

# 中山大学本科生期末考试

考试科目: 《概率统计(理工)》(A卷)

学年学期: 23-24 学年第 2 学期 姓 名: \_\_\_\_\_

学院/系: 数学学院 学 号: \_\_\_\_\_

考试方式: 闭卷 年级专业: \_\_\_\_\_

考试时长: 120 分钟 班 别: \_\_\_\_\_

## 警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位。”

以下为试题区域,共 10 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1.  $F_1(x), F_2(x)$  为分布函数,  $f_1(x), f_2(x)$  为概率密度函数。以下    一定为分布函数, 以下    一定为密度函数

- A.  $F_1(x) + F_2(x)$
- B.  $F_1(x) \times F_2(x)$
- C.  $aF_1(x) + bF_2(x), a > 0, b > 0, a + b = 1$
- D.  $f_1(x) + f_2(x)$
- E.  $f_1(x) \times f_2(x)$
- F.  $af_1(x) + bf_2(x), a > 0, b > 0, a + b = 1$

2.  $Y(X) = \begin{cases} 1, & X \in A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, W(Y) = \begin{cases} 1, & Y \in B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, 0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) = 0$ , 下列说法一定正确的是   

- A.  $A, B$  相互独立
- B.  $A \cap B = \emptyset$
- C.  $E(XY) = 0$
- D.  $P(A) + P(B) = 1$

3. 小明经过红绿灯, 80% 的时间为红灯, 他等红灯的时间满足  $\lambda = 10$  的指数分布 ( $x > 0$  时为  $0.1e^{-0.1x}, x < 0$  为 0), 设它的等待时间为  $X$

- (1) 判断  $X$  是离散型随机变量还是连续型随机变量, 若为前者求分布律, 后者求概率密度函数
- (2) 若某次等待时间小于 10s, 求他到达红绿灯时为绿灯的概率

4.  $X, Y$  满足标准正态分布, 且相互独立, 现定义新随机变量  $Z$  满足  $Z = \begin{cases} 1, & XY \geq 0 \\ -1, & XY < 0 \end{cases}$ , 求  $Z$  的分布函数
5.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(Cx + y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
- (1) 求  $C$
  - (2) 求  $f_X(x), f_Y(y)$
  - (3) 求当  $X = 1$  的条件下  $Y$  的条件概率密度函数
  - (4) 求  $X - Y$  的密度函数
6. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本,  $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$ , 其中  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ , 求  $\beta$  与  $\alpha$  的矩估计量
7. 设 3, 2, 8, 7, 5 为总体  $X$  的一个样本,  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-\alpha}, & \alpha \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
- (1) 求  $\alpha$  的最大似然估计
  - (2) 检验  $\alpha$  的无偏性
8. 设总体  $X \sim N(0, \sigma)$ ,  $x_1, x_2, x_3$  与  $y_1, y_2$  分别是总体的数量为 3 与 2 的样本, 均值分别为  $\bar{X}, \bar{Y}$ , 有如下估计量  $T_1 = \frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}$ ,  $T_2 = \frac{3}{5}\bar{X} + \frac{2}{5}\bar{Y}$ ,  $T_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}y_2$
- (1) 以上哪个估计是无偏的
  - (2) 以上的无偏估计哪个是最有效的?
9. 甲地常住 90000 人, 某种病的感染率为 20%, 试着估计患病人口在  $17820 < x < 18180$  范围内的概率。(可以使用标准正态分布的分布函数  $\Phi_0(1.5), \Phi_0(1), \Phi_0(2)$  等表示)
- (1) 利用切比雪夫不等式
  - (2) 利用中心极限定理
10. 设  $(X, Y) \sim N(0, 0, \sigma^2, \sigma^2, -\frac{1}{2})$
- (1) 写出  $X + Y, X - Y$  满足的分布类型以及相关参数
  - (2) 判断  $X + Y, X - Y$  是否相互独立