珠海校区 2008 学年度第二学期 08 级《高等数学一》期中考试题 B

姓名：齐晓玲　　　　专业：经济地理

学号：08334057　　　　成绩：100

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

完成以下各题

（1）若 $z(x,y)=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y\cos(xy)[1-2\sin(xy)]=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)[-\sin(xy)]\cdot x$

$=x\cos(xy)[1-2\sin(xy)]$

（2）若隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=xyz$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：法①对方程 $x+y+z=xyz$ 两边对 x 求导，得

$1+\frac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

求得：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-1}{1-xy}$

方程两边对 y 求导，得 $1+\frac{\partial z}{\partial y}=xz+xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$

则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-1}{1-xy}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(1-xy)-(-y)(yz-1)}{(1-xy)^2}=\frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}$

法②：$F(x,y,z)=x+y+z-xyz=0$.

$F_x=1-yz$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-1}{1-xy}$.

$F_y=1-xz$

$F_z=1-xy$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-1}{1-xy}$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}$.

（3）求曲面 $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$ 在点 $(\ln 2,\ln 2,1)$ 处的切平面方程与法线方程。

解：设 $f(x,y,z)=e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}-4$ 则

$f_x=e^{\frac{x}{z}}\cdot\frac{1}{z}$ 即有 $f_x(\ln 2,\ln 2,1)=2$ $f_x=2(X)$

$f_y=e^{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{z}$ $f_y(\ln 2,\ln 2,1)=2$； 要确定在哪点的偏导数等于？

$f_z=e^{\frac{x}{z}}\cdot(\frac{-x}{z^2})+e^{\frac{y}{z}}(\frac{-y}{z^2})$ 即有 $f_z(\ln 2,\ln 2,1)=-4\ln 2=-\ln 16$

即曲面 $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$ 在点 $(\ln 2,\ln 2,1)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(2,2,-\ln 16)$

∴曲面在该点处的切平面方程为 $2(x-\ln 2)+2(y-\ln 2)+(-\ln 16)(z-1)=0$ 即切平面方程为 $x+y-\ln 4\, z=0$

法线方程为 $\frac{x-\ln 2}{2}=\frac{y-\ln 2}{2}=\frac{z-1}{-\ln 16}$ 即 $x-\ln 2=y-\ln 2=\frac{1-z}{\ln 4}$

即法线方程为两个 $x=y$，$y-\ln 2=\frac{1-z}{\ln 4}$ 的交线

（4）设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$(x_i,y_i)\in D$，$i=1,2$，求证：

在 D 中至少存在一点 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)=\frac{2f(x_1,y_1)+3f(x_2,y_2)}{5}$。

证明：由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 上在 D 上必存在最大值 M，最小值 m。

又 $(x_1,y_1)\in D$，$(x_2,y_2)\in D$ ∴ $m\le f(x_1,y_1)\le M$，$m\le f(x_2,y_2)\le M$。

∴ $\frac{2}{5}m\le\frac{2}{5}f(x_1,y_1)\le\frac{2}{5}M$，$\frac{3}{5}m\le\frac{3}{5}f(x_2,y_2)\le\frac{3}{5}M$。

即有：$m=\frac{2}{5}m+\frac{3}{5}m\le\frac{2f(x_1,y_1)+3f(x_2,y_2)}{5}\le\frac{2}{5}M+\frac{3}{5}M=M$

~~又由于在 D 中存在一点 (ξ,η)，使得 $m\le f(\xi,\eta)\le M$~~

又 $f(x,y)$ 为连续的，∴必存在点 (ξ,η)，使得：$f(\xi,\eta)=\frac{2f(x_1,y_1)+3f(x_2,y_2)}{5}$。

（5）计算二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$，其中 D 为圆域：$x^2+y^2\le 3y$。

解：$I=\iint\limits_D\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$

$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{3\sin\theta}r\sqrt{9-r^2}\,dr$

$=\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{3\sin\theta}d\theta$

$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(27|\cos^3\theta|-27)\,d\theta$

$=-9\int_0^{\pi}(|\cos^3\theta|-1)\,d\theta$

$=-9\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-1)\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos^3\theta-1)\,d\theta\right]$

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-1)\,d\theta$

$=\frac{2}{3\times1}-\frac{\pi}{2}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos^3\theta-1)\,d\theta=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}$。

∴ $I=-9\times(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2})=9\pi-12$

（6）求由圆柱面 $x^2+y^2=3$ 与抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 及 $z=1-x^2-y^2$ 所围立体的体积。

解：$V=\iiint\limits_{\Omega} dv=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3} dxdy\int_{1-x^2-y^2}^{1+x^2+y^2} dz$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}[(1+x^2+y^2)-(1-x^2-y^2)]\,dxdy$

$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}(x^2+y^2)\,dxdy$

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r^2\cdot r\,dr$

$=2\times 2\pi\times\frac{1}{4}[(\sqrt{3})^4-0]$

$=9\pi$

（7）求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(y^3+z)dV$，其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围闭区域。

解：∵ 积分区域关于 oxz 对称，且 y^3 是关于 y 的奇函数.

∴ $\iiint\limits_{\Omega} y^3 dv=0$.

法②. $I=\iiint\limits_{\Omega}(y^3+z)dv=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{x^2+y^2}^{1} z\,dz$

$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[1-(x^2+y^2)^2]\,dxdy$

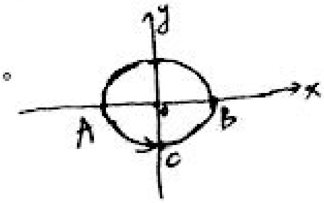
$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^4)r\,dr$

$=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{3}$

法①. $I=\iiint\limits_{\Omega}(y^3+z)dv=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z} z\,dxdy=\int_0^1\pi z^2dz=\frac{\pi}{3}$.

（8）求曲线积分 $I=\int_L \frac{y^2}{\sqrt{4+x^2}}dx+\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right]dy$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$ 上由点 $A(-2,0)$ 逆时针方向到点 $B(2,0)$ 的半圆。



解：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{4+x^2}}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=4+2y\cdot\frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}\right)=4+\frac{2y}{\sqrt{4+x^2}}$

$\int_{\widehat{ACBOA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=4\iint_D dxdy=4\times\frac{1}{2}\times\pi\times4=8\pi$

线段AB：$y=0$，$-2\le x\le 2$，则 $\int_{\overline{AB}}=\int 0\cdot dx+4x\cdot 0=0$，则有 $\int_{\overline{BA}}=0$.

$\therefore I=\int_L=\int_{\widehat{ACBOA}}-\int_{\overline{BA}}=8\pi-0=8\pi$

即 $I=\int_L\frac{y^2}{\sqrt{4+x^2}}dx+\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right]dy=8\pi$

（9）计算曲面积分 $I=\iint_S(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面 S 为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧。

解：$I=\iint_S(z^2+x)dydz-z\,dxdy$，则 $P=z^2+x$，$Q=0$，$R=-z$.

$I=-\iint_D\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right]\cdot(-x)+0\cdot(-y)+\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\cdot 1\right\}dxdy$ $\quad D: 2\le x^2+y^2\le 4$.

$=\iint_D\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2x+x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]dxdy$.

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{4}r^5\cos\theta+r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2\right)\cdot r\,dr$.

$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{28}r^7\cos\theta+\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta+\frac{1}{8}r^4\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{32-2\sqrt{2}}{7}\cos\theta+3\cos^2\theta+\frac{3}{2}\right)d\theta$

$=6\pi$