

# 高数（一）上学期期中试题

一. 求下列极限（每小题 5 分，共 20 分）

1. 设  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ , (1) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, (2) 证明  $\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+1}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$  ( $m, n$  是自然数).

二. 求下列函数的导数（每小题 5 分，共 15 分）

1.  $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ ,
2.  $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ ,
3.  $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 = 5, \end{cases}$  求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

三. 求下列积分（每小题 6 分，共 30 分）

1.  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ ,
2.  $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$ ,
3.  $\int \frac{1}{x^2(1+x)} dx$ ,
4.  $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$  ( $a > 0$ ),
5. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$  求  $\int_1^5 f(x-3) dx$ ,

四. (12 分) 设  $f(x)$  为正值的连续函数, 且  $f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$ , 求  $f(x)$ 。

五. (13 分) 证明: 若  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 且  $f(0) = f(2a)$ , 求证: 至少存在一点

$$\xi \in [0, a], \text{ 使得 } f(\xi) = f(\xi + a).$$

六. (10 分) 证明:  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} dx \leq \frac{\pi}{12e}$  提示:  $\frac{\sin x}{e^x} \leq \frac{1}{e}, \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{12}$ .