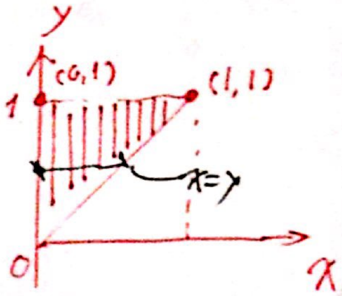
东校区 2010 学年度第二学期 10 级《高等数学一》期中考试题

专业 ________ 学号 2011 22/4 姓名 [redacted] 评分 ________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、 解答下列各题（每小题 7 分，共计 70 分）

1. 求 $I=\iint\limits_{D} e^{-y^2}\,dxdy$，其中 D 是以 $(0,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的三角形区域。



$$=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$$

$$=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot y\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y^2}d(-y^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-y^2}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{0})=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

2. 求 $I=\iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)dxdy$，其中 $D:\frac{\pi}{2}\le x^2+y^2\le 2\pi$.

$$=\iint\limits_{D}\cos r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

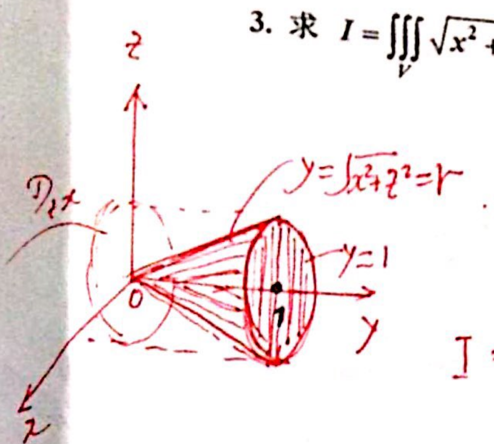
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{2\pi}}\cos r^2\cdot\frac{1}{2}\cdot dr^2$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\sin r^2\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\pi(0-1)$$

$$=-\pi.$$

3. 求 $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dV$，其中 V 是由 $x^2+z^2=y^2$ 与 $y=1$ 所围成的区域。



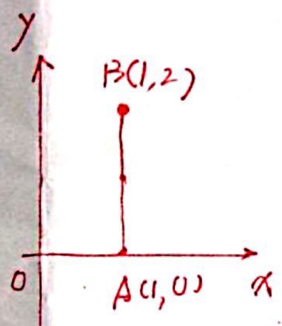
令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=y \\ z=r\sin\theta \end{cases}$ Ω: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 1$, $r\le y\le 1$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} r\cdot r\,dr\,d\theta\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr\int_r^1 dy$$

$$=2\pi\cdot\int_0^1 r^2(1-r)dr=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=2\pi\cdot\frac{4-3}{12}=\frac{\pi}{6}$$

4. 求 $I=\int_L (x+y)ds$，其中 L 是从 $A(1,0)$ 到 $B(1,2)$ 的直线段。

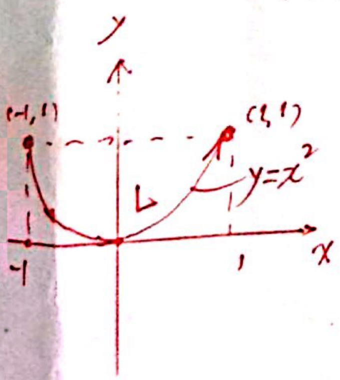


$$=\int_L (1+y)dy$$

$$=\int_0^2 (1+y)dy$$

$$=[y]_0^2+\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2=2+\frac{4}{2}=4.$$

5. 求 $I=\int_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2\sin y)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段。



$$I=\int_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2\sin y)dy$$

$$=\int_{-1}^1 (x+x^2)^2dx-(x^2+x^4\sin x^2)dx^2$$

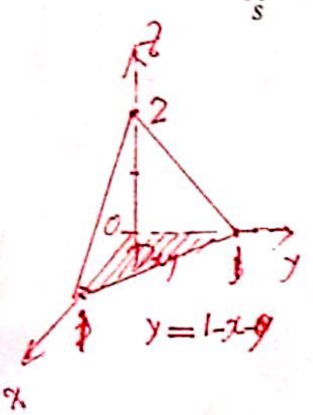
$$=\int_{-1}^1 (x+x^2)^2dx-0$$

$$=2\int_0^1 (x^2+2x^3+x^4)dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+0+2\int_0^1 x^4dx$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{10+6}{15}=\frac{16}{15}.$$

6. 求$I=\iint_S (x-z)dS$,其中S是平面$2x+2y+z=2$在第一卦限中的部分。



S: $z=2-2x-2y$. $z_x=-2$, $z_y=-2$. $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4+4}=3$.

$$I=\iint_S (x-z)dS=\iint_{D_{xy}}[x-(2-2x-2y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=3\iint_{D_{xy}}(3x+2y-2)dxdy=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(3x+2y-2)dy$$

$$=3\int_0^1[3x(1-x)+(1-x)^2-2(1-x)]dx=3\int_0^1(1-x)\cdot(3x+1-x-2)d$$

$$=3\int_0^1(3x-2x^2-1)dx=3$$

7. 求$I=\iint_\Sigma x^2z^2dxdy$,其中$\Sigma$是球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$的下侧。

$$=-\iint_{D_{xy}} x^2(a^2-x^2-y^2)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}} r^2\cos^2\theta\cdot(a^2-r^2)rdrd\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^a(a^2\cdot r^3-r^5)dr$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta\int_0^a(a^2\cdot r^3-r^5)dr=\pi\cdot\left(\frac{a^6}{4}-\frac{a^6}{6}\right)=\frac{-\pi a^6}{12}$$

8. 求方程$y'-y=-e^x$的通解。

$P(x)=-1$, $Q(x)=-e^x$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^x\left[\int -e^x\cdot e^{-x}dx+C\right]$$

$$=e^x(-x+C)$$

$$=e^x(C-x).$$

$$=y'=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

9. 求方程 $yy''=(y')^2$ 的通解。

令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$，代入方程得：

$$y\cdot\frac{dp}{dy}\cdot p=p^2 \Longrightarrow p\neq 0.\quad \int\frac{1}{p}dp=\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln|p|=\ln|y|+\ln C_1,\quad |p|=C_1|y|,\quad p=\pm C_1 y$$

$$\frac{dy}{dx}=C_1 y,\quad \int\frac{1}{y}dy=\int C_1\,dx$$

$$\ln|y|=C_1x+C_2$$

$$y=\pm e^{C_2}\cdot e^{C_1x}=Ce^{C_1x}$$

$$=3\int_0^1(1-x)(2x-1)dx$$

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-1)=3(\frac{3}{2}-\frac{5}{3})=3\times\frac{9-10}{6}=\frac{-1}{2}.$$

10. 求方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解。

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2.$$

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

二. 解答下列各题（每小题 6 分，共计 30 分）

11. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的区域。

$$=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^4d\rho$$

$$=2\pi\cdot[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot[\frac{\rho^5}{5}]_0^2$$

$$=2\pi\cdot(-1)(-1-1)\cdot\frac{2^5}{5}$$

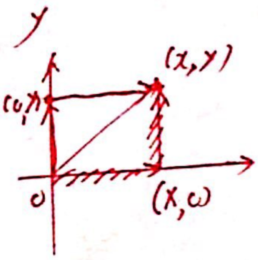
$$=\frac{2^7\cdot\pi}{5}=\frac{128\pi}{5}$$

12. 求方程 $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ 的通解。

方法①. $e^y dx + xe^y dy - 2y dy = 0$

$d(xe^y) - dy^2 = 0 \Rightarrow d(xe^y - y^2) = 0 \Rightarrow xe^y - y^2 = C$

方法② $P = e^y,\ Q = xe^y - 2y$, ∵ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = e^y$ ∴原方程为全微分方程.

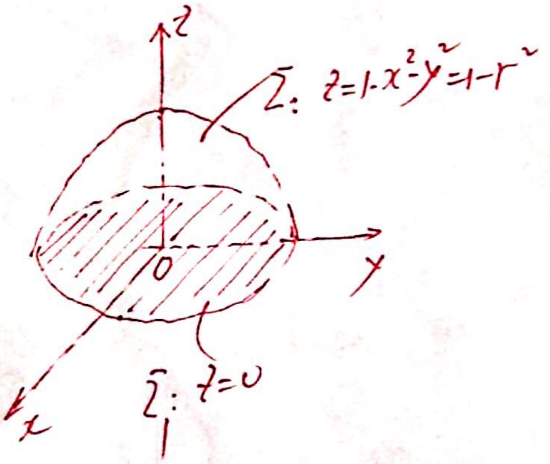


$u(x,y) = \int_0^x e^y dy + \int_0^y (-2y) dy$ （沿 $(0,0) \to (0,y) \to (x,y)$）

$\overset{或}{=} \int_0^x e^0 dx + \int_0^y (xe^y - 2y) dy$ （沿 $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$）

$= xe^0 + x(e^y - e^0) - y^2 = xe^y - y^2$, $\boxed{u(x,y) = xe^y - y^2 = C.}$

13. 求 $I = \iint_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$ ，其中 Σ 是 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 面上方的部分曲面的上侧。



补一块平面 Σ_1: $z=0$, $x^2+y^2 \le 1$ ，取下侧!

而 $\iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0$

Σ 和 Σ_1 围成立体 Ω. 由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} = 3\iiint_\Omega dxdydz$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} dz$$

$$= 6\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr$$

$$= 6\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \iint_\Sigma = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \frac{3\pi}{2} - 0 = \frac{3\pi}{2}.$$

14．求方程 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 的通解。

① 令 $x=e^t$，则 $y'=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}$，$y''=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$，

$y'''=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$

代入方程得：

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}=a\cdot e^{\alpha t}$$

② 齐次特征方程：$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0$，$\lambda(\lambda-3)(\lambda+1)=0$，$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$

齐通解：$y=C_1e^{0t}+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3$

③ 又由于 $\alpha=2$ 不是特征根，从而应设特解 $y^*=Ae^{2t}$，则 $y^{*\prime}=2Ae^{2t}$，$y^{*\prime\prime}=4Ae^{2t}$

代入方程得 $8Ae^{2t}-8Ae^{2t}-6Ae^{2t}=3e^{2t}$，得 $A=-\frac{1}{2}$，$y^*=-\frac{1}{2}e^{2t}=-\frac{x^2}{2}$

④ $y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3-\frac{x^2}{2}$

15. 设 L 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的一条分段光滑的闭曲线，它所围成的区域的面积为 S，L 的方向与它所围成的区域的侧构成右手系。

证明：$S=\frac{1}{2\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\oint_{L^+}\begin{vmatrix}dx&dy&dz\\A&B&C\\x&y&z\end{vmatrix}$.

平面方程：$Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{n}=(A,B,C)$

$\vec{n}^0=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$P=Bz-Cy$，$Q=Cx-Az$，$R=Ay-Bx$

证：

$$\oint_{L^+}\begin{vmatrix}dx&dy&dz\\A&B&C\\x&y&z\end{vmatrix}=\oint_{L^+}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_{S^+}\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{S^+}2Adydz+2Bdzdx+2Cdxdy=2\iint_{S^+}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)dS$$

$$=2\iint_{S^+}\left(\frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{C^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)dS=2\iint_{S^+}\sqrt{A^2+B^2+C^2}dS=2\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot S$$

所以 $S=\frac{1}{2\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\oint_{L^+}\begin{vmatrix}dx&dy&dz\\A&B&C\\x&y&z\end{vmatrix}$