《线性代数》期中考试答案

一、（共 1 题，每小题 10 分，共 10 分）

求 i，j 使得 2714i56j9 成为偶排列。

解法一：

i 和 j 只能取 3 和 8，或 8 和 3 ……………………………………………………2 分

z(271435689)=0+2+1+2+1+1+0+0=7 ………………………………………………3 分

z(271485639)=0+2+1+0+2+2+5+0=12 ……………………………………………3 分

∴当 i=8，j=3 时，271485639 时偶排列 ……………………………………………2 分

解法二：

i 和 j 只能取 3 和 8，或 8 和 3 ……………………………………………………2 分

∵z(271435689)=7.

∴271435689 是奇排列 …………………………………………………………………4 分

交换 3 和 8，得 271485639 是偶排列 ………………………………………………4 分

二、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

解法一：

$$D\ \underset{\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}}{\overset{r_2+r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\ \text{3 分}\ \overset{\text{按第三列展开}}{=\!=\!=}1\bullet(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}\ \cdots\text{2 分}$$

$$\overset{c_3\div 3}{=\!=\!=}3\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}\overset{r_1-2r_2}{=\!=\!=}3\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\text{3 分}$$

$\xlongequal{\text{按第一行展开}} 3\bullet(-3)\bullet(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = -3^2 = -9$ ………………………… 2 分

解法二：

$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ -1 & 7 & -3 & 4\\ 2 & -9 & 5 & 7\\ 1 & -6 & 4 & 2\end{vmatrix}$ 1 分 $\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1} -\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$ …………… 3 分

$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -(-1)\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 6\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$ 2 分 $\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{vmatrix}$ …………… 2 分

$\xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = -9$ ……………………………………………… 2 分

三、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D = \begin{vmatrix}2019 & 2019 & \cdots & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 2018 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 2019 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

解法一：按行列式定义 ……………………………………………………… 1 分

$D = (-1)^{z(2019,2018,\cdots,2,1)}\bullet 1\bullet 2\bullet 3\cdots 2018\bullet 2019$ ………………………… 6 分

$= (-1)^{1+2+\cdots+2018}\bullet 2019!$ ……………………………………………… 2 分

$= (-1)^{\frac{(1+2018)\bullet 2018}{2}}\bullet 2019!$

$= (-1)^{2019\times 1009}\bullet 2019!$

$= -2019!$ ……………………………………………………………………… 1 分

解法二：相邻两列交换，差一个负号

$$D\xlongequal[\substack{(k,k-1)\\(k-1,k-2)\\\vdots\\(2,1),k=n,n-1,\ldots,3,2}]{c_j\leftrightarrow c_i}(-1)^{2018+2017+\cdots+2+1}\bullet\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&2018&2019\\0&2&0&\cdots&0&0\\0&0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2018&0\\0&0&0&\cdots&0&2019\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(1+2018)\bullet 2018}{2}}\bullet 2019!$$

$$=-2019!$$

四、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D_n=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}$$

解法一：

$$D_n\xlongequal[k=2,3,\ldots,n]{r_1+r_k}\begin{vmatrix}1+(n-1)a&1+(n-1)a&1+(n-1)a&\cdots&1+(n-1)a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}$$

. ………………………………………………………………4 分

$$\xlongequal[\substack{然后，r_k-ar_1\\k=2,3,\ldots,n}]{r_1\div[1+(n-1)a]}[1+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1-a&0&\cdots&0\\0&a&1-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&a&a&\cdots&1-a\end{vmatrix}$$ ……………5 分

$$=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$ ………………………………………………1 分

解法二：

$$D_n\xlongequal[k=2,3,\ldots,n]{c_1+c_k}\begin{vmatrix}1+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\1+(n-1)a&1&a&\cdots&a\\1+(n-1)a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+(n-1)a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}$$ ………………………………2 分

$$\overline{\overline{c_1 \div [1+(n-1)a]}}\ [1+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{2 分}$$

$$\underset{k=2,3,\ldots,n}{\overset{r_k - ar_1}{=\!=\!=\!=}}\ [1+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{5 分}$$

$$= [1+(n-1)a](1-a)^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{1 分}$$

五、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2019 & 0 & 0 & \cdots & 2019 \end{vmatrix}$$

解： 这是三爪行列式，

$$D\ \underset{k=2,3,\ldots,2019}{\overset{c_1 + c_k}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2019 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2019 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{7 分}$$

$$= 2019! \bullet 2019 = 2018! \bullet 2019^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{3 分}$$

六、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解法一：

$$D = D^T \text{ 2 分 } = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$ 此处为范德蒙德行列式

$$= [n-(n-1)] \bullet [n-(n-2)] \cdots (n-2)(n-1) \bullet$$

$[(n-1)-(n-2)]\bullet[(n-1)-(n-3)]\cdots[(n-1)-1]\bullet$

$\cdots$

$(3-2)(3-1)(2-1)$ ··7 分

$=[1\bullet 2\bullet\cdots\bullet(n-2)(n-1)]\bullet[1\bullet 2\bullet\cdots\bullet(n-2)]\bullet\cdots\bullet(1\bullet 2)\bullet 1$

$=(\mathrm{n}-1)!\bullet(\mathrm{n}-2)!\bullet\cdots\bullet 2!\bullet 1!$

$=\prod_{1\le k<n}(n-k)!$(答案写$\prod_{1\le j<i\le n}(i-j)$也行)·····························1 分

七、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$，D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}，求 $4A_{12}+8A_{22}+14A_{32}+4A_{42}$。

解法一：

∵D 是四阶行列式，而 A_{12}，A_{22}，A_{32} 和 A_{42} 是第二列元素的代数余子式，故将第二列元素分别换成 $a_{12}=4$，$a_{22}=8$，$a_{32}=14$，$a_{42}=4$. 按照按第二列展开定理，得

$$4A_{12}+8A_{22}+14A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix}2&4&1&2\\-3&8&-2&4\\5&14&2&7\\4&4&1&2\end{vmatrix}\text{4 分}\overset{c_2\text{与}c_4}{\underset{\text{对应元素成比例}}{=\!=\!=\!=}}0 \cdots\cdots\text{6 分}$$

解法二：

∵D 是四阶行列式，而 A_{12}，A_{22}，A_{32} 和 A_{42} 是第二列元素的代数余子式，故将第二列元素分别换成 $a_{12}=4$，$a_{22}=8$，$a_{32}=14$，$a_{42}=4$.按照按第二列展开定理，得

$$4A_{12}+8A_{22}+14A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix}2&4&1&2\\-3&8&-2&4\\5&14&2&7\\4&4&1&2\end{vmatrix}\text{4 分}\overset{r_4-r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}2&4&1&2\\-3&8&-2&4\\5&14&2&7\\2&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{按第四行展开}}{=\!=\!=\!=}2\bullet(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}4&1&2\\8&-2&4\\14&2&7\end{vmatrix}\overset{r_2\div 2}{=\!=}-2^2\begin{vmatrix}4&1&2\\4&-1&2\\14&2&7\end{vmatrix}\cdots\cdots\text{3 分}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1} -4\begin{vmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 14 & 2 & 7\end{vmatrix} = -4\bullet(-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 14 & 7\end{vmatrix}$$ ……………………………2 分

$$\xlongequal{c_1 \div 2} 8\bullet\begin{vmatrix}2 & 2\\ 7 & 7\end{vmatrix} = 0$$ ………………………………………………………………………1 分

解法三：

$4A_{12}+8A_{22}+14A_{32}+4A_{42}$

$$= 4\bullet(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3 & -1 & 4\\ 5 & 2 & 7\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$ 2 分 $$+\, 8\bullet(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 7\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$ 2 分 $+$

$$14\bullet(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -3 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$ 2 分 $$+\, 4\bullet(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -3 & -2 & 4\\ 5 & 2 & 7\end{vmatrix}$$ 2 分 $= 0$ ………2 分

八、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

解： $$D_{2n} = \begin{vmatrix}a_1 & & & & & & & b_1\\ & a_2 & & & & & b_2 & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_n & b_n & & & \\ & & & c_n & d_n & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_2 & & & & & d_2 & \\ c_1 & & & & & & & d_1\end{vmatrix} \xlongequal[\substack{k=1,2,\cdots,n-1\\ \text{然后，} r_k \leftrightarrow r_8\\ (2n,2n-1)\to(2n-1,2n-2)\\ \to(3,2)}]{c_k \leftrightarrow c_8}$$

$$(-1)^{2(2n-1)}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & & & & & & \\ c_1 & d_1 & & & & & & \\ & & a_2 & & & & & b_2\\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_n & b_n & & \\ & & & & c_n & d_n & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_2 & & & & & d_2\end{vmatrix}$$ ………………………………4 分

$$= \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}a_2 & & & & & b_2\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2\end{vmatrix} = (a_1d_1-b_1c_1)C_{2n-2}$$ ………………2 分

于是，

$D_{2n}=(a_1d_1-b_1c_1)C_{2n-2}=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)C_{2n-4}$

$=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)(a_3d_3-b_3c_3)C_{2n-6}=\cdots$

$=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)(a_3d_3-b_3c_3)\dots(a_nd_n-b_nc_n)$

$=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$

…………………………………………………………………………4 分

九、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

设$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 4x & 1\end{vmatrix}$，求 x^3 的系数。

解：根据行列式定义，四阶行列式$f(x)$共有 4!项，每项为

$(-1)^{z(P_1P_2P_3P_4)}a_{1P_1}a_{2P_2}a_{3P_3}a_{4P_4}$，其中$a_{1P_1}a_{2P_2}a_{3P_3}a_{4P_4}$要取自不同行、不同的

列，因此含 x^3 的项只有两项为：…………………………………………2 分

$(-1)^{z(1234)}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}=x^3$ ……………………………………………3 分

和$(-1)^{z(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=(-1)x^2\bullet 4x=-4x^3$ ……………………3 分

$\therefore f(x)$含x^3的系数，$x^3-4x^3=-3x^3$ 得-3. ……………………………2 分

十、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_1+b & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & a_2+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

解：

$$D_{n+1}\overline{\overline{\frac{c_{k+1}-a_kc_1}{k=n,n-1,\cdots,2}}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_2-a_1 & b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \cdots & b\end{vmatrix}8\text{ 分}=b^n\cdots 2\text{ 分}$$