高数一（下册）模拟期中考试答案与方法提示

一、 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^{1}\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-1$

二、 $\iint_D\frac{|x|+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{|x|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_{1/2}^{1}\int_0^{\pi/2}\frac{r\cos\theta\cdot r}{r^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\left(\textit{由四象限}|\cos\theta|\textit{对称性得到}\right)=2$

三、 （I）本题可以用投影法，也可以直接用球坐标计算（注意到锥面对应$\varphi=\frac{\pi}{6}$）。

$$\iiint_\Omega dV=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho=2\pi\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$$

（II）面积分为上底曲面面积与下底曲面面积，曲面面积微元比值分别为$\sqrt{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{3x^2+3y^2}}\right)^2+\left(\frac{3y}{\sqrt{3x^2+3y^2}}\right)^2}=2$

与$\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.投影区域$D:x^2+y^2\le\frac{1}{4}$故表面积为

$$\iint_D 2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot S_D+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}+2\pi\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{2}\pi-\sqrt{3}\pi$$

四、 因$\frac{\partial(ax^2y+\mathrm{e}^y)}{\partial y}=ax^2+\mathrm{e}^y=3x^2+b\mathrm{e}^y=\frac{\partial(x^3+b(x+1)\mathrm{e}^y)}{\partial x}$,比对可知$a=3,b=1$.

原函数为$u(x,y)=x^3y+(x+1)\mathrm{e}^y$

(在原函数写与不写$+C$都对)

五、 （I）本题使用广义极坐标变换$x=R\cos\theta\,,y=2R\sin\theta\,,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$\int_L\frac{xy^2}{\sqrt{16x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4R^3\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{16(R\cos\theta)^2+(2R\sin\theta)^2}}\cdot\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(2R\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2R^3\sin^3\theta}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4R^3}{3}$$

（II）本题应构造$L_1^+:x=0,y:2R\to-2R$,向下的路径,$x'(y)\equiv0$。两条曲线围成闭合区域为右半椭圆。结合格林公式与第二型曲线积分可加性，有：

$$\int_{L^+}(\cos x\,\mathrm{e}^y+2xy^2-y)\mathrm{d}x+(\sin x\,\mathrm{e}^y+2x^2y)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L^++L_1^+}(\cos x\,\mathrm{e}^y+2xy^2-y)\mathrm{d}x+(\sin x\,\mathrm{e}^y+2x^2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1^+}(\cos x\,\mathrm{e}^y+2xy^2-y)\mathrm{d}x+(\sin x\,\mathrm{e}^y+2x^2y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{2R}^{-2R}\sin0\,\mathrm{e}^y+2\cdot0^2\cdot y\mathrm{d}y=S_D=\pi R^2$$

六、 （I）本题为第一型曲面积分，需要考虑四个曲面$S_1:x=0,S_2:y=0,S_3:z=0,S_4z=1-x-y$.对$S_1$投影区域$D_{yz}:0\le z\le1,0\le y\le1-z$，对$S_2$投影区域$D_{xz}:0\le z\le1,0\le x\le1-z$对$S_3,S_4$的投影区域$D_{xy}:0\le x\le1,0\le y\le1-x$.计算如下(第一步使用了轮换对称性)：

$$\oiint_S x+y+z\mathrm{d}S=3\oiint_S z\mathrm{d}S=3\left[\iint_{S_1}z\mathrm{d}S+\iint_{S_2}z\mathrm{d}S+\iint_{S_3}z\mathrm{d}S+\iint_{S_4}z\mathrm{d}S\right]$$

$$= 3\left[\iint_{D_{yz}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{D_{xz}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{D_{xy}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} (1-x-y)\cdot\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= 3\left[\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}y + \int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x + 0 + \sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y\right]$$

$$= 3\left[\int_0^1 z - \mathrm{z}^2\mathrm{d}z + \int_0^1 z - \mathrm{z}^2\mathrm{d}z + \sqrt{3}\int_0^1 1-2x+x^2-\frac{1}{2}(1-2x+x^2)\mathrm{d}x\right]$$

$$= 3\times\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\sqrt{3}\times\frac{1}{6}\right] = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

本题还可以利用另一种对称性来更简便的计算为（注意到S_1,S_2,S_3关于$x+y+z$的某种轮换对称性）：

$$\oiint_S x+y+z\mathrm{d}S = 3\iint_{S_3} x+y+z\mathrm{d}S + \iint_{S_4} x+y+z\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} 3x+3y+\sqrt{3}(1-x-y+x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（II）本题为第二型曲面积分，可直接应用高斯公式：

$$\oiint_{S^+}(x^2,y^2,z^2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega 2x+2y+2z\,\mathrm{d}V = 6\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\int_0^1 z\frac{(1-z)^2}{2}\mathrm{d}z = 6\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

七、 令$u=\frac{y}{x}$，则方程转化为$y'=u'x+u=\tan u+u$，即$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，可得$\ln|\sin u|=\ln|x|+C$,即通解为$\sin\frac{y}{x}=Cx(C\neq 0)$.注意到$\tan u=0$,即$\tan\frac{y}{x}\equiv 0$，$y=k\pi x,k\in\mathbb{Z}$是方程的奇解。但此情况恰好对应通解表达式中$C=0$的情况，故所有解可以直接用$\sin\frac{y}{x}=Cx$表示。（描述清楚即正确）

八、 本方程为伯努利方程。令$z=\frac{1}{y^2}$,方程可化为一阶线性方程$z'-2\frac{z}{x}=2\ln x$，用常数变易法可以得到其通解为$z=Cx^2-2\ln x\cdot x-2x$,因此原方程通解为$\frac{1}{y^2}=Cx^2-2\ln x\cdot x-2x$.（此通积分问题无需考虑奇解$y\equiv 0$）

九、 本方程为常系数二阶线性方程，对应齐次通解$y_0=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}$.

用待定系数法可以得到$y''+y'-2y=\mathrm{e}^x$的特解为$y_1=\frac{1}{3}x\mathrm{e}^x$,

而 $y''+y'-2y=\sin x$的特解为$y_2=-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x$.

因此原方程的通解为$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{3}x\mathrm{e}^x-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x$.

十、 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=k_1y_1(x)+(1-k_1)y_2(x)=k_1\big(y_1(x)-y_2(x)\big)+y_2(x)$

首先代入验证此表达式确实为非齐次一阶线性方程的解（3 分）

然后k_1为唯一的任意常数，且$y_1(x)-y_2(x)\neq 0$，符合通解的表达式。

最后设$y^*(x)$为任意的方程特解，因为$y^*(x)-y_2(x)$为对应齐次线性方程的特解，根据一阶线性方程解的结构，当$y_1(x)-y_2(x)\neq 0$时，存在$C\in\mathbb{R}$,使得$y^*(x)-y_2(x)=C(y_1(x)-y_2(x))$,

即$y^*(x)=C\big(y_1(x)-y_2(x)\big)+y_2(x)$符合题设的形式。因此题设表达式包含了所有解，证毕。

（直接根据线性微分方程通解包含所有解来论述结果也算正确）