

高数一（下册）模拟期末考试简易参考答案与提示

一、 积分区域 D 可以解读为 $-1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1$,因此进行坐标变换 $u = x + y, v = x - y$,

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left| \begin{matrix} D(u,v) \\ D(x,y) \end{matrix} \right|^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$$

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 e^u \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 e^u dv = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(e - \frac{1}{e} \right) = e - \frac{1}{e}.$$

二、 L 可分为三段: $L_1: x = 0, z = \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq a, L_2: y = 0, z = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a, L_3: z = 0, y = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a$.均可以参数化成坐标面内的曲线积分, 于是有:

$$\begin{aligned} \int_L z ds &= \int_{L_1} z ds + \int_{L_2} z ds + \int_{L_3} z ds = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_y^2} dy + \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + z_x^2} dx + 0 \\ &= 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy = 2a \int_0^a 1 dy = 2a^2. \end{aligned}$$

三、 积分曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 2$, 且 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,故

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \iint_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1 + r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1 + r^2} d(1 + r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1 + r^2} d(1 + r^2) = \frac{\pi}{2} \times \left[\frac{2}{5}(1 + r^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \times \left[\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{4\sqrt{3}\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

四、 为了使用高斯公式, 构造辅助曲面 $\Sigma_1: x \equiv 0, 3y^2 + 3z^2 \leq 1$, 方向为 x 轴负方向一侧。在 Σ_1 上, $x_y \equiv x_z \equiv 0$,

$$\iint_{\Sigma_1} x dy dz + (y^2 + z) dz dx + z dx dy = \iint_{\Sigma_1} x dy dz = 0. \text{(因为该平面上 } x \text{ 恒为 } 0).$$

记 Σ 与 Σ_1 围成的区域为 $\Omega: x \geq 0, x^2 + 3y^2 + 3z^2 \leq 1$, 利用高斯公式, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^2 + z) dz dx + z dx dy &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} x dy dz + (y^2 + z) dz dx + z dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} 1 + 2y + 1 dV = \iiint_{\Omega} 2 dV \text{(对称性)} = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\pi \times \frac{4}{3} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\pi}{9} \end{aligned}$$

五、 本题的常微分方程为一阶线性方程 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, 对应齐次通解 $\tilde{y} = \frac{C}{x^2}$,

使用常数变易法, 设 $y = u(x) \cdot \tilde{y}$, 有 $u' \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\sin x}{x}$, $u' = \sin x \cdot x$, $u = -x \cos x + \sin x + C$

故原方程通解 $y = \frac{-x \cos x + \sin x + C}{x^2}$, 代入初值条件 $y(\pi) = 0$, 有 $C = -\pi$, 故特解为 $y = \frac{-x \cos x + \sin x - \pi}{x^2}$

六、 首先题目所述级数为交错级数, 易证 $\frac{1}{\ln^2 n}$ 关于 n 单调递减且当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 0, 故由莱布尼茨判别法, 首先可证

级数收敛.再利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln^2 n}}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 原级数条件收敛.

七、 首先 $|\sum_{k=1}^n \sin 2k| \leq \frac{1}{\sin 1}$ 有界, 且 $\sin \frac{1}{n}$ 单调下降 (因为 $\frac{1}{n} < 1, \frac{1}{n}$ 单调递减, $\sin x$ 在 $x \in (0,1)$ 单调递增), 狄利克雷判别法就可以证明本题的级数收敛了。

八、 本题需要证明函数项级数点点收敛, 并利用求导后的函数项级数的一致收敛来证明导函数的存在与连续性。

首先, 根据达朗贝尔判别法及 $\frac{x^2}{2^n} \sim \arctan \left(\frac{x^2}{2^n} \right)$ 很容易证明原级数的点点收敛性质。

然后考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \left(\frac{x^2}{2^n} \right) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4^n}} \frac{2x}{2^n}$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\exists a > 0$, 且 $x \in (-a, a) \subset [-a, a] \subset (-\infty, +\infty)$, 在 $x \in [-a, a]$ 上, 因为

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4^n}} \frac{2x}{2^n} \right| \leq \frac{2a}{2^n} \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{2^n} \text{ 收敛, 由 M 判别法可证 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4^n}} \frac{2x}{2^n} \text{ 在 } x \in [-a, a] \text{ 一致收敛}$$

易证 $\frac{1}{1 + \frac{x^4}{4^n}} \frac{2x}{2^n}$ 在 $[-a, a]$ 连续。因此, 可证 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{x^2}{2^n} \right)$ 在 $[-a, a]$ 有连续导函数, 特别的在 x 有连续导函数。

由 x 任意性, 可证 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{x^2}{2^n} \right)$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有连续导函数 ■

九、 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径通过课本定理 2 很容易计算出来 $R = 1$, 而当 $x = \pm 1$ 时一般项不趋于 0, 所以收敛域即为 $(-1, 1)$, 在收敛区间内

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \frac{x^2}{1-x} + \ln(1-x) + x = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$$

十、 先考虑, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln x \cdot x^2}} dx$, 因为 $\frac{1}{\sqrt{\ln x \cdot x^2}} \leq \frac{1}{x^2}$ 且 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛, 故 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln x \cdot x^2}} dx$ 收敛, 另一方面考虑瑕积分 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\ln x \cdot x^2}} dx$, 瑕点 $x = 1$ 处, $\frac{\frac{1}{\sqrt{\ln x \cdot x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} \rightarrow 1$, 再由 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ 收敛可知 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\ln x \cdot x^2}} dx$ 也收敛, 因此本题广义积分收敛

十一、 利用比较判别法容易证明本题积分是收敛的。然后注意到 $\frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} = \int_2^3 e^{-xt} dt$, 且无穷限积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dx$ 在 $t \in [1, 2]$ 一致收敛 ($|e^{-xt}| \leq e^{-x}$, $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ 收敛再用 M 判别法得证), 且函数 e^{-xt} 在 $[0, +\infty) \times [2, 3]$ 显然连续, 从而积分可以交换次序, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \int_2^3 e^{-xt} dt dx = \int_2^3 \int_0^{+\infty} e^{-xt} dx dt = \int_2^3 \left[\frac{e^{-xt}}{t} \right]_0^{+\infty} dt \\ &= \int_2^3 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

十二、 正弦级数即是对原始函数进行奇延拓并得 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$

$$\begin{aligned} \text{且 } b_n &= 2 \int_0^1 (x^2 + 1) \sin n\pi x dx = \frac{-2}{n\pi} (x^2 + 1) \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \cos n\pi x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - 2 \cdot (-1)^n] + \frac{4}{n^2\pi^2} x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n^2\pi^2} \int_0^1 \sin n\pi x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - 2 \cdot (-1)^n] + 0 + \frac{4}{n^3\pi^3} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} [1 - 2 \cdot (-1)^n] + \frac{4}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 的连续, 故展成正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} [1 - 2 \cdot (-1)^n] + \frac{4}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin n\pi x = f(x)$, $x \in (0, 1)$

十三、 柯西收敛原理: $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ 在 $y \in Y$ 上一致收敛的充分必要条件为 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < \delta_1, \delta_2 <$

$$\delta, y \in Y, \left| \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon.$$

证明过程: 必要性: $\int_a^b f(x, y) dx$ 在 $y \in Y$ 上一致收敛, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\frac{\epsilon}{2}) > 0$, $\forall 0 < \delta_1, \delta_2 < \delta, y \in Y$,

$$\left| \int_a^{a+\delta_1} f(x, y) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ 且 } \left| \int_a^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ 因此}$$

$$\left| \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_a^{a+\delta_1} f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ 必要性得证}$$

充分性：设 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\frac{\epsilon}{2}) > 0, \forall 0 < \delta_1, \delta_2 < \delta, y \in Y, \left| \int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$. 因为本题已经假设了 $g(y)$ 的点点收敛，故 $\forall y \in Y$, 令 $\delta_1 \rightarrow 0$, 有

$$\epsilon > \frac{\epsilon}{2} \geq \left| \int_{a+0}^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| = \left| \int_a^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right|$$

重新描述上式，即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < \delta_2 < \delta, y \in Y$, 都有 $\left| \int_a^{a+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon$,

由 δ 不由 y 的取值决定，可知 $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ 在 $y \in Y$ 上一致收敛，充分性得证 ■