



五、搞懂 Dilworth 定理的证明（参见 ppt）并思考下述问题。

注：本题为思考题。不需要提交。

思考题一、序列拆分

问题描述：给定一个整数序列，如何把它分成最少个数的“不上升子序列”。

题解：

1 利用 Dilworth 定理，转化为求最长反链。那就是求最长上升子序列了。

2 利用 Dilworth 的对偶定理 Minsky 定理来解决本问题，转化为求最长上升子序列。

3 如果我们没学过 Dilworth 其实也可以找到  $O(N\log N)$  的贪心算法。请 wiki “patience sorting”算法。在找到一个最长上升子序列的同时，还把数组分成了相应个数最长不上升子序列。

思考题二、(DAG 的另一种最小路径覆盖——覆盖所有边，而不是覆盖所有点)

问题描述：给定一个 DAG，选最少的路径，使得每条边都被至少一条路径覆盖。

注意：这个问题中，我们的要求是“至少一条”；而不是“恰好一条”。

题解：

把边看作一个元素，这样可以构造一个偏序集  $(E, \leq)$ 。

如果某条边  $e_1$  可以通过路径链接到  $e_2$ ，则称  $e_1 \leq e_2$ 。

上面这个路径覆盖问题 恰好转化为 偏序集  $(E, \leq)$  上的最小链剖分问题。