1\. (2). $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{bmatrix}$.

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^{-3t}&te^{-3t}\\0&0&e^{-3t}\end{bmatrix}$$

(4). $A=\begin{bmatrix}0&-1\\4&0\end{bmatrix}$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s&1\\-4&s\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix}s&-1\\4&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+4}&-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\\2\cdot\frac{2}{s^2+4}&\frac{s}{s^2+4}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+4}&-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}\\2\frac{2}{s^2+4}&\frac{s}{s^2+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t&-\frac{1}{2}\sin 2t\\2\sin 2t&\cos 2t\end{bmatrix}$$

2\. (1). $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}$

$A_1=1\quad A_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$.

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{A_1t}=e^t,\ e^{A_2t}=L^{-1}\left[(sI-A_2)^{-1}\right]$$

$$(sI-A_2)^{-1}=\begin{bmatrix}s-1&0\\-1&s-2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix}s-2&0\\1&s-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1}&0\\\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$e^{A_2t}=L^{-1}\left[(sI-A_2)^{-1}\right]=\begin{bmatrix}e^t&0\\e^{2t}-e^t&e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&e^{2t}-e^t&e^{2t}\end{bmatrix}$$

(2). $|\lambda I - A_2| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

对于 $\lambda_1 = 1$，有 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

对于 $\lambda_2 = 2$，有 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{bmatrix}$

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{bmatrix}$

(3). $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$.

对于 $\lambda_3 = 2$，有 $e^{2t} = a_0(t) + 2a_1(t) + 4a_2(t)$.

对于 $\lambda_{1,2} = 1$，有 $e^t = a_0(t) + a_1(t) + a_2(t)$.

$$\begin{cases} a_0(t) = e^{2t} - 2te^t \\ a_1(t) = 3te^t - 2e^{2t} + 2e^t \\ a_2(t) = e^{2t} - e^t - te^t \end{cases}$$

$e^{At} = a_0(t) I + a_1(t) A + a_2(t) A^2$

$= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{bmatrix}$

(4). $X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$.

3. $x(t) = \phi(t,0)\, x(0)$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} = \phi(t,0)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \phi(t,0)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = \phi(t,0)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t,t_0) = A\phi(t,t_0). \quad \phi(t,t_0) = I.$$

$$A = \left\{\frac{d}{dt}\phi(t,t_0)\right\}\phi^{-1}(t,t_0)\Big|_{t=t_0=0}.$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

7. $$\begin{bmatrix} -3e^{-3t} \\ 12e^{-3t} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = A\begin{bmatrix} e^{-3t} & 2e^{-2t} \\ -4e^{-3t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} & -4e^{-2t} \\ 12e^{-3t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-3t} & 2e^{-2t} \\ -4e^{-3t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{22}{7} \end{bmatrix}$$

9. 状态转移矩阵 $A=\left\{\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)\right\}\Phi^{-1}(t,t_0)$

当 $t_0=0$，$\Phi(t,t_0)$ 代入 $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

10. (1). $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 3 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$

$\lambda_1=1,\lambda_2=3.$

$\lambda_1=1$ 时，$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}P_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow P_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=3$ 时，$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}P_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow P_2=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}\\ \frac{3}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}e^{t}-1\\ e^{t}-1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t}-1\\ e^{t}-1\end{bmatrix}=2e^{t}-2$$

(2) $$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}\\ \frac{3}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$$

取 $u(t)=\delta(0)$ 有 $$x(t)=\begin{bmatrix}\frac{3e^{t}-e^{3t}}{2}x_1(0)-\frac{e^{t}-e^{3t}}{2}x_2(0)+e^{t}\\ \frac{3e^{t}-3e^{3t}}{2}x_1(0)-\frac{e^{t}-3e^{3t}}{2}x_2(0)+e^{t}\end{bmatrix}$$

取 $x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $x(t)=\begin{bmatrix}e^{t}\\ e^{t}\end{bmatrix}$，$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t}\\ e^{t}\end{bmatrix}=2e^{t}$

15. (1) $e^{At} = L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \right\}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(2) $G = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2T}) \\ 0 & e^{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix}$

$$H = \left(\int_0^T e^{At} dt\right) B = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} u(k).$