中山大学计算机学院高等代数 2022 年期中开卷题（参考答案）

1. Let A and B be $n \times n$ matrices. Prove that if A is symmetric, then $B^T AB$ is symmetric.

8. 证：因为 $A^T=A$，所以

$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB$, ——得 4 分

从而 B^TAB 是对称矩阵 ——得 5 分

2. Let A and B be $n \times n$ matrices. Prove that if A, B and $A+B$ are all invertible, then $A^{-1}+B^{-1}$ is invertible, via the following two steps:
   a) Prove that $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$.
   b) Prove that $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ is invertible.

证明： 因为 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵，

所以 $|A|, |B|, |A+B|$ 都不为零. 于是可得

$$|A^{-1}+B^{-1}| = |A^{-1}I + IB^{-1}|$$
$$= |A^{-1}(BB^{-1}) + (A^{-1}A)B^{-1}|$$
$$= |A^{-1}(BB^{-1}) + A^{-1}(AB^{-1})|$$
$$= |A^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})| = |A^{-1}(B+A)B^{-1}|$$
$$= |A^{-1}(A+B)B^{-1}| = |A^{-1}| \times |A+B| \times |B^{-1}|$$
$$= |A|^{-1} \times |A+B| \times |B|^{-1} \neq 0.$$

可见 $A^{-1}+B^{-1}$ 是可逆矩阵.

3. Let A be an $n \times n$ matrix and n is an odd number, which satisfies $A^T A = I$ and $|A| \neq -1$. Prove that $I - A$ is not invertible.

例13. 设 A 是奇数阶方阵，且 $A^{\mathrm{T}}A = I$, $|A| > 0$,

可换成 $|A| \neq -1$

求证 $I - A$ 不可逆.

证明： 设 A 是 n 阶方阵（n 为奇数），则

$$|I - A| = |A^{\mathrm{T}}A - IA| = |(A^{\mathrm{T}} - I)A|$$
$$= |A^{\mathrm{T}} - I| \times |A| = |(A - I)^{\mathrm{T}}| \times |A|$$
$$= |A - I| \times |A| = |-(I - A)| \times |A|$$
$$= (-1)^n |I - A| \times |A| = -|I - A| \times |A|,$$

移项得 $(1+|A|)|I - A| = 0.$

又因为 $|A| > 0$，故 $1+|A|>1$，因而 $|I - A| = 0.$

所以 $I - A$ 不可逆.

4. Let $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ be symmetric matrices. Prove that $\boldsymbol{AB}$ is a symmetric matrix if and only if $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

9. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

9. 证：充分性：因为 $A^T=A, B^T=B$，且 $AB=BA$，所以

$(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB$，即 AB 是对称矩阵. ——得 3 分

必要性：因为 $A^T=A, B^T=B$，且$(AB)^T=AB$，所以

$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$. ——得 5 分

5. Let $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4}$ be n-dimensional vectors, which satisfy that $\boldsymbol{\alpha_4}$ is not a linear combination of $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$, but $\boldsymbol{\alpha_1}$ is a linear combination of $\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4}$. Prove that $\boldsymbol{\alpha_1}$ is a linear combination of $\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$.

例16. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$都是$n$维向量. 已知$\alpha_4$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，但$\alpha_1$能由$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表示. 求证$\alpha_1$能由$\alpha_2, \alpha_3$线性表示.

证明: 由条件可设$\alpha_1 = k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$.

假若$k_3 \neq 0$，则由上式可解出

$$\alpha_4 = \frac{1}{k_3}\alpha_1 - \frac{k_1}{k_3}\alpha_2 - \frac{k_2}{k_3}\alpha_3.$$

这与“α_4不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示”矛盾!

矛盾表明$k_3 = 0$，因而$\alpha_1 = k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$.

这就是说α_1能由α_2, α_3线性表示.

6. Let A be an $n \times n$ matrix and A is invertible. A^* is the adjugate of A, aka $adj\, A$.
   a) Please show that $|A^*| = |A|^{n-1}$.
   b) Prove that A^* is invertible and $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

例12. 设A是n阶方阵, $n \geq 2$, 求证$|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明: 分两种情况讨论:

(2) 当$|A| \neq 0$时，令$|A| = a$,

则$AA^* = |A|I = aI$,

于是$a|A^*| = |A||A^*| = |AA^*| = |aI| = a^n$.

由此可得$|A^*| = a^{n-1} = |A|^{n-1}$.

4. 设矩阵 A 可逆，证明其伴随阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

4. 证：由 A 可逆可知：$|A|\neq 0, |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\neq 0, |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，即 A^{-1}, A^* 也可逆。

——得 4 分

$\because AA^* = A^*A = |A|E, A^{-1}(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^{-1} = |A^{-1}|E$

$\therefore (A^*)^{-1} = A/|A|, (A^{-1})^* = |A^{-1}|EA = A/|A|$

所以 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ ——得 8 分

7. Let A be an $n\times n$ matrix satisfying $A^2+2A-4I=O$. Prove that $A-I$ is invertible, and find the inverse matrix of $A-I$.

证：由 $A^2+2A-4E=O$ 可得 $A^2-A+3A-3E=E$，——得 2 分

即 $(A-E)(A+3E)=E$ ——得 6 分

所以 $A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=(A+3E)$ ——得 8 分

8. Let A be an $m\times n$ matrix. Prove: Rank(A^TA)=Rank(A)

例27. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，b 为 m 维列向量. 证明：

(1) 秩(A^TA)=秩(A).

证明： 设 x 为 n 维列向量，

一方面 $Ax=\theta \Rightarrow (A^TA)x=\theta$,

这就是说的 $Ax=\theta$ 解必为 $(A^TA)x=\theta$ 的解.

另一方面 $(A^TA)x=\theta \Rightarrow x^T(A^TA)x=0$

$\Rightarrow (Ax)^T(Ax)=0 \Rightarrow Ax=\theta$.

故 $Ax=\theta$ 与 $(A^TA)x=\theta$ 同解，

因此 $n-$秩(A^TA)$=n-$秩(A).

进而得秩(A^TA)=秩(A).