

东校区 2009 学年度第一学期 09 级

《高等数学一》期中考试题

一、求下列极限（每小题 7 分，共 28 分）

$$1、\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$$

$$2、\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$$

$$3、\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{x+2}$$

$$4、\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

二、完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

$$1、\text{设 } y = x\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ 求 } y'.$$

$$2、\text{设 } y = \frac{\sin e^x}{1+x^2}, \text{ 求 } dy.$$

$$3、\text{已知 } ye^x + \ln y = 1, \text{ 求 } y'(0).$$

$$4、\text{设} \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

三、求下列积分（每小题 7 分，共 28 分）

$$1、\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx$$

$$2、\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, (a > 0)$$

$$3、\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$$

$$4、\int_0^1 \arctan x dx$$

$$\text{四、(6 分) 证明: } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} dx \leq \frac{\pi}{12e}$$

五、(5分) 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a>0$) 绕x轴旋转构成的旋转体的体积。

六、(5分) 证明：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = f(b) = k$, $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$, 则在 (a, b) 内至少有一点 ε , 使 $f(\varepsilon) = k$ 。