
1、用条件极值法，找出椭圆周 $2x^2 + y^2 = 1$ 上到直线 $x + y = 10$ 距离最短的点，并求最短距离。

解 椭圆上的点的坐标记为 (x, y) ，直线上的点的坐标记为 (u, v) ，距离最短等价于距离的平方最短，所以该条件极值问题为：

$$\text{极值函数: } (x-u)^2 + (y-v)^2,$$

$$\text{约束条件: } 2x^2 + y^2 = 1, \quad u+v=10,$$

所以可以构造拉格朗日函数

$$L(x, y, u, v; \lambda, \mu) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda(2x^2 + y^2 - 1) + \mu(u+v-10)$$

接下来求解方程组

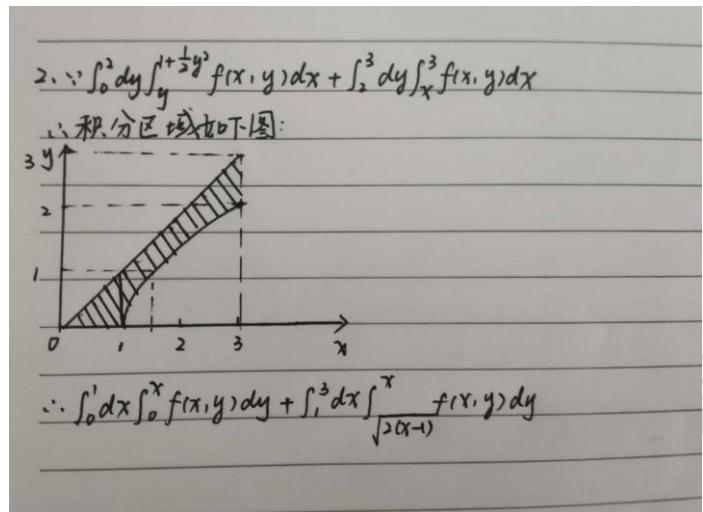
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-u) + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-v) + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} = -2(x-u) + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v} = -2(y-v) + \mu = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \\ u+v = 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} (x-u) + 2\lambda x = 0 \\ (y-v) + \lambda y = 0 \\ -2(x-u) + \mu = 0 \\ -2(y-v) + \mu = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \\ u+v = 10 \end{cases}$$

$$(x-u) = (y-v), 2\lambda x = \lambda y, y = 2x, 6x^2 = 1, x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}, y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

再求出 (u, v) ，则得到了直线到椭圆的最远距离和最近距离（略，留给同学们做）！

2、交换二次积分的次序

$$\int_0^2 dy \int_x^{1+\frac{1}{2}y^2} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_x^3 f(x, y) dx$$



3、求第二型曲线积分

$$\oint_{L^+} yz^2 dx + zx^2 dy + xy^2 dz,$$

其中 L^+ 是曲线

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

且从 z 轴往下看取顺时针方向。

基本知识点

1、 $2x + 3y + z = 6$ 是一个平面方程， $(2, 3, 1)$ 是一个法方向。

2、 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 是一个圆柱，圆柱的母线平行于 z 轴，准线是坐标面 xOy 上的一个圆周，该圆周的中心是 $(1, 0)$ ，半径是 1，记该圆周所包围的坐标面 xOy 上的区域为 D_1 。

3、以 D_0 记坐标面 xOy 上的以原点为中心，半径是 1 的圆周所围成的区域。

4、 $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 表示圆柱和平面的交线，几何上是一个椭圆。设 S 表示由该椭圆所围成的平面区域。根据题目的“顺时针”条件，有向曲面 S 的法方向为 $-(2, 3, 1)$ ，单位化得

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1)$$

5、利用函数的奇偶性和区域的对称性

$$\iint_{D_0} xy dxdy = \iint_{D_0} xdx dy \iint_{D_0} ydx dy = 0$$

6、利用形式对称性， $\iint_{D_0} x^2 dxdy = \iint_{D_0} y^2 dxdy$

7、要求牢记的公式： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \dots$

解题思路

第二类曲线积分

斯托克斯公式
----> 第一型曲面积分

----> 重积分 \iint_{D_1}

平移坐标变换
----> 重积分 \iint_{D_0}

----> 二次积分

解

$$\oint_{L^+} yz^2 dx + zx^2 dy + xy^2 dz \quad \text{第二类曲线积分}$$

$$\stackrel{\text{斯托克斯公式}}{=} \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & zx^2 & xy^2 \end{vmatrix} \quad \text{第二型曲面积分}$$

$$= \iint_S (2xy - x^2) dydz + (2yz - y^2) dzdx + (2xz - z^2) dxdy$$

$$= \iint_S ((2xy - x^2), (2yz - y^2), (2xz - z^2)) \cdot (dydz, dzdx, dxdy)$$

$$\stackrel{\text{转化为第一类曲面积分}}{=} \iint_S ((2xy - x^2), (2yz - y^2), (2xz - z^2)) \cdot \vec{ndS}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \iint_S [2(2xy - x^2) + 3(2yz - y^2) + (2xz - z^2)] dS$$

$$\stackrel{\text{转化为二重积分}}{=} - \iint_{D_1} [2(2xy - x^2) + 3(2yz - y^2) + (2xz - z^2)] dxdy$$

$$= \iint_{D_1} [(2x^2 + 3y^2 + z^2) - (4xy + (6y + 2x)z)] dxdy$$

$$= \iint_{D_1} [(2x^2 + 3y^2 + (6 - 2x - 3y)^2) - (4xy + (6y + 2x)(6 - 2x - 3y))] dxdy$$

$$\stackrel{\text{平移变换}}{=} \iint_{D_0} \begin{bmatrix} (2(x+1)^2 + 3y^2 + (6 - 2(x+1) - 3y)^2) \\ -(4(x+1)y + (6y + 2(x+1))(6 - 2(x+1) - 3y)) \end{bmatrix} dxdy$$

$$= \iint_{D_0} [(2(x+1)^2 + 3y^2 + (4 - 2x - 3y)^2) - (4xy + 4y + (2x + 6y + 2)(-2x - 3y + 4))] dxdy$$

$$\stackrel{\text{红色项积分为0}}{=} \iint_{D_0} [(10x^2 + 30y^2) + (k_1 xy + k_2 x + k_3 y) + 10] dxdy$$

$$= 10 \iint_{D_0} x^2 dxdy + 30 \iint_{D_0} y^2 dxdy + 10 \iint_{D_0} dxdy$$

$$\stackrel{\text{形式对称性}}{=} 40 \iint_{D_0} x^2 dxdy + 10 \iint_{D_0} dxdy$$

$$= 40 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 10\pi$$

$$= 10 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + 10\pi = 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + 10\pi$$

$$= 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 10\pi = 20\pi$$

4、求解如下微分方程柯西初值问题的显式解：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x(1-y^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

解 当 $y \neq \pm 1$ 时，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{1-y^2} &= xdx \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy &= xdx \\ \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy &= \int xdx \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| &= \frac{1}{2} x^2 + C_1 \\ \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| &= x^2 + 2C_1 \\ \left| \frac{1+y}{1-y} \right| &= e^{x^2+2C_1} = e^{2C_1} e^{x^2} \\ \frac{1+y}{1-y} &= \pm e^{2C_1} e^{x^2} = C e^{x^2} \\ \frac{2}{1-y} &= 1 + C e^{x^2} \\ 1-y &= \frac{2}{1+C e^{x^2}} \\ y &= 1 - \frac{2}{1+C e^{x^2}} \end{aligned}$$

其中 C_1 、 C 是任意常数。

注意： $y = \pm 1$ 是微分方程的两个奇异解，但不是这个初值问题的解。

代入初值 $y(0) = 2$ ， $2 = 1 - \frac{2}{1+C}$ ， $C = -3$ ，所以初值问题的解为 $y = 1 - \frac{2}{1-3e^{x^2}}$ 。