# Homework #1

姓名:

课程: 高等数值分析 – 教授: 殷东生

完成日期: *2020* 年 *9* 月 *22* 日

## 教材第一章第 2、3、5、7 题

**1.2** 已知 4 个四位有效数字的三角函数的值 $\sin 1^\circ = 0.0175, \sin 2^\circ = 0.0349, \cos 1^\circ = 0.9998, \cos 2^\circ = 0.9994$. 用以下四种方法计算 $1-\cos 2^\circ$ 的值，比较结果的误差，并说明各有多少位有效数字.

(1) 直接用已知数据计算;

(2) 用公式 $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ 及已知数据;

(3) 用公式 $1-\cos x = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ 及已知数据;

(4) 用 $1-\cos x$ 的 Taylor(泰勒) 展开式, 要求计算结果有四位有效数字 $\left(1-\cos 2^\circ = 6.0917298\cdots \times 10^{-4}\right)$

(1) $1-\cos 2^\circ = 1-0.9994 = 0.0006$，只有 1 位有效数字。 ■

(2) $1-\cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ = 0.6125\times 10^{-3}$，有 2 位有效数字。 ■

(3) $1-\cos 2^\circ = \frac{\sin^2 2}{1+\cos 2} = 0.6091877\times 10^{-3}$，有 4 位有效数字。 ■

(4) $2^\circ = \pi/90$，而 $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$，对于 $x=\pi/90$ 而言，$O(x^6)$ 已经超过了 4 位有效数字的要求。从而 $1-\cos 2^\circ \approx \frac{1}{2}(\pi/90)^2 - \frac{1}{24}(\pi/90)^4 = 0.60917297\times 10^{-3}$，有 7 位有效数字。 ■

**1.3** 若用下列两种方式计算 $e^{-5}$ 的近似值，问哪种方法能提供较好的近似值？
(1) $\mathrm{e}^{-5} \approx \sum_{n=0}^{9}(-1)^n \frac{5^n}{n!}$；(2) $\mathrm{e}^{-5} \approx \left(\sum_{n=0}^{9} \frac{5^n}{n!}\right)^{-1}$，分析其原因。

第二种要好一些。第一种计算方式为交错级数，收敛较慢，而且还会涉及两个相近的数相减的情况，大大损失有效数字；而第二种是累加的形式，收敛较快，而且也不会损失有效数字。 ■

**1.5** 下列公式要怎样变换才能使数值计算时能避免有效数字的损失？

(1) $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(N+1) - \arctan N, \quad N >> 1$

(2) $\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}} \quad , |x| >> 1$

(3) $\ln(x+1) - \ln x \quad , \quad x >> 1$

(4) $\cos^2 x - \sin^2 x \quad , \quad x \approx \frac{\pi}{4}$

(1) $\arctan(N+1) - \arctan N = \arctan \dfrac{1}{1+(N+1)N}$ ■

(2) $\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}} + \sqrt{x-\frac{1}{x}}}$ ■

(3) $\ln(x+1) - \ln x = \ln(1+\frac{1}{x})$ ■

(4) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ■

**1.7** 已知 $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x, n = 0, 1, \cdots$ 满足 $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$

(1) 取 $I_0$ 近似值为 $\tilde{I}_0 = 1 - 0.3679$, 用递推公式 $\tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1}$ 计算 $I_n$ 的近似值 $\tilde{I}_n, n = 1, 2, \cdots, 9$(用 4 位有效数字计算)，结果准确吗？

(2) 设 $\varepsilon_n = I_n - \tilde{I}_n$, 推导 $|\varepsilon_n|$ 与 $|\varepsilon_0|$ 的关系.

(1) $\tilde{I}_1 = 1 - \tilde{I}_0 = 0.3679, \tilde{I}_2 = 1 - 2\tilde{I}_1 = 0.2642, \tilde{I}_3 = 1 - 3\tilde{I}_2 = 0.2074$
$\tilde{I}_4 = 1 - 4\tilde{I}_3 = 0.1704, \tilde{I}_5 = 1 - 5\tilde{I}_4 = 0.1480, \tilde{I}_6 = 1 - 6\tilde{I}_5 = 0.1120$
$\tilde{I}_7 = 1 - 7\tilde{I}_6 = 0.2160, \tilde{I}_8 = 1 - 8\tilde{I}_7 = -0.7280, \tilde{I}_9 = 1 - 9\tilde{I}_8 = 7.552$
很明显不准确。 ■

(2) 将 $I_n = 1 - nI_{n-1}$ 与 $\tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1}$ 相减可得：

$$\varepsilon_n = -n\varepsilon_{n-1}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_n = (-1)^n n! \varepsilon_0$$

从而 $|\varepsilon_n| = n!|\varepsilon_0|$ ■