珠海校区 2010 学年度第二学期 10 级高等数学一期中考试题及参考答案

完成以下各题,每题 10 分.考试时间 90 分钟.

1. 求满足条件 $du=(e^y+\sin x)dx+(xe^y-\cos y)dy$ 的函数 $u(x,y)$.

解 $P(x,y)=e^y+\sin x, Q(x,y)=xe^y-\cos y, \dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x},$

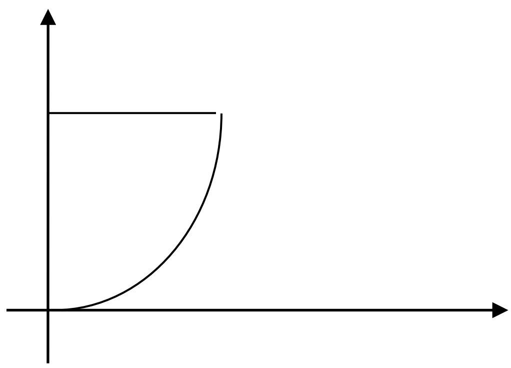
故积分与路径无关,于是

$$u(x,y)=\int_0^x (e^0+\sin x)dx+\int_0^y (xe^y-\cos y)dy$$
$$=xe^y-\sin y-\cos x+C.$$

2.计算累次积分: $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy.$

解: $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx$

$$=\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{d(1+y^3)}{\sqrt{1+y^3}}=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\bigg|_0^1=\frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$



3. 若 $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\le 1\}$, 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy.$

解: 积分区域关于两个坐标轴都对称,且被积函数关于 x,y 均为偶函数,故如记

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x,y)\in D, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$
$$I=\iint\limits_D (|x|+|y|)dxdy=4\iint\limits_{D_1} (|x|+|y|)dxdy$$
$$=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy=4\int_0^1[x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2]dx=\frac{4}{3}.$$

4. 求第一型曲线积分 $I=\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, 其中$C$是圆周$x^2+y^2=2x.$

解: 用极坐标:圆周的方程为$r=2\cos\theta$,故参数方程为$x=2\cos^2\theta, y=2\cos\theta\sin\theta.$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(2\sin 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2}\,d\theta=2d\theta$$

$$I=\oint_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\theta}\cdot 2d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=8.$$

5. 若C是上半圆周$x^2+y^2=9, y>0$,方向由点$(3,0)$到点$(-3,0)$,求第二型曲线积分

$$I=\int_C y^2dx+x^2dy.$$

解: 圆周的极坐标方程为: $x=3\cos\theta, y=3\sin\theta, 0\le\theta\le\pi$.故

$$I=\int_0^{\pi}[(3\sin\theta)^2(-3\sin\theta)+(3\cos\theta)^2(3\cos\theta)]d\theta$$

$$=27\int_0^{\pi}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)d\theta$$

$$=27\left[\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta\right]=27\times(-\frac{4}{3})=-36.$$

6. 已知函数$f(x)$连续,求证; $\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2$.

证明; 显然 $\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy+\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy$

$$=\left[\int_0^a f(x)dx\right]\left[\int_0^a f(y)dy\right]=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2.$$

而变换积分次序后再换积分变量字母, 有

$$\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\int_0^a f(y)dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy$$

于是 $\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2$. 证毕.

证法 2: 记$F(x)=\int_0^x f(y)dy$,则$\int_0^a f(x)dx=F(a)$.于是

$$\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\int_0^a f(x)[F(a)-F(x)]dx=F(a)\int_0^a f(x)dx-\int_0^a F(x)f(x)dx$$

$$=F^2(a)-\int_0^a F(x)dF(x)=F^2(a)-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^a=\frac{1}{2}F^2(a)=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2.$$

7. 求由曲面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解: 立体在 xOy 坐标面的投影为区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$. 故

$$V=\iiint_{\Omega} dV=\iint_{D} dxdy\int_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)} dz=2\iint_{D}(1-x^2-y^2)dxdy$$
$$=2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (1-r^2)rdr=\pi.$$

8. 求三重积分$I=\iiint_{\Omega}(y+\sin z)dV$,其中$\Omega$是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=\pi$所围的区域.

解: 由对称性, $\iiint_{\Omega} ydV=0.$ 故如记区域在 xOy 面的投影区域为 D,则

$$I=\iiint_{\Omega}\sin zdV=\iint_{D} rdrd\theta\int_r^{\pi}\sin zdz$$
$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}(1+\cos r)rdr=\pi^3-4\pi.$$

9.求曲线积分 $I=\oint_{L^+}\frac{xdy-(y-1)dx}{x^2+(y-1)^2}$,其中$L^+$方程为$x^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$,逆时针方向.

解: $P(x,y)=\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}, Q(x,y)=\frac{x}{x^2+(y-1)^2},\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(y-1)^2-x^2}{[x^2+(y-1)^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$

由于点(0,1)位于 L^+所围区域(记为 D)内,作圆周 C^+: $x^2+y^2=r^2$,则由格林公式,

$$I=\oint_{(L+C)^+}\frac{xdy-(y-1)dx}{x^2+(y-1)^2}=0,$$

$$I=\oint_{L^+}\frac{xdy-(y-1)dx}{x^2+(y-1)^2}=\oint_{C^+}\frac{xdy-(y-1)dx}{x^2+(y-1)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi.$$

10.计算曲面积分$I=\oiint_{S^+}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,其中$S^+$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1, z=2$所围立体的表面,取外侧.

解: $P=Q=0, R=\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 记S所围的区域为$\Omega$, 由高斯公式,

$$I=\oiint_{S^+}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iiint_{\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dV$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2 dz\int_0^z\frac{e^z}{r}rdr=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2 ze^z dz=2\pi(z-1)e^z\Big|_1^2=2e^2\pi.$$