

安徽大学2018-2019学年第二学期 《高等代数（下）》考试试卷（B卷）

（闭卷 时间120分钟）

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题 (每小题3分, 共15分)

得分

1. 多项式 $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ 的所有有理根为_____.
2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$ 相似. 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
3. 设向量 $\alpha = (1, -2, 1, 0)$, $\beta = (3, 2, 4, 1)$, I_4 为3阶单位阵. 则矩阵 $A = -I_4 + \alpha^T \beta$ 的全部特征值为_____.
4. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2\lambda x_3^2 - 4x_2 x_3$ 正定. 则 λ 的取值范围为_____.
5. 设 $\mathbb{R}[x]_4$ 是所有次数小于4关于 x 的多项式构成的欧氏空间, 其内积定义为 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. 则在该欧氏空间中, $f(x) = x^2$ 到 $g(x) = x$ 的距离为_____.

二、选择题 (每小题3分, 共15分)

得分

6. 设 \mathbb{F} 是数域, $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则下列说法正确的是 ()
 - (A) 若对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 都有 $p(x) \mid f(x)$, 或 $(p(x), f(x)) = 1$. 则 $p(x)$ 不可约.
 - (B) 若 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则必有 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$.
 - (C) 若 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, $k \geq 2$.
 - (D) 若存在正整数 k , $p(x) \mid f^k(x)$, 则 $p(x) \mid f(x)$.
7. 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 都是复数域上 $m \times n$ 矩阵. $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是 ()
 - (A) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的秩.
 - (B) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的行列式.
 - (C) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的Smith标准形.
 - (D) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组.

8. 设 \mathcal{A} 是 n 维复线性空间上的线性变换. 则 \mathcal{A} 可对角化的充分必要条件是 ()

- (A) 对 \mathcal{A} 的任一特征值 λ_0 , 根子空间 W_{λ_0} 的维数都等于 λ_0 的几何重数.
- (B) 对 \mathcal{A} 的任一特征值 λ_0 , 根子空间 W_{λ_0} 的维数都等于 λ_0 的代数重数.
- (C) 对 \mathcal{A} 的任一特征值 λ_0 , 特征子空间 V_{λ_0} 的维数都等于 λ_0 的几何重数.
- (D) \mathcal{A} 的所有根子空间的维数之和等于 n .

9. 设 \mathcal{A} 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换. 则下列说法正确的是 ()

- (A) 若 \mathcal{A} 不是恒等变换, 则 \mathcal{A} 一定不可对角化.
- (B) \mathcal{A} 属于不同特征值的特征向量必定正交.
- (C) \mathcal{A} 在任一组基下的矩阵都是正交阵.
- (D) \mathcal{A} 的实特征值只能是 ± 1 .

10. 设 A 是 n 阶实对称阵, $n \geq 2$. 则 A 是半正定阵的充分必要条件是 ()

- (A) 存在可逆阵 C , 使得 $A = CC^T$.
- (B) A 的所有顺序主子式大于等于零.
- (C) A 的所有特征值大于等于零.
- (D) A 合同于 n 阶单位阵.

三、计算题 (第11、12、14题每题10分, 第13题15分, 共45分)

得分	
----	--

11. 设 $f(x) = x^4 + x^3 + x - 1$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$. 求 $(f(x), g(x))$, 以及多项式 $u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = ((f(x), g(x)))$.

12. 设 A 是3阶实对称阵, 且特征值为1, 1, 2. 已知 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -2)^T$ 为 A 的属于特征值1的特征向量. 求矩阵 A .

13. 设复矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的各阶行列式因子分别为 $D_1(\lambda) = \cdots = D_5(\lambda) = 1$, $D_6(\lambda) = \lambda + 1$, $D_7(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$, $D_8(\lambda) = (\lambda + 1)^4(\lambda - 2)^4$. 求
- (1) A 的所有不变因子.
 - (2) A 的初等因子组.
 - (3) A 的Jordan标准形.
 - (4) A 的极小多项式.
 - (5) A 的所有两两不同的特征值, 及其代数重数与几何重数.

14. 设实二次型 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$. 用合同变换法将 $q(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形, 并求对应的非退化线性替换.

四、证明题(第15、16题每题10分, 第17题5分, 共25分)

得分	
----	--

15. 设 \mathcal{A} 为欧氏空间 V 的正交变换, 且 W 为 \mathcal{A} 的不变子空间. 证明:

- (1) \mathcal{A} 在 W 上的限制 $\mathcal{A}|_W$ 为 W 上的正交变换.
- (2) W 的正交补 W^\perp 也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

16. 设 A 是 n 阶实对称阵. 证明: A 是半正定阵的充分必要条件是对任意 $t > 0$, $A + tI_n$ 是正定阵.

17. 设 \mathbb{F} 是数域, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{F}[x]$. 证明: $f(x)$ 无重根.

**安徽大学2018-2019学年第二学期《高等代数(下)》
参考答案与评分标准(B卷)**

一、填空题 (每小题3分, 共15分)

1. $x = -\frac{1}{3}$. 2. $a = 2, b = 3$. 3. 2(单重), -1(三重).
4. $\lambda > \sqrt{2}$. 5. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$.

二、选择题 (每小题3分, 共15分)

6. A. 7. C. 8. A. 9. D. 10. C.

三、计算题 (第11、12、14题每题10分, 第13题15分, 共45分)

11. 解:

$$f(x) = g(x)(x-1) + 2(x^2 + x - 1)$$

$$g(x) = (x^2 + x - 1)(x-1)$$

由此可知, $(f(x), g(x)) = x^2 + x - 1$ (5分)

$$\text{取 } u(x) = \frac{1}{2}, v(x) = -\frac{1}{2}(x-1),$$

则有 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = x^2 + x - 1$ (10分)

12. 解: 设 $\alpha_3 = (a_1, a_2, a_3)^T$ 为 A 属于特征值2的特征向量.

则 $\alpha_1 \perp \alpha_3, \alpha_2 \perp \alpha_3$. 即 $a_1 - a_2 = 0$, 且 $a_1 + a_2 - 2a_3 = 0$.

故可令 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ (5分)

$$\text{故令 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故 } A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (10分)$$

13. 解: (1) A 的不变因子为 $d_1(\lambda) = \cdots = d_5(\lambda) = 1$,

$$d_6(\lambda) = \lambda + 1$$

$$d_7(\lambda) = \frac{D_7(\lambda)}{D_6(\lambda)} = (\lambda - 2)^2,$$

$$d_8(\lambda) = \frac{D_8(\lambda)}{D_7(\lambda)} = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2. \quad \dots\dots\dots (3\text{分})$$

(2) A 的初等因子组为 $(\lambda + 1), (\lambda + 1), (\lambda + 1)^2, (\lambda - 2)^2, (\lambda - 2)^2$. $\dots\dots\dots (6\text{分})$

(3) A 的 Jordan 标准形为
$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \dots\dots\dots (9\text{分})$$

(4) A 的极小多项式 $m(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2$. $\dots\dots\dots (12\text{分})$

(5) A 的特征值 $\lambda_1 = -1$ 的代数重数为 4, 几何重数为 3;

A 的特征值 $\lambda_2 = 2$ 的代数重数为 4, 几何重数为 2. $\dots\dots\dots (15\text{分})$

14. 解. 二次型 $q(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$

对 A 作合同变换

$$\left(\frac{A}{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (8\text{分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ 令 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ 则作非退化线性替换 } X = QY,$$

可得规范形 $q(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (10分)

四、证明题 (第15、16题每题10分, 第17题5分, 共20分)

15. 证: (1) 由定义, 对任意 $\alpha \in W$, $\mathcal{A}|_W(\alpha) = \mathcal{A}(\alpha)$.

故对任意 $\alpha, \beta \in W$, $(\mathcal{A}|_W(\alpha), \mathcal{A}|_W(\beta)) = (\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

由此可知, $\mathcal{A}|_W$ 为 W 上的正交变换. (4 分)

(2) 对任意 $\alpha \in W^\perp$, 要证 $\mathcal{A}(\alpha) \in W^\perp$.

对任意 $\beta' \in W$, 由(1)可知 $\mathcal{A}|_W$ 为 W 上正交变换, 从而也是可逆变换, 故存在 $\beta \in W$, 使得 $\mathcal{A}(\beta) = \beta'$.

于是, $(\mathcal{A}(\alpha), \beta') = (\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = (\alpha, \beta) = 0$. 由 $\beta' \in W$ 的任意性可知, $\mathcal{A}(\alpha) \in W^\perp$, 即 W^\perp 也是 \mathcal{A} 的不变子空间. (10 分)

16. 证: 设 A 是实对称阵. 则存在正交阵 Q , s.t. $A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^T$. 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值

(\Rightarrow) 因为 A 是半正定阵, 所以 $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$.

于是, $A + tI_n = Q \operatorname{diag}(\lambda_1 + t, \dots, \lambda_n + t) Q^T$. 因为 $\lambda_i + t > 0, i = 1, \dots, n$, 所以 $A + tI_n$ 为正定阵. (5分)

(\Leftarrow) (反证) 若存在某个 $\lambda_i < 0$, 则取 $t = -\lambda_i > 0$.

则 $A + tI_n = Q \operatorname{diag}(\lambda_1 - \lambda_i, \dots, \lambda_{i-1} - \lambda_i, 0, \lambda_{i+1} - \lambda_i, \dots, \lambda_n - \lambda_i) Q^T$. 这与 $A + tI_n$ 为正定阵矛盾. 故 $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, 即 A 为半正定阵. (10 分)

17. 证: $f'(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

所以 $f(x) = f'(x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ (2分)

又因为 $(f(x), f'(x)) = (\frac{x^n}{n!}, f'(x)) = 1$, 所以 $f(x)$ 无重因式, 也就无重根. .. (5分)