

# 中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2020 学年第 1 学期                      姓 名：\_\_\_\_\_

学 院/系：数学学院（珠海）                      学 号：\_\_\_\_\_

考试方式：闭卷                      年级专业：\_\_\_\_\_

考试时长：100 分钟                      班 别：\_\_\_\_\_

**警示** 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共六道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答-----

一、计算下列极限（共 5 小题，1-3 小题每题 6 分，4-5 小题每题 7 分，共 32 分）

1、  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$

2、  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3 + 3^n}$

3、  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{x}}$

4、  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x \right)$ ,  $a, b, c$  是常数

5、  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1}{n^2+1^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+k^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$

二、求下列函数的导函数（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1、 设  $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ ，求  $y''(x)$

2、 设  $F(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$ ，其中  $f(t)$  连续，求  $F'(x)$

3、 设  $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ，求  $\frac{dy}{dx}$

4、 设  $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$ ，求  $\frac{d^2y}{dx^2}$

三、求下列不定积分（共 2 小题，共 14 分）

1、  $\int \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \cos(x - \ln x) dx$  （6 分）

2、  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$ ， $a \neq 0$  （8 分）

四、求  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$  的间断点，并指出其类型。（8 分）

五、讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  (14 分)

1、 $\alpha$  满足什么条件时,  $f(x)$  在  $x = 0$  点右连续? (4 分)

2、 $\alpha$  满足什么条件时,  $f(x)$  在  $x = 0$  点右导数存在? (4 分)

3、 $\alpha$  满足什么条件时,  $f'(x)$  在  $x = 0$  点右连续? (6 分)

六、设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且满足  $f([a, b]) \subset [a, b]$ ,

证明: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ 。 (8 分)