No.

Date.

4. (2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

设 $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

则 $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i} = a_1 \pm a_2 - (b_1 \pm b_2) i$

$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = a_1 - b_1 i \pm (a_2 - b_2 i) = a_1 \pm a_2 - (b_1 \pm b_2) i.$

$\therefore \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(4). $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0.$ 设 $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i \ (a_2 \neq 0)$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}\right)} = \overline{\left[\frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}\right]} = \overline{\left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} i$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 - b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} i \qquad \therefore \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad z_2 \neq 0.$$

(6). 设 $z = a + b i$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z) = \frac{1}{2}(a - bi + a + bi) = a = \mathrm{Re}(z)$

$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(a + bi - (a - bi)) = \frac{1}{2i} \cdot 2bi = b = \mathrm{Im}(z)$

$\therefore$ 得证.

6. $|z^n + a| \leq |z^n| + |a| \leq 1 + |a|$，因当 $z = e^{i\frac{\arg a}{n}}$ 时，有

$|z^n + a| = \left|\left(e^{i\frac{\arg a}{n}}\right)^n + |a| e^{i\arg a}\right| = \left|(1 + |a|) e^{i\arg a}\right| = 1 + |a|$

8. (1) $i \qquad r = |i| = \sqrt{1} = 1$

~~$\theta = \arctan$~~ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$z = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$

No.

Date.

(3). $1+\sqrt{3}i$

$r=|1+\sqrt{3}i|=\sqrt{1+3}=2$

$\theta=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore z=2(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}i)$.

$z=2e^{\frac{\pi}{3}i}$

(5). ① $\frac{2i}{-1+i}$

$=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$

$=\cancel{2}-i+1=1-i$

$r=|1-i|=\sqrt{2}$

$\theta=\arctan\frac{-1}{1}=-\frac{\pi}{4}$

$z=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

$z=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

② 第二种方法:

$\frac{2i}{-1+i}=\frac{2e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

9. (1). $\begin{cases}x=x_1+a_1\\ y=y_1+b_1\end{cases}$

设 $A=a_1+b_1i$. $z_1=x_1+iy_1$

$z=z_1+A$

(2). $\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$

$z=z_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)=z_1e^{i\alpha}$

15. $(1+i)^n=(1-i)^n$

$e^{\frac{\pi}{4}ni}=e^{-\frac{\pi}{4}ni}$

$\cos\frac{\pi}{4}n+\sin\frac{\pi}{4}ni=\cos(-\frac{\pi}{4}n)+\sin(-\frac{\pi}{4}n)i$ $\therefore$ 当 $n=4k$, k 为整数时 达到条件.

18. (1). z_1与z_2连线的中点处.

(2). 设$z_1 = a_1+b_1 i$　$z_2 = a_2+b_2 i$

$z = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + [\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2] i$

位于z_1与z_2的连线上，其中$\lambda = \frac{|z-z_2|}{|z_1-z_2|}$

(3). 位于$\Delta z_1z_2z_3$的重心.

19. 由于$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，所以位于单位圆$|z|=1$的圆周上.

为了一般性，设$z_1=1$，$z_2=\cos\theta_2 + i\sin\theta_2$，$z_3=\cos\theta_3+i\sin\theta_3$.

由于$z_1+z_2+z_3=0$ 可得 $1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0$，$\sin\theta_2+\sin\theta_3=0$

解得 $\theta_3=-\theta_2$　$\theta_2=\frac{2\pi}{3}$　$\theta_3=-\frac{2\pi}{3}$　所以 $\Delta z_1z_2z_3$ 为正三角形.

22. (2). 圆$(x-1)^2+y^2=16$的外部区域(不包含圆周边界)，是无界的，多连通区域.

(4). 由圆周$x^2+y^2=4$与$x^2+y^2=9$围成的圆环域，包含圆周在内，是有界的多连通域.

(6). 表示以射线$\theta=-1$及射线$\theta=-1+\pi$所围成的角形区域，不包含$\theta=-1$和$\theta=-1+\pi$，为无界单连通域.

(8). $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}\le 6$

即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}\le 1$

表示椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$所围成的闭区域，为有界单连通域.

(10). 由$2z\bar z-(2+i)z-(2-i)\bar z\le 4$，得.

$$x^2+y^2-2x-xi-2yi+y-2x+xi+2yi+y\le 4$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2\le 9$$

表示圆$(x-2)^2+(y+1)^2=9$及其内部围成的闭区域，为有界单连通域.

24. 设$z=x+yi$　$\alpha=a+bi$.

由$z\bar z+\alpha\bar z+\bar\alpha z+c=0$ 可推.

$x^2+y^2+(a+bi)(x-yi)+(a-bi)(x+yi)+c=0$.

$x^2+y^2+ax-ayi+bxi+by+ax+ayi-bxi+by+c=0$

$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. 明显，这是一个圆周方程.

No.

Date.

26.(2). $y=x$.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

$$=\frac{x}{2x^2}-\frac{x}{2x^2}i=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}i$$

即 $u=-v$. 为 w平面上的直线.

(4). $(x-1)^2+y^2=1$. $x=1+\cos\theta$ $y=\sin\theta$. 代入得.

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1+\cos\theta}{2+2\cos\theta}=\dfrac{1}{2} \\ v=\dfrac{-\sin\theta}{2+2\cos\theta} \end{cases}$$

为w平面上 直线 $u=\frac{1}{2}$.

29. 因 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\neq 0$.

故对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时.

恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}|f(z_0)|$ 对于此 $\varepsilon>0$, 必有一个 $\delta_0>0$,

当 $|z-z_0|<\delta_0$ 时, 使 $|f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|$ 成立.

故恒有 $|f(z)|>\frac{1}{2}|f(z_0)|>0$, 故 $f(z)$ 在此邻域内不等0.

30. ~~对于 ε~~ 由于 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)-A|\leq\varepsilon$. 取 $\varepsilon=1$, 则 $\exists\delta_0>0$, 使 $0<|z-z_0|<\delta_0$ 时, $|f(z)-A|\leq 1$ 从而有

$|f(z)|\leq|A|+1$

令 $M=|A|+1$, 即得证.

31. 设 $z=a+bi$. $(a\neq 0)$.

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{a^2-b^2+2abi-(a^2-b^2-2abi)}{a^2+b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{4abi}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

由此得 $u(a,b)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $V(a,b)=0$. 让 z沿直线 $b=ka$ 趋于0, 可得

$$\lim_{\substack{a\to 0\\(b=ka)}} u(x,y)=\lim_{\substack{a\to 0\\(b=ka)}}\frac{2ka^2}{(1+k^2)a^2}=\lim_{a\to 0}\frac{2k}{(1+k^2)}$$

显然, 它随着k不同而不同. 所以 $\lim\limits_{a\to 0, b\to 0} u(x,y)$ 不存在. 所以 ~~令 $b=ka$, 让z沿直线 $b=ka$ 趋于~~ $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.