院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 ------ 订 ------ 线

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等代数(上)》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，且记 D 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式分别记作 M_{ij} 和 A_{ij}，

   则 $A_{31}+3A_{32}-2M_{33}-2M_{34}=$______________.

2. 设有矩阵 $A=(a_{ij})_{mn}$，$B=(b_{ij})_{np}$，$C=(c_{ij})_{pq}$ 和 $D=(d_{ij})_{ql}$. 则这四个矩阵乘积 $ABCD$ 的 (i,j) 元的表达式为_____________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $A^*=\left(\rule{3cm}{0.4pt}\right)$.

4. 对于任意 $\alpha=(x_1,x_2)\in \mathrm{R}^2$，定义线性映射 $\varphi:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^3, \varphi(\alpha)\mapsto(x_1,x_1-x_2,x_1+x_2)$，则映射 φ 在基 $\varepsilon_1'=(1,0),\varepsilon_2'=(1,1)$ 和基 $\eta_1'=(1,0,0),\eta_2'=(1,1,0),\eta_3'=(1,1,1)$ 下的表示矩阵为

   ______________________________.

5. 数域 F 上四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，又 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，其中 $5\eta_1+\eta_2=(1,1,0,2)^T$，$\eta_2-\eta_3=(1,0,1,3)^T$，则 $Ax=12b$ 的通解可表示为

   ______________________________________.

二、简答题（每小题 4 分，共 20 分）

得　分	

6. 在计算 $A^{-1}B$ 的时候，通常采取对 (A,B) 施行初等行变换变为 (I,X) 的形式, 从而得出 $X=A^{-1}B$ 比较方便. 请简述可以这样做的理由.

7. 能从矩阵等式 $AB=AC$ （ A 不是方阵）推出 $B=C$ 的条件是什么？请给出理由.

8. 设二维平面内有 $n(n\geq 2)$ 点 $\{(x_i,y_i)\}$，其中对任意 $1\leq i\neq j\leq n$， $x_i\neq x_j$. 则一定存在唯一的且形式为 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 的多项式函数通过这些点. 请说明理由.

9. 用 $\mathrm{F}^{m\times n}$ $(m\leq n)$ 表示数域 F 上 $m\times n$ 矩阵的全体. 若将 $\mathrm{F}^{m\times n}$ 中的矩阵按等价标准形进行分类，请问共能分多少类？为什么？

10. 数域 F 上任一 $n(n\geq 1)$ 维线性空间 V 都与 F^n 同构。试构造出这两个线性空间之间的一个双射。

三. 计算题（每小题 10 分，共 40 分）

得　分	

11. 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & a \end{vmatrix}(x\neq y).$$

12. 讨论 λ 取何值时，下列方程组有解，并给出解的表达式；当无解时，说明理由.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

13. 在 $F^{2\times 2}$ 中，求由矩阵 $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 组成向量组的一个极大线性无关组，并将余下的矩阵表示为该极大线性无关组的线性组合.

14. 设σ为V到W的线性映射，其中V为 5 维线性空间且$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$为$V$的一个基，$W$为 4 维线性空间且$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$为$W$的一个基. σ在这两个基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -12 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

求$\sigma^{-1}(0)$与$\sigma(V)$及其它们的维数.

四. 证明题（第 15 小题 10 分，第 16 小题 15 分，共 25 分）

得　分	

15. 设A为$m\times n$的实矩阵. 证明: $\operatorname{rank}(A^T A)=\operatorname{rank}(A)$.

16. 设V与W分别为数域F上的n维与m维向量空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为$V$的一个基.
证明:对于W中任意给定的n个向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，存在唯一的线性映射$\varphi:V\to W$，使得$\varphi(\varepsilon_i)=\eta_i, i=1,\cdots,n$.