2017-2018 第一学期《数学分析》（上）
A卷答案及评分标准

一填空题（每空3分，共9分）

1\. $\frac{1}{2}$; 0; 2. $\frac{5}{4}$; 3. 0.

二计算题 （共64分）

1\.（6分）

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \quad (3分)\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ =&\frac{1}{2} \quad (3分)\end{aligned}$$

2\. （6分）易知

$$\sqrt[n]{3n}<\sqrt[n]{3n+2}<\sqrt[n]{6n}, \quad (2分)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$. （4分）

3\. 记$I=\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. 易见

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}<I<\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}, \quad (3分)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=1$和$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1$成立. 由夹逼定理可知，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)=1. \qquad (3分)$$

4. 由Stoltz公式可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{1+\frac{1}{2}}+3^{1+\frac{1}{3}}+\cdots+n^{1+\frac{1}{n}}}{n^2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1+\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2-n^2}\qquad (3分)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n+1}\\
=&\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.\qquad （3分）
\end{aligned}$$

5. 两次利用L'Hospital法则

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{2^x+2^{-x}-2}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2}{2x}\qquad (3分)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln^2 2+2^{-x}\ln^2 2}{2}\\
=&\ln^2 2,\qquad （3分）
\end{aligned}$$

6. 因为$x\to 0$时，$\ln(1+x^2)\sim x^2, \sin 3x\sim 3x, \tan 5x\sim 5x,$ （3分）所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin 3x\cdot\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x\cdot 5x}=\frac{1}{15}\qquad （3分）$$

7. 令$\frac{1}{x}=t$, 则$x\to+\infty$时，$t\to 0^+$. 于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})\\
=&\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{\frac{1+t}{t}}+\sqrt{\frac{1-t}{t}}-2\sqrt{\frac{1}{t}}\right)\\
=&\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right).\qquad (2分)
\end{aligned}$$

由于$t\to 0^+$时，成立

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t^2+o(t^2),$$

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2),$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}) \\
=&\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right) \\
=&\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}t-2-\frac{1}{4}t^2+o(t^2)\right) \\
=&-\frac{1}{4} \quad (4分)
\end{aligned}$$

8. 利用对数函数的性质和L'Hospital法则

$$\lim_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\ln(x+e^x)^{\frac{1}{x}}} \quad (3分)$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^2 \quad (3分)$$

9. 求由方程$e^{xy}+x^2y-1=0$确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数$y''(x)$.

解. 利用复合函数的求导法则，在方程$e^{xy}+x^2y-1=0$的两边同时对x求导

$$e^{xy}(y+xy')+2xy+x^2y'=0. \tag{1}$$

解得

$$y'(x)=-\frac{(e^{xy}+2x)y}{(e^{xy}+x)x}, \quad (5分) \tag{2}$$

在等式(1)的两边再对x求导并整理得

$$y''(x)=-\frac{e^{xy}[(y+xy')^2+2y']+(2y+4xy')}{x(e^{xy}+x)} \tag{3}$$

把等式(2)代入等式(3)可得

$$y''(x)=\frac{2ye^{3xy}+8xye^{2xy}+(12x^2y-x^3y^2)e^{xy}+6x^3y}{x^2(e^{xy}+x)^3} \quad (3分)$$

10. 易知$d^{80}y=y^{(80)}dx^{80}$. (2分)

$$y^{(80)}=(\cos x)^{(80)}x^3+C_{80}^1(\cos x)^{(79)}(x^3)^{(1)}+C_{80}^2(\cos x)^{(78)}(x^3)^{(2)}+C_{80}^3(\cos x)^{(77)}(x^3)^{(3)}$$

$$=x^3\cos x-240x^2\sin x-19860x\cos x+492960\sin x \quad (4分)$$

所以

$$d^{80}y=(x^3\cos x-240x^2\sin x-19860x\cos x+492960\sin x)dx^{80}\quad (2分)$$

三、证明题（共27分）

1. 1. (10分) （1）证明：$x>0$时，成立不等式$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;

(2) 证明数列$\{x_n\}=\{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\}$ 收敛.

证明. (1) 记$f(u)=\ln(1+u)$, $u>0$. 对函数$f(u)$ 在区间$[0,x]$上运用Lagrange中值定理可得

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln 1=\frac{x}{1+\xi},\quad \xi\in(0,x)$$

由于$\xi\in(0,x)$ 所以

$$\frac{x}{x+1}<\frac{x}{1+\xi}<x\quad (4分)$$

把$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$代入上式得

$$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x\quad (1分)$$

(2) 由(1)的结论知

$$\begin{aligned}&1>\ln 2\\&\frac{1}{2}>\ln(1+\frac{1}{2})=\ln 3-\ln 2\\&\cdots\\&\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}x_n=&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0\end{aligned}$$

这说明数列$\{x_n\}$有下界.　（2分）

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$$

由(1)知，$\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}$. 所以$x_{n+1}-x_n<0$, 从而数列$\{x_n\}$单调递减.（2分）由单调有界定理知数列$\{x_n\}$收敛. （1分）

2. (8分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\le x\le 1}f(x)=-\frac{1}{2}$. 证明存在$\xi\in(0,1)$使得$f''(\xi)\ge 4$.

证明 设$f(x)$在x_0取得最小值，则$f(x_0)=-\frac{1}{2}$, $x_0\in(0,1)$. 易知, x_0 是函数$f(x)$的一个极值点. 由Fermat定理知，$f'(x_0)=0$. 由Taylor 中值定理知，对$\forall x\in[0,1]$, 成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)^2$$

其中$\xi(x)$在x与x_0之间. （3分）在上式中分别取$x=0,1$，得

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2, \tag{4}$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2, \tag{5}$$

其中$\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,1)$. （2分）注意到$f'(x_0)=0$和$f(0)=f(1)=0$ 可得

$$f''(\xi_1)=\frac{1}{x_0^2} \tag{6}$$

和

$$f''(\xi_2)=\frac{1}{(1-x_0)^2}. \tag{7}$$

若$x_0\in[0,\frac{1}{2}]$, 则$\frac{1}{x_0^2}\ge 4$. 结合(6)可知$f''(\xi_1)\ge 4$. 此时取$\xi=\xi_1$; 若$x_0\in[\frac{1}{2},1]$, 则$1-x_0\le\frac{1}{2}$, 于是$\frac{1}{(1-x_0)^2}\ge 4$, 结合(7)可知$f''(\xi_2)\ge 4$. 此时取$\xi=\xi_2$. （3分）

3. (9分) 设函数$f(x)$在$[a.+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$ 内可导. 证明：

（1）若$f'(x)$在(a,∞) 上有界，则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续；

（2）若$\lim\limits_{x\to\infty}|f'(x)|=+\infty$, 则$f(x)$在$[a,+\infty)$不一致连续.

证明 （1）由题设知，存在$M > 0$使得对一切$x \in (a, +\infty)$成立$|f'(x)| \leq M$. (2分)

$\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 不妨设$x_1 < x_2$ 在区间$[x_1, x_2]$上运用Lagrange中值定理，

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$$

注意到$|f'(x)| \leq M$ 对一切$x > a$成立. 于是有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \quad (3\text{分})$$

由一致连续的定义可知，函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.（1分）

(2)取$\varepsilon_0 = 1$, 对$\forall \delta > 0$(无论δ多么小)，由$\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = +\infty$知，对于正数$\dfrac{2}{\delta}$, 存在$X > 0$, 使得当$x > X$时成立$|f'(x)| > \dfrac{2}{\delta}$. （1分）取$x' = X$, $x'' = X + \dfrac{\delta}{2}$, 则$x', x'' \in [a, +\infty)$ 且$|x' - x''| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. 由Lagrange中值定理知，至少存在一点$\xi \in (x', x'')$使得

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x'') = \frac{\delta}{2} f'(\xi). \tag{8}$$

由$\xi \in (x', x'')$且$x' = X$知，$\xi > X$，所以$|f'(\xi)| > \dfrac{2}{\delta}$. 于是由等式(8)可知

$$|f(x') - f(x'')| = \frac{\delta}{2} |f'(\xi)| > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} = 1. \tag{9}$$

所以，函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上不一致连续。（2分）