一． 求下列极限 （每小题 **7** 分，共 **28** 分）

1． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+2n}\right)^{n}$ 2。

3． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\ln(1+x)+\sin^2 x}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)\sin\dfrac{1}{x}$

二．求下列函数的导函数（每小题 7 分，共 28 分）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)\sin\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}\cdot 0=0$

1． $y=(\tan x)^{\sin x}$ **.** $\qquad$ 2。$F(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{1+t}\,dt$ 求$F'(x)$.

3． $y=\ln\left|\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

4。$\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=e^t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

三．求下列积分（每小题 6 分，共 24 分）

1． $\int\dfrac{dt}{\sin t}$. $\qquad$ 2。$\int\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ $\qquad$ 3． $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ $\qquad$ 4。

$\int\dfrac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$

四．证明不等式：$\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\le\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\cos x}}dx\le\dfrac{1}{3}$ $\qquad$ （**7** 分）

五．设函数$g(x)=(\sin 2x)f(x)$，其中函数 $f(x)$在$x=0$处连续，

问：$g(x)$在$x=0$处是否可导，若可导，求出$g'(0)$ $\qquad$ （**7** 分）

六．设 $f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f(0)=0$，对函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$

（1） 确定a的值，使$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，

（2） 对于（1）确定的a值，证明$g'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。 $\qquad$ （**6** 分）

ONE

1 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+1}=\dfrac{1}{2}$

2 解：$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n}{1+2n}=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\exists N>0$

使$0<\dfrac{1+n}{1+2n}<\dfrac{2}{3}.\ \forall n>N$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+2n}\right)^n=0$

3 解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot\dfrac{1}{5x}\tan 5x}{\dfrac{1}{x}\ln(1+x)+\dfrac{\sin x}{x}\sin x}=\dfrac{5}{1+0}=5.$

4 解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}$

TWO

1 解：$\ln y=\sin x\ln(\tan x)$

$\therefore\dfrac{y'}{y}=\cos x\ln(\tan x)+\sin x\dfrac{1}{\tan x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\therefore y'=(\tan x)^{\sin x}\left(\cos x\ln(\tan x)+\dfrac{1}{\cos x}\right).$

2 解：$F'(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'-\sqrt{1+x^2}\left(x^2\right)'.$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}-2x\sqrt{1+x^2}.$

3 解：$y'=\dfrac{1}{\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\left(\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)'=\dfrac{1}{\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\dfrac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)'$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}\sin\left(2\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cos\left(2\sqrt{x}\right)}.$

4 解： $\frac{dy}{dt}=e^{t}$， $\frac{dx}{dt}=\ln t+1$， $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{t}}{\ln t+1}$

$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{t}(\ln t+1)-\frac{1}{t}e^{t}}{(\ln t+1)^{3}}$。

THERE

1 解：原式 $=\int\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\int\frac{dt}{2\tan\frac{t}{2}\cos^{2}\frac{t}{2}}$. \

2 解：原式 $=-2\int\frac{-x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$

$=\int\frac{d\tan\frac{t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}=\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C.$

$=-2\sqrt{1-x^{2}}-\arcsin x+C.$

解：原式 $=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\int x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}}{x+\sqrt{1+x^{2}}}dx$

$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}dx=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\sqrt{1+x^{2}}+C$

解：原式 $=\int\frac{(1+x^{2})-x^{2}}{x^{2}(1+x^{2})^{2}}dx=\int\frac{1}{x^{2}(1+x^{2})}dx-\int\frac{1}{(1+x^{2})^{2}}dx$

$=\int\frac{1}{x^{2}}dx-\int\frac{1}{1+x^{2}}dx-\int\frac{1}{(1+x^{2})^{2}}dx$

$\int\frac{1}{(1+x^{2})^{2}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\cos^{4}t}{\cos^{2}t}dt=\int\cos^{2}t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt$

$=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\frac{2\tan t}{1+\tan^{2}t}+C=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^{2}}+C.$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^{2})}+C.$

FOUR

证： $\because \frac{x^2}{\sqrt{2}} \le \frac{x^2}{\sqrt{1+x\cos x}} \le \frac{x^2}{1} \quad x \in [0,1]$

$$\therefore \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^2 dx \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x\cos x}} dx \le \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

FIVE

解：$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\therefore g(x) = (\sin 2x) f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义且 $g(0)=0$

又 $\because \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x) f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} f(x) = 2f(0)$ 存在

$\therefore g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $g'(0) = 2f(0)$。

SIX

解：（1）$\because f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\therefore$ 当 $x\ne 0$ 时 $g(x)$ 连续，

由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$，$\therefore$ 当 $a = f'(0)$ 时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

（2）当 $x\ne 0$ 时 $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ 为连续函数，（$\because f(x)$ 及 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续）

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0).$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2}f''(0)$$

$$= g'(0)$$

$\therefore g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。