x)=2\cos 2x-1=0$ 得驻点为 $x=\dfrac{\pi}{6}$. (2 分)

所求最值必在 $\left\{f(0), f(\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{6})\right\}=\left\{0,-\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right\}$ 中，故最大值为 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$，最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$. (5 分)

(2) 由 $f''(x)=-4\sin 2x$ 知在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $f''(x)<0$，故 $f(x)$ 凹. 故曲线没有拐点. (7 分)

四、分析与证明题(共 30 分).

12. (8 分) 设 $a_1=1, a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}(n\ge 1)$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明：显然 $a_n>0$, 且当 $a_n>2$ 时 $a_{n+1}<2$; 当 $a_n<2$ 时 $a_{n+1}>2$, 故 $a_{2n}>2, a_{2n+1}<2$. 由于

$a_{2n+2}-a_{2n}=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{a_{2n}}}-a_{2n}=\dfrac{-a_{2n}^2+a_{2n}+2}{a_{2n}+2}=-\dfrac{(a_{2n}-2)(a_{2n}+1)}{a_{2n}+2}<0$, 故 $\{a_{2n}\}$ 单调减. 由单调有界判别法知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$ 存在且 $a\ge 2$. (4 分)

于是由 $a_{2n+2}=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{a_{2n}}}$，两边令 $n\to\infty$ 得 $a=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{a}}\Rightarrow a=2$. (6 分)

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{a_{2n}}\right)=2$. 故 $\{a_n\}$ 的奇偶项子列都收敛于 2，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. (8 分)

13. (6 分) 证明 Young 不等式：设 $\alpha,\beta\in(0,1)$ 且 $\alpha+\beta=1$, 证明：对任意 $x,y>0$ 有：
$x^\alpha y^\beta\le\alpha x+\beta y$.
证明：至少有两种证法.

(1) 不妨设 $x\ge y$. $x^\alpha y^\beta\le\alpha x+\beta y\Leftrightarrow x^\alpha y^{\beta-1}\le\alpha\dfrac{x}{y}+\beta\Leftrightarrow u^\alpha\le\alpha u+\beta\ (u=\frac{x}{y}\ge 1)$. (2 分)

令 $f(u)=u^\alpha-(\alpha u+\beta)\ (u\ge 1)$, 则 $f(1)=1-(\alpha+\beta)=0$, 且 $f'(u)=\alpha(u^{\alpha-1}-1)<0$. (4 分)

故 $f(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 于是 $f(u)\le f(1)=0$. 即 $u^\alpha\le\alpha u+\beta$. (6 分)

(2) $(\ln x)''=-\dfrac{1}{x^2}<0$, 故 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹函数. (3 分)

由 Jensen 不等式，$\ln(\alpha x+\beta y)\ge\alpha\ln x+\beta\ln y$. 即有 $x^\alpha y^\beta\le\alpha x+\beta y$. (6 分)

14. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 上可导且导函数有界. 证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明：设 $|f'(x)|<M$. 则 $-M<f'(x)<M\Rightarrow -M(x-a)<f(x)-f(a)<M(x-a)$. (2 分)

令 $c=\dfrac{2M}{a}+\dfrac{|f(a)|}{a^2}$. 则对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{c}>0$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|=\left|\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Big|_{\xi}\cdot(x_1-x_2)\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{\xi}-\frac{f(\xi)}{\xi^2}\right||x_1-x_2|<\left(\frac{M}{a}+\frac{|f(a)|+M(\xi-a)}{\xi^2}\right)\delta$$

$\le\left(\dfrac{2M}{a}+\dfrac{|f(a)|}{a^2}\right)\delta=\varepsilon.$ 故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. （7 分）

15.（9 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可微，且

$$f(a)\cdot f(b)>0,\ \ f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0.$$

求证：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证明：不妨设 $f(a)>0$, 则 $f(b)>0$, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0.$ （2 分）

由介值定理知，存在 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$ 和 $\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$ 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$ （4 分）

令 $g(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, 则 $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0.$ （6 分）

由 Rolle 中值定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)\big|_{\xi}=0.$

即 $f'(\xi)=f(\xi)$. （9 分）