中山大学本科生期末考试

考试科目:《概率统计 (理工类)》(A 卷)

学年学期:	22–23 学年第 2 学期	姓　名:	______
学　院/系:	数学学院	学　号:	______
考试方式:	闭卷	年级专业:	______
考试时长:	120 分钟	班　别:	______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者，不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 10 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

一、判断题 (共四小题)

1. $P(A)=1$, 则 A 与任何事件独立
2. $P(B)>0; P(A|B)=0$, 则 A 与 B 互不相容
3. $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ ，则 $\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$
4. 已知 $F(x)$ 是分布函数，则 $1-F(-x)$ 也是

二、大题 (共 8 小题)

1. 一个人患甲病的概率为 0.2，乙病的概率为 0.5，如果一个人得一个病寿命达到 80 岁的概率为 0.5，得 2 个病寿命达到 80 岁的概率为 0.2，两个病都不得的情况下寿命达到 80 岁的概率为 0.8

   (1) 一个人寿命达到 80 岁的概率

   (2) 一个人寿命达到 80 岁的条件下不得病的概率

2. 已知 $X \sim \chi^2(1)$

   提示　$X \sim \chi^2(1)$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}, x>0$

   (1) 已知 $Y=\sqrt{X}$，求 Y 的概率密度

   (2) 已知 $Z^2=X$，Z 的概率密度函数是偶函数，求 Z 的概率密度

3. 已知分布函数为 $f(x)=\begin{cases} ax & ,0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2} & ,3\le x\le 4 \\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}$

(1) 求 a

(2) 求 $F(x)$

4. (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x & ,|y|<x\text{且}0<x<1 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$,

(1) 求 X 的边缘密度 $f_X(x)$

(2) 求 $E(XY)$

(3) 求 Y 的条件密度 $p_{Y|X}(y|0.5)$

(4) X,Y 是否独立，说明理由

5. 设总体 $X\sim U(0,1)$,$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X、容量为 n 的简单随机样本 (n 足够大)，使用中心极限定理求 $P\left\{\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2\le\dfrac{n}{3}+\dfrac{n\times\sqrt{2}}{}\right\}$，答案使用 $\Phi(x)$ 表示

答案　$\Phi(\dfrac{4\sqrt{70}}{35})$

6. $X\sim\pi(\lambda)$ 符合泊松分布，参数为 λ

(1) 验证 λ 的矩估计和最大似然估计相等

(2) 证明 $E(\quad)=\lambda$ 的无偏性

7. $x_1\sim N(1,1),x_2\sim N(2,4),w(r)=rx_1+(1-r)x_2$ x_1,x_2 的相关系数为 $-\dfrac{1}{2}$

(1) 求 $D(w(r)),E(w(r))$

(2) 当 $E(w(r))>\dfrac{11}{7}$ 时候，求 $D(w(r))$ 取得最小值的 r^*

(3) 已知 $P(-w(r^*)>VaR)=0.05$，求 VaR (用 $N(0,1)$ 的上 α 分位数表示)

8. 设总体 X 满足以下表达式 $P(X=-1)=P(X=1)=\theta,P(X=0)=1-2\theta(0<\theta<\dfrac{1}{2})$

$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X、容量为 n 的简单随机样本，定义 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}|X_k|$

(1) 验证 $\hat{\theta}$ 的无偏性

(2) 验证 $\hat{\theta}$ 的相合性

(3) 分布 $2n\hat{\theta}$ 是什么分布