

用二重积分证明定积分不等式

冯伟杰, 魏光美

(北京航空航天大学 数学与系统科学学院 / 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京 100191)

摘要 借助实例展示将一类定积分问题转化为二重积分求解的方法, 并给出证明定积分不等式的一个技巧.

关键词 定积分; 二重积分; 对称性

中图分类号 O172.2

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2012)02-0027-03

在高等数学课程中, 我们先后学习了定积分和二重积分. 一般的高等数学教材都着重讲解如何将二重积分化为二次积分来计算, 很少涉及定积分向二重积分转化的思想和方法. 本文举例说明可以把某些结构特殊的定积分看作是二次积分, 转化为二重积分后再利用其性质来求解. 这种转化技巧在高等数学中虽不常见, 但却很重要. 下面我们通过典型例题介绍它在定积分不等式证明中的使用.

例 1 (2001 年第十三届北京市大学生数学竞赛试题)^[1-3] 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 证明

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(y)} dy \geq 1.$$

证明 将待证不等式左端化为二重积分, 即

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(y)} dy = \iint_D e^{f(x)-f(y)} dxdy,$$

其中积分区域为

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

方法 1 由二重积分的轮换对称性可知

$$\begin{aligned} \iint_D e^{f(x)-f(y)} dxdy &= \iint_D e^{f(y)-f(x)} dxdy = \\ &\frac{1}{2} \iint_D (e^{f(x)-f(y)} + e^{f(y)-f(x)}) dxdy \geq \\ &\frac{1}{2} \iint_D 2 dxdy = 1. \end{aligned}$$

方法 2 对于任意的 x , 成立如下不等式

$$e^x \geq 1+x,$$

所以有

$$\iint_D e^{f(x)-f(y)} dxdy \geq$$

收稿日期: 2011-08-04; 修改日期: 2011-12-23

基金项目: 国家精品课程《高等数学》建设项目

作者简介: 冯伟杰(1975—), 女, 山东潍坊人, 博士, 讲师, 主要从事网络拥塞控制系统研究. Email: fengwj@buaa.edu.cn

魏光美(1967—), 女, 重庆万州人, 博士, 副教授, 主要从事孤立子理论研究. Email: gmwei@buaa.edu.cn

$$\begin{aligned} \iint_D [1 + f(x) - f(y)] dxdy &= \\ \int_0^1 dx \int_0^1 [1 + f(x) - f(y)] dy &= \\ \int_0^1 dx \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \int_0^1 f(x) dy - \\ \int_0^1 dx \int_0^1 f(y) dy &= 1. \end{aligned}$$

例 2^[4] 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明柯西-施瓦兹积分不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

证明 不妨记

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}.$$

由于积分值与积分变量的符号无关, 故有

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 &= \\ \int_a^b f(x)g(x) dx \int_a^b f(y)g(y) dy &= \\ \iint_D f(x)f(y)g(x)g(y) dxdy &\leq \\ \frac{1}{2} \iint_D f^2(x)g^2(y) dxdy + \frac{1}{2} \iint_D f^2(y)g^2(x) dxdy &= \\ \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx. & \end{aligned}$$

例 3 (1991 年第三届北京市大学生数学竞赛试题)^[1-2,5] 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上连续且单调增加的函数, 证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

证明 不妨记

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}.$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx &= \iint_D f(x)g(y) dxdy, \\ (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx &= \iint_D f(x)g(x) dxdy, \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的单调递增函数, 所以对于 x 和 y 不论哪个大哪个小都有

$$I(x, y) = [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] \geqslant 0,$$

在区域 D 上积分后, 得到

$$I = \iint_D I(x, y) dx dy \geqslant 0.$$

根据二重积分的性质以及轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x)g(x) dx dy - \iint_D f(x)g(y) dx dy - \\ &\quad \iint_D f(y)g(x) dx dy + \iint_D f(y)g(y) dx dy = \\ &2 \iint_D f(x)g(x) dx dy - 2 \iint_D f(x)g(y) dx dy \geqslant 0. \end{aligned}$$

因此待证不等式成立.

例 4(清华大学 1985 年数学竞赛试题)^[1,3] 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 单调减少, 且

$$f(x) > 0,$$

求证

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x) dx}{\int_0^1 xf(x) dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

证明 仿照例 3 即可, 从略.

例 5(2005 年第十六届北京市大学生数学竞赛试题)^[2] 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调增加, 证明

$$\int_0^1 f(x) dx \leqslant 2 \int_0^1 xf(x) dx.$$

证明 当 $x, y \in [0, 1]$ 时, 成立

$$(x - y)[f(x) - f(y)] \geqslant 0.$$

不妨记

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

则有

$$\iint_D (x - y)[f(x) - f(y)] dx dy \geqslant 0.$$

另外, 因为

$$\begin{aligned} \iint_D (x - y)[f(x) - f(y)] dx dy &= \\ \iint_D [xf(x) + yf(y) - xf(y) - yf(x)] dx dy &= \\ 2 \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

所以待证不等式成立.

注 1 更一般的, 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 则有

$$(b - a) \int_a^b f(x) dx \leqslant 2 \int_a^b xf(x) dx.$$

例 6^[3] 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且对任意的 $x, y \geqslant 0$, 满足

$$f(x)f(y) \leqslant xf(\frac{y}{2}) + yf(\frac{x}{2}),$$

证明

$$\int_0^x f(t) dt \leqslant 2x^2.$$

证明 在函数所满足的条件不等式中令

$$y = x,$$

则得

$$f^2(x) \leqslant 2xf(\frac{x}{2}),$$

从而有

$$f(x) \geqslant 0, \quad \int_0^x f(t) dt \geqslant 0.$$

下面只需证明

$$\int_0^x f(t) dt > 0.$$

的情形. 给定 $x > 0$, 记

$$D = \{(s, t) \mid 0 \leqslant s \leqslant x, 0 \leqslant t \leqslant x\},$$

对不等式

$$f(s)f(t) \leqslant sf(\frac{t}{2}) + tf(\frac{s}{2})$$

两边在区域 D 上积分, 得

$$\begin{aligned} \iint_D f(s)f(t) ds dt &\leqslant \\ \iint_D sf(\frac{t}{2}) ds dt + \iint_D tf(\frac{s}{2}) ds dt. \end{aligned}$$

根据二重积分的计算公式以及轮换对称性, 有

$$\int_0^x f(s) ds \int_0^x f(t) dt \leqslant 2 \int_0^x t dt \int_0^x f(\frac{s}{2}) ds,$$

整理后有

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 &\leqslant 2x^2 \int_0^x f(\frac{s}{2}) ds \frac{s}{2} = \\ 2x^2 \int_0^{\frac{x}{2}} f(t) dt. \end{aligned}$$

由于

$$f(x) \geqslant 0,$$

所以

$$\int_0^{\frac{x}{2}} f(t) dt \leqslant \int_0^x f(t) dt.$$

从而待证结论成立.

以上各例表明, 在这类定积分不等式的证明过程中, 先利用积分值与积分变量的符号无关将要证不等式化为二次积分的形式, 进一步化为二重积分, 再结合已知条件建立过渡不等式, 最后依据二重积分的轮换对称性或其计算方法得证结论. 这种利用高维数计算低维数的方法, 克服了数学解题中的高维数化为低维数的思维定势, 丰富了高等数学课程中二重积分与定积分互化的数学思想方法.

化重积分为定积分之积

熊明¹, 熊鉴²

(1. 四川爱华学院 数学系, 四川 成都 610200; 2. 观美中学, 浙江 苍南 325800)

摘要 选择合适的坐标变换, 把某些特殊类型重积分的积分区域变换为圆(球)形区域, 再利用极(球)坐标代换可将此类重积分化为定积分之积, 以达到简化计算的目的.

关键词 重积分; 变换; 定积分

中图分类号 O172; G642

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2012)02-0029-02

把多元积分直接化为单积分可以简化其运算^[1-2], 而对于某些难以直接化为单积分或累次积分的重积分, 可先变换为圆(球)形状区域上的积分, 再用极(球)坐标代换, 若被积表达式能分解为单个变量微分的乘积, 则重积分便可化为定积分之积.

例 1^{[3]920} 设 D 是由

$$|x| + |y| = 1$$

所围平面区域, 计算

$$I = \iint_D \frac{(|x| + |y|)^2 \ln(|x| + |y|)}{x^2 + y^2} dx dy.$$

解 被积函数既是 x 的偶函数也是 y 的偶函数. 记 D_1 为 D 在第一象限的部分, 并令

收稿日期: 2009-12-03; 修改日期: 2011-03-16

作者简介: 熊明(1967—), 男, 重庆忠县人, 讲师, 从事大学数学教育和研究. Email: X599599@126.com.

熊鉴(1974—), 男, 重庆忠县人, 中学一级教师, 从事物理学教学与研究. Email: 408963211@qq.com.

$$x = r\cos^2 t, \quad y = r\sin^2 t,$$

$$(0 < r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}),$$

则面积变换系数, 即雅可比行列式

$$J = r\sin 2t.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= 4 \iint_{D_1} \frac{r^2 \ln r}{r^2 (\sin^4 t + \cos^4 t)} \cdot r \sin 2t dr dt = \\ &= 4 \int_0^1 r \ln r dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 2t dt}{1 + \cos^2 2t} = \\ &= 2 \left(r^2 \ln r - \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^1 \cdot \int_0^{\pi} \frac{-d(\cos u)}{1 + \cos^2 u} = \\ &= \int_1^{-1} \frac{dw}{1 + w^2} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例 2^{[3]845} 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4}{x^2} dx dy,$$

其中积分区域 D 由以下曲线所围成:

- [3] 孙洪祥, 王晓红. 高等数学难题解题方法选讲[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003: 59; 158.
- [4] 吴纪桃, 魏光美, 李翠萍, 等. 高等数学: 上册[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2011: 186.
- [5] 吴耀强. 巧用二重积分求解定积分之例说[J]. 高等函授学报: 自然科学版, 2006, 19(5): 46-48.

参考文献

- [1] 李心灿, 季文铎, 余仁胜, 等. 大学生数学竞赛试题研究生入学考试难题解析选编[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 34; 193; 292.
- [2] 陈兆斗, 郑连存, 王辉, 等. 大学生数学竞赛习题精讲 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010: 99; 100; 362.

Double Integral and Integral Inequality Proving

FENG Weijie, WEI Guangmei

(LMIB, School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, PRC)

Abstract: With some examples, this paper illustrates how to transfer a class of definite integral problems into double integral problems, which provides a technique for proving inequalities of definite integrals.

Keywords: definite integral, double integral, symmetry