Homework #2

姓名:

课程: 高等数值分析 – 教授: 殷东生

完成日期: *2020 年 10 月 6 日*

教材第一章第 8、11、12、15、17、19 题

1.8 已知 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$, 下面的 (f,g) 是否构成 $C[a,b]$ 上的内积?

(1) $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \forall f,g \in C[a,b]$

(2) $(f,g)=\sum_{i=0}^m f(x_i)\,g(x_i), \forall f,g \in C[a,b]$

(1) 构成 $C[a,b]$ 上的内积：

线性： $(\alpha f+\beta h, g)=\int_a^b(\alpha f(x)+\beta h(x))g(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b h(x)g(x)\mathrm{d}x=\alpha(f,g)+\beta(h,g)$

对称性： $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=(g,f)$

正定性： $(f,f)=\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\geq 0$，当且仅当 $f(x)=0, x\in[a,b]$ 时为 0

■

(2) 不构成内积，不满足正定性。只需要取 m 次插值多项式 $f(x)$ 满足 $f(x_i)=0, i=0:m$，则有 $(f,f)=0$，但 $f\neq 0$ ■

1.11 求下列矩阵 A 的范数 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_F$ 和 $\rho(A)$. (1)$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) $\|A\|_1 = 6, \|A\|_F = \sqrt{30}$，而 $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$ ，从而 $\rho(A) = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.

$A^TA = \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -14 & 20 \end{bmatrix}$,从而 $\det(\lambda I - A^TA) = \lambda^2 - 30\lambda + 4$,从而 $\|A\|_2 = \sqrt{15+\sqrt{221}}$

∎

(2) $\|A\|_1 = 4, \|A\|_F = 4$，而 $\det(\lambda I - A) = (\lambda^2 - 4\lambda + 2)(\lambda - 2)$ ，从而 $\rho(A) = 2 + \sqrt{2}$.

由于 A 是对称实矩阵，我们有 $\|A\|_2 = \rho(A) = 2 + \sqrt{2}$ ∎

1.12 证明:

(1) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

(2) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq |x_j|$，由 j 的任意性可知 $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$，

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant n \max_j |x_j| = n\|x\|_\infty$ ∎

(2) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq \max_j |x_j|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leqslant \sqrt{n \max_j x_j^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$ ∎

(3) 易知 $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}, \|A\|_F = \sqrt{tr(A^TA)}$，根据对称阵的正交分解，我们可以设 $A^TA = Q^TDQ$，其中 Q 为正交阵，$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$。

从而 $\rho(A^TA) = \lambda_1, tr(A^TA) = tr(Q^TDQ) = tr(QQ^TD) = tr(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$，显然有

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq n\lambda_1 \tag{1}$$

于是 $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2$ ∎

1.15 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 设 A 对称正定 , 记

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

证明 $\|x\|_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数.

正定性： 由于 A 对阵正定，故 $\|x\|_A = \sqrt{x^TAx} \geq 0$ ，且 $\|x\|_A = 0$ 当且仅当 $x = 0$

齐次性： $\|ax\|_A = \sqrt{a^2x^TAx} = |a|\|x\|_A$

三角不等式： 由于 A 对称正定，可以设 A 可分解为 $A = B^TB$，其中 B 为满秩矩阵。于是 $x^TAx = x^TB^TBx, y^TAx = y^TB^TBx$，可知

$$y^TAx = y^TB^TBx = (By, Bx) \le \sqrt{(Bx, Bx)(By, By)} = \sqrt{x^TAx}\sqrt{y^TAy} \tag{2}$$

其中的不等式用到了 Cauchy-Schwarz 不等式。

从而 $\|x+y\|_A^2 = (x+y)^TA(x+y) \le x^TAx + y^TAy + 2\sqrt{x^TAx}\sqrt{y^TAy} = (\|x\|_A + \|y\|_A)^2$，其中第 1 个不等号用到了式 (2) 的结论。

■

1.17 设 $A, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, Q$ 为正交矩阵, 证明:

$$\|AQ\|_2 = \|QA\|_2 = \|A\|_2$$
$$\|AQ\|_F = \|QA\|_F = \|A\|_F$$

(1) 由于相似矩阵的谱半径相等,于是 $\|AQ\|_2 = \sqrt{\rho(Q^TA^TAQ)} = \sqrt{\rho(A^TA)} = \|A\|_2, \|QA\|_2 = \sqrt{\rho(A^TQ^TQA)} = \sqrt{\rho(A^TA)} = \|A\|_2$ ■

(2) 注意到 $\|A\|_F^2 = tr(A^TA)$ 和 $tr(AB) = tr(BA)$ 立即可得。 ■

1.19 证明:(1) 两个下三角形矩阵的乘积是下三角形矩阵 (2) 单位下三角形矩阵的逆矩阵是单位下三角形矩阵.

(1) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$，其中 A, B 均为下三角阵。那么对于 $i < j$，$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = 0$，于是 AB 也是下三角阵。

若 A, B 均为单位下三角阵，易知 $(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = 1$，故 AB 也是一个单位下三角阵。 ■

(2) 由于单位下三角阵可以写成 $n-1$ 个初等单位下三角矩阵的乘积，所以单位下三角矩阵的逆也可以写成 $n-1$ 个初等单位下三角矩阵的积，而由第一问可知，$n-1$ 个初等单位下三角矩阵的积还是一个单位下三角阵。 ■