中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》（A 卷）

学年学期：2018 学年第 1 学期　　姓　　名：________　学　　号：________

学 院/系：数学学院　　学　　院：________　年级专业：________

考试方式：闭卷　　任课教师：________

考试时长：120 分钟　　成绩评定：________　阅卷教师：________

警示：《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。

———— 以下为试题区域，共 8 页，共 7 道大题，总分 100 分，考生请在试卷上作答 ————

得分

一、填空题（共 9 小题，第 2、8、9 小题每空 2 分，其余每小题 3 分，共 32 分）

1. 排列 4321 是 ________.（填入"奇排列"或"偶排列"）

2. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则 $A^T=$ ________，$A^{-1}=$ ________.

3. 设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|2A^*|=$ ________.

4. 设 A 列数为 3，$R(A)=2$，且方程组 $Ax=b$ 有两个不相等的特解 η_1,η_2，则其通解为 ________.

5. 设 A 为 n $(n\geq 2)$ 阶矩阵且 $R(A)=n-2$，则 $R(A^*)=$ ________.

6. 已知 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $0,1,-1$，则 $|A^2+A-2E|=$ ________.

7. 设有向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$，则向量组

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$$

的线性关系是 ________.（填入"线性相关"、"线性无关"或"不能确定"）

8. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵且 $m>n$，则矩阵 $C_1=AB$ ________，矩阵 $C_2=BA$ ________.（填入"不可逆"、"可逆"或"不能确定"）

9. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 A 的特征值有 ________，对应的特征向量是 ________，矩阵 A ________ 对角化.（填入"可"或"不可"）

得分

二、(共 8 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

得分

三、(共 8 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

得分

四、(共 10 分) 设有向量组 A:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

求 A 的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

得分

五、(共 10 分) 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}.$$

求出此方程的通解并写出其对应的齐次方程组的一个基础解系.

得分

六、(共 10 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (共 6 分) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

2. (共 4 分) 求 A^n, 其中 n 是正整数.

得分

七、(共 22 分)

1. (共 14 分) λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

(1) 无解；(2) 有唯一解并求出方程的解；(3) 有无限多解并求出方程的通解.

2. (共 8 分) 考虑二次型

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

求正交变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 使得 $f(y) = f(y_1, y_2, y_3)$ 是标准形.