案例3. 城际列车的运行图安排——参考求解

Parameters

M： 上行列车数量 N： 下行线路数量 MOTIVE_NUM :可用的列车数量

$weightTrainup[i]$:上行线路的客流量

$weightTraindown[j]$ 下行线路的客流量

$tismin[i], tismax[i]$ 上行线路最早/最晚的出发时间 $tiemin[i], tiemax[i]$上行线路最早/最晚的到达时间

$tjsmin[j], tjsmax[j]$ 下行线路最早/最晚的出发时间 $tjemin[j], tiemax[j]$下行线路最早/最晚的到达时间

技术等待时间 $theta_i = 20$ $theta_j = 30$

最小列车间隔12分钟 $H_U P_M IN = 12$ $H_D OWN_M IN = 12$

Decision Variables

$xup_{i,j,k}$ (binary)列车k执行完上行线路i后是否立即执行下行线路j

$xdown_{j,i,k}$ (binary)列车k执行完下行线路j后是否立即执行上行线路i

xe_k(binary)是否使用列车$k(k = 1, 2, \ldots, NTRAINS)$

$tups_i$ 上行线路i的实际出发时间 $tupe_i$ 上行线路i的实际到达时间 $tdowns_j$ 下行线路j的实际出发时间 $tdowne_j$ 下行线路j的实际到达时间

Objective function(s)

obj1:使用的机车数量最少

$$\sum_{k=1}^{NTRAINS} xe_k$$

obj2:机车总怠速时间最少(不计出库与入库怠速时间)

$$\sum_{k=1}^{NTRAINS} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} ((tdowns_j - tupe_i) * xup_{i,j,k} + (tups_i - tdowne_j) * xdown_{j,i,k}$$

> obj2一个非线性约束，需要转化为线性约束,例如：
>
> $$z = (tdowns_j - tupe_i) * xup_{i,j,k}$$
>
> 可以转化为：
>
> $$z = yup_{i,j,k}$$
>
> *s.t.*
>
> $$yup_{i,j,k} <= M * x_{i,j,k}$$

> $$yup_{i,j,k} - (tdowns_j - tupe_i) <= M * (1 - xup_{i,j,k})$$
>
> $$yup_{i,j,k} - (tdowns_j - tupe_i) >= M * (xup_{i,j,k} - 1)$$
>
> $$yup_{i,j,k} > 0$$

约束

对于每辆列车k，除了最后的入库操作外，每个上行线路$(i = 1, \ldots, M)$ 之前只有一个下行线路，每个下行线路$(j = 1, \ldots, N)$ 前只有一个上行线路。

$i, j = 0$： 进入出库线路 $i = M + 1; j = N + 1$:进入回库线路

$$\sum_{k=1}^{NTRAINS} \sum_{j=0}^{N} xdown_{j,i,k} = 1 (i = 1, 2, .., M)$$

$$\sum_{k=1}^{NTRAINS} \sum_{i=0}^{M} xup_{i,j,k} = 1 (j = 1, 2, .., N)$$

列车k的运行线路是连续的,

$$\sum_{i=0}^{M} xup_{i,j,k} <= \sum_{i=1}^{M+1} xdown_{j,i,k} (j = 1, 2, .., N; k = 1, 2, .., NTRAINS)$$

$$\sum_{j=0}^{N} xdown_{j,i,k} <= \sum_{j=1}^{N+1} xup_{i,j,k} (i = 1, 2, .., M; k = 1, 2, .., NTRAINS)$$

对于回库线路($i = M + 1; j = N + 1$),该线路之前可能对于多条下行线j/多条上行线i

如果列车k上线运行$(xe_k = 1)$，则必须经过出库线(从A出库i=0，还是从B出库j=0)和入库线(A入库j=N+1;B入库i=M+1)。

$$\sum_{j=1}^{N} xup_{0,j,k} + \sum_{i=1}^{M} xdown_{0,i,k} <= xe_k (k = 1, 2, .., NTRAINS)$$

$$\sum_{i=1}^{M} xup_{i,N+1,k} + \sum_{j=1}^{N} xdown_{j,M+1,k} <= xe_k (k = 1, 2, .., NTRAINS)$$

如果列车k不上线运行，则任意

$$xup_{i,j,k} = 0; xdown_{j,i,k} = 0$$

$$i = 0, 1, .., M + 1; j = 0, 1, \ldots, N + 1$$

运行时间约束

$$tismin[i] <= tups[i] <= tismax[i]$$

$$tiemin[i] <= tupe[i] <= tiemax[i]$$

$$tjsmin[i] <= tdowns[j] <= tjsmax[i]$$

$$tjemin[i] <= tdowne[j] <= tjemax[i]$$

牵引重量限制

$$\sum_{k=1}^{NTRAINS}\sum_{j=1}^{N+1} weight_k * xup_{i,j,k} >= weightUp_i (i = 1, 2, \dots, M)$$

$$\sum_{k=1}^{NTRAINS}\sum_{i=1}^{M+1} weight_k * xdown_{j,i,k} >= weightDown_j (j = 1, 2, \dots, N)$$

案例4. 供应链问题————参考求解

参数

$SC[j,t]$ 中央仓库在t时刻商品j的最大库存容量 $SO[j]$ 临时仓库存储商品j的最大容量 $C[i,j,t]$ 供应商i的在t时间对于商品j最大供应能力 $DK[k,j,t]$ 批发商k在t时间对于商品j的需求 $P[i,j]$ 从供应商i处购买商品j的价格 $st[i,j]$ 供应商i准备商品j所需要的时间 $LT[j,t]$ 商品j在t时期最大准备时间 $h[j]$ 仓库持有商品j的单位持有成本 $LW[j]$ 仓库销售商品j的销售损失成本 $Qa[j]$ 仓库对商品j的合格率要求 $O[ij]$ 仓库向供应商i订购商品j的固定订货成本 $DO[k]$ 仓库向批发商k运输商品的单位运输成本 $W[i]$ 供应商i的权重 $Rs[i,t]$ 供应商i在t时刻的可信度 $Rw[t]$ 仓库在t时刻的可信度

决策变量

$X[ijt]$ 第t个期间向第i个供应商订购的第j个产品的数量 $XK[kjt]$ 第t期中央仓库向批发商k发送的第j个产品的数量 $I[j，t]$ 第t期第j个产品的库存

$D[jt]$ 第t个期间中心仓库对第j个产品的需求

$L[jt]$ 第j期第j个产品的库存金额

$LO'[jt]$ 中央仓库第j个期末第j个产品的销售额损失 $OX[t]$第t期建立的临时仓库数量 $Y[ijt]$ （当选择第i个供应商在第t个周期内供应第j个产品时，取值为1；否则等于0 $B[kjt]$ （0-1变量）当批发商k的需求在第t个周期内满足第j个产品时，取值为1；否则，它等于0。

目标函数

$$ min z = 0.5*TotalCost - 0.3 * TotalWeight -0.2*TotalReliability $$

约束

总成本 = 供货商采购成本 + 仓储成本 + 订货成本+批发商销售损失成本 + 临时仓库建立成本

$$TotalCost = \sum_{j=1}^{PR}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{PE}(P_{ij} * X_{ijt}) + \sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(h_j * I_{jt}) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(O_{ij} * Y_{ijt}) + \sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(LW_j * LO'_{jt}) \sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(DO_k * XK_{kjt}) + \sum_{t=1}^{PE}(PO * OX_t)$$

$$ TotalCost=\sum_{j=1}^{PR}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{PE}(P_{ij} * X_{ijt}) +\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(h_j*I_{jt}) +\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{PR} \sum_{t=1}^{PE}(O_{ij}*Y_{ijt}) +\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(LW_j*LO'{jt}) \sum{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(DO_k*XK_{kjt})+\sum_{t=1}^{PE}(PO*OX_t) $$

供应商的权重与订货量的权重之和

$$TotalWeight=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(W_i\cdot X_{ijt})$$

供应商的可信值 $$TotalReliability=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(e^{-\lambda_{it}
}X_{ijt})+\sum_{k=1}^{KR}\sum_{j=1}^{PR} \sum_{t=1}^{PE}(e^{-\lambda'*t}*\ *XK*{kjt})$$

$$TotalReliability=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(e^{-\lambda_{it}}X_{ijt})+\sum_{k=1}^{KR}\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(e^{-\lambda'_t}\ XK_{kjt})$$

从供货商拿到的商品数量$X_{i,j,t}$不得超过最大供应能力$C_{i,j,t}$限制(10)

$$X_{i,j,t}<=C_{i,j,t}$$

是否从某个供应商供货Y_{ijt}应该满足的限制

$$X_{ijt}<=BIGM*Y_{ijt}(BIGM\text{是一个很大的正数})$$

从供货商拿到的商品次品率不得高于仓库的次品率限制（9）

$$\sum_{i=1}^{M}(X_{ijt}.qa_i)\leq Qa_j.D_{jt}$$

从各家供货商拿货的总时间不得超过时间LT_{jt}限制(11)

$$\sum_{i=1}^{M}st_{ij}Y_{i,j,t}<=LT_{ij}$$

仓库的库存不得超过仓库的仓储能力(中央仓库+临时仓库)限制

$$\sum_{i=1}^{M}X_{i,j,t}+I_{j,t-1}<=SC_{jt}+SO_j*OX_t$$

从供应商处的订货量 + 上一期末的库存 - 销售给批发商的数量 = 本期末库存 （5）

$$\sum_{i=1}^{M}X_{ijt}+I_{jt-1}-\sum_{k=1}^{KR}XK_{kjt}=I_{jt}$$

批发商的需求被满足（B_{kjt}在t时刻是否满足批发商k的商品j的需求）（6）

$$D_{jt}=\sum_{k=1}^{KR}DK_{kjt}.B_{kjt}$$

批发商的需求 = 供应给批发商的数量+ 销售损失

$$XK_{kjt}+LO'_{jt}=DK_{kjt}$$

以上

$$i=1,2,\ldots,7;j=1,2,3;k=1,2,\ldots,16$$

无人机与货车混合送货问题

参数设置

c 客户的数量 0，c+1 都代表了配送中心节点（一个是开始节点，一个是结束节点） $1, 2, \ldots, c$ 代表了c个客户的节点

$times[i][j]$ 卡车从节点i到节点j的时间 $times1[i][j]$ 无人机从节点i到节点j的时间 sL发射无人机的准备时间 sR回收无人机的恢复时间 e无人机的飞行续航时间

目标函数

案例6 Braneast 航空公司的航线安排

Parameters

机场编号（1-波士顿,2-纽约，3-华盛顿）

i:出发机场编号$(i = 1, 2, 3)$ j:到达机场编号$(j = 1, 2, 3)$ ts 出发时间$(ts = 9, 10, .., 20)$ te 到达时间$(te = 9，10, \ldots, 20)$

节点$node[i, t]$:机场i，时刻t代表的节点。

$$TotalCost = \sum_{j=1}^{PR}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{PE}(P_{ij} * X_{ijt}) + \sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(h_j * I_{jt}) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(O_{ij} * Y_{ijt}) + \sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(LW_j * LO'_{jt}) \sum_{j=1}^{PR}\sum_{t=1}^{PE}(DO_k * XK_{kjt}) + \sum_{t=1}^{PE}(PO * OX_t)$$

$node[1, 8]$:虚拟的起始节点S $node[1, 21]$:虚拟的终止节点E

$flow[i, j, ts, te]$ $node[i, ts]$到$node[j, te]$的最大流量

> 即从机场i飞往机场j，起飞时间为ts,到达时间为te的航线的最大流量。

$revenue[i, j, ts, te]$ $node[i, ts]$到$node[j, te]$的利润

> 即从机场i飞往机场j，起飞时间为ts,到达时间为te的航线的利润

L代表了所有可行航线$< i, j, ts, te >$的集合。

L^+代表了包括L中的所有航线，以及起始节点S与结束节点E的虚拟航线的集合。

Decision Variables

$f[i, j, ts, te]$:$node[i, ts]$到$node[j, te]$的流量

Objective function(s)

机队数量最少(最小化总流量)

$$Obj1 = \sum_{j=1}^{3} f[1,j,8,9]$$

利润最高

$$Obj2 = \sum_{<i,j,ts,te>\in L} f[i,j,ts,te] * revenue[i,j,ts,te]$$

Constraints

航线$< i,j,ts,te >$的流量不超过最大流量限制:

$$f[i,j,ts,te] <= flow[i,j,ts,te]$$

除起始节点S和结束节点E外，其他的每个节点$node[i,ts]$的流入流量=流出流量：

$$\sum_{<h,i,th,ts>\in L^+} f[h,i,th,ti] = \sum_{<i,j,ti,tj>\in L^+} f[i,j,ti,tj]$$

起始节点S的流出流量=结束节点的流入流量：

$$\sum_{j=1}^{3} f[1,j,8,9] = f[1,1,20,21] + f[2,1,19,21] + f[3,1,19,21]$$