

珠海校区 2013 学年度第 2 学期 13 级《高等数学一》期中考试题 (A)

学院/专业_____ 学号_____ 姓名_____ 评分____



警 示

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

(注意：考试时间共 90 分钟)

一，求下列极限：(每小题 6 分，共 24 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 5)^3 (3x - 4)^4}{(6x^2 + 7)^5}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (2x + e^{3x})^{\frac{1}{x}}.$$

二, 求下列函数的导函数: (每小题 12 分, 共 24 分)

(1) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x - y + e^x - e^y = 0$ 定义, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 定义, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

三，求如下积分：(每小题 7 分，共 28 分)

$$(1) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

$$(2) \int \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \cos x}{1+\sin^3 x} dx;$$

$$(4) \int_{-2}^3 e^{-|x|} dx.$$

四, (10 分) 若 $f(x) = \frac{\varphi(x)\sin x}{x(1-e^x)}$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导, 且

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=-2, \quad \text{求} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

五, (14 分) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 记 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)},$

求证: (1) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a, b) 内至少有一个根; (2) $F'(x) \geq 2$ 。