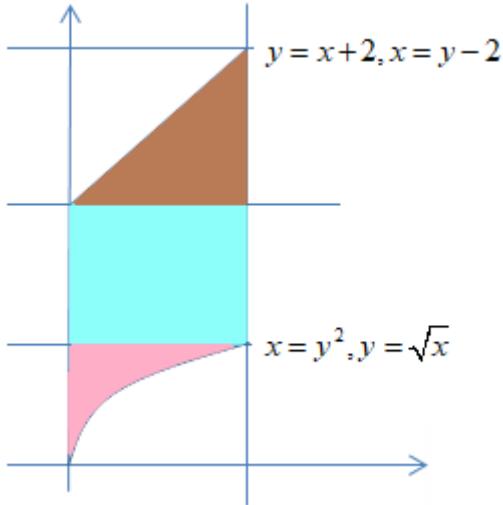


1. (8分) 交换二次积分的次序

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_{y-2}^1 f(x, y) dx.$$

解 1、画出二重积分的积分区域



-----绘制每个小区域各 1 分, 合计----- 3 分

2、交换二次积分

$$\text{原式} = \iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{x+2} f(x, y) dy$$

-----8 分

评分说明

没有绘图直接写答案至多只能给 5 分;

第 2 步, 交换二次积分, 4 个上下限, 酌情给分

2. (6分) 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2$ 所截部分的面积.

解 1、所截部分在坐标面 xOy 的投影是一个圆盘: $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$;

1分

2、面积元: $dS = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy$;

3分

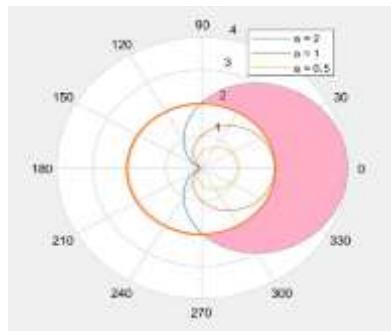
3、写出面积公式，并计算二重积分

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} d(1 + 4r^2) \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} 26 d\theta \\ &= \frac{13}{3} \pi \end{aligned}$$

6分

3. (6分) 求二重积分 $\iint_D r d\sigma$, 其中 D 是心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 与圆周 $r = a$ ($a > 0$) 所围的不包含原点的区域.

解 1、画图;



1分

2、确定极坐标下的积分区域

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq a(1 + \cos \theta) \right\};$$

2分

3、计算

$$d\sigma = r dr d\theta$$

$$\iint_D r d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} r \cdot r dr$$

3分

$$\begin{aligned} \iint_D r d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} r \cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r^3 \Big|_a^{a(1+\cos\theta)} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \Big|_a^{a(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^3 - 1] d\theta = \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta) d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta) d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \left(3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \\ &= \left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2} \right) a^3 \end{aligned}$$

6分

评分说明

1、二次积分，前面的容易（1分），后面的复杂（2分）

2、第二个定积分的计算，对称性、递推公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$, 都是给分点

4. (10分) 设 Γ 为柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与平面 $y = z$ 的交线, 从 z 轴正向看为顺时针, 计算

$$I = \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz.$$

解(方法一) 1、曲线的参数方程:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta, \theta : 2\pi \rightarrow 0 \\ z = 1 + \sin \theta \end{cases}$$

-----xyzθ各1分-----4分

2、将第二型曲线积分化为定积分计算

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz \\ &= \int_{2\pi}^0 \left[-(1 + \sin \theta)^2 \sin \theta + \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) \right] d\theta \end{aligned}$$

-----6分

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left[(1 + \sin \theta)^2 \sin \theta - 2 \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta) \left[(1 + \sin \theta) \sin \theta - 2 \cos^2 \theta \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta) (-2 + \sin \theta + 3 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 - \sin \theta + 4 \sin^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 - \sin \theta + 4 \sin^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -4\pi + 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

-----8分

$$\begin{aligned} &= -4\pi + 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= -4\pi + 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

-----10分

解(方法二) 圆柱体与平面的截面是一个椭圆, 该椭圆记为 S , 并取椭圆的下侧, 法方向
方向余弦为 -----1分

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1). \quad \text{-----4分}$$

根据斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & xz \end{vmatrix} \quad \text{-----8分} \\ &= \iint_S -z dz dx - y dx dy \\ &= \iint_S (-z \cos \beta - y \cos \gamma) dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (-z + y) dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S 0 dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

-----10分

解(方法三) 圆柱体与平面的截面是一个椭圆, 椭圆在 xOy 坐标面上的投影是 D , 边界 ∂D
取顺时针方向。因为在 Γ 上, $y = z$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz = \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xy dy \\ &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + 2xy dy \\ &= \oint_{\partial D} y^2 dx + 2xy dy \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= -\iint_D (2y - 2y) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. (15分) 已知曲线积分

$$\int_L (-2f(x) + e^x + 10 \cos x) \sin y dx + (f'(x) - 3f(x)) \cos y dy$$

与积分路径无关, $f(x)$ 有连续的二阶导函数, 求 $f(x)$.

解 根据路径无关的条件

$$\frac{\partial}{\partial y} [(-2f(x) + e^x + 10 \cos x) \sin y] = \frac{\partial}{\partial x} [(f'(x) - 3f(x)) \cos y] \quad \text{----- 3 分}$$

$$(-2f(x) + e^x + 10 \cos x) \cos y = (f''(x) - 3f'(x)) \cos y$$

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x + 10 \cos x$$

----- 5 分

特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. ----- 7 分

$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x$ 的特解: $y = axe^x$, 代入

$$y' = axe^x + ae^x$$

$$y'' = axe^x + 2ae^x$$

$$axe^x + 2ae^x - 3(axe^x + ae^x) + 2axe^x = e^x$$

求得 $a = -1$, $y = xe^x$; ----- 10 分

$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 10 \cos x$: $y = a \cos \theta + b \sin \theta$, 代入

$$y'' = -a \cos \theta - b \sin \theta, \quad y' = -a \sin \theta + b \cos \theta$$

$$\begin{cases} a - 3b = 10 \\ b + 3a = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases},$$

$$y = \cos \theta - 3 \sin \theta \quad \text{----- 13 分}$$

故

$$f(x) = -xe^x + \cos \theta - 3 \sin \theta + C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。 ----- 15 分

6. (8分) 计算第二型曲面积分 $\iint_S xyz dxdy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第八卦限的部分, 取球面外侧.

解 1、球面的第八卦限的部分, 在坐标面 xOy 的投影为

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \right\}, \quad \text{-----2分}$$

$$2、z = -\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad dxdy = \cos \gamma dS \leq 0, \quad \text{所以} \quad \text{-----4分}$$

$$\begin{aligned} \iint_S xyz dxdy &= \iint_D xy \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \cdot r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \cdot \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} \cdot r dr \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} \cdot r dr \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \left(-\int_0^1 (1-x) \sqrt{1-x} dx + \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx + \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right)_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

-----8分

7. (8分) 求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{6y}{x} - xy^2$ 的通解.

解 (方法一) 1、 $y=0$ 是一个特解; 题目不关心特解

2、当 $y \neq 0$ 时, $y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{6y^{-1}}{x} - x$, $-\frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{6y^{-1}}{x} - x$, $\frac{dy^{-1}}{dx} + \frac{6y^{-1}}{x} = x$.

令 $z = y^{-1}$, 即得到一个一阶线性非齐次常微分方程:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{6z}{x} = x \quad \text{3分}$$

3、解对应的齐次线性微分方程: $\frac{dz}{dx} + \frac{6z}{x} = 0$

$$\frac{dz}{z} = -6 \frac{dx}{x}, \int \frac{dz}{z} = -6 \int \frac{dx}{x}, \ln|z| = -6 \ln|x| + C_1, |z| = e^{C_1} x^{-6}, z = \frac{\pm e^{C_1}}{x^6} = \frac{C}{x^6},$$

其中 C_1 为任意常数, $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. 题目不关心常数 C 5分

4、常数变异, 假设 $z = \frac{C(x)}{x^6}$ 是 $\frac{dz}{dx} + \frac{6z}{x} = x$ 的解, 则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C'(x)}{x^6} - 6 \frac{C(x)}{x^7} \right) + 6 \frac{C(x)}{x^7} = x, \\ & \frac{C'(x)}{x^6} = x, C'(x) = x^7, C(x) = \frac{1}{8} x^8 + C_2 \end{aligned}$$

所以

$$z = \frac{\frac{1}{8} x^8 + C_2}{x^6} = \frac{x^2}{8} + \frac{C_2}{x^6} = \frac{x^8 + 8C_2}{8x^6} = \frac{x^8 + C}{8x^6}$$

其中 $C = 8C_2$ 为任意常数. 题目不关心常数 C 7分

5、原方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{6y}{x} - xy^2$ 的通解为

$$\frac{1}{y} = \frac{x^8 + C}{8x^6}, \quad y = \frac{8x^6}{x^8 + C}. \quad \text{8分}$$

由于特解 $y=0$ 无法融合到通解中, 所以 $y=0$ 是一个奇异解.

题目不关心奇异解

解 (方法二) 令 $z = \frac{1}{y}$, 则

$$\frac{dz}{dx} + \frac{6z}{x} = x$$

$$dz + \left(\frac{6z}{x} - x \right) dx = 0$$

算出积分因子 x^6 , 所以

$$x^6 dz + \left(6x^5 z - x^7 \right) dx = 0, \quad d \left(x^6 z - \frac{1}{8} x^8 \right) = 0$$

$$x^6 z - \frac{1}{8} x^8 = C_1, \quad z = \frac{x^8 + 8C_1}{8x^6},$$

$$y = \frac{8x^6}{x^8 + C}$$

8. (8分) 求微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$ 的特解.

解 (方法一) 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 所以方程变形为

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0. \quad \text{-----2分}$$

1、 $p = 0$, 即 $y = C$ 是微分方程的一个特解, 但不满足初始条件; -----3分

2、当 $p \neq 0$ 时,

$$y \frac{dp}{dy} - p = 0, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

融合特解后的通解是 $p = C_1 y$, 其中 C_1 为任意常数。 -----5分

3、解方程 $y' = C_1 y$, 得到通解 $y = C_2 e^{C_1 x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数。 -----7分

4、根据初始条件, $y = e^x$. -----8分

(方法二)

1、 $y = C$ 是微分方程的一个特解, 但不满足初始条件; -----1分

2、当 $y \cdot y' \neq 0$ 时,

$$\frac{y''}{y} = \frac{y'}{y}, \quad (\ln|y'|)' = (\ln|y|)', \quad \left(\ln\left|\frac{y'}{y}\right|\right)' = 0, \quad \ln\left|\frac{y'}{y}\right| = C_1,$$

$$\left|\frac{y'}{y}\right| = e^{C_1},$$

$$\frac{y'}{y} = \pm e^{C_1} \triangleq C_2$$

根据初始条件, $C_2 = 1$, $\frac{y'}{y} = 1$. -----4分

3、解方程 $\frac{dy}{dx} = y$, 得 $y = Ce^x$. -----6分

4、根据初始条件, $y = e^x$. -----8分

9. (8分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛半径、收敛区间与收敛域.

解

$$\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{(n+1)}}}{\frac{2n-1}{2^n}} \rightarrow \frac{1}{2},$$

收敛半径为 $R = \sqrt{2}$ 。----- 4分

易见幂级数在 $\pm\sqrt{2}$ ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2} \right),$$

一般项不趋于 0，级数发散。所以收敛区间和收敛域都是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

----- 8分

评分说明

收敛半径也可以用正向级数的比值判别法来求：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{(n+1)}} x^{2(n+1)-2}}{\frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2} x^2 \right| = \frac{1}{2} |x|^2,$$

于是，当 $|x| < \sqrt{2}$ ，级数收敛；所以当 $|x| > \sqrt{2}$ ，级数发散，收敛半径为 $R = \sqrt{2}$ 。

10. (10分) 讨论下列级数的敛散性:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

解 (方法一) 1、 $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln \ln n} = (e^{\ln n})^{\ln \ln n} = n^{\ln \ln n}$, -----1分

2、当

$$\ln \ln n > 4, \ln n > e^4, n > e^{e^4}$$

时, -----2分

$$\frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}, \quad \text{-----3分}$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, -----4分

根据比较判别法原级数收敛。-----5分

(方法二) 首先证明当 n 充分大时, $\frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$, 即

$$(\ln n)^{\ln n} > n^4, \quad \ln n \cdot \ln \ln n > 4 \ln n, \quad \ln \ln n > 4,$$

只要 $n > e^{e^4}$ 即可。根据比较判别法, 因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原级数收敛。

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{0.9} (\ln \ln n)^9}.$$

解 (找一个 $0.9 < \alpha = 0.99 \leq 1$) -----1分

$$\frac{\frac{1}{n(\ln n)^{0.9} (\ln \ln n)^9}}{\frac{1}{n(\ln n)^{0.99}}} = \frac{(\ln n)^{0.09}}{(\ln \ln n)^9} \rightarrow \infty, \quad \text{-----2分}$$

而

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{0.99}} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{0.99}} d \ln x = 100 \cdot (\ln x)^{0.01} \Big|_2^{+\infty} \text{发散, } \quad \text{-----3分}$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{0.99}} \text{发散, } \quad \text{-----4分}$$

故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{0.9} (\ln \ln n)^9}$ 发散。-----5分

11. (8分) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-x^2 n^{1.5}}$ 在 $(-\infty < x < \infty)$ 上一致收敛.

解 令 $f(t) = te^{-\alpha t}$, $t > 0, \alpha > 0$, $f'(t) = e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}(1 - \alpha t)$, $t = \frac{1}{\alpha}$ 是唯一驻点。

当 $t \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ 时, 函数单调上升; 当 $t \in \left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ 时, 函数单调下降, 所以函数在当 $t = \frac{1}{\alpha}$

达到最大值, 于是 $f(t) = te^{-\alpha t} \leq \frac{1}{e\alpha}$, 所以

$$x^2 e^{-x^2 n^{1.5}} \leq \frac{1}{e \cdot n^{1.5}}, \quad \text{-----4分}$$

或者

$$\because e^x \geq x, \therefore x^2 e^{-x^2 n^{1.5}} = \frac{x^2}{e^{x^2 n^{1.5}}} \leq \frac{x^2}{x^2 n^{1.5}} = \frac{1}{n^{1.5}} \quad \text{-----4分}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-x^2 n^{1.5}}$ 是一个正项级数, \quad \text{-----5分}

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}} \text{ 收敛,} \quad \text{-----6分}$$

根据强级数判别法, 原级数收敛。 \quad \text{-----8分}

12. (5分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$ 不是绝对收敛。

解 1、当 $2\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $\left| \frac{\cos n\varphi}{n} \right| = \frac{1}{n}$, 调和级数发散, 所以级数不是绝对收敛的。

----- 1 分

2、当 $2\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时,

$$\left| \frac{\cos n\varphi}{n} \right| \geq \frac{\cos^2 n\varphi}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2n\varphi}{2n},$$

----- 2 分

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\varphi}{2n}$ 收敛

----- 3 分

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n\varphi}{n} \right|$ 发散, 原级数也不绝对收敛。

----- 4 分

总之, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$ 永不绝对收敛。

----- 5 分

评分说明

评分时找给分点:

1、懂得分情况讨论, 给一分;

2、调和级数发散, 给一分;

3、不等式缩放, 给一分;

4、说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\varphi}{2n}$ 收敛, 给一分;

5、级数的性质: 发散级数与收敛级数之和发散, 给一分。