中山大学答题纸 A卷 1

环境工程 学系 环境工程 生物医学工程 专业 08 级

考试科目 高等数学(一) 成绩评定 96

考生姓名 吴彩鸿 教师签名

学号 08349037 2009 年 5 月 7 日

(一) 计算下列各题

1. $z=e^{x+y}+y\sin xy+x\tan y$. ① 求 dz; ② 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. ① $dz=de^{x+y}+d(y\sin xy)+d(x\tan y)=e^{x+y}d(x+y)+yd\sin xy+\sin xy\,dy+x\,d\tan y+\tan y\,dx$

$=e^{x+y}d(x+y)+y\cos xy(y\,dx+x\,dy)+\sin xy\,dy+x\sec^2 y\,dy+\tan y\,dx=(e^{x+y}+y^2\cos xy+\tan y)dx+$

$(e^{x+y}+xy\cos xy+\sin xy+x\sec^2 y)dy$ ② 由①知 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}+y^2\cos xy+\tan y$ 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}-xy^2\sin xy+\sec^2 y$

2. $z=\ln(1+x^4+y^4)$, $l=(1,1)$. ① 求 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(0,1)}$; ② 求 grad z.

解. ① $z_x=\frac{4x^3}{1+x^4+y^4}$ $z_y=\frac{4y^3}{1+x^4+y^4}$ 则 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(0,1)}=\left(\frac{4x^3}{1+x^4+y^4},\frac{4y^3}{1+x^4+y^4}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\Big|_{(0,1)}$

$=\frac{2\sqrt2(x^3+y^3)}{1+x^4+y^4}\Big|_{(0,1)}=\frac{2\sqrt2\times(0^3+1^3)}{1+0^4+1^4}=\sqrt2$ ② grad $z=(z_x,z_y)=\left(\frac{4x^3}{1+x^4+y^4},\frac{4y^3}{1+x^4+y^4}\right)$

3. $z=(1+x^2+y^2)^y$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解. 等式两边同时对 x 求偏导数得 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ~~…~~ $y(1+x^2+y^2)^{y-1}\cdot 2x=2xy(1+x^2+y^2)^{y-1}$

~~等式两边同时求~~ $z=(1+x^2+y^2)^y=e^{\ln(1+x^2+y^2)^y}=e^{y\ln(1+x^2+y^2)}$ 等式两边同时对

y 取偏导数得 $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln(1+x^2+y^2)}\cdot\ln(1+x^2+y^2)\cdot\frac{2y^2}{1+x^2+y^2}=$ ~~…~~ $2y^2(1+x^2+y^2)^{y-1}\ln(1+x^2+y^2)$

4. 设方程 $F=xyz+\sin(1+x+y+z)=0$ 确定 $z=f(x,y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解. ~~同时~~ 方程两边同时对 x 取偏导数得 $yz+xyz_x+\cos(1+x+y+z)\cdot(1+z_x)=0$

化简得到 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz+\cos(1+x+y+z)}{xy+\cos(1+x+y+z)}$

5. 求函数 $z=f(x,y)=e^{x+y}$ 在点 $P_0=(x_0,y_0)$ 处的泰勒公式.

解. 易知 $\frac{\partial^i z}{\partial x^i}\Big|_{(x_0,y_0)}=e^{x_0+y_0}$ $\frac{\partial^j z}{\partial y^j}\Big|_{(x_0,y_0)}=e^{x_0+y_0}$ $\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i\partial y^j}=e^{x_0+y_0}$ 其中 $\{\cdots$

则 $z=f(x,y)=e^{x+y}=e^{x_0+y_0}+$ ~~…~~ $\frac{df(x_0,y_0)}{1!}+\frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!}+\cdots+\frac{d^nf(x_0,y_0)}{n!}+o(\rho^n)$

$=e^{x_0+y_0}+\frac{e^{x_0+y_0}dx+e^{x_0+y_0}dy}{1!}+\frac{e^{x_0+y_0}dx^2+2e^{x_0+y_0}dxdy+e^{x_0+y_0}dy^2}{2!}+\cdots+\frac{d^n(x_0,y_0)}{n!}$

$= e^{x_0+y_0}\left[1+(\Delta x+\Delta y)+\frac{(\Delta x+\Delta y)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\Delta x+\Delta y)^n}{n!}\right]+o(\rho^n)$ 其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

6. 求 $z=f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2+xy$ 的极值点.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2+y$　$\frac{\partial z}{\partial y}=y+x$　令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0=\frac{\partial z}{\partial y}$ 求出稳定点为 $(0,0)$ 及 $(1,-1)$

令 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2x$　$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.　$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

当 $x=0=y$ 时　$A=0$，$B=1$，$C=1$，此时 $B^2>AC$，故点 $(0,0)$ 不是极值点.

当 $x=1, y=-1$ 时　$A=2$，$B=1$，$C=1$，此时 $B^2<AC$，且 $A>0$，故点 $(1,-1)$ 是极小值点.

则 求和 $z=f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2+xy$ 的极小值点为 $(1,-1)$

(二) 计算下列各题

1. 设 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，$f(x,y)=x^3y^3+x^2$. 求 $I=\iint_D f(x,y)d\sigma$.

解：$I=\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D(x^3y^3+x^2)d\sigma=\int_{-1}^1dx\int_0^1(x^3y^3+x^2)dy$

$=\int_{-1}^1\left(\frac{x^3y^4}{4}+x^2y\right)\Big|_0^1dx=\int_{-1}^1\left(\frac{x^3}{4}+x^2\right)dx=\left(\frac{x^4}{16}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^1=\frac{2}{3}$

2. 设 Ω 由平面 $z=1$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 围成，$f(x,y,z)=y\cos z+x^2$. 求 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$.

解：Ω 在平面 Oxy 上的投影为 $D: 0\le x^2+y^2\le 1$，故可令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ 其中 $\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

Ω 关于平面 Oxz 对称，而 $y\cos z$ 关于 y 是奇函数 故 $\iiint y\cos z\,dv=0$

则 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega(y\cos z+x^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^1(r^2\cos^2\theta)\cdot r\,dz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^1 r^3\cos^2\theta\,dz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^3\cos^2\theta-r^5\cos^2\theta)dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{12}$

3. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，$f(x,y,z)=y\cos z+y^2$. 求 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$.

解. Ω 关于平面 Oxz 对称，而 $y\cos z$ 关于 y 是奇函数 故 $\iiint_\Omega y\cos z\,dv=0$

则 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega y^2dv$

可令 $\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$ $\quad 0\le\rho\le1,\ 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$

则 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^4\sin^3\varphi\sin^2\theta\,d\rho$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{1}{5}\sin^3\varphi\sin^2\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{4}{15}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{4}{15}\pi.$

$\cancel{\int_0^{2\pi}(\frac{2}{5}\sin\theta-\frac{2}{5})d\theta=\frac{2}{15}\pi}$.

（三）计算下列各题

1. 设曲线 $L:\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos t,\end{cases}$ $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$f(x,y)=x^{11}+y^3$. 求第一型曲线积分 $I=\int_L f(x,y)ds$.

解. $I=\int_L f(x,y)ds=\int_L(x^{11}+y^3)ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{11}t+\cos^3t)\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2}\,dt$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{11}t+\cos^3t)dt$ 因为 $\sin^{11}t$ 是关于t的奇函数 故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{11}t\,dt=0$ $\cos^3t$是关于t的偶

则 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{11}t+\cos^3t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3t\,dt=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

2. 设 S^+ 是球面: $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部($z\ge0$)的外侧曲面，$P(x,y,z)=xz$，$Q(x,y,z)=yz$，$R(x,y,z)=x^2+y^2+xy^6$. 求第二型曲面积分 $I=\iint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$.

解. 增加一个曲面 S_1: $z=0(x^2+y^2\le1)$ 使得 $S^+\cup S_1$ 构成一封闭曲面. S_1 取外侧，即取下侧，记为 S_1^-

则由 $S^+\cup S_1$ 构成的曲面围成的区域为 Ω. 由 $\iint_{(S^+\cup S_1^-)}\sim=\iint_{S^+}\sim+\iint_{S_1^-}\sim$ 则根据高斯公式有

$\iint_{(S^+\cup S_1^-)}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{(S^+\cup S_1^-)}xzdydz+yzdzdx+(x^2+y^2+xy^6)dxdy$

$=I+\iint_{S_1^-}xzdydz+yzdzdx+(x^2+y^2+xy^6)dxdy=\iiint_\Omega(z+z+0)dV=2\iiint_\Omega z\,dV$

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho=\frac{\pi}{2}$ 而 $\iint_{S_1^-}xzdydz+yzdzdx+(x^2+y^2+xy^6)dxdy=0+0+\iint_{S_1^-}(x^2+y^2)dxdy$

$=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^2\cdot rdr=-\frac{\pi}{2}$ 故 $I=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$.

3. 设 $P(x,y)=2x+2xy^2$，$Q(x,y)=2x^2y+3y^2$，$A(0,0)$ 和 $B(1,1)$ 是曲线 L: $y=x^{1111}$ $(x\in R)$ 上的二点. 求第二型曲线积分 $I=\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy$.

解. $I=\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy=\int_{\widehat{AB}}(2x+2xy^2)dx+(2x^2y+3y^2)dy=\int_0^1(2x+2x\cdot(x^{1111})^2+[2x^2\cdot x^{1111}+3(x^{1111})^2]\times1111x^{1110}]dx=\int_0^1[2x+2x^{2223}+(2x^{1113}+3x^{2222})\times1111x^{1110}]dx$

Scanned by CamScanner

$\cancel{= \int_0^1 (2x + 2x^{2023} + \cdots)}$

$$= \int_0^1 (2x + 2x^{2023} + 2222x^{2023} + 3333x^{3332})\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 2224x^{2023} + 3333x^{3332})\,dx$$

$$= (x^2 + x^{2024} + x^{3333})\Big|_0^1 = 3$$

(四) 完成下列各题

1. 设 S^+ 是球面：$x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧曲面，向量 $F=(P,Q,R)$，$P=x+y+z$，$Q=x^2-y+z^4$，$R=x^3+y^3+\frac{1}{2}z^2$。求第二型曲面积分 $I=\iint_{S^+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$。

解 由高斯公式得 $I=\iint_{S^+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$

$= \iiint_V (1-1+z)\,dV = \iiint_V z\,dV$ 令 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta & 0\le\rho\le1 \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta & 0\le\theta\le2\pi \\ z=\rho\cos\varphi & 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$

则 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho = 0$

2. 设 S^+ 是球面：$x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部的外侧曲面 $(z\ge0)$，$n^+=n^+(x,y,z)$ 是 S^+ 上点 (x,y,z) 的单位法向量，L^+ 是 S^+ 的边界，n^+ 与 L^+ 满足右手法则，向量 $F=(P,Q,R)$，$\operatorname{rot}F$ 是 F 的旋度向量，$P=8x^7+5x^4y^7+z$，$Q=7x^5y^6+5xy^4+z^3$，$R=x^3+y^4+z^5$。试证 $I=\iint_{S^+}\operatorname{rot}F\cdot n^+\,ds=0$。

证明：$I=\iint_{S^+}\operatorname{rot}F\cdot n^+\,ds = \iint_{S^+}\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8x^7+5x^4y^7+z & 7x^5y^6+5xy^4+z^3 & x^3+y^4+z^5 \end{vmatrix}$

$= \iint_{S^+} (4y^3+3z^2)\,dy\,dz + (1-3x^2)\,dz\,dx$ 由题知 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

故 $I=\iint_{D_{xy}} [4y^3+3(1-x^2-y^2)]\cdot\left(-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)+(1-3x^2)\left(-\frac{2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dx\,dy$

~~其中 D_{xy}：$x^2+y^2=1$ 关于 x 轴，y 轴都对称，而被积函数关于 x，y 都是奇函数~~

故 $I=0+0=0$。证毕