

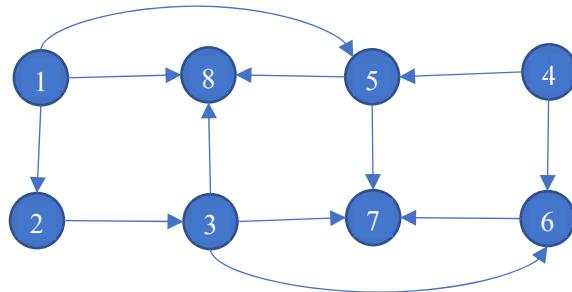
本次作业每题 25 分。共计 100 分。

一、请找到下图的“**最小路径覆盖**”。

(用最少个数的路径覆盖所有顶点，每个顶点恰属于一条路径。)

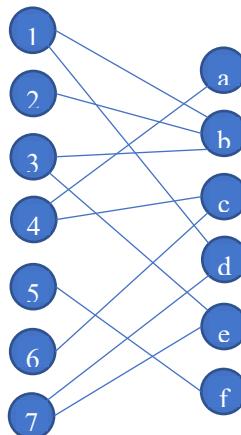
要求按如下计算过程，写出每一步的结果。

- (1) 转化为某个二分图 G' 的最大匹配，画出 G' 。
- (2) 求出 G' 的最大匹配 M 。
- (3) 找到原图对应 M 的最小路径覆盖。



二、找出下图的“**最小顶点覆盖**”。即，寻找一个顶点集合 X 覆盖所有的边（每条边至少有一个端点属于 X ）且 $|X|$ 最小。需按步骤计算，每步结果用一个图片单独展示。

- (1) 求出此图最大匹配 M 。(图片 1 请展示 M)
- (2) 尝试找 M 的交错轨道并得到集合 S 。(图片 2 请展示 M 对应的 S)
- (3) 根据 S 和 M 计算得到最小点覆盖 X (图片 3 请指出哪些点属于 X)



三、请利用最大匹配算法，来填完如下 Latin 矩阵的最后 3 行。

你只需要说明倒数第 3 行 与 倒数第 2 行是如何构图的。

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
4	6	1	2	3	5
?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	?

四、已知在某次循环赛中，选手 ABCDE 分别赢了 2 3 2 2 1 场。

请利用最大匹配算法，找出一种可能的胜负关系图。

需要指出是如何构图。然后画出图中最大匹配。最后再画出对应的胜负关系图。

五、搞懂 Dilworth 定理的证明（参见 ppt）并思考下述问题。

注：本题为思考题。不需要提交。

思考题一、序列拆分

问题描述：给定一个整数序列，如何把它分成最少个数的“不上升子序列”。

- 1 利用 Dilworth 定理，转化为最长反链。那就是求最长上升子序列。
- 2 利用 Dilworth 的对偶定理 Minsky 定理来解决本问题，转化为求最长上升子序列。
- 3 如果我们没学过 Dilworth 其实也可以找到 $O(N \log N)$ 的贪心算法。请 wiki “patience sorting”算法，在找到一个最长上升子序列的同时，还能数组分成相应个数最长上升子序列。

题解：

思考题二、(DAG 的另一种最小路径覆盖——覆盖所有边，而不是覆盖所有点)

问题描述：给定一个 DAG，选最少的路径，使得每条边都被**至少一条**路径覆盖。

注意：这个问题中，我们的要求是“**至少一条**”；而不是“**恰好一条**”。

- 上面这个路经覆盖问题 做好转化为厂 链序集(E, \leq) 上的最小链剖分问题。
- 如果某条边 e_1 可以通过路经链接到 e_2 ，则称 $e_1 \leq e_2$ 。
- 把边看作一个元素，这样可以构造一个链序集(E, \leq)。

题解：