1. 求椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线上的点到坐标原点的最大距离和最小距离。

老师已写过解答，参见“6.9 习题讲解.pdf”

2. 计算下列三重积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV,$$

其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x^2+y^2=Rx$ 围成的立体。

解 1、Ω 在坐标面 xOy 上的投影 D 是一个以 $\left(\frac{R}{2},0\right)$ 为中心，$\frac{R}{2}$ 为半径的圆盘；

2、立体 Ω 关于坐标面 xOy 对称，函数 z^2 关于变量 z 是偶函数，根据对称性积分是上半部立体上的积分的 2 倍；

3、区域 D：

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le R\cos\theta,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV=2\iiint\limits_{\Omega_{上}} z^2 dV$$

$$=2\iint\limits_{D} dxdy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 dz$$

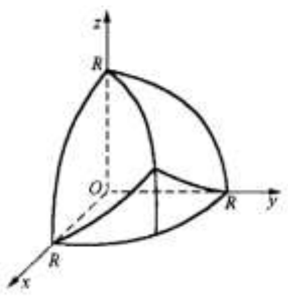
$$=\frac{2}{3}\iint\limits_{D}\left(R^2-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot rdr$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}R^5-\frac{1}{5}\left(R^2\sin^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}\right)d\theta=\frac{2}{15}R^5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\left|\sin\theta\right|^5\right)d\theta$$

$$=\frac{4}{15}R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^5\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{4}{15}R^5\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{15}R^5\left(\pi-\frac{16}{15}\right)$$

3. 求由三个圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，$y^2+z^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积。



老师已写过解答，参见“7.4 习题讲解.pdf”

4. 求双纽线所围区域的面积

双纽线的图形见 P51，图 7.54

图形具有对称性

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos 2\theta d\theta = 4$$

5. 求常数 a， b 使

$$\frac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx-\left(x^2+2xy+by^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

是某个函数 $u\left(x,y\right)$ 的全微分，并求 $u\left(x,y\right)$。

解 令 $P=\dfrac{y^2+2xy+ax^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $Q=-\dfrac{x^2+2xy+by^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

解得 $a=b=-1$。

猜测

$$\frac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx-\left(x^2+2xy+bx^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=d\frac{mx+ny}{x^2+y^2},$$

则

$$d\frac{mx+ny}{x^2+y^2}=\frac{\left(-mx^2+my^2-2nxy\right)dx+\left(-ny^2+nx^2-2mxy\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

解得 $m=1, n=-1$，所以

$$u\left(x,y\right)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$$

老师之前在作业解答中，用凑微分的方法求出了 $u\left(x,y\right)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}+C$，参见“8.3 习题讲解.pdf”

6. 计算下列第二型曲面积分：

$$\iint_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy，$$

其中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

解 设 S 所围成的椭球体为 Ω，根据高斯公式，

$$\iint_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy=\iiint_\Omega\left(y^2+z^2+x^2\right)dV$$

做坐标变换

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases}，$$

则 Ω 变换为半径为 1 的球体，$dV=abc\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$。

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega z^2dV\\ &=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1c^2\rho^2\cos^2\varphi\cdot abc\rho^2\sin\varphi d\rho\\ &=2\pi abc^3\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4d\rho\\ &=\frac{4\pi}{15}abc^3\end{aligned}$$

根据对称性

$$\iiint_\Omega x^2dV=\frac{4\pi}{15}a^3bc,\iiint_\Omega y^2dV=\frac{4\pi}{15}ab^3c$$

所以，

$$\iint_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy=\frac{4\pi}{15}abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

7. 求 $\iint\limits_{S^+} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

解 设 S^+ 所围成的椭球体为 Ω，根据高斯公式，

$$\iint\limits_{S^+} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\iiint\limits_{\Omega} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$$
$$=3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a}\rho^4 d\rho$$
$$=\frac{12\pi}{5}a^5$$

8. 求微分方程 $y''-2y'+2y=e^2+x\cos x$ 的通解。

解题步骤

1、特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征方程的根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$；

2、齐次方程 $y''-2y'+2y=0$ 的通解为

$$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$$

3、为了求方程的特解，把方程拆分成两个方程，分而治之

- $y''-2y'+2y=e^{0\cdot x}\left(e^2\cdot\cos 0\cdot x+0\cdot\sin 0\cdot x\right)$，

  $\lambda=0+0\cdot i$ 不是特征根，

  设特解为 $y^*(x)=x^0\cdot e^{0\cdot x}\left(a\cdot\cos 0\cdot x+b\cdot\sin 0\cdot x\right)=a$，

  求得 $a=\frac{1}{2}e^2$；

- $y''-2y'+2y=e^{0\cdot x}\left(P_1(x)\cos x+0\cdot\sin x\right)$，

  $\lambda=0+1\cdot i$ 不是特征根，
  设特解为

  $y^*(x)=x^0\cdot e^{0\cdot x}\left(P_1(x)\cos x+Q_1\cdot\sin x\right)=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$，

  求得 $a=\frac{1}{5},b=\frac{2}{25},c=-\frac{2}{5},d=-\frac{14}{25}$；

所以原方程的通解为：

$$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+\frac{e^2}{2}+\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{25}\right)\cos x+\left(-\frac{2}{5}x-\frac{14}{25}\right)\sin x$$

9. 证明正项级数的积分判别法：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数。若存在一个单调下降的非负函数$f(x)(x \geq 1)$，使得

$$u_n = f(n), n = 1, 2, 3, \dots$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛。

见教材上正项级数积分判别法的理的证明

10. 证明级数$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$在任何区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛$(\delta > 0)$。

由此证明函数$\varsigma(x)$在$(1, +\infty)$导函数存在且连续。

1、$\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$收敛，由强级数判别法，$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$一致收敛；

2、当n充分大时，$\left| \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{n^{\frac{1}{2}\delta}}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$收敛，由强级数判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$一致收敛；

3、根据定理 8，要证明导数存在且连续，只需要要检查三个条件：

- $\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$收敛：前面已证一致收敛；
- $\left(\frac{1}{n^x} \right)' = -\frac{\ln n}{n^x}$连续：初等函数连续；
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x} \right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$一致收敛：前面已证！

11. 求幂函数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$的收敛半径、收敛区间与收敛域。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(2(n+1))!!}{(2(n+1)+1)!!}}{\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{2n+3}=1$，所以收敛半径为 1，收敛区间为$(-1,1)$。

因为

$$
\begin{aligned}
a_n^2&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&\le\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&\le\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&=2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

所以$a_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$。

又因为

$$
\begin{aligned}
a_n^2&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&\ge\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}\quad,\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&=\frac{2}{3}\cdot2\cdot\frac{1}{2n+1}\\
&\ge\frac{4}{9n}
\end{aligned}
$$

所以$a_n>\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$。

由此易见，当$x=-1$时，级数是一个交错级数，满足莱布尼茨判别法的条件，级数收敛；当$x=1$时，级数是一个正项级数，根据比较判别法，级数发散。幂级数的收敛域为$[-1,1)$.