DOI:10.13682/j.issn.2095-6533.2002.03.021

2002 年 7 月　　西 安 邮 电 学 院 学 报　　July. 2002
第 7 卷　第 3 期　　JOURNAL OF XI' AN INSTITUTE OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS　　Vol. 7 No. 3

文章编号: 1007－3264(2002)－03－0077－03

重积分在证明中的应用

郑新侠

(西安石油学院 信息科学系, 陕西 西安 710065)

摘要: 通过实例分析, 给出利用重积分进行证明的常见的三种方法: 通过将累次积分化为重积分、通过变量替换及交换积分次序、利用积分上限的函数。

关 键 词: 重积分; 证明; 应用

中图分类号: O172.2　　文献标识码: B

引言

高等数学中的证明题目, 对于初学者来讲, 往往感到证明困难, 缺少证题方法, 掌握不住证题规律。但证明题是高等数学的一个很重要的组成部分, 通过解证明题的练习, 可以帮助读者弄清楚概念、命题、定义、条件、结论之间的本质联系, 可以加深对微积分概念的基本理解; 同时有助于培养学生的逻辑思维和抽象思维能力, 从而提高分析问题和解决问题的能力。重积分是微积分的重要组成部分, 在多元函数积分学中占有重要的地位, 它包括二重积分与三重积分。利用重积分证明题, 可以进一步加深对重积分概念的理解, 可以帮助读者弄清楚重积分与累次积分的联系与区别。本文通过实例分析, 给出利用重积分进行证明的常见的三种方法。

1　通过将累次积分化为重积分

例 1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且恒正, 求证:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq (b-a)^2$$

证明: 记不等式左端为 A, 由于定积分的值由积分区间和被积函数确定, 而与积分变量用什么字母表示无关[1]。所以, 左边的两个定积分之一, 均可将积分变量用字母 y 表示。这样便可以将两个定积分之积化成二重积分。因此

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将 x, y 互换, 得

$$A=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将两式相加得

$$\begin{aligned}2A&=\int_a^b\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_a^b\int_a^b \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq\\&\int_a^b\int_a^b \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_a^b\int_a^b 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(b-a)^2\end{aligned}$$

其中用到了熟知的不等式 $u^2+v^2\geq 2uv$。因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq(b-a)^2\qquad \text{证毕}$$

例 2　设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且都是单调减少函数, 试证

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

证明　设 $A=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

收稿日期: 2002－01－18;　修订日期: 2002－04－28

作者简介: 郑新侠(1963－), 女, 西安石油学院信息科学系讲师, 主要从事高等数学教学工作。

则 $A=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=$

$\int_0^1\int_0^1[f(x)g(x)-f(x)g(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

将 x, y 互换, 得

$$A=\int_0^1\int_0^1[f(y)g(y)-f(y)g(x)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此 $2A=\int_0^1\int_0^1[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由于 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调减少函数, 因此, 不论 $x>y$ 或 $x<y$

$[f(x)-f(y)]$ 与 $[g(x)-g(y)]$ 都是同号

故有 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geq 0$

所以 $2A\geq 0$ 　　即 $A\geq 0$

所以 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ 　证毕

注: 在命题中, 若 $f(x)$, $g(x)$ 都是单调增加函数, 则得出同样的结论。若一个单调增加, 另一个单调下降, 则不等号反向。

2 通过变量替换及交换积分次序

例 3 　设 $f(t)$ 是连续函数, 求证:

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

其中 D 为正方形闭区域:

$$-\frac{A}{2}\leq x\leq\frac{A}{2},$$

$$-\frac{A}{2}\leq y\leq\frac{A}{2},\ A>0$$

证明: $\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y)\mathrm{d}y$

设 $x-y=t$ 则当 $y=-\frac{A}{2}$ 时, $t=x+\frac{A}{2}$

$y=\frac{A}{2}$ 时, $t=x-\frac{A}{2}$

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$

在新直角坐标系 xot 中改变积分次序(如图 1 所示) 得:

$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\int_{-A}^{0} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\frac{A}{2}}^{t+\frac{A}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^A f(t)\mathrm{d}t\int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x=$

$\int_{-A}^{0} f(t)(A+t)\mathrm{d}t+\int_0^A f(t)(A-t)\mathrm{d}t=$

$\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$ 　证毕

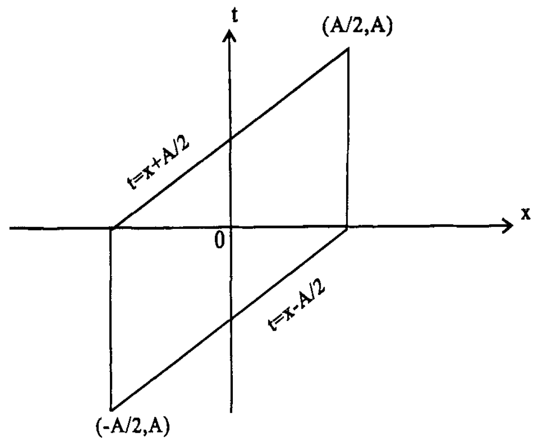

图 1 　xot 坐标系中积分区域图

例 4 　设 $f(t)$ 连续, 证明

$$\int_0^z\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^z(x-t)^2 f(t)\mathrm{d}t$$

证明: 先考虑 $\int_0^v(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}u$, 交换积分次序(如图 2 所示) 得:

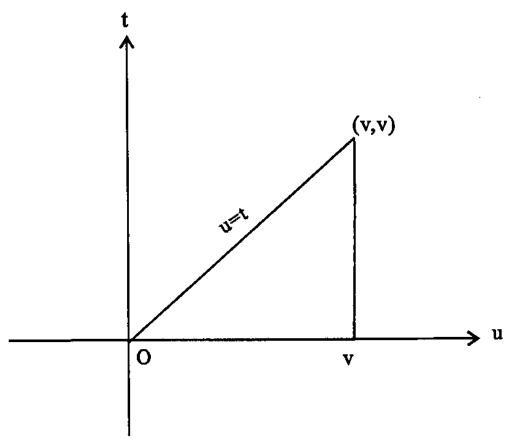

图 2 　uot 坐标系中积分区域图

$\int_0^v(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}u=\int_0^v f(t)\mathrm{d}t\int_t^v\mathrm{d}u=$

$\int_0^v(v-t)f(t)\mathrm{d}t$

所以 $\int_0^z\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v=\int_0^z\mathrm{d}v\int_0^v(v-t)f(t)\mathrm{d}t$

上式右端再交换积分次序(如图 3 所示) 得:

$\int_0^z\mathrm{d}v\int_0^v(v-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^z\mathrm{d}t\int_t^z(v-t)f(t)\mathrm{d}v=$

$\frac{1}{2}\int_0^z(x-t)^2 f(t)\mathrm{d}t$ 　　证毕

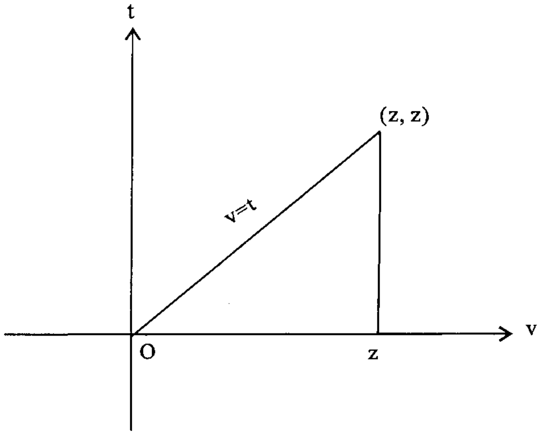

图 3 *vot* 坐标系中积分区域图

3 利用积分上限的函数

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 试证

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^3$$

证明: 设 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

且 $F(1) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \qquad F(0) = 0$

$$\therefore \int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\int_x^y f(z)\mathrm{d}z =$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 [F(y) - F(x)]\,\mathrm{d}F(y) =$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}F^2(y) - F(x)F(y)\right]_x^1 =$$

$$\int_0^1\left[\frac{1}{2}F^2(1) - F(x)F(1) + \frac{1}{2}F^2(x)\right]\mathrm{d}F(x) =$$

$$\left[\frac{1}{2}F^2(1)F(x) - \frac{1}{2}F(1)F^2(x) + \frac{1}{6}F^3(x)\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{6}F^3(1) = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^3$$

证毕

4 结束语

由以上实例分析可以看出, 尽管利用重积分证明方法综合性较强, 但在不少证明题目中仍显现出化难为易的独到作用。

参考文献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 第 4 版, 上册 北京: 高等教育出版社, 1997.

The application of double integral in mathematics demonstration

ZHENG Xin—xia

(Department of Information Science, Xi' an Petroleum University, Xi' an 710065, China)

Abstract: Based on the analysis of examples, three methods to use double integral as the mathematics demonstration are given in this paper, which include converting accumulated integral to the double integral, variable replacement and exchanging integrate sequence, and applying integral upper—limit function.

Key words: double integral; demonstration; application