珠海校区 2009 学年度第二学期 09《高等数学》期中考试试题参考答案

⑴ 求满足条件 $du=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的函数 $u(x,y)$.

解 : $P(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},Q(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 而 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^y\frac{y}{|y|}dy+\int_0^x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=|y|+\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^x=\sqrt{x^2+y^2}.$$

⑵ 计算累次积分: $I=\int_0^1dy\int_y^1\sin x^2dx.$

解: $I=\int_0^1dy\int_y^1\sin x^2dx=\int_0^1dx\int_0^x\sin x^2dy=\int_0^1x\sin x^2dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\sin x^2d(x^2)=\dfrac{1}{2}(1-\cos1).$

⑶ 若 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(x^2+xye^{x^2+y^2}\right)dxdy.$

解:由对称性, $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy=0.$ 故

$$\iint\limits_D\left(x^2+xye^{x^2+y^2}\right)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}r^2\cos^2\theta rdrd\theta=\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\cdot4\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

⑷ 求第一型曲线积分 $I=\int_C|y|ds$, 其中 C 是单位圆周 $x^2+y^2=1$.

解:由对称性,若记上半圆周为 C_1,有

$$I=2\int_{C_1}|y|ds=2\int_{C_1}yds=2\int_0^{\pi}\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=2(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=4.$$

⑸ 若 C 是圆周 $x^2+y^2=2x$, 逆时针方向,求第二型曲线积分 $I=\oint\limits_C e^ydx+(xy^3+xe^y-2y)dy.$

解: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^3+e^y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=y^3.$ 由格林公式, $I=\iint\limits_D y^3dxdy.$

但积分区域 D 关于 x 轴对称,被积函数为 y 的奇函数,故 $I=0$.

⑹ 若函数 $F(t)=\int\limits_1^t dy\int\limits_y^t e^{x^2}dx$, 求 $F'(2)$.

解: 因为 $F(t)=\int\limits_1^t dy\int\limits_y^t e^{x^2}dx=\int\limits_1^t dx\int\limits_1^x e^{x^2}dy=\int\limits_1^t(x-1)e^{x^2}dx.$ 于是

$$F'(t)=(t-1)e^{t^2}.\quad F'(2)=(2-1)e^{2^2}=e^4.$$

⑺ 求由圆柱面 $x^2+y^2=3$ 与抛物面 $z=3+x^2+y^2$ 及 $z=1-x^2-y^2$ 所围立体的体积.

解: $\Omega=\{(x,y,z):1-x^2-y^2\le z\le 3+x^2+y^2,x^2+y^2\le 3\}$.用柱坐标,

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_{1-r^2}^{3+r^2}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}2r(1+r^2)dr$$

$$=4\pi\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=15\pi.$$

⑻ 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(\sin x+z)dV$,其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=3$ 所围闭区域.

解: $$I=\iint\limits_{D}dxdy\int_{x^2+y^2}^{3}(\sin x+z)dz=\iint\limits_{D}dxdy\int_{x^2+y^2}^{3}zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_{r^2}^{3}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(9-r^4)rdr=\pi\left(\frac{9}{2}r^2-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=9\pi.$$

⑼ 求曲线积分 $\oint_L\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$,其中曲线 L 方程为 $x^2+(y-1)^2=4$,逆时针方向.

解: $P=\frac{x-y}{x^2+4y^2},Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2+4y^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.但在坐标原点,此条件不成立.记

$l:x^2+4y^2=r^2$,顺时针方向,则在 $(L+l)^+$ 所围区域内,格林公式成立,即

$$\oint_{(L+l)^+}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=0,\text{故}\oint_L\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\oint_l\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2},$$

$$\overset{\substack{x=2r\cos\theta\\y=r\sin\theta}}{=}\int_0^{2\pi}\frac{(2r\cos\theta-r\sin\theta)2r(-\sin\theta)+(2r\cos\theta+4r\sin\theta)r\cos\theta}{4r^2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi.$$

⑽ 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}xz^3dydz+yz^3dzdx+2dxdy$.其中 S^+ 为上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$,取上侧.

$P=xz^3,Q=yz^3,R=2$.作平面 z=0,记平面和半球面所围区域为 Ω,取外侧,由高斯公式

$$\iint\limits_{(S+D)^+}xz^3dydz+yz^3dzdx+2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}2z^3dV=2\iint\limits_{D}dxdy\int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^3dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)rdr=\pi\left(2r^2-r^4-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}\pi.$$

故 $$I=\iint\limits_{(S+D)^+}xz^3dydz+yz^3dzdx+2dxdy+\iint\limits_{D^+}2dxdy=\frac{4}{3}\pi+4\pi=\frac{16}{3}\pi.$$