安徽大学 2015—2016 年第二学期

数学分析（中）期末试卷（A 卷）答案

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

（1）2；　（2）$\ln|2+\cos x|+C$；　（3）$0<p\le 1$；　（4）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$.

二、计算题（每小题 5 分，共 35 分

1. 计算下列不定积分：

(1) $\int x(x+2\sqrt{x^2-1})dx=\int x^2dx+\int 2x\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$ . . . . 5 分

(2) $\int x^2\ln xdx=\frac{1}{3}\int\ln xdx^3=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$

. . . . 5 分

(3) 令 $t=\arcsin x$，则 $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{t\sin t}{\cos t}\cos tdt=\int t\sin tdt$

$=-t\cos t+\int\cos tdt=-t\cos t+\sin t+C=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$ . . . . 5 分

2. 计算下列定积分及反常积分：

（1）$\int_0^1 x^4(x^2+1)^2dx=\int_0^1(x^8+2x^6+x^4)dx=(\frac{1}{9}x^9+\frac{2}{7}x^7+\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^1=\frac{188}{315}$ . . . . 5 分

（2）$\int_0^1 x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan xdx^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ . . . . 5 分

（3）$\int_0^2(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2\Big|_0^2-\int_0^2 xd(\ln x)^2=2(\ln 2)^2-\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^2-2\int_0^2\ln xdx$

$=2(\ln 2)^2-2\int_0^2\ln xdx=2(\ln 2)^2-2x\ln x\Big|_0^2+2\int_0^2 xd\ln x=2(\ln 2)^2-4\ln 2+4$ . . . . 5 分

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(e^x+2e^{-x})^2}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{2x}dx}{(e^{2x}+2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(e^{2x}+2)}{(e^{2x}+2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{2x}+2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{6}$ . . . . 5 分

三、讨论题（共 20 分）

判断下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）（每小题 5 分，共 20 分）

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1$，故由达朗贝尔判别法知，原级数发散。

....5 分

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$

解：由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3e^{-n}}=e^{-1}<1$，故由柯西判别法知，原级数收敛，且为绝对收敛..... 5 分

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}$

解：令 $x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}n(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3}{2}>1$，故由拉贝判别法知，原级数收敛，且为绝对收敛... .... 5 分

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$

解：此为交错级数。易见数列 $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ 单调减少且趋于 0, 因此此级数为 Leibniz 级数，所以收敛。又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 发散，故原级数条件收敛........................5 分

四、求解与证明题（共 33 分）

1.（8 分）用 $V(a)$ 表示曲线 $y=\frac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}$ 与 x 轴所界区域在 $x\in[0,a]$ 的部分绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积，求常数 ξ 使得下式成立

$$V(\xi)=\frac{1}{9}\lim_{a\to+\infty}V(a)\text{。}$$

解：根据旋转体体积计算公式，$V(a)=\pi\int_0^a\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{1+x^{3/2}}\right)^2dx=\pi\int_0^a\frac{\sqrt{x}}{(1+x^{3/2})^2}dx$

$=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{1+a^{3/2}}$，从而 $\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{1+a^{3/2}})=\dfrac{2\pi}{3}$ . . . . 4 分

又由 $V(\xi)=\dfrac{1}{9}\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)$ 知，$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\xi^{3/2}}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{2\pi}{3}$，解得 $\xi=\dfrac{1}{4}$ . . . . 8 分

2. （10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+2}}{n!(n+2)}$ 的收敛半径、收敛域及和函数。

解：（1）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(n+3)}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n}{n!(n+2)}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)(n+3)}=0$，故其收敛半径为 $R=+\infty$ . . . . . . 4 分

（2）由（1）知，其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ . . . . 7 分

（3）令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+2}}{n!(n+2)}$，则 $S'(x)=\dfrac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+2}}{n!(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}$

$= x(e^{-x}-1)$，

从而有 $\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x t(e^{-t}-1)dt$，即有 $S(x)-S(0)=-xe^{-x}-e^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2+1$，所以

$S(x)=-xe^{-x}-e^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2+1\ (x\in(-\infty,+\infty))$ . . . . 10 分

3. （8 分）设 $S_1(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，令 $S_{n+1}(x)=\int_0^x S_n(t)dt,\ n=1,2,\cdots$。证明函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛于 $S(x)\equiv 0$。

证明：因为 $S_1(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，故 $S_1(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上有界，从而存在 $M>0$，使得

当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$|S_1(x)|\le M$。于是

当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$|S_2(x)|\le\int_0^x|S_1(t)|dt\le\int_0^x M dt\le Mx\le\dfrac{M}{2}$；

当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$|S_3(x)|\le\int_0^x|S_2(t)|dt\le\int_0^x\dfrac{M}{2}dt\le\dfrac{M}{2}x\le\dfrac{M}{2^2}$；

由数学归纳法易知，当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$|S_n(x)|\le\dfrac{M}{2^{n-1}}$，$n=2,3,\text{L}$。. . . . . 5 分

令 $d_n=\sup\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}|S_n(x)-S(x)|=\sup\limits_{0\le x\le\frac{1}{2}}|S_n(x)|$，则 $0\le d_n\le\dfrac{M}{2^{n-1}}$，$n=2,3,\text{L}$，故有

$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛于 $S(x)\equiv 0$。. . . . . 8 分

4.（7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $0\le f(x)\le x$，证明：

（1） $\forall x\in[0,1], \int_0^x f(t)dt\le\frac{x^2}{2}$；

（2） $\int_0^1 x^2 f(x)dx\ge\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$。

证明：（1）由条件知，当 $x\in[0,1]$ 时， $\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$ . . . .3 分

（2）令 $F(x)=\int_0^x t^2 f(t)dt-\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$，则有

$$F'(x)=x^2 f(x)-2f(x)\int_0^x f(t)dt=2f(x)[\frac{x^2}{2}-\int_0^x f(t)dt]。$$

由假设条件及（1）可知，当 $x\in[0,1]$ 时， $F'(x)\ge 0$，故 $F(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上单调增加，故有 $F(1)\ge F(0)=0$，即有：

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx\ge\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$ ....7 分