《线性代数》试题

警示 **《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"**

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&6&0&0\\0&1&0&-9&0\\0&-3&0&27&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$，（1）求 A 的标准形 B；（2）求矩阵 P 和 Q 使得 $PAQ=B$。需要给出计算过程。（**10分**）

2. 设矩阵 A 和 B 为同阶的可逆矩阵，证明 $A^{-1}=\left(A+AB^{-1}A\right)^{-1}+\left(A+B\right)^{-1}$.（**10 分**）

3. 设有线性方程组 $\begin{cases}x+y+(1+\lambda)z=\lambda\\x+(1+\lambda)y+z=3\\(1+\lambda)x+y+z=0\end{cases}$，问 λ 取何值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解. （**10 分**）

4. 求向量组 $\alpha_1=(0,4,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-2,4,3)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组,并将其余的向量用所求的极大无关组线性表示.（**10分**）

5. 设 A 为 4×5 矩阵，且 A 的秩为 3，已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，且 $2\eta_1-\eta_3=(1,2,3,0,-1)^{\mathrm{T}},2\eta_2+3\eta_3=(0,3,1,0,2)^{\mathrm{T}},3\eta_2+2\eta_4=(3,0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $Ax=b$ 的通解.（**10 分**）

6. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的 3 个特征值分别为：$\lambda_1=6,\lambda_2=0,\lambda_3=-6$，其中 A 相应于 $\lambda_1=6,\lambda_2=0$ 的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,a,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$，

   （1）求参数 a；
   （2）求 $\lambda_3=-6$ 对应的特征向量；
   （3）求矩阵 A.（**15 分**）

7. 数列 $f_0,f_1,f_2,\ldots$ 满足下列递推公式 $f_{k+2}=3f_{k+1}-f_k$，且 $f_0=1,f_1=1$。定义 $u_k=\left(f_{k+1},f_k\right)^{\mathrm{T}}$，上述递推公式可以表示为 $u_{k+1}=Au_k$，

   （1） 计算矩阵 A；
   （2） 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵；
   （3） 求 f_k 的表达式。（**15 分**）

8. 设 x 为 n 维列向量且 $u^{\mathrm{T}}u=1$，令 $H=E-2uu^{\mathrm{T}}$，

   （1） 证明 H 为对称正交矩阵；
   （2） u 为 H 的一个特征向量，求特征向量 u 对应的特征值；
   （3） 设向量 v 与 u 正交，证明 v 也是 H 的特征向量，求特征向量 v 对应的特征值；
   （4） H 是否可以对角化？为什么？（**20 分**）