

中山大学本科生模拟期末考试

考试科目：《高等数学一（II）》

学年学期：2017 学年第 2 学期 姓 名：_____ 学号：_____

考试时长：120 分钟 成绩评定：_____ 阅卷教师：_____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共 13 题，总分 100 分-----

一、计算二重积分 $\iint_D e^{x^2-y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | |x| + |y| \leq 1\}$. (7 分)

二、计算曲线积分 $\int_L z ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a > 0)$ 在第一卦限部分的边界 (7 分)

三、计算曲面积分 $\iint_S z \, dS$, 其中曲面 S 为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 在 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间的部分 (7 分)

四、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + (y^2 + z) \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, 其中 $\Sigma: x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$, 方向取 x 轴正方向一侧 (8 分)

五、求解微分方程初值问题 $xy' + 2y = \sin x, y(\pi) = 0$ (7 分)

六、判断数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ 的敛散性, 并指明其为绝对收敛或条件收敛

(9 分)

七、判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性 (7 分)

八、证明：级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x^2}{2^n}\right)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有连续的导函数 (8 分)

九、计算幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛域与和函数（8分）

十、判断广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln x} \cdot x^2} dx$ 的敛散性（8分）

十一、 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx$ (8 分)

十二、 将 $f(x) = x^2 + 1$ ($0 < x \leq 1$) 在 $(0,1]$ 上展开成正弦级数 (8 分)

- 十三、 设含参变量瑕积分 $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ 仅有 $x = a$ 一个瑕点，并假设 $\int_a^b f(x, y) dx$ 在 $y \in Y$ 上点点收敛到函数 $g(y)$ ，试给出 $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ 在 $y \in Y$ 上一致收敛到 $g(y)$ 的柯西收敛原理描述，并证明该柯西收敛原理 (8 分)