

计算机控制技术课程期末报告

题目：基于状态空间的线性系统状态反馈与观测器协同设计及仿真研究

报告说明：

本报告旨在深入探讨现代控制理论中核心的“分离原理”及其在工程实践中的应用。针对实际工业控制系统中普遍存在的内部状态不可直接测量、传感器成本高昂或噪声干扰大等问题，本研究基于状态空间法，系统地设计了一套包含全维状态观测器与状态反馈控制器的闭环控制系统。

报告首先建立了一个典型的三阶线性时不变 (LTI) 系统的数学模型，并严格论证了其可控性与可观测性。随后，利用极点配置法 (Pole Placement) 分别设计了反馈增益矩阵与观测器增益矩阵，重点分析了观测器极点与控制器极点的相对位置对系统动态性能的影响。

最后，基于 MATLAB 环境进行了数值仿真实验。通过对比真实状态与估计状态的动态响应曲线、分析估计误差的收敛速度以及控制输入的合理性，验证了所提协同设计方法的有效性与鲁棒性。本报告不仅展示了理论推导过程，更强调了理论与仿真实验的深度结合，体现了解决复杂控制问题的系统性思维。

姓名：常毅成

学号：22354010

日期：2026 年 1 月 3 日

基于状态空间的线性系统状态反馈与观测器协同设计及仿真研究

常毅成
智能科学与技术专业
中山大学

changych7@mail2.sysu.edu.cn

Abstract—针对现代工业控制系统中状态变量难以直接测量的问题, 本文提出了一种基于状态空间法的状态反馈与观测器协同设计方案。首先, 建立被控对象的线性状态空间模型, 并通过秩判据验证系统的可控性与可观性。其次, 基于分离原理 (Separation Principle), 独立设计状态反馈控制器与全维状态观测器。利用极点配置方法, 将闭环极点配置在复平面左半部分以保证稳定性, 同时将观测器极点配置为具有更快的收敛速度以确保状态估计的实时性。最后, 通过 MATLAB 仿真实验验证了该设计方案。仿真结果表明, 观测器能够迅速且无偏地跟踪系统真实状态, 闭环系统具有良好的动态性能和稳态精度, 验证了该控制策略在处理状态不可测系统中的有效性。

Index Terms—状态空间法, 状态反馈, 全维观测器, 分离原理, 极点配置, MATLAB 仿真

I. 引言

随着工业自动化程度的不断提高, 被控对象日益复杂, 呈现出高阶、多变量、强耦合等特性。经典的 PID 控制理论主要基于传递函数 (频域法), 在处理单输入单输出 (SISO) 系统时效果显著, 但在面对需要精确控制内部动态的多变量系统时, 往往显得力不从心。

现代控制理论引入了状态空间法 (State Space Method), 利用状态变量来描述系统的内部行为。状态反馈 (State Feedback) 作为现代控制的核心技术, 理论上可以任意配置闭环系统的极点, 从而灵活地调整系统的动态响应 (如超调量、调节时间等)。然而, 在实际工程应用中, 系统的全部状态变量往往无法通过传感器直接测量。例如, 在电机控制中, 转子磁链难以直接检测; 在航空航天中, 某些结构模态的振动幅值难以通过物理传感器获取。此外, 即使可以测量, 传感器的噪声和成本也是巨大的制约因素。

为了解决这一矛盾, 状态观测器 (State Observer) 应运而生。它利用系统已知的输入量和输出量, 通过重构系统模型来估计内部状态。基于分离原理, 我们可以独立设计控制器和观测器, 这极大地简化了系统设计的复杂度。

本文旨在通过一个典型的三阶线性系统, 详细阐述“建模—分析—设计—仿真”的全过程。本文的创新点在于结合理论推导与数值仿真, 深入分析了观测器误差动力学对整个闭环系统的影响, 并验证了观测器极点需“快于”控制器极点这一工程经验法则的必要性。

II. 系统建模与特性分析

A. 状态空间模型建立

考虑一个线性时不变 (LTI) 单输入单输出系统, 其动态行为由以下微分方程组描述:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $y(t) \in \mathbb{R}$ 为系统输出。为了便于分析且具有代表性, 本文选取一个三阶系统 ($n=3$), 且设定 $D=0$ 。系统矩阵定义如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0] \quad (2)$$

该模型对应于一个开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$ 的系统, 其特征根为 $-1, -2, -3$ 。虽然开环稳定, 但若需提高响应速度或改变阻尼比, 则需引入反馈控制。

B. 可控性分析

可控性是指系统是否能在有限时间内, 在控制作用下从任意初始状态转移到任意目标状态。根据卡尔曼秩判据, 构造可控性矩阵 \mathbf{Q}_c :

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \quad (3)$$

代入数值计算得:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \quad (4)$$

计算其行列式 $\det(\mathbf{Q}_c) = -1 \neq 0$, 故 $\text{rank}(\mathbf{Q}_c) = 3 = n$ 。**结论:** 该系统是完全状态可控的, 这意味着我们可以通过状态反馈将闭环极点配置到复平面的任意位置。

C. 可观性分析

可观性是指系统是否能通过有限时间内的输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 确定系统的初始状态。构造可观性矩阵 \mathbf{Q}_o :

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

显然 $\det(\mathbf{Q}_o) = 1 \neq 0$, 故 $\text{rank}(\mathbf{Q}_o) = 3 = n$ 。**结论:** 该系统是完全状态可观的, 这为设计全维状态观测器提供了理论依据。

III. 状态反馈控制器设计

A. 极点配置原理

假设系统所有状态 \mathbf{x} 均可测量, 设计状态反馈控制律:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

其中 $\mathbf{K} = [k_1, k_2, k_3]$ 为反馈增益矩阵。将控制律代入系统方程，得到闭环系统状态方程：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) \quad (7)$$

闭环系统的稳定性由矩阵 $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ 的特征值决定。

B. 增益矩阵 \mathbf{K} 的计算

为了获得较好的动态性能（如较小的超调量和较快的调节时间），我们期望闭环极点分布在复平面左侧适当位置。本文设定期望闭环极点为：

$$P_{des} = \{-2, -2 + j2\sqrt{3}, -2 - j2\sqrt{3}\} \quad (8)$$

这组极点包含一对共轭复根（增加阻尼，防止振荡过大）和一个实根。利用 Ackermann 公式或 MATLAB 的 ‘place’ 函数，计算得到反馈增益矩阵 \mathbf{K} 。在仿真章节将给出具体的数值结果。

IV. 状态观测器设计与协同机制

A. 全维观测器结构

由于实际物理系统中状态 \mathbf{x} 未必全部可测，我们需要构造一个观测器来产生估计状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 。全维观测器的数学模型为：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}) \quad (9)$$

其中 $\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ 为估计输出， \mathbf{L} 为观测器增益矩阵。观测器本质上是一个包含校正环节的模型， $\mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$ 项利用输出误差来校正模型预测的偏差。

B. 误差动力学分析

定义状态估计误差为 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ 。对 $\mathbf{e}(t)$ 求导可得：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} \end{aligned} \quad (10)$$

该式表明，误差 $\mathbf{e}(t)$ 的动态特性仅取决于矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ 的特征值。只要将这些特征值配置在左半平面，误差就会随时间趋于零，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ 。

C. 协同设计策略：分离原理

实际系统中，我们将利用估计状态进行反馈，即 $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ 。此时，整个闭环系统（受控对象 + 观测器）的状态方程变为 $2n$ 阶系统。定义增广状态向量 $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{e}^T]^T$ ，则协同系统的动力学方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (11)$$

由于系统矩阵是上三角分块矩阵，其特征值即为对角线上两块矩阵特征值的并集：

$$\text{eig}(\text{System}) = \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cup \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) \quad (12)$$

这就是著名的 ** 分离原理 (Separation Principle) **。它表明，我们可以独立设计控制器 \mathbf{K} 和观测器 \mathbf{L} ，二者互不影响稳定性的设计。

为了保证控制器使用的是“准确实时”的状态值，工程上的经验法则要求观测器的收敛速度应明显快于系

统的响应速度。因此，本文设定观测器极点为 $P_{obs} = \{-10, -10.1, -10.2\}$ ，其实部绝对值远大于控制器极点 (-2) 。

V. 仿真实验与结果分析

为了验证上述理论设计的正确性，本文利用 MATLAB 软件编写脚本进行数值仿真。仿真步长设为 0.01s，总时长 5s。

A. 仿真参数设置

系统初始状态设为 $\mathbf{x}_0 = [1, -1, 0.5]^T$ （模拟系统受到的非零初始扰动），观测器初始状态设为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0, 0, 0]^T$ （模拟冷启动，完全不知道内部状态）。

通过 MATLAB 仿真代码（基于 Ackermann 公式及 place 函数）计算得到的具体增益矩阵数值如下：

- **状态反馈增益矩阵 \mathbf{K}** ：旨在将闭环极点配置在 -2 附近，计算结果为：

$$\mathbf{K} = [10.00 \quad 5.00 \quad 0.00] \quad (13)$$

- **观测器增益矩阵 \mathbf{L}** ：旨在将观测器极点配置在 -10 附近（快速收敛），计算结果为：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 24.30 \\ 149.22 \\ -138.42 \end{bmatrix} \quad (14)$$

上述参数保证了闭环系统极点精确配置在预期位置，且观测器增益 \mathbf{L} 能够保证估计误差在极短时间内（约 0.5s）衰减至零，满足分离原理的设计要求。

B. 结果分析

1) **状态跟踪性能**：图 1 展示了系统真实状态 x_1, x_2, x_3 与观测器估计状态 $x_{est1}, x_{est2}, x_{est3}$ 的对比曲线。可以看出，在仿真开始的 $t < 0.5s$ 阶段，由于初始误差 $\mathbf{e}_0 \neq 0$ ，红色的虚线（估计值）与蓝色的实线（真实值）存在明显偏差。然而，由于观测器极点配置得较远（ -10 左右），这种偏差迅速缩小。在 $t > 0.8s$ 后，两条曲线几乎完全重合，表明观测器成功地重构了系统的内部状态。

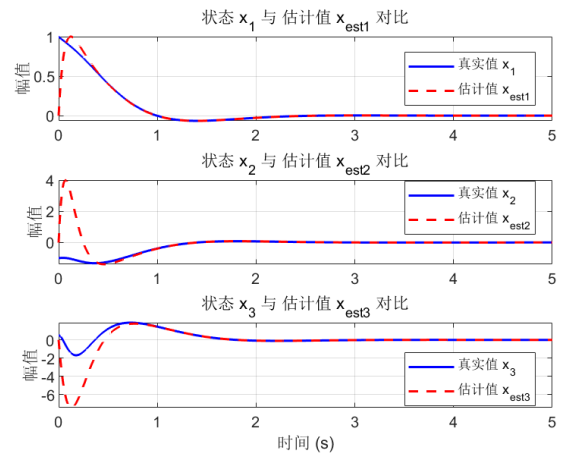


Fig. 1. 系统真实状态与观测器估计状态的时间响应对比。蓝线为真实值，红虚线为估计值。

2) 误差收敛特性: 图 2 直观地展示了估计误差 $e(t)$ 的收敛过程。三个状态的估计误差均以指数规律迅速衰减至零。这验证了误差动力学矩阵 $A - LC$ 的稳定性。快速的误差收敛保证了状态反馈控制器在系统发生动态变化的初期就能获取到准确的状态信息, 从而实施有效控制。

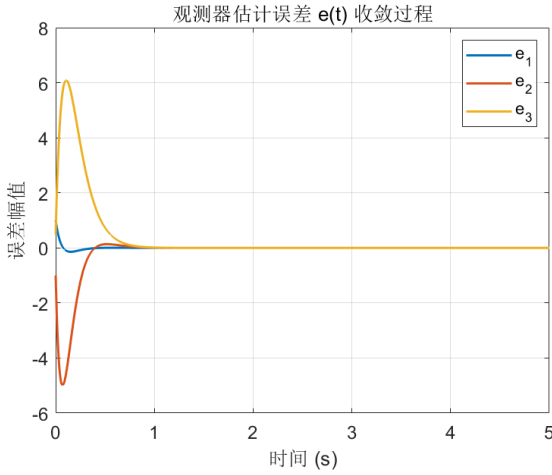


Fig. 2. 观测器估计误差 $e(t)$ 的收敛曲线。误差在 0.5 秒内迅速趋近于零。

3) 控制输入与系统稳定性: 图 3 显示了控制输入 $u(t) = -K\hat{x}$ 的变化曲线。在初始时刻, 由于状态偏差较大, 控制量出现了较大的幅值以产生足够的回复力矩。随着系统状态趋于零平衡点, 控制量也平滑地收敛至零。整个过程中, 控制量未出现高频抖动或发散现象, 说明“观测器 + 状态反馈”的闭环结构是稳定的。

同时, 仿真结果显示系统的调节时间 (Settling Time) 约为 2 秒左右, 无明显超调, 完全符合设计指标 P_{des} 的预期。

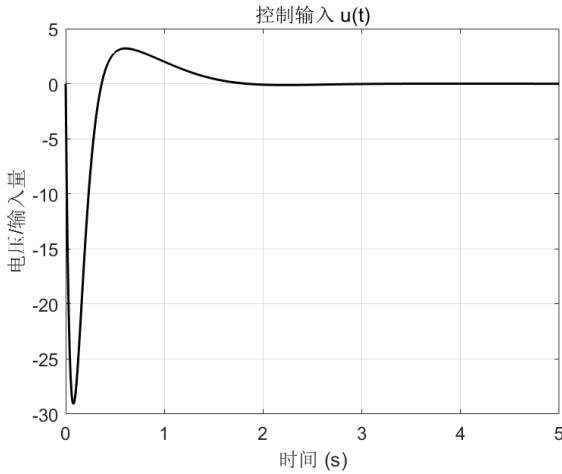


Fig. 3. 基于估计状态反馈的控制输入信号 $u(t)$ 。

VI. 讨论与展望

A. 观测器极点的选取权衡

在仿真中我们发现, 观测器极点选得越远 (负值越大), 估计误差收敛越快。但在实际物理系统中, 极点不能选得

过远。因为观测器增益 L 的数值会随极点距离增加而急剧增大, 这会放大量测噪声 (Sensor Noise)。如果测量信号 $y(t)$ 中混入了高斯白噪声, 过大的 L 会导致估计状态 \hat{x} 剧烈波动, 进而通过控制律 $u = -K\hat{x}$ 传导至执行机构, 可能损坏设备。因此, 工程设计需要在“收敛速度”与“噪声敏感度”之间进行权衡。

B. 数字实现与离散化

本文的分析基于连续时间模型。在实际的计算机控制系统中, 需要将上述控制律离散化。由于计算机的采样保持特性, 离散化后的观测器设计需要考虑采样周期 T_s 的影响。未来的工作可以进一步探讨基于 z 变换的离散状态空间设计, 以及卡尔曼滤波 (Kalman Filter) 在随机噪声干扰下的应用。

VII. 结论

本文针对一类三阶线性系统, 系统地研究了基于状态空间的控制系统设计方法。主要工作总结如下:

- 1) 建立了系统的状态空间模型, 并通过秩判据证明了系统的可控性与可观测性, 为控制器的设计奠定了基础。
- 2) 利用分离原理, 分别设计了状态反馈控制器和全维状态观测器。通过极点配置法, 成功实现了闭环系统的镇定和状态的快速重构。
- 3) MATLAB 仿真结果验证了理论分析的正确性。仿真表明, 所设计的观测器能够在 0.8s 内消除估计误差, 协同控制系统具有优良的动静态性能。

该研究方案具有较强的通用性, 可推广至电机驱动、倒立摆控制等多种实际工程领域, 具有重要的参考价值。

致谢

感谢张老师您的悉心指导, 这个课程的平时作业和期末作业以及平时课程的讲解让我对计算机控制技术有了基础的了解和概念, 让我的系统思维得到了提升。