中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2015 学年第 3 学期　　姓　名：何炜佳

学　院/系：数计学院　　学　号：15328048

考试方式：闭卷　　学　院：岭南(大学)学院

考试时长：100 分钟　　年级专业：大一 经济学类

100

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

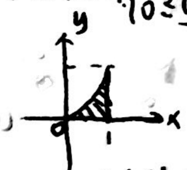
————————以下为试题区域，共七道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答————————

一、求下面二重积分（共2小题，每小题10分，共20分）

1，交换二次积分的次序（其中 f 为连续函数）

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

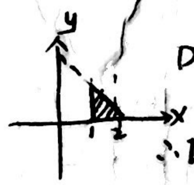
解：如图 $D_1: \begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$



$D_1: \begin{cases}0\le y\le 1\\ \sqrt{y}\le x\le 1\end{cases}$

$\therefore \int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

如图 D_2:



$D_2: \begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le 2-x\end{cases}$

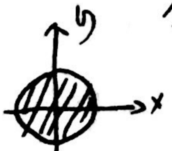
$\therefore D_2 \begin{cases}0\le y\le 1\\ 1\le x\le 2-y\end{cases}$

$\therefore \int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_1^{2-y} f(x,y)dx$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_1^{2-y} f(x,y)dx$

2，$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2-2x+3y+y^2+2)d\sigma$

解：如图：$D: x^2+y^2\le a^2$



令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

其中，$0\le\rho\le a$，$0\le\theta\le 2\pi$

原式 $=\iint_D(-2x+3y)d\sigma+\iint_D(x^2+y^2)d\sigma+\iint_D 2d\sigma$

$\because$ D关于x轴对称，~~3x~~ 3y是关于y的奇函数

D关于y轴对称，$-2x$是关于x的奇函数

$\therefore \iint_D(-2x+3y)d\sigma=0$

$\because \iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)d\sigma$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3 d\rho$

$=2\pi\times\frac{1}{4}a^4$

$=\frac{a^4}{2}\pi$

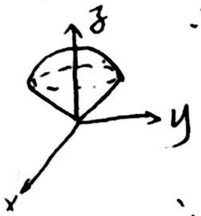
$\iint_D 2d\sigma=2\pi a^2$

$\therefore$ 原式 $=\frac{a^4}{2}\pi+2\pi a^2$

二、求如下三重积分（共2小题，每小题10分，共20分）

1，$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中$\Omega$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成

解：如图：Ω关于yOz平面对称，x是关于x的奇函数



$\therefore \iiint\limits_{\Omega} x\,dv=0 \quad \therefore$ 原式$=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$

令$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 得 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$，Ω在xOy平面投影为

$\therefore D_{xy}: x^2+y^2\le\frac{1}{2}$ 令$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $(0\le\rho\le\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\le\theta\le2\pi)$

$\therefore$ 原式$=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho\,d\rho\int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} z\,dz$

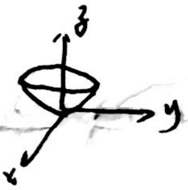
$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[\frac{1}{2}(\rho-2\rho^3)]d\rho$

$=\pi\cdot(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{2}\rho^4)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{\pi}{8}$

2，$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$由$2z=x^2+y^2$与$z=2$所围成

解：如图：令$\begin{cases}2z=x^2+y^2\\ z=2\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4$



$\therefore \Omega$在xOy平面投影$D_{xy}: x^2+y^2\le4$

令$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $(0\le\rho\le2, 0\le\theta\le2\pi)$

$\therefore$ 原式$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}dz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2\rho^3-\frac{\rho^5}{2})d\rho$

$=2\pi(\frac{1}{2}\rho^4-\frac{1}{12}\rho^6)\Big|_0^2$

$=\frac{16}{3}\pi$

三、求如下线积分（共3小题，每小题10分，共30分）

1，已知曲线弧$L: y=\sqrt{1-x^2}$ $(0\le x\le1)$，计算$\int_L xyds$（第一型）

解：$\because y=\sqrt{1-x^2}$，$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \int_L xyds=\int_0^1(x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

2，证明曲线积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y)dx+(x-2\sin^2y)dy$与路径无关，并计算积分值。

解：①证明：$P(x,y)=x^2+y$，$Q(x,y)=x-2\sin^2y\,dy$

$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \therefore \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\therefore \int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y)dx+(x^2-2\sin^2y)dy$与路径无关

$\therefore$ 原式$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y)dx+(x-2\sin^2y)dy$

$=\int_0^1(x^2+0)dx+\int_0^1(1-2\sin^2y)dy$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\int_0^1(1-2\sin^2y)dy$

$\because \int2\sin^2y\,dy=\int(1-\cos2y)dy=y-\frac{1}{2}\sin2y$

$\therefore$ 原式$=(\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1+(y+\frac{1}{2}\sin2y-y)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sin2$

减去

3，计算 $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$，其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 沿逆时针方向。

解：令 $C: y=0\ (0\le x\le 2a)$

$\because \int_{(L+C)^+} (e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$ 中

$P=e^x\sin y-2y \quad Q=e^x\cos y-2$

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$

$\therefore \int_{(L+C)^+}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$

$=\iint_{D_{xy}}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=2\iint_{D_{xy}}dxdy$

$\because D_{xy}: \begin{cases}0\le y\le\sqrt{2ax-x^2}\\ 0\le x\le 2a\end{cases}$

$\therefore \int_{(L+C)^+}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=2\times\frac{1}{2}\pi a^2=\pi a^2$

又 $\because \int_{C^+}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$

$=\int_0^{2a}(e^x\cdot\sin 0-2\times 0)dx=0$

$\because \int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$ $\int_{C^+}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$

$=\int_{(L+C)^+}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$

$=\pi a^2-0=\pi a^2$

四、求如下面积分（共 2 小题，每小题10分，共20分）

1，计算面积分 $\iint_S (x^2+y^2)dS$，S 为柱面 $x^2+y^2=9$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的区域的整个边界曲面

解：设面 $z=0\ (x^2+y^2\le 9)$ 为 S_1

设面 $z=3\ (x^2+y^2\le 9)$ 为 S_2

柱面 $x^2+y^2=9\ (0\le z\le 3)$ 为 S_3

① $z=0$ 时 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\sqrt{1+0+0}=1 \quad D_1: x^2+y^2\le 9$

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases} (0\le\rho\le 3, 0\le\theta\le 2\pi)$

$\therefore \iint_{S_1}(x^2+y^2)dS=\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3\rho^3d\rho=\frac{81}{2}\pi$

② $z=3$ 时 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=1$，$D_2: x^2+y^2\le 9$ 同理

$\therefore \iint_{S_2}(x^2+y^2)dS=\iint_{D_2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{81}{2}\pi$

侧面相加

③ $x^2+y^2=9$ 时 $\iint_{S_3}(x^2+y^2)dS=9\iint_{S_3}dS$

$\because \iint_{S_3}dS=2\pi\times 3\times(3-0)=18\pi$

$\therefore \iint_S(x^2+y^2)dS=\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{S_2}(x^2+y^2)dS$

$+\iint_{S_3}(x^2+y^2)dS=\frac{81}{2}\pi+\frac{81}{2}\pi+~~18\pi=180\pi~~$

$+18\pi\times 9=243\pi$

+5

2，计算 $\iint_S 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的立体的表面的外侧（高斯）

解：由高斯公式得 $\because P=2xz \quad Q=yz,\ R=-z^2$

$\frac{\partial P}{\partial x}=2z \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=z \quad \frac{\partial R}{\partial z}=-2z$

$\therefore$ 原式 $=\iiint_\Omega(2z+z-2z)dxdydz$

$=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}zdz$

令 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=\sqrt{2-x^2-y^2}\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=1$. $\therefore$

$\therefore$

$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$

$=2\pi\int_0^1[\rho\cdot\frac{1}{2}(2-\rho^2-\rho^2)]d\rho$

$=2\pi(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4)\big|_0^1=\frac{\pi}{2}$

五、求如下常微

$\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}$

六、证明题（

设函数 $f($

$\int_a^b f(x)dx\int_a^b$

证明：$\because \int_a^b$

$=\int_a^b$

令 $D_{xy}: \begin{cases}a\le x\le\\ a\le y\le\end{cases}$

（D_{xy} 关于直线 $y=x$ 对称）

$\because \int_a^b f(x)dx$

$=\frac{1}{2}$

$\ge\frac{1}{2}$

$=\iint_D$

五、求如下常微分方程（共 1 小题，每小题5分，共5分）

$$\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

解：$\because \frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$

$\therefore \frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$

①当 $\frac{ds}{dt}+s\cos t=0$ 时 $\frac{ds}{dt}=-s\cos t$

$\frac{ds}{s}=(-\cos t)dt$ $\int\frac{ds}{s}=\int(-\cos t)dt$

$\therefore \ln|s|=-\sin t+C_1\ (C_1\in R)$

$\therefore s=\pm e^{-\sin t+C_1}=C_2e^{-\sin t}\ (C_2=\pm e^{C_1})$

②当 $\frac{ds}{dt}=-\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t$ 时 令 $s=ue^{-\sin t}$ $(u=u(t))$

$\therefore \frac{ds}{dt}=u'e^{-\sin t}-ue^{-\sin t}\cos t$

$\frac{ds}{dt}+s\cos t=u'e^{-\sin t}-ue^{-\sin t}\cos t+ue^{-\sin t}\cos t=u'e^{-\sin t}=\frac{1}{2}\sin 2t$

$\therefore u'=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot e^{\sin t}=\sin t\cos t e^{\sin t}$

$\therefore u=\int\sin t\cos t e^{\sin t}dt$

$=\int\sin t e^{\sin t}d(\sin t)$

令 $\sin t=x$

$\therefore u=\int xe^x dx=\int x\,d(e^x)$

$=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

$=\sin t e^{\sin t}-e^{\sin t}+C$ $(C\in R)$

$\therefore s=(\sin t e^{\sin t}-e^{\sin t}+C)e^{-\sin t}$

$=\sin t-1+Ce^{-\sin t}$ $(C\in R)$

六、证明题（共 1 小题，每小题5分，共5分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒大于0，利用二重积分性质证明

+5

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2$$

证明：$\because \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx$

$=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy$

令 $D_{xy}:\begin{cases}a\le x\le b\\ a\le y\le b\end{cases}$

(D_{xy} 关于直线 $y=x$ 对称)

$\therefore \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy$

$=\iint_D f(x)\frac{1}{f(y)}dxdy$

又 $\because \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy$

$=\iint_D f(x)\frac{1}{f(y)}dxdy$

$=\iint_D f(y)\frac{1}{f(x)}dxdy$

$\therefore 2\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\iint_D f(x)\frac{1}{f(y)}dxdy+\iint_D f(y)\frac{1}{f(x)}dxdy$

又 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 且恒大于0：

$\therefore \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\frac{1}{2}[\iint_D f(y)\frac{1}{f(x)}dxdy+\iint_D f(x)\frac{1}{f(y)}dxdy]$

$=\frac{1}{2}\iint_D[f(x)\frac{1}{f(y)}+f(y)\frac{1}{f(x)}]dxdy$

$\ge\frac{1}{2}\iint_D[2\sqrt{f(x)\frac{1}{f(y)}\cdot f(y)\frac{1}{f(x)}}]dxdy$

$=\iint_D dxdy=\int_a^b dx\int_a^b dy=(b-a)(b-a)=(b-a)^2$

$\therefore \int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2$