

第一题

1、构造拉格朗日函数 $L(x, y, z; \lambda) = \sin x \sin y \sin z - \lambda \left(x + y + z - \frac{\pi}{2} \right)$

2、解方程组

$$\begin{cases} \cos x \sin y \sin z - \lambda = 0 \\ \sin x \cos y \sin z - \lambda = 0 \\ \sin x \sin y \cos z - \lambda = 0, \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y \sin z - \lambda \tan x = 0 \\ \sin x \sin y \sin z - \lambda \tan y = 0 \\ \sin x \sin y \sin z - \lambda \tan z = 0 \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lambda \tan x = \lambda \tan y = \lambda \tan z$$

根据题目的条件， $\lambda \neq 0$ ，所以 $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ 。

3、根据问题的假设，存在最大值，则最大值只能在 $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ 达到，最大值为 $\frac{1}{8}$ 。

第二题

1、设上半球面与柱面的截面记为 S ，则 S 在 xOy 上的投影为一个椭圆盘 D ：

$$x^2 - 2ax + 2y^2 \leq 0, \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} \leq 1$$

2、几何上易见，球面上的点 (x, y, z) 的法方向也可以取 (x, y, z) ，单位化后得到方向余弦

$$n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) = \frac{1}{2a}(x, y, z)$$

3、所以面积元为 $dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{2a}{z} dxdy = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$

4、最后求曲面的面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_S dS = \iint_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - (a + ar \cos \theta)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} r \sin \theta\right)^2}} \cdot \frac{a^2 r}{\sqrt{2}} dr \end{aligned}$$

其中，为了将二重积分化为二次积分，用了坐标变换：

$$\begin{cases} x = a + ar \cos \theta \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} r \sin \theta \end{cases}, \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -ar \sin \theta & -\frac{a}{\sqrt{2}} r \cos \theta \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{\sqrt{2}} r$$

第三题

1、先看两个曲面的交线：

$$\begin{cases} z = (x-1)^2 + y^2, \text{椭圆抛物面} \\ x^2 + y^2 = 4, \text{圆柱} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x + z = 5, \text{平面} \\ z = (x-1)^2 + y^2, \text{椭圆抛物面} \end{cases}$$

所以 S^+ 也可以看着椭圆抛物面被平面截下来的部分。

2、平面的法向量为 $(2, 0, 1)$ ，所以

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS = (dydz, dzdx, dxdy)$$

$$dydz : dzdx : dxdy = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = 2 : 0 : 1$$

3、 S^+ 和顶部的平面构成一个封闭的立体的边界曲面，该立体在 xOz 上的投影为以原点为中心，半径为 2 的圆盘 D 。

设立体的顶部平面区域为 $S_{\text{顶}}$ ，方向向上，根据高斯公式

$$\iint_{S^+} ydydz + xydzdx - xzdx dy + \iint_{S_{\text{顶}}} ydydz + xydzdx - xzdx dy = 0$$

所以

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} ydydz + xydzdx - xzdx dy \\ &= - \iint_{S_{\text{顶}}} ydydz + xydzdx - xzdx dy \\ &= - \iint_{S_{\text{顶}}} y \cdot 2dxdy + xy \cdot 0dxdy - xzdx dy \\ &= \iint_{S_{\text{顶}}} (xz - 2y)dxdy \\ &= \iint_D (x(5 - 2x) - 2y)dxdy = \iint_D 5x - 2x^2 - 2ydx dy \\ &= \iint_D -2x^2 dx dy = -2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr \\ &= -8 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = -32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = -8\pi \end{aligned}$$

第四题

1、首先解对应的齐次线性方程 $x \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ 。当 $y \neq 0$ 时（ $y = 0$ 为特解），

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}, \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}, \ln|y| = 2 \ln|x| + C_1, |y| = e^{C_1} x^2, y = \pm e^{C_1} x^2 = Cx^2,$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$ ， C_1 为任意常数。

合并特解 $y = 0$ ，齐次方程的通解为 $y = Cx^2$ ， C 为任意常数。

2、常数变异，假设 $y = C(x)x^2$ 是 $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2$ 的解，则

$$x(C'(x)x^2 + 2C(x)x) - 2C(x)x^2 = x^2, C'(x)x^3 = x^2, C'(x) = \frac{1}{x}, C(x) = \ln|x| + C$$

3、所以原方程的通解为

$$y = C(x)x^2 = (\ln|x| + C)x^2$$