利用重积分证明定积分不等式*

王金金　马　华　(西安电子科技大学　西安　710071)

摘要　利用重积分与定积分的关系,举例说明利用重积分证明定积分不等式。

关键词　重积分;定积分;不等式　　中图分类号　O172.2

重积分化为定积分来计算,这是众所周知的事实,但反之,定积分的乘积往往又可化为重积分,将定积分不等式的证明化为重积分不等式来证明,也是一种常用方法。我们通过例子来说明这种方法。

例 1　设 $f(x)$是$[0,1]$上的正值连续函数,且 $f(x)$单调递减,证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证　将不等式变形为 $\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \le \int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$ 或 $\iint\limits_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le 0$,其中 D 为:$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$. 由轮换对称性知

$$\iint\limits_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D yf(y)f(x)[f(y)-f(x)dxdy] =$$

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $f(x)$单调递减,故$(x-y)[f(x)-f(y)]\le 0$,而 $f(x)>0$, $f(y)>0$,由二重积分性质知,$\iint\limits_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le 0$,故原不等式成立。

例 2　设函数 $f(x)$, $g(x)$在$[a,b]$上连续且单调增,证明:

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证　设 $A=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=$

$$\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(y)\mathrm{d}y=$$

$$\iint\limits_D f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad D: a\le x\le b, a\le y\le b$$

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称,故又有 $A=\iint\limits_D f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,所以 $2A=\iint\limits_D [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,由 $f(x)$, $g(x)$的单调性知$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\ge 0$,于是 $A\ge 0$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(下转第 37 页)

* 收稿日期:2003-10-20

显然, 将以上各等式右边的第二项系数 $-\frac{1}{2}$ 换成 $\frac{1}{2}$, 就得到相应的前 n 项幂和公式。

上述矩阵算法令人惊奇地给出了二项系数与伯努利数之间的关系。

参考文献

[1] 贾利新. $\sum_{r=1}^{k-1} r^n$ 的行列式算法. 高等数学研究, 1992, 2(2): 17—18.

(上接第 33 页)

解　$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, Σ 在 xOy 面上的投影区域: $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$, 又 Σ 取下侧, $z_x=x$, 故由公式(5)得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left[r^2\cos^2\theta+\frac{r^2}{2}\right]r\mathrm{d}r=8\pi$$

方法四　利用高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v \tag{6}$$

解　曲面不是封闭曲面, 不能直接利用高斯公式, 应补面 Σ_1: $z=2$ 的上侧, 则由高斯公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}v=0$$

所以
$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又
$$\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi$$

所以
$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi$$

(上接第 34 页)

例 3　证明不等式　$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)<\left[\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2$

证　记 $I=\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. 因为 $I^2=\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint_{D_2}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D_1: $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$;　D_2: $x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0$, 而 $\iint_{D_2}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$, 所以

$$I^2=\left[\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2>\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$