2010 级高数一上册期中考试参考解答

一.求下列极限(6’×4=24’)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$;

解:原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{1-\cos 2x}$;　　解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4-x^2)-4}{2\sin^2 x(\sqrt{4-x^2}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{2x^2(\sqrt{4-x^2}+2)}=-\dfrac{1}{8}.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2+3)^2(3x+2)^4}{(6x^2-7)^5}$;　　解:原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{3}{x^2}\right)^3\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^4}{\left(6-\dfrac{7}{x^2}\right)^5}=\dfrac{4^3\cdot 3^4}{6^5}=\dfrac{2}{3}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.　　解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2}{1-x}}=e^2.$

二. 求下列导数(12’×2=24’)

(1) 设函数 $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{2}\arctan x$, 求 y'.

解:因 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$, 得 $-1<x<1$, 而 $y=\dfrac{1}{4}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]-\dfrac{1}{2}\arctan x$,　故

$$y'=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1-x^4}.$$

(2) 设隐函数 $y(x)$ 由方程 $y=xe^y+1$ 定义, 求 $y''(0)$.

解:对方程两边求导, 得 $y'=e^y+xe^y y'$, 由此解得 $y'(x)=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$.………………①

显然 $y(0)=1$. 在①中令 $x=0$, 即得 $y'=y'(0)=e$.

在①式两边在求导数，得

$$y''(x)=\frac{e^y y'\cdot(1-xe^y)-e^y(-e^y-xe^y y')}{(1-xe^y)^2}=\frac{e^y y'+e^{2y}}{(1-xe^y)^2}, \text{于是 } y''(0)=2e^2.$$

三．求如下积分（7’×4＝28’）

(1) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$;

解：　　原式$=\int x\sec^2 xdx=\int xd\tan x=x\tan x-\int\tan xdx=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=x\tan x+\int\frac{1}{\cos x}d\cos x=x\tan x+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　解：原式 $\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int\frac{2t}{1+t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2t-2\ln(1+t)+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$

(3) $\int_1^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}$;　解：因 $2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$,故可设 $\frac{1}{2x^2+3x-2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}$,

利用待定系数法, 可求得 $A=\frac{2}{5},B=-\frac{1}{5}$.于是

$$\int_1^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}=\frac{2}{5}\int_1^3\frac{dx}{2x-1}-\frac{1}{5}\int_1^3\frac{dx}{x+2}=\frac{2}{5}\ln(2x-1)\Big|_1^3-\frac{1}{5}\ln(x+2)\Big|_1^3=\frac{1}{5}\ln 3.$$

(4) $\int_0^1\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解：　原式$=\int_0^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]=\frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left[\ln(1+\sqrt{2})\right]^2.$

四.（14’）设数列$\{x_n\}$适合$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\le r<1$,其中 r 是给定实数,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

证：显然 $x_n\ne 0,n=1,2,\cdots$, 且由题设知 $0\le\left|x_{n+1}\right|\le r\left|x_n\right|\le r^2\left|x_{n-1}\right|\le r^3\left|x_{n-2}\right|\le\cdots\le r^n\left|x_1\right|$.

而由 $0\le r<1$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_1\right|r^n=0$. 由夹逼定理即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n\right|=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

五.(10’)设函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续,且 $f(a)=f(b)=1$, 若 $f'(a+0)\cdot f'(b-0)>0$, 求证:

在区间(a, b)内至少存在一点 ξ ,满足 $f(\xi)=1$.

证：由题设知 $f'(a+0), f'(a-0)$ 同号,不妨设 $f'(a+0)>0, f'(b-0)>0$, 即 $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$,

由函数极限的保号性,知有 a 的一个右邻域$(a,a+\delta)$, 使得对一切 $x\in(a,a+\delta)$,都有

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 从而有 $x_1\in(a,a+\delta)\subset[a,b]$, $f(x_1)>f(a)=1$.

　　考虑 $f'(b-0)>0$, 用同样方法可证，从而有 $x_2\in(b-\delta,b)\subset[a,b]$, $f(x_2)<f(b)=1$.

于是在闭区间$[x_1,x_2]$上, $f(x)$连续, 1为$f(x_1), f(x_2)$的介值, 从而必有$\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$, 使得$f(\xi)=1$.