行列式的考点

会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

例 8 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

析 本例中 D 属于一类重要的行列式,在后继内容中会多次遇到此类行列式,其特点是对角元相同,并且非对角元也相同.它的一般形式为教材习题8(2),可以用多种方法计算其值,但最基本也最方便的方法就是本例介绍的,即利用各列(行)元素之和相等,把各行(列)同时加到第 1 行(列).

例 10 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\\vdots&&\vdots&&0&\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

$$\begin{vmatrix} A_1 & O \\ B & A_2 \end{vmatrix} = |A_1||A_2|.$$

矩阵的考点

(6) 方阵的行列式满足：

(i) $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$；

(ii) $|\lambda A_n| = \lambda^n |A_n|$；

(iii) $|AB| = |A||B|$.

(3) 逆阵的性质

(i) 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

(ii) 若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(iii) 若 A 可逆，$k \neq 0$，则 kA 也可逆，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

(iv) 若 A，B 均可逆，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) 伴随矩阵

方阵 A 的伴随阵 A^* 定义为

$$A^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}}.$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式.

伴随阵具有下述性质：

(i) $AA^* = A^*A = |A|E$；

(ii) 若 $|A| \neq 0$，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，$A^* = |A|A^{-1}$.

问 2.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵($n\geqslant 2$),下列等式是否正确？为什么？

(1) $|k\boldsymbol{A}|=|k||\boldsymbol{A}|$; (2) $(k\boldsymbol{A})^*=k\boldsymbol{A}^*(k\neq 0)$.

答 (1) 不正确.由方阵的行列式的性质知道 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

(2) 不正确.因由伴随矩阵的定义

$(k\boldsymbol{A})^*$ 的 (j,i) 元 = 矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 中 (i,j) 元的代数余子式

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=k^{n-1}A_{ij},$$

所以

$$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

问 2.3 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有些什么重要的性质？

答 (1) 基本性质 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;

(2) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$;

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$(这里 n 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数,见习题 25);

(4) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$, $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

例 2.3 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$．又方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^n$．

解 由方阵幂的定义有

$$\boldsymbol{A}^n=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})}_{n\text{个}}.$$

把上式看做 $2n$ 个矩阵的乘积，使用结合律，得

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}_{(n-1)\text{个}}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

注意到矩阵 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 1×1 的矩阵，也即是一个数，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$，根据矩阵数乘的运算规则，有

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}3^{n-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

线性方程组求解考点

5. 重要定理

为应用方便，常把 4 中的基本定理分成两个定理来叙述：

定理 4 n 元齐次线性方程 $A_{m\times n}x=0$有非零解的充要条件是 $R(A)<n$.

定理 5 线性方程 $Ax=b$ 有解的充要条件是$R(A)=R(A,b)$.

4. 线性方程组的解

(1) 基本定理 n 元线性方程组 $Ax=b$

(i) 无解的充要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

(ii) 有惟一解的充要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

(iii) 有无限多解的充要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

向量的线性无关和线性相关考点

2. 线性组合与线性表示

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$(或记作 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$)有解.

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=R(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ (定理 1,上章定理 5).

(2) 向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$矩阵方程$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$ (或记作 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$)有解

$\Leftrightarrow$存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times l}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. (定理 2,上章定理 6)

$\Rightarrow R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$ (定理 3,上章定理 7).

(3) 向量组 A 与向量组 B 等价(能相互线性表示)

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

3. 线性相关与线性无关

向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$(或记作 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$)有非零解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)<m$ (定理 4,上章定理 4).

6. 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 S,则

$$R(\boldsymbol{A})+R_S=n.$$

解集 S 的一个最大无关组称为齐次线性方程组的基础解系.设 $R(\boldsymbol{A})=r$,则 $R_S=n-r$,知基础解系含 $n-r$ 个解向量.设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组的基础解系,则其通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}).$$

齐次线性方程组的解集 S 是非空集合,并且对向量的线性运算封闭(即若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in S$,则 $\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\in S$,其中 λ_1,λ_2 为数),故 S 是一个向量空间,称为齐次线性方程组的解空间.

7. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*$,对应的齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(也称为非齐次方程组的导出组)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,则非齐次方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+c_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}).$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$,

证明向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 等价.

析 本例的目的是运用定理 2 的推论来证明两向量组等价.定理 2 的推论指明了两个向量组等价的充要条件:

向量组 A 与向量组 B 等价

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

归结为求矩阵的行阶梯形.

二次型考点

2. 正交向量组

一组两两正交的非零向量称为正交向量组.正交向量组一定线性无关.

施密特正交化过程:设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关,令

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1,$$

…………

$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1]}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1-\cdots-\frac{[\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_{r-1}]}{\|\boldsymbol{b}_{r-1}\|^2}\boldsymbol{b}_{r-1},$$

则向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 为正交向量组,且与向量组 A 等价.

必考解题方法:

解 (1) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2$$

3. 正交矩阵

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\text{ 为正交矩阵} &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{ 可逆,且 }\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{ 的行(列)向量组是}\mathbb{R}^n\text{ 的规范正交基.}\end{aligned}$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,则

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

(ii) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$;

(iii) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$,则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值,这里

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个特征值,对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_r$,如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 各不相等,则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_r$ 线性无关.

(iii) 给定对称阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

(2) 对称阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤：

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$，它们的重数依次为 $s_1, \cdots, s_t(s_1 + \cdots + s_t = n)$；

(ii) 对每个 s_i 重特征值 λ_i，求方程 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，得 s_i 个线性无关的特征向量. 再把它们正交化、单位化，得 s_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $s_1 + \cdots + s_t = n$，故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量；

(iii) 用这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 $\boldsymbol{P}$，便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

(4) 给定二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A})$，存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使

$$f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

(5) 配方法是化二次型成标准形(或规范形)的一种较方便的方法.

例 13 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

析 本例的目的是掌握用矩阵对角化理论计算矩阵的幂及多项式. 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ (即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$)，则 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}$，详见问 5.4.