安徽大学 2015—2016 年第二学期

数学分析（中）期末试卷（B 卷）答案

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

（1）4；（2）$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x+C$；（3）$0<p\le 1$；（4）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$.

二、计算题（每小题 5 分，共 35 分

1．计算下列不定积分：

(1) $\int x(x+2\sqrt{x^2+1})dx=\int x^2dx+\int 2x\sqrt{x^2+1}dx=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$ .... 5 分

(2) $\int(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-2\int\ln xdx=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$ .... 5 分

(3) 令 $u=\dfrac{1}{x}$，$\int\dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}dx=-\int\dfrac{\arctan u}{1+u^2}du=-\dfrac{1}{2}\arctan^2\dfrac{1}{x}+C$； .... 5 分

2. 计算下列定积分及反常积分：

（1）$\int_0^1 x^4(x-1)^2dx=\int_0^1(x^6-2x^5+x^4)dx=(\dfrac{1}{7}x^7-\dfrac{2}{6}x^6+\dfrac{1}{5}x^5)\Big|_0^1=\dfrac{1}{105}$ .... 5 分

（2）$\int_0^1(x+1)\arctan xdx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\arctan xdx^2+\int_0^1\arctan xdx=\dfrac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

$+x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1$

$=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}$ .... 5 分

（3）$\int_0^1 x^2\ln xdx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\ln xdx^3=\dfrac{1}{3}x^3\ln x\big|_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^2dx=-\dfrac{1}{9}$ .... 5 分

（4）$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(e^x+e^{-x})^2}=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{2x}dx}{(e^{2x}+1)^2}=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{d(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e^{2x}+1}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{4}$ .... 5 分

三、讨论题（共 20 分）

判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分，共 20 分）

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^n n!}$

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{5^n n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{5}=\frac{e}{5}<1$，故由达朗贝尔判别法知，原级数收敛且绝对收敛。..5 分

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$

解：由于$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^2}=2>1$，故由柯西判别法知，原级数发散....... 5 分

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

解：令$x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，则$\lim_{n\to\infty}n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，故由拉贝判别法知，原级数发散.............. .... 5 分

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$

解：此为交错级数。数列$\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$单调减少且趋于 0，因此此级数为 Leibniz 级数，所以收敛。

又由于$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}}=1$且$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$发散，故原级数条件收敛..5 分

四、求解与证明题（共 33 分）

1.（8 分）用$V(a)$表示曲线$y=\frac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}$与 x 轴所界区域在$x\in[0,a]$的部分绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积，求常数$\xi$使得下式成立

$$V(\xi)=\frac{1}{9}\lim_{a\to+\infty}V(a)\text{。}$$

解：根据旋转体体积计算公式，$V(a)=\pi\int_0^a\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{3/2}}\right)^2dx=\pi\int_0^a\dfrac{\sqrt{x}}{(1+x^{3/2})^2}dx$

$=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{1+a^{3/2}}$，从而 $\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{1+a^{3/2}})=\dfrac{2\pi}{3}$............4 分

又由$V(\xi)=\dfrac{1}{9}\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)$知，$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\xi^{3/2}}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{2\pi}{3}$，解得$\xi=\dfrac{1}{4}$...............8 分

2.（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)x^{n+1}}{n!}$的收敛半径、收敛域及和函数。

解：（1）由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{n+3}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{n+2}{n!}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}=0$，故其收敛半径为$R=+\infty$.........4 分

（2）由（1）知，其收敛域为$(-\infty,+\infty)$...7 分

（3）令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)x^{n+1}}{n!}$，

则$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)t^{n+1}}{n!}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\dfrac{(n+2)t^{n+1}}{n!}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!}=x^2(e^x-1)$，

从而$S(x)=(x^2(e^x-1))'=(x^2+2x)e^x-2x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.......................10 分

3.（8 分）设$S_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$，证明当$\alpha<1$时，$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

证明：$\forall x\in[0,1],\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha}xe^{-nx}=0$.................................3 分

令$S_n'(x)=(1-nx)n^{\alpha}e^{-nx}=0$，得$x=\dfrac{1}{n}$。令$d_n=\sup\limits_{0\le x\le1}|S_n(x)-S(x)|=\sup\limits_{0\le x\le1}|S_n(x)|=S_n(\dfrac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1}$，

当$\alpha<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0。.......... ......8 分

4.（7 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续且满足$0\le f(x)\le x^2$，证明：

（1）$\forall x\in[0,1],\int_0^x f(t)dt\le\dfrac{x^3}{3}$；

（2）$\int_0^1 x^3f(x)dx\ge\dfrac{3}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$。

证明：（1）由条件知，当$x\in[0,1]$时，$\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x t^2dt=\dfrac{x^3}{3}$... ....3 分

（2）令$F(x)=\int_0^x t^3f(t)dt-\dfrac{3}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$，则有

$$F'(x)=x^3f(x)-3f(x)\int_0^x f(t)dt=3f(x)[\frac{x^3}{3}-\int_0^x f(t)dt]。$$

由假设条件及（1）可知，当$x\in[0,1]$时，$F'(x)\ge0$，故$F(x)$在$x\in[0,1]$上单调增加，故有

$F(1) \geq F(0) = 0$，即有：

$$\int_0^1 x^3 f(x)dx \geq \frac{3}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \text{…………… . …………… ……… 7 分}$$