重积分在积分不等式证明中的应用

黄云美

(泰州学院，泰州 225300)

摘　要:重积分在积分不等式的证明中占据了重要的地位,笔者例举了利用重积分证明积分不等式的四种方法,并将这四种方法应用于积分不等式的证明。

关键词:二重积分；定积分；积分不等式；均值不等式

中图分类号:O172.2　　文献标识码:A　　文章编号:1671-9131(2014)03-0027-07

Applications of the Proof on the Integral Inequality by Double Integral

HUANG Yun-mei

(School of Taizhou University,Taizhou 225300, China)

Abstract:Double integral plays an important part in the proof of integral inequality. In this paper, four ways are presented to solve the problems of integral by means of double integral, and these four ways are applied to the proof of integral inequality.

Key words: double integral; definite integral; integral inequality; AM-GN inequality

0　引　言

在一些积分不等式的证明中,被积函数不确定,因此不能求出具体数值,这时可以将一元积分式转化为二元积分式,再结合二重积分的性质或结合均值不等式等方法进行证明。

1　重积分在不等式中的应用

1.1　应用一:直接增元法

命题一：若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geqslant g(x)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ $f(x),g(x)$ 为变限积分。

证明　令 $F(x)=f(x)-g(x)$,则 $F(x)\geqslant 0$,即 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

由此可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

所以有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

命题得证！

此命题看上去非常的简单,但是在应用中非常有技巧性,用此命题来证明下面的不等式：

例 1 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且满足：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$,

证明

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由题设

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

得

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x [f(t)-g(t)]\mathrm{d}t \geqslant 0$$

左边 $=\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x [f(t)-g(t)]\mathrm{d}t =$

$\iint_{\mathrm{d}} [f(t)-g(t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$　(其中 $\mathrm{d}=\{(x,t)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant x\}$) $=$

收稿日期:2013-11-08
作者简介:黄云美(1981-),女,江苏人,硕士,讲师,研究方向:基础数学。

$$\int_a^b \mathrm{d}t\int_t^b [f(t)-g(t)]\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^b (b-t)[f(t)-g(t)]\mathrm{d}t=$$

$$b[\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b g(t)\mathrm{d}t]-[\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t-$$

$$\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t]=$$

$$-[\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t-\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t]\geqslant 0$$

则

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t-\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t\leqslant 0$$

即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$$

命题得证！

1.2 应用二:转化法(将累次积分转为重积分)

命题二:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积,则二元函数 $f(x)g(y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ 上可积,且

$$\iint_{\mathrm{d}} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^{\mathrm{d}} g(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^{\mathrm{d}} g(x)\mathrm{d}x$$

其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$[1]

例2 设 $p(x)$,$f(x)$,$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,且在 $[a,b]$ 上,$p(x)>0$,$f(x)$,$g(x)$ 为单调递增函数,

试证

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$[[2]

证明 由

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

可知

$$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

令

$$I=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$$

下证 $I\geqslant 0$

$$I=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_a^b\int_a^b p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1)$$

同理

$$I=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^b p(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(y)f(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^b\int_a^b p(y)p(x)g(x)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2)$$

(1)+(2)得

$$2I=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为同为单调增函数,所以

$$[g(y)-g(x)][f(y)-f(x)]\geqslant 0$$

又因为

$$p(x)>0,\ p(y)>0$$

故

$$2I=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$$

即 $I\geqslant 0$,命题得证！

例3 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,证明施瓦兹不等式

$$[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$[3]

证明 由已知和定积分的性质可知 $f^2(x)$ 和 $g^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,由以上两个命题可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y=$$

$$\iint_{d} f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

其中

$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$$

同理可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iint_{d} f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

由(1)式和(2)式两边分别相加可得

$$2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iint_{d} f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{d} f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint_{D}[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(利用均值不等式 $f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)\geqslant 2f(x)g(y)f(y)g(x)$)$\geqslant$

$$2\iint_{d} f(x)g(y)f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y=$$
$$2[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2$$

故有

$$[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

1.3　应用三:转换法(将常数转换成重积分形式)

积分中值定理:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

命题三:在积分中值定理中,若 $f(x)=1$,则有 $\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$,同理若在二重积分中,积分函数 $f(x,y)=1$,则有 $\iint_{d}\mathrm{d}\sigma=(b-a)^2$　$\mathrm{d}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$

对于命题三,常常倒过来使用,将常数化为积分形式

例 4 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上取正值,且 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,试证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

证明 若证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

即证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y\geqslant\iint_{d}\mathrm{d}\sigma$$

即证

$$\iint_{d}\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint_{d}\mathrm{d}\sigma$$

即证

$$\iint_{d}(\frac{f(x)}{f(y)}-1)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$$

即证 $2\iint_{d}(\frac{f(x)}{f(y)}-1)\mathrm{d}\sigma=\iint_{d}(\frac{f(x)}{f(y)}-1)\mathrm{d}\sigma+$

$$\iint_{d}(\frac{f(y)}{f(x)}-1)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$$

即证

$$\iint_{d}(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}-2)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$$

因为 $f(x)\geqslant 0$、$f(y)\geqslant 0$

所以

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}-2\geqslant 0$$

即

$$\iint_{d}(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}-2)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$$

恒成立

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

成立 命题得证!

1.4　应用四:对称变换法

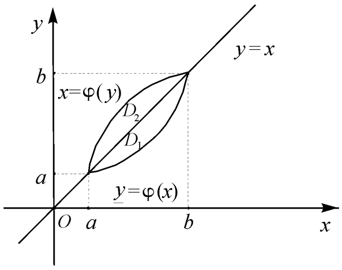
命题四:当积分区域关于直线 $y=x$ 对称时,被积函数的两个变量交换位置后,二重积分的值不变,即$\iint_{d} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{d} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 关于直线 $y=x$ 对称[4]。

证明 设 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,\ y\leqslant x\}$,$D_2=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,\ y\geqslant x\}$

则 $D=D_1+D_2$

则有 D_1,D_2 关于直线 $y=x$ 对称,$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=$(定积分与积分变量关系)

$$\int_a^b F(y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_{\varphi(y)}^y f(y,x)\mathrm{d}x=$$
$$\iint_{d_2} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$



同理可得

$$\iint_{d_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{d_1} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

将上式与$\iint_{d_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{d_2} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$两边相加得

$$\iint_{d} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{d} f(y,x)\mathrm{d}\sigma$$

命题得证！

此命题对于不等式的证明非常有帮助，我们仍然看上面的那个例子

例5 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上取正值，且 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，试证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$$ [5]

证明 令

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$$

则由命题二可知

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y = \iint_{d} \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D=[a,b]\times[a,b]$

又因为区间 $D=[a,b]\times[a,b]$ 关于直线 $y=x$ 对称，于是有

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以

$$I = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则有

$$2I = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $f(x)$，$f(y)$，均为正值，利用均值不等式可得

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \geqslant 2\times\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}}\times\frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}} = 2$$

于是就有

$$2I = \iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2(b-a)^2$$

从而得

$$I \geqslant (b-a)^2$$

即

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2$$

命题得证！

1.5 四种方法的区别与联系

以上四种方法在不等式的证明中占据重要的地位，它们之间有着区别同时也存在一定的联系.第一种方法是直接在一元积分不等式两边增加一个积分变量，使一元积分不等式化为二元积分不等式，然后巧妙的运用转换积分变量的顺序达到了证明一元积分不等式的目的。

方法二、方法三与方法四之间看起来似乎一样，但是它们的出发点不同。

在方法二中，将累次积分化为重积分，主要运用的是定积分的值与积分变量无关的性质，这样我们就可以改变定积分的积分变量来化为重积分，以达到证明积分不等式的目的。

方法三是根据积分中值定理的推论将常数化为重积分形式，来达到构造重积分，积分形式统一之后，被积函数才可以任意加减运算，在根据被积函数的性质来证明积分不等式。

方法四是构造二元函数，根据两元函数对称的性质，可以交换积分变量的位置，使定积分的值不变，根据这个性质就可以证明积分不等式了。

后三种方法虽然各自的出发点不同，但最终的归宿是相同的，最终都以结合均值不等式的运用而结束，这是它们之间的共同之处.对于方法四，对积分变量的区间要求很严格，要求对称，但是方法二就没有这样的要求，方法二要比方法四运用更广泛。

2 重积分应用的扩展

对于以上的命题，有一些命题还可以扩展，例如命题二和命题四，下面我们就进一步的扩展。

(1) 命题二扩展一。

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，$g(y)$ 在$[c,d]$上可积，$h(z)$ 在 $[e,f]$ 上可积，则三元函数 $f(x)g(y)h(z)$ 在积分区域 $V=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x$

$\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant \mathrm{d},\ e\leqslant z\leqslant f\}$ 上可积,且

$$\iiint_V f(x)g(y)h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^{\mathrm{d}} g(y)\mathrm{d}y\int_e^f h(z)\mathrm{d}z$$

其中 $V=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant \mathrm{d},\ e\leqslant z\leqslant f\}$[6]

例 6 若 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,且 $f(x),g(x),h(x)$ 均大于等于零,证明下面不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x\right]^3\leqslant$$
$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b h^3(x)\mathrm{d}x$$

证明 由已知和定积分的性质可知,$f^3(x)$,$g^3(x)$,$h^3(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。由上面两个命题可知

$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b h^3(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(y)\mathrm{d}y\int_a^b h^3(z)\mathrm{d}z=$$
$$\iiint_V f^3(x)g^3(y)h^3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1}$$

其中 $V=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant \mathrm{d},\ e\leqslant z\leqslant f\}$

同理亦可求得

$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b h^3(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iiint_V f^3(y)g^3(z)h^3(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d} \tag{2}$$

$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b h^3(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iiint_V f^3(z)g^3(x)h^3(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d} \tag{3}$$

将(1)式,(2)式和(3)式两边分别相加得

$$3\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b h^3(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iiint_V f^3(x)g^3(y)h^3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+$$
$$\iiint_V f^3(y)g^3(z)h^3(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+$$
$$\iiint_V f^3(z)g^3(x)h^3(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$
$$\iiint_V [f^3(x)g^3(y)h^3(z)+f^3(y)g^3(y)h^3(x)+$$
$$f^3(z)g^3(x)h^3(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(由均值不等式可知)

$$\geqslant 3\iiint_V [f(x)g(y)h(z)f(y)g(z)h(x)+$$
$$f(z)g(x)h(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=3\int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)h(y)\mathrm{d}y$$
$$\int_a^b f(z)g(z)h(z)\mathrm{d}z=$$
$$3\left[\int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x\right]^3$$

故得

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x\right]^3\leqslant$$
$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^3(x)\mathrm{d}x\int_a^b h^3(x)\mathrm{d}x$$

命题得证!

(2)命题二扩展二:若 $f_i(x_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$ 在 $[a_i,b_i](i=1,2,3,\cdots,n)$ 上可积,则 n 元函数 $\prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ 在积分区域 $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,3,\cdots,n\}$ 上可积,且

$$\iint_V\cdots\int\prod_{i=1}^n f_i(x_i)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\prod_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i$$

例 7 若 $f_i(x_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$ 在 $[a,b]$ 可积,且 $f_i(x)\geqslant 0$ 证明下面不等式

$$\left[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x)\mathrm{d}x\right]^n\leqslant\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x$$

证明 由已知和定积分的性质可知 $f_i^n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。有以上两个命题可知

$$\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x=\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x_i)\mathrm{d}x_i=$$
$$\iint_V\cdots\int\prod_{i=1}^n f_i^n(x_i)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n \tag{1}$$

同理可得

$$\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iint_V\cdots\int[f_i^n(x_2)f_2^n(x_3)\cdots f_{n-1}^n(x_n)f_n^n(x_1)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{2}$$

$$\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x=$$
$$\iint_V\cdots\int[f_1^n(x_3)f_2^n(x_4)\cdots f_{n-1}^n(x_1)f_n^n(x_2)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{3}$$

……

$$\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x=\iint_V\cdots\int[f_1^n(x_n)f_2^n(x_1)\cdots$$
$$f_{n-1}^n(x_{n-2})f_n^n(x_{n-1})]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{n}$$

将上面 n 个式子两边分别相加得

$$n\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_1)f_2^n(x_2)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-1})f_n^n(x_n)]dx_1dx_2\cdots dx_n+$$
$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_2)f_2^n(x_3)\cdots f_{n-1}^n(x_n)f_n^n(x_1)]dx_1dx_2\cdots dx_n+$$
$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_3)f_2^n(x_4)\cdots f_{n-1}^n(x_1)f_n^n(x_2)]dx_1dx_2\cdots dx_n+$$
$$\cdots+$$
$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_n)f_2^n(x_1)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-2})f_n^n(x_{n-1})]dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$=$$
$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_1)f_2^n(x_2)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-1})f_n^n(x_n)+$$
$$f_1(x_2)f_2^n(x_3)\cdots f_{n-1}^n(x_n)f_n^n(x_1)+$$
$$\cdots+$$
$$f_1(x_n)f_2^n(x_1)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-2})f_n^n(x_{n-1})]dx_1dx_2\cdots dx_n\geqslant$$
$$n\iint\limits_V\cdots\int\prod_{j=1}^n\prod_{i=1}^n f_i(x_j)dx_1dx_2\cdots dx_n=$$
$$n\prod_{j=1}^n[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x_j dx)]=$$
$$n[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x)dx]^n$$

此时可得

$$[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x)dx]^n\leqslant\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)dx$$

命题得证！

(3)命题四扩展一：若当积分变量 x,y,z 的取值范围相同时，被积函数的三个变量交换位置后，三重积分的值不变，即 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V f(y,z,x)\,dxdydz=\iiint\limits_V f(z,x,y)\,dxdydz$[7]。

例8 若 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 $f(x)$，$g(x),h(x)$ 均大于等于零，且证明下面不等式

$$[\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx]^3\leqslant$$
$$\int_a^b f^3(x)dx\int_a^b g^3(x)dx\int_a^b h^3(x)dx$$

证明 由已知和定积分的性质可知，$f^3(x)$，$g^3(x),h^3(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。由上面两个命题可知

$$\int_a^b f^3(x)dx\int_a^b g^3(x)dx\int_a^b h^3(x)dx=$$
$$\int_a^b f^3(x)dx\int_a^b g^3(y)dy\int_a^b h^3(z)dz=$$
$$\iiint\limits_V f^3(x)g^3(y)h^3(z)dxdydz$$

其中 $V=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b,\ a\leqslant z\leqslant b\}$

令 $F(x,y,z)=f^3(x)g^3(y)h^3(z)$

因为积分变量 x,y,z 的取值范围相同

所以有

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)dxdydz=$$
$$\iiint\limits_V F(y,z,x)dxdydz=$$
$$\iiint\limits_V F(z,x,y)dxdydz$$

由此可知

$$3\iiint\limits_V F(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V F(x,y,z)dxdydz+$$
$$\iiint\limits_V F(y,z,x)dxdydz+\iiint\limits_V F(z,x,y)dxdydz=$$
$$\iiint\limits_V f^3(x)g^3(y)h^3(z)dxdydz+$$
$$\iiint\limits_V f^3(y)g^3(z)h^3(x)dxdydz+$$
$$\iiint\limits_V f^3(z)g^3(x)h^3(y)=\iiint\limits_V[f^3(x)g^3(y)h^3(z)+$$
$$f^3(y)g^3(z)h^3(x)+$$
$$f^3(z)g^3(x)h^3(y)]dxdydz$$

(均值不等式)

$$\geqslant3\iiint\limits_V[f(x)g(y)h(z)f(y)g(z)h(x)f(z)g(x)h(y)]dxdydz=$$
$$3\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx\int_a^b f(y)g(y)h(y)dy\int_a^b f(z)g(z)h(z)dz=$$
$$3[\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx]^3$$

故得

$$[\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx]^3\leqslant\iiint\limits_V F(x,y,z)dxdydz$$

所以

$$[\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx]^3\leqslant$$
$$\int_a^b f^3(x)dx\int_a^b g^3(x)dx\int_a^b h^3(x)dx$$

命题得证！

命题四扩展二：若当积分变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，x_n 取值范围相同时，被积函数的 n 个变量交换位置后，n 重积分的值不变，即

$$\iint\limits_V\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=$$
$$\iint\limits_V\cdots\int f(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)dx_1dx_2\cdots dx_n=$$
$$\iint\limits_V\cdots\int f(x_3,\cdots,x_n,x_1,x_2)dx_1dx_2\cdots dx_n=$$

$$\cdots =$$

$$\iint\limits_V\cdots\int f(x_n,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

例 9 **若** $f_i(x)(i=1,2,3,\cdots n)$ **在**$[a,b]$ **可积，且** $f_i(x)\geqslant 0$ **证明下面不等式**

$$[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x)\mathrm{d}x]^n\leqslant\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x$$

证明 由已知和定积分的性质可知 $f_i^n(x)$ 在$[a,b]$上可积。有以上两个命题可知

$$\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x=\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x_i)\mathrm{d}x_i=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int\prod_{i=1}^n f_i^n(x_i)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n f_i^n(x_i)$$

因为积分变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ 取值范围相同所以有

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_2,\cdots,x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_3,\cdots,x_n,x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$\cdots=$$

$$=\iint\limits_V\cdots\int F(x_n,x_1,\cdots,x_{n-1})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

即有

$$n\iint\limits_V\cdots\int F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+$$

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_2,\cdots,x_n,x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+$$

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_3,\cdots,x_n,x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+$$

$$\cdots+$$

$$\iint\limits_V\cdots\int F(x_n,x_1,\cdots,x_{n-1})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_1)f_2^n(x_2)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-1})f_n^n(x_n)]$$

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+$$

$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_2)f_2^n(x_3)\cdots f_{n-1}^n(x_n)f_n^n(x_1)]$$

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+$$

$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_3)f_2^n(x_4)\cdots f_{n-1}^n(x_1)f_n^n(x_2)]$$

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+$$

$$\cdots+$$

$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_n)f_2^n(x_1)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-2})f_n^n(x_{n-1})]$$

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$\iint\limits_V\cdots\int[f_1^n(x_1)f_2^n(x_2)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-1})f_n^n(x_n)+$$

$$f_1(x_2)f_2^n(x_3)\cdots f_{n-1}^n(x_n)f_n^n(x_1)+$$

$$\cdots+$$

$$f_1(x_n)f_2^n(x_1)\cdots f_{n-1}^n(x_{n-2})f_n^n(x_{n-1})]$$

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\geqslant$$

$$n\iint\limits_V\cdots\int\prod_{j=1}^n\prod_{i=1}^n f_i(x_j)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=$$

$$n\prod_{j=1}^n[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x_j)\mathrm{d}x_j]=$$

$$n[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x)\mathrm{d}x]^n$$

此时可得

$$[\int_a^b\prod_{i=1}^n f_i(x)\mathrm{d}x]^n\leqslant\prod_{i=1}^n\int_a^b f_i^n(x)\mathrm{d}x$$

命题得证！

3　后　记

以上只是例举出来的几种利用重积分证明积分不等式的方法，对于积分不等式的证明的方法很多，例如引入辅助并构建变限积分，再利用积分的性质进行证明等方法，当我们在遇到积分不等式的时候，我们要灵活运用各种方法，而不能局限于这几种特殊的方法！

参考文献：

[1] 张仁华. 二重积分证明积分不等式的若干应用[J]. 景德镇高专学报，2008，23(2)：22.

[2] 张曙雯. 二重积分在积分不等式证明中的应用[J]. 中国水运，2006，4(5)：231.

[3] 井爱雯. 利用二重积分证明积分不等式[J]. 高等数学研究，2000，3(1)：24.

[4] 辛萍芳. 利用对称性证明积分不等式[J]. 高等函授学报，2002，15(5)：29.

[5] 黄志坚，吴健辉. 利用二重积分解决有关定积分的问题[J]. 景德镇高专学报，2005，20(2)：29.

[6] 刘法贵，左卫兵. 证明积分不等式的几种方法[J]. 高等数学研究，2008，11(1)：123.

[7] 辛萍芳. 利用对称性证明积分不等式[J]. 高等函授学报，2002，15(5)：29.