2004年10月 第21卷第5期
沈阳航空工业学院学报
Journal of Shenyang Institute of Aeronautical Engineering
Oct. 2004 Vol. 21 No. 5

文章编号:1007－1385(2004)05－0092－02

级数证明问题的几种处理方法

孟祥彦[1]　高建福[2]
(1. 沈阳航空工业学院理学系,辽宁 沈阳 110034;2. 安徽财贸学院基础部,安徽 蚌埠 233041)

摘　要:通过有关级数证明的几个例题,提出了思考和分析问题几种常用的方法。特别是对一般项为抽象形式的级数证明,更要思路开阔,根据所给的条件确定解决问题的不同方法。在级数的一般项中含有参数时,要对参数取值的不同情况进行讨论,才能得到完整的结果。最后介绍了一致收敛性质在证明问题中的应用,尤其当级数的一般项由定积分表示时,一致收敛级数的逐项微分、逐项积分的性质经常会用到。

关键词:级数;收敛;发散;一致收敛
中图分类号:O174.51　　**文献标识码**:A

1　用不同的方法解所提出的问题

在级数的证明问题中,由于题型复杂,定理较多,因此做起来有一定困难。有时,在证明级数的敛散性时要从不同的角度出发,采用不同的方法、定理去证明。看下面一个具体例子。

设 $a_n > 0, s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 发散。

证明:先证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛

实际上,由 $a_n > 0$ 知 $s_n > s_{n-1}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ 由此得到 $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{s_n} = 0$. 此时

$$0 < \frac{a_n}{s_n^2} < \frac{a_n}{s_n s_{n-1}} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \quad (n \geq 2) \qquad (1)$$

令 $T_n = (\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}) + (\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}) + \cdots + (\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}) = (\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_n})$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{s_1} = \frac{1}{a_1}$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n})$ 收敛。从(1)式,由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}$ 收敛[1]。

其次,我们证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ 故知,对于任意的自然数 N,存在自然数 m,当 $m > N$ 时 $s_m > 2s_N$,此时

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \frac{a_{N+2}}{s_{N+2}} + \cdots + \frac{a_m}{s_m} > \frac{1}{s_m}(a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_m) = \frac{1}{s_m}(s_m - s_N) = 1 - \frac{s_N}{s_m} > \frac{1}{2}$$

因此由柯西收敛准则知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ 发散。

本问题的解决过程中,应用了两种不同的方法。证收敛时用的是正项级数的比较判别法。证发散时用的是柯西收敛准则。这说明在论证某些结论时,有时要运用不同的概念和解决方法[1,2]。

通过本题的证明,有理由猜测:$a_n > 0, s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛,$p \leq 1$ 时发散。

2　由特殊到一般的方法

(一般项中相关量的讨论)

在级数的一般项中,有时含有参数,这时我们要特别注意对参数的可能取值进行讨论。

设 $\{a_n\}$ 是单调增,趋于无穷的正数列,记 $u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^p a_{n+1}}$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $p \geq 1$ 时收敛。

收稿日期:2004－09－09
作者简介:孟祥彦(1948－),男,沈阳辽中人,副教授

证明:当 $p = 1$ 时

$$u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

此时记 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$

由 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$ 知 $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{a_1}$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

当 $p > 1$ 时,由条件知,存在 N,当 $n > N$ 时,$a_n \geq 1$,因此时 $a_n^p \geq a_n$ 且

$$0 \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^p a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} \tag{2}$$

但上面已证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}}$ 收敛。故从(2)式,由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}}$ 在 $p > 1$ 时也收敛。综合起来便知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $p \geq 1$ 时是收敛的。

又如,判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3}$ 的敛散性,也必须对一般项中的相关量 a,就 $|a| \leq 1$,$|a| > 1$ 的情形分别进行讨论,才能得到完整的结果。

3　一致收敛性质的应用

函数项级数一致收敛的定义和性质在级数的证明问题中经常会用到,尤其是级数一般项由定积分表达的[2,3]。

证明　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^2 (1 - x)^n dx$ 收敛。

证明:本问题所研究的级数的通项是由定积分表示的。论证思想是想办法把和号与积分号交换顺序。

事实上,令 $f(x) = x^2 (1 - x)^n \quad x \in [0,1]$ 应用微分法可得

$$x^2 (1 - x)^n \leq \frac{4}{n^2} \quad x \in [0,1] \tag{3}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ 收敛。故从(3)式,由 M 判别法便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1 - x)^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。于是由逐项积分定理有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^2 (1 - x)^n dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1 - x)^n\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 (1 - x)}{1 - (1 - x)} dx = \frac{1}{6}$$

上式计算中运用了

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1 - x)^n = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - x)^n = x^2 \frac{1 - x}{1 - (1 - x)}$$

$$= x(1 - x) \quad (|1 - x| < 1)$$

下面再来讨论一个有趣的问题,仍运用一致收敛的性质[4]。

证明　$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x} dx$

证明:由于

$$x^{-x} = e^{-x\ln x}$$

$$= 1 - x\ln x + \frac{1}{2!}(x\ln x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-x\ln x)^n + \cdots$$

且在 $[0,1]$ 上一致收敛。因而

$$\int_0^1 x^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x\ln x)^k \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k (\ln x)^k dx$$

应用分部积分法可得

$$\int_0^1 x^k (\ln x)^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\left[x^{k+1} (\ln x)^k \Big|_0^1 - k\int_0^1 x^k (\ln x)^{k-1} \mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{k}{k+1}\int_0^1 x^k (\ln x)^{k-1} \mathrm{d}x = \frac{k(k-1)}{(k+1)^2}\int_0^1 x^k (\ln x)^{k-2} \mathrm{d}x$$

注意到 $\int_0^1 x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$ 递推可得

$$\int_0^1 x^k (\ln x)^k \mathrm{d}x = (-1)^k \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$$

于是

$$\int_0^1 x^{-x} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k (\ln x)^k \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

参考文献:

[1]徐利治,王兴华. 数学分析的方法及例题选讲[M]. 北京:高等教育出版社,1984

[2]华东师范大学数学系. 数学分析[M](第三版). 北京:高等教育出版社,2002

[3]复旦大学数学系. 数学分析[M]. 上海:上海科学技术出版社. 1962

[4][美]莫里斯. 克莱因著,万伟勋,石生明,等译. 古今数学思想[M]. 上海:上海科学技术出版社. 2002

(下转第 3 页)

模糊运算,将故障准确定位到电路模块上。实践证明,该算法简化了电路模块的故障诊断,有效减少检测时间,大大提高了工作效率。

参考文献:

[1]周东华,叶银忠.现代故障诊断与容错控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000
[2]宝音贺喜格,黄文虎,姜兴渭.设备故障诊断的关联矩阵方法研究[J].振动与冲击, 1999
[3]张涵士,何正嘉. 模糊诊断原理及应用[M].西安:西安交通大学出版社,1992
[4]阮跃,徐世昌,黄文虎. 旋转机械振动的动态模糊诊断[J].发电设备,1997(5)

The fuzzy diagnosis of X-type disturbance bomb throwing device's malfunction

XU Jin[1] ZHAO Wen-cheng[1] HU Li-fu[1] ZHANG Jun-yong[2] GUO Zhong-wei[2] TAO Ping[3]
(1. Department of Automatic Control, Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, Liaoning Shenyang 110034; 2. 93115 Army, Liaoning Shenyang 110034; 3. Shenyang Product Quality Supervision & Test Institute, Liaoning Shenyang 110021)

Abstract: Airplane disturbance bomb, which can disturb the enemy's missilery control, guide radar and infrared tracing system, played an important role in electronic war. So the detecting of its thrower is significant. Through analyzing the output pulse wave fuzzy diagnose method was used to find the faults assembly and vector and relation matrix was built. By fuzzy calculating to the fault vectors, the fault on a certain circuit module is located and the reason of fault will be found. It has been proved by practising that it can find out more faults, deduce the testing time and enhance the working efficiency in this way.

Keywords: fuzzy diagnosis; disturbance bomb throwing device; circuit module

(上接第 93 页)

Several methods of the series certification in series

MENG Xiang-yang[1] GAO Jian-fu[2]
(1. Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, Liaoning Shenyang 110034; 2. Anhwei Institute of Finance and Trade, Bengbu Anhui 233041)

Abstract: Through some examples concerning the series certification, this thesis brings about several common ways of dealing and analyzing the problems. Clue should be broaden especially for the series certification, with the abstract form as the common term, different solutions can be worked out according to different condition when the common term contains parameter, only by discussing different condition on the value of the parameter, we can get the completely result. Finally, the thesis introduced the application of the uniform convergerce propery in the certification, which is frequently used in successive derivative and successive terms integration when the common term is expressed by definite integral.

Keywords: series; convergence; divergence; uniform convergence