安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《数学分析（上）》考试试卷（B 卷）参考答案

一、（4 分）用数列极限定义证明：

若数列$\{a_n\}$满足$|a_n-na|\le 1(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$。

证明：由条件知，$\left|\dfrac{a_n}{n}-a\right|\le\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$。$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$，则当$n>N$时，

$\left|\dfrac{a_n}{n}-a\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，故由数列极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$。 ……………………………………4 分

二、计算题（共 48 分）

1、求下列数列极限（每小题 6 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+\sqrt{n}-2}{3n^2+2n+1}$；

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}-\dfrac{2}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{2}{3}$。 ……………………………………………………6 分

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}})$；

解：因为$\dfrac{2n+2}{n+1}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}<\dfrac{2n+2}{n}$，

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{n+1}=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{n}=2$，故由夹逼定理知，

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}})=2$ ……………………………6 分

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$；

解：利用 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n\cdot n!}=1$。……………6 分

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^4 n+\cos^4 n}$。

解：由于$\sqrt[n]{\sin^4 n+\cos^4 n}=\sqrt[n]{1-\frac{1}{2}\sin^2 2n}>\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，故有$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}<\sqrt[n]{\sin^4 n+\cos^4 n}<\sqrt[n]{2}$。

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^4 n+\cos^4 n}=1$。……………6 分

2、计算下列函数极限：（每小题 6 分）

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-\sin x+1}{x^3-x^2+2}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{\sin x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=2$。 ……………………………………………………6 分

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x})'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot(-\sin x)-\frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-\sin x)}{2x}$

$=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}\cdot(\cos x)^{-\frac{2}{3}}]=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$。 ………………6 分

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\frac{x^2}{4})^{\frac{1}{x^2}}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x-\frac{x^2}{4})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x-\frac{x^2}{4})}$。

又$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x-\frac{x^2}{4})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\ln(\cos x-\frac{x^2}{4})]'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x-\frac{x}{2}}{2(\cos x-\frac{x^2}{4})x}=-\frac{3}{4}$。

故原式$=e^{-\frac{3}{4}}$。……………………………………………………………………6 分

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x(1+x)}{\sin^3 x}$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))-x(1+x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^3}=\frac{1}{6}$。 ……………………………………………………6 分

三、求解题（每小题 9 分，共 27 分）

1．设 $x=t-\sin t, y=t\cos t$，求由此参数方程确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{1-\cos t}$，…………………………………………………………4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{1+\cos t\sin t-t\cos t-2\sin t}{(1-\cos t)^3}.$$ ……………………………………5 分

2．求函数 $y=(x+1)e^{\frac{2}{x}}\ (x<0)$ 的最大值和其图像的拐点.

解：（1）由于 $y'=(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2})e^{\frac{2}{x}}=(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$，故知：

当 $-\infty<x<1-\sqrt{3}$ 时，$y'>0$；当 $1-\sqrt{3}<x<0$ 时，$y'<0$。

所以 $x=1-\sqrt{3}$ 为函数在 $(-\infty,0)$ 上的最大值点，故所求的最大值为 $(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}-1}$。

……………………………5 分

（2）因为 $y''=\dfrac{8(x+\frac{1}{2})}{x^4}e^{\frac{2}{x}}$，故

当 $-\infty<x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$y''<0$，故函数在 $(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$ 上为严格上凸；

当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$y''>0$，故函数在 $[-\dfrac{1}{2},0)$ 上为严格下凸。

所以函数图像的拐点为点 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2e^4})$。 …………………………………………4 分

3．试确定 a,b 的值，使得 $axe^x-\ln(bx^2+x+1)=o(x^2)\ (x\to 0)$。

解：由于当 $x\to 0$ 时，

$$axe^x-\ln(bx^2+x+1)=ax[1+x+o(x)]-[x+bx^2-\frac{1}{2}(x+bx^2)^2+o(x^2)]$$

$$=ax+ax^2-x-bx^2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)=(a-1)x+(a-b+\frac{1}{2})x^2+o(x^2)=o(x^2),$$ ………6 分

故知 $a-1=0, a-b+\dfrac{1}{2}=0$，解得 $a=1, b=\dfrac{3}{2}$。 ……………………………………3 分

四、分析与证明题（每小题 7 分，共 21 分）：

1．证明 $\cos(x^2)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。

证明：记 $f(x)=\cos(x^2)$，令 $x_n'=\sqrt{2n\pi}$， $x_n''=\sqrt{2n\pi+\pi}$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n\pi}-\sqrt{2n\pi+\pi})=0,$$ ……………………………………4 分

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')=\lim_{n\to\infty}[\cos(2n\pi)-\cos(2n\pi+\pi)]=2\neq 0,$$

可见 $f(x)=\cos(x^2)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。 ……………………………………3 分

2. 设 $0<x_1<1$， $x_{n+1}=x_n(1-x_n^2)(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$。

解：（1）证明:易见 $0<x_n<1(n=1,2,\cdots)$。又 $x_{n+1}-x_n=-x_n^3<0$，故 $\{x_n\}$ 严格单调减少，所以 $\{x_n\}$ 单调有界，故 $\{x_n\}$ 收敛。 …………………………………………………3 分

(2)令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=x_n(1-x_n^2)$ 两边求极限，得 $a=a(1-a^2)$，故 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

……………………………2 分

(3) 利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2x_n^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4(1-x_n^2)^2}{(x_n+x_{n+1})(x_n-x_{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4(1-x_n^2)^2}{(2x_n-x_n^3)x_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x_n^2)^2}{(2-x_n^2)}=\frac{1}{2}。$$ …………………2 分

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 在 (a,b) 上可导， $f(x)\neq 0(\forall x\in(a,b))$，且 $f(a)=g(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $2f'(\xi)g(\xi)=-f(\xi)g'(\xi)$。

证明：令 $F(x)=f^2(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且由题设条件知

$$F(a)=F(b)=0,$$ ………………………………………………………………3 分

故根据 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$2f(\xi)f'(\xi)g(\xi)+f^2(\xi)g'(\xi)=0,$$

$$2f'(\xi)g(\xi)=-f(\xi)g'(\xi)。$$ ………………………………………………………4 分