高数

计算为主，概念理清，大题掌握典型例题即可，

课后题量力而行，证明题绝大多数可忽略（正常不考）

Chap 1 极限（必考一个）

定义：$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, |x_n-a|<\varepsilon$.

以例题为大纲.

计算：
- 定义 ε-N 语言，ε-δ
- 夹逼（常见不等式放缩，抓住关键 taylor 公式）
- ☆ 重要极限：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ ☆ 洛必达
- 常用性质：四则运算（加一项减一项证明）$\frac{\ln n}{n}$

例题：
- 放缩应用：简单的放到最小的最大的即可

$\underbrace{\sqrt[n]{n^3+3^n}}$，级数

- 又进一点：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$ $\ln(1+x)\sim x$

取对 $e^{\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})} = e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}} = e^{\frac{1}{2}}$

这种形式常用的还有定积分定义 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$

减法通分

$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \begin{cases}\text{等价无穷小} \\ \text{洛（麻烦，但简单）}\end{cases}$

可能考 Stolz 公式（数列版洛，概率小）

连续：可能考一个带参分段函数，用连续性求参数 | 间断点分类

eg：$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{a}{\sin^2 x}} & x<0 \\ \frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} & x\geq 0\end{cases}$

定义.
- 第一类 可去
- 第二类 不可

又进点：闭区间上连续函数性质

选，判断解，题

线性，退化

(一致) (能纳定)

重要极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （以及 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$）

Chap 2,3 求高阶导：Leibniz公式 $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$

$x^2\sin x$

无穷小量（用来算极限），一阶微分不变性（注意多元！！）

☆常考 Δ

不定积分（必考）　☆例题逐个过，每个都要会（包括例）常见的记，　公多做常考 见后.

定积分

否则可能考场算不出/来不及，可节约大量时间

尤其 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$ Δ

方法 ☆分部积分 ☆三角换元

想考满分建议Chap3那些计算 习题答案都算一遍，递推方法适当略过 有理化方法

有理化方法☆大概率考

考前算1~2个例题，重数　eg: $\int\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}dx$ ：P168

三角可跳过

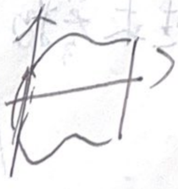
记 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}x\,dx=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}x\,dx=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

（忘了这个特例 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x$）

换元时刻注意上下限 & 奇偶性

算弧长，体积 弧 $ds=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$　$\left(ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt\right)$

$ds=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$

旋转体体积  $dV=\pi f^2(x)\,dx$

侧面积 $dF=2\pi f(x)\,ds$

$\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

* 极坐标下 $dA=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$ 第1~2个 构造辅

Chap 4. 微分中值定理，talyor 公式（必考大题）

Rolle: f 在 $[a,b]$ 连续 $f(a)=f(b)$，f 在 (a,b) 可导，$\exists\, c\in(a,b)$ s.t. $f'(c)=0$

Lagrange. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Cauchy: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ $T_n(x)=f(x_0)+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

洛必达 特殊必备 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ $f(x)=T_n(x)+$

talyor ☆ 注意余项定义 $\begin{cases}\text{Peano} & o((x-x_0)^n)\\ \text{Maclaurin.} & \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{cases}$

↓

展开点，展开区间，被展开点

eg. ① $f\in C^3[0,1]$ $f(0)=0$ $f(1)=\frac{1}{2}$ $f'(\frac{1}{2})=0$ 证 $\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $f'''(\xi)=12$

0 ½ 1 选展开点，0, 1 被展开点，多项式，记典例

② $f\in C^2(\mathbb{R})$，$M_i=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f^{(i)}(x)|$ $(i=0,1,2)$ 证 $M_1^2\le 2M_0M_2$.

$x-h$ ξ_1 x ξ_2 $x+h$

☆ 中值定理总结，f,g,h 在 $[a,b]$ 连续 (a,b) 可导 定义 $\vec{f}(x)=(f,g,h)$ 混合积

定义 $D(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{vmatrix}$，$\exists\, c\in(a,b)$ s.t. $D'(c)=0$

$D(a)=D(b)=0$（线代） Rolle thm $\Rightarrow D'(c)=0$.

取 $h(x)\equiv 1\Rightarrow$ Cauchy.

$h(x)\equiv 1$ $g(x)=x\Rightarrow$ lagrange

常见构造：$f(x)-x$　$e^{ax}f(x)$　$e^{\pm x}f(x)$ ······ 对求导法则要熟悉

极值问题，☆必考大题，极值 $\underset{\nleftarrow}{\Rightarrow}$ 稳定

要能证是极大/小，看 f''，凹凸性，渐近线

向量代数解 n，☆必考大题　平面/直线方程 即可　重点是点到面垂直和平行的公式

Chap 5 ↑　线代角度理解

Chap 6 多元（必考，概念定义为主）

多元函数的极限：证明极限不存在，找两个方式（路径）证不等。

连续．　求：一般未遍定理较多

☆偏导，全微分☆　求偏导 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,0)$ 先代入再求导☆

例9：$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　$\Delta u=0$（算一遍）．

☆全微分与全增量．

$\Delta z=dz+o(\rho)$　$dz=A\,dx+B\,dy$　$A=\frac{\partial f}{\partial x}$　$B=\frac{\partial f}{\partial y}$．

证可微☆　$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=0$（定义）．

链式法则　$f<\begin{matrix}u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\v<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}$　$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

讨论一阶偏导，全微分∃?

例题集合：

T1: $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$ 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+2}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i}+\frac{1}{2(i+2)}-\frac{1}{i+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+o(1).$$

T2 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n}$ $\quad(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e)$

强凑. $\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\times\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-1}{2}-1\right)\times n}$.

$$=e^{\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}\qquad \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\underset{\text{洛}}{=}\ \frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$$

T3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ (0,0)处 一阶偏导，全微分∃?

$f_x(0,0)=0\quad f_y(0,0)=0\quad$ (定义).

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\neq 0$$

$\Delta y=\Delta x\Rightarrow\frac{1}{2}$

T4 $f\in C^2[a,b]$, 证∃$\eta\in(a,b)$ $f(b)+f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)$

$g(x)=f(x)-f\left(x-\frac{b-a}{2}\right)\in C^1\left[\frac{a+b}{2},b\right]$

$g'(\xi)=f'(\xi)-f'\left(\xi-\frac{b-a}{2}\right)\in C^1\left[\xi-\frac{b-a}{2},\xi\right]$.

T4 分部积分灵活使用 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\,dt$ 求 $\int_0^\pi f(x)\,dx$

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = x f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x\,d f(x)$$

$$= \pi f(\pi) - \int_0^\pi x f'(x)\,dx = \pi f(\pi) - \int_0^\pi x \frac{\sin x}{\pi - x}\,dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}\,dx + \int_0^\pi \frac{(\pi-x-\pi)\sin x}{\pi-x}\,dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}\,dx + \int_0^\pi \sin x\,dx - \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$$

☆ 坚坚信无怪题，偏题，往常见题上引

T5 条件极值 eg: $z=3x+4y$ 在 $x^2+y^2=1$ 下 min, max

$$F(x,y,\lambda)=3x+4y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点，再验 } F''$$

T6 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2024}}(1^{2023}+\cdots+n^{2023}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2023} \cdot \int_0^1 x^{2023}\,dx$

线代　计算为主，适当定义 —— 少考

Chap 1　线性方程组解，系数矩阵，增广矩阵，判断解，数域

Chap 2　行列式的计算 $\begin{cases}\text{展开} \\ \text{特殊性质：转置，行列线性，退化}\end{cases}$

☆ Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$ （归纳法）

Cramer法则，没用过，知道就好。

Chap 3　$\mathbb{K}^n$ ☆

线性相关/无关　可能有简单证明

n个n维列向量 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1 \cdots \alpha_n| = 0$

极大无关组，向量组的秩

$\mathbb{K}^n$ 及子空间的基与维数

矩阵的秩（行秩=列秩）

☆　线性方程组有解的充分必要条件，解的结构　$\dim W = n - \operatorname{rank} A$

Chap 4　矩阵运算

$\operatorname{rank}(AB)$ 与 $\operatorname{rank}(A)$ $\operatorname{rank}(B)$ 关系　$r(A+B) \le r(A) + r(B)$

$(\le)$

$|AB| = |A||B|$

$\operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(A)$

☆可逆矩阵 $\Leftrightarrow |A| \ne 0$　定义 $AB = I$，$BA = I$　常用 求逆 $(A\ E) \to (E\ A^{-1})$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$　$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

☆分块

☆ Schmit 正交化 ☆ 考前算2个

Chap5 相似☆☆　可逆 P　$P^{-1}AP = B$，正交矩阵

特征值，特征向量 ☆求解步骤 $A\alpha=\lambda_0\alpha$

☆可对角化的条件 $\begin{cases} \Leftarrow & n\text{个线性无关特征向量} \\ \Leftrightarrow & V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_n} \Big| \sum_i \dim V_{\lambda_i}=n \\ \Leftarrow & n\text{个不同特征值} \end{cases}$

实对称阵对角化

☆实对称阵特征根 $\mathbb{R}$

☆ 不同特征值特征向量正交

☆ 相似于对角阵 ～～ 求解 + Schmit正交化

Chap6 二次型，标准形

非退化线性替换：$X=CY$ ($x_1\cdots x_n$ 到 $y_1\cdots y_n$)

合同：$C^TAC=B$ $A\simeq B$ p

规范形 $\begin{cases} \text{正惯性 指数} \\ \text{负惯性 指数 } r-p \\ \text{符号差 } p-(r-p) \end{cases}$

正定 $\forall\alpha$ $\alpha^TA\alpha>0$ (半正定 ≥ 0)

顺序主子式

正定 $\Leftrightarrow$ 全大于0

例. 以2019-20试题为例

一 T1: 设A是3阶方阵, $|A|=\frac{1}{2}$, 则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$ $\underline{-\frac{16}{27}}$

$A^*=A^{-1}|A|=\frac{1}{2}A^{-1}$ 原式 $=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A|^{-1}=-\frac{16}{27}$

T2 设方阵A满足 $A^2+A-6E=0$ 则 $(A+4E)^{-1}=-\frac{1}{6}(A-3E)$

$(A-3E)(A+4E)=-6E$ 再

T3 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5=\cdots\cdots \in \mathbb{R}^4$ 则 $\alpha_1\cdots\alpha_5$ $\underline{线性相关}$.

T4 设3阶矩阵A与B相似, 且特征值为1,2,3, 则 $\underbrace{|B^2+B-E|}=36$

特征值 1, 4, 9.

T5 设A为3阶矩阵, $r(A)=2$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-7&8&3\end{pmatrix}$ 则 $r(AB)=\underline{2}$.

$|B|\neq 0$.

二 $A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$ 求 A^{-1} $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-\frac{11}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\1&-\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

$(A|E)\xrightarrow{经}(E|A^{-1})$

三 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$

求 $r(A)$ 和一个极大无关组, 并将其余向量用其表示.

$(\alpha_1\cdots\alpha_5)=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$

$\begin{cases}\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4\end{cases}$

四、讨论 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-sx_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=t \end{cases}$ s和t为何值 无解，唯一解，无穷解，并求无穷解时解

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -s & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -s+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{pmatrix}$$

① $s=2$ $t\neq -5$时

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$r(\bar{A})\neq r(A)$ 无解

② $t=-5$ $s\neq 2$ $\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -s+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s+2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A)=r(\bar{A})=4$ 有解，唯一

③ $t\neq -5$ $s\neq 2$

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & s+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(\bar{A})=4$ 有解，唯一

④ $t=-5$ $s=2$ $\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=3$ $r(\bar{A})=4$ 无解

五 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x=?$时A可对角化

$|A-\lambda E|=(\lambda^2-1)(1-\lambda)=0$

① $\lambda=1$ $A-\lambda E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有2个解

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ ✓

② $\lambda=-1$ ✓

六 设 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关 $b_1=\alpha_1$ $b_2=\alpha_1+\alpha_2$ $b_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

证 $b_1\ b_2\ b_3$ 线性无关

解：反证： $k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0 \Rightarrow (k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$ #

七 设 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 为4元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个解向量, $r(A)=3$

$\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 求通解

$r(A)=3 \Rightarrow \dim W=1$

$$\begin{cases}A\alpha_1=b\\A\alpha_2=b\\A\alpha_3=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(\alpha_1+\alpha_2)=2b\\A(\alpha_2+\alpha_3)=2b\end{cases} \Rightarrow \left.A\underbrace{(\alpha_1-\alpha_3)}_{\neq 0}=0\right\} \Rightarrow \alpha_1-\alpha_3 \text{为基解}$$

$$\Rightarrow x=k(\alpha_1-\alpha_3)+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \ \#$$

八 设 $A=\begin{pmatrix}3&8\\1&1\end{pmatrix}$

(1) 求可逆阵 P s.t. $P^{-1}AP$ 对角阵

(2) 求 A^*

(1) $|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \lambda=5,-1$ $P=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$

(2) $A^*=|A|A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-8\\-1&3\end{pmatrix}$

九 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ 求正交阵 P 和对角阵 Λ s.t. $P^{-1}AP=\Lambda$

$|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \lambda=1$ $\lambda=7$

① $\lambda=1$ $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{schmit}}$ $P_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $P_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

② $\lambda=7 \Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $P_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$P=(P_1\ P_2\ P_3)$ $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&7\end{pmatrix}$