高数一（下册）模拟期末考试简易参考答案与提示

一、 积分区域D可以解读为$-1 \le x+y \le 1, -1 \le x-y \le 1$,因此进行坐标变换$u=x+y, v=x-y$,

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left[\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right]^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$$

$\iint_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{uv}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\times\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\times\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2.$

二、 L可分为三段：$L_1: x=0, z=\sqrt{a^2-y^2}, 0\le y\le a, L_2: y=0, z=\sqrt{a^2-x^2}, 0\le x\le a,$
$L_3: z=0, y=\sqrt{a^2-x^2}, 0\le x\le a.$均可以参数化成坐标面内的曲线积分，于是有：

$$\int_L z\mathrm{d}s = \int_{L_1} z\mathrm{d}s + \int_{L_2} z\mathrm{d}s + \int_{L_3} z\mathrm{d}s = \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_y^2}\mathrm{d}y + \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2}\mathrm{d}x + 0$$
$$= 2\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y = 2a\int_0^a 1\,\mathrm{d}y = 2a^2.$$

三、 积分曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$的投影区域为$D: x^2+y^2\le 2$，且$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$,故

$$\iint_S z\,dS = \iint_D \frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dS = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\sqrt{1+r^2}\cdot r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}(1+r^2)$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+r^2}\mathrm{d}(1+r^2) = \frac{\pi}{2}\times\left[\frac{2}{5}(1+r^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\times\left[\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right]$$
$$= \frac{4\sqrt{3}\pi}{5} + \frac{\pi}{15}$$

四、 为了使用高斯公式，构造辅助曲面$\Sigma_1: x\equiv 0, 3y^2+3z^2\le 1$,方向为$x$轴负方向一侧。在$\Sigma_1$上，$x_y\equiv x_z\equiv 0$,

此时，$\oiint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.(因为该平面上$x$恒为 0).

记Σ与Σ_1围成的区域为$\Omega: x\ge 0, x^2+3y^2+3z^2\le 1$，利用高斯公式，有

$$\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iiint_\Omega 1+2y+1\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega 2\,\mathrm{d}V(\text{对称性}) = 2\times\frac{1}{2}\times\left(\pi\times\frac{4}{3}\times 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{9}$$

五、 本题的常微分方程为一阶线性方程$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x}$，对应齐次通解$\tilde{y} = \frac{C}{x^2}$,

使用常数变易法，设$y = u(x)\cdot\tilde{y}$,有$u'\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{\sin x}{x}$,$u' = \sin x\cdot x$,$u = -x\cos x + \sin x + C$

故原方程通解$y = \frac{-x\cos x + \sin x + C}{x^2}$,代入初值条件$y(\pi)=0$,有$C=-\pi$，故特解为$y = \frac{-x\cos x + \sin x - \pi}{x^2}$

六、 首先题目所述级数为交错级数，易证$\frac{1}{\ln^2 n}$关于n单调递减且当$n\to\infty$时趋于 0,故由莱布尼茨判别法，首先可证级数收敛.再利用$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln^2 n}}{\frac{1}{n}} = +\infty$，以及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散，原级数条件收敛.

七、 首先$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\right| \le \frac{1}{\sin 1}$有界，且$\sin\frac{1}{n}$单调下降（因为$\frac{1}{n} < 1$,$\frac{1}{n}$单调递减，$\sin x$在$x\in(0,1)$单调递增），狄利克雷判别法就可以证明本题的级数收敛了。

八、 本题需要证明函数项级数点点收敛，并利用求导后的函数项级数的一致收敛来证明导函数的存在与连续性。

首先，根据达朗贝尔判别法及$\frac{x^2}{2^n} \sim \arctan\left(\frac{x^2}{2^n}\right)$很容易证明原级数的点点收敛性质。

然后考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\frac{x^2}{2^n}\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{x^4}{4^n}}\frac{2x}{2^n}$$

$\forall x\in(-\infty,+\infty),\exists a>0,$且$x\in(-a,a)\subset[-a,a]\subset(-\infty.+\infty)$，在$x\in[-a,a]$上，因为 $\left|\frac{1}{1+\frac{x^4}{4^n}}\frac{2x}{2^n}\right|\le\frac{2a}{2^n}$ 且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{2^n}$收敛，由 M 判别法可证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{x^4}{4^n}}\frac{2x}{2^n}$ 在$x\in[-a,a]$一致收敛

易证$\frac{1}{1+\frac{x^4}{4^n}}\frac{2x}{2^n}$在$[-a,a]$连续。因此，可证$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{x^2}{2^n}\right)$在$[-a,a]$有连续导函数，特别的在$x$有连续导函数。

由x任意性，可证$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{x^2}{2^n}\right)$在$x\in(-\infty,+\infty)$有连续导函数■

九、 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径通过课本定理 2 很容易计算出来$R=1$，而当$x=\pm1$时一般项不趋于 0，所以收敛域即为$(-1,1)$，在收敛区间内

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\frac{x^2}{1-x}+\ln(1-x)+x=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)$$

十、 先考虑，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}\mathrm{d}x$，因为$\frac{1}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}\le\frac{1}{x^2}$且$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，故$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}\mathrm{d}x$收敛，另一方面考虑瑕积分$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}\mathrm{d}x$，瑕点$x=1$处，$\frac{\frac{1}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}\to1$,再由$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$收敛可知$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}\mathrm{d}x$也收敛，因此本题广义积分收敛

十一、 利用比较判别法容易证明本题积分是收敛的。然后注意到$\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}=\int_2^3\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$,且无穷限积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x$在$t\in[1,2]$一致收敛（$|\mathrm{e}^{-xt}|\le\mathrm{e}^{-x},\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛再用 M 判别法得证），且函数$\mathrm{e}^{-xt}$在$[0,+\infty)\times[2,3]$显然连续，从而积分可以交换次序，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_2^3\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_2^3\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_2^3\left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\right]\Bigg|_0^{+\infty}\mathrm{d}t$$

$$=\int_2^3\frac{1}{t}\mathrm{d}t=[\ln t]|_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$$

十二、 正弦级数即是对原始函数进行奇延拓并得$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$

且$b_n=2\int_0^1(x^2+1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{n\pi}(x^2+1)\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-2\cdot(-1)^n]+\frac{4}{n^2\pi^2}x\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-2\cdot(-1)^n]+0+\frac{4}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{n\pi}[1-2\cdot(-1)^n]+\frac{4}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]$$

因$f(x)$在$(0,1]$的连续，故展成正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n\pi}[1-2\cdot(-1)^n]+\frac{4}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin n\pi x=f(x),x\in(0,1]$

十三、 柯西收敛原理：$g(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$在$y\in Y$上一致收敛的充分必要条件为$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall 0<\delta_1,\delta_2<\delta,y\in Y,\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$

证明过程：必要性：$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$在$y\in Y$上一致收敛，则$\forall\epsilon>0,\exists\delta(\frac{\epsilon}{2})>0$，$\forall 0<\delta_1,\delta_2<\delta,y\in Y$，$\left|\int_a^{a+\delta_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\epsilon}{2}$且$\left|\int_a^{a+\delta_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\epsilon}{2}$，因此

$$\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_a^{a+\delta_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{a+\delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$，必要性得证

充分性：设$\forall\epsilon>0,\exists\delta(\frac{\epsilon}{2})>0,\forall 0<\delta_1,\delta_2<\delta,y\in Y,\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\epsilon}{2}$.因为本题已经假设了$g(y)$的点点收敛，故$\forall y\in Y$, 令$\delta_1\to 0$,有

$$\epsilon>\frac{\epsilon}{2}\ge\left|\int_{a+0}^{a+\delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{a+\delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|$$

重新描述上式，即$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall 0<\delta_2<\delta,y\in Y$,都有$\left|\int_a^{a+\delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon$，

由δ不由y的取值决定，可知$g(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$在$y\in Y$上一致收敛，充分性得证■