中山大学本科生期末考试

考试科目：《概率统计（理工类）》（B 卷）

学年学期：2017 学年第 2 学期　　　姓名：________　学号：________

学 院/系：数学学院　　　学院：________　年级专业：________

考试方式：闭卷　　　任课教师：________

考试时长：120 分钟　　　成绩评定：______　阅卷教师：________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------------以下为试题区域，共 7 道大题，总分 **100** 分。考生请在试卷上作答------------

------------------------不允许使用计算器------------------------

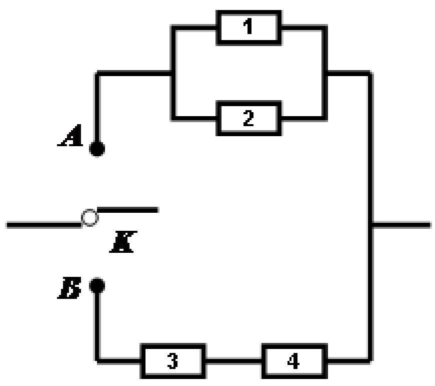
一、（15 分）二人轮流抛一颗骰子，约定谁先抛出 6 点谁为胜者。问:

（1）先抛者获胜的概率；（2）游戏平均需要抛掷多少次结束？

二、（15 分）考虑如图系统，其中开关 K 有 80%的时间连接触点 A，20%的时间连接触点 B；系统中元件 1,2,3,4 是否正常工作是独立的，正常工作的概率均为 0.5. 在任意一个时刻，请问:

（1） 系统正常工作的概率；

（2） 如系统正常工作，求开关 K 连接触点 A 的条件概率.



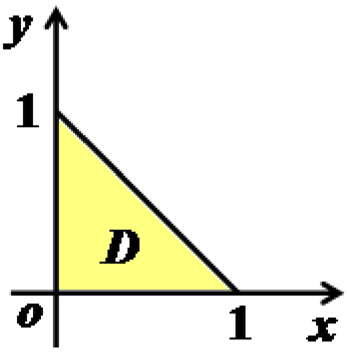
三、（10分）设 X 服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布 $U[-1,1]$，求 $Y = X^2$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

四、（15 分）一批产品次品率为 10%，从这批产品中任意抽取 100 件，以 X 表示这 100 件产品中的次品数目.

(1) 使用切比雪夫不等式，估计 $P\{1 \le X \le 19\}$ 的值;

(2) 使用中心极限定理，求 $P\{1 \le X \le 19\}$ 的近似值（答案使用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示，不用查表求值）.

五、(20分)设区域$D=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$(如图).



(X,Y)的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases} Cx, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$.

（1） 求常数C；

（2） 求X,Y 的边缘密度$p_X(x)$，$p_Y(y)$;

（3） 求$Z=X+Y$的密度$p_Z(z)$;

（4） 求X,Y 的协方差$\mathrm{cov}(X,Y)$;

（5） 请问X,Y 是否独立?

六、（10分）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1, X_2, X_3, X_4是来自总体 X 的样本．有三个估计量:

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{2}X_3-\frac{1}{2}X_4,\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4,\quad \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{2}X_4.$$

请问:（1）哪些是μ的无偏估计？　（2）无偏估计中哪个最有效？

七、（15分）设总体 $X \sim U[0,\theta]$，即总体密度为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$\theta>0$为未知参数.

$X_1, X_2,\cdots, X_n$是来自总体 X 的样本. 求θ的矩估计量和最大似然估计量.