东校区 2009－2010 学年 09 级第二学期

高等数学（一）期中试题

学院：环院　专业：环境规划与管理　学号：09358096　姓名：程斌

成绩：96

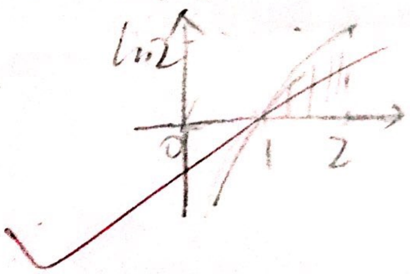
《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一.求解下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1．交换积分 $\int_1^2 dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 的积分顺序。

其区域是由 $x=1$，$x=2$，$y=\ln x$，$y=0$ 围成的

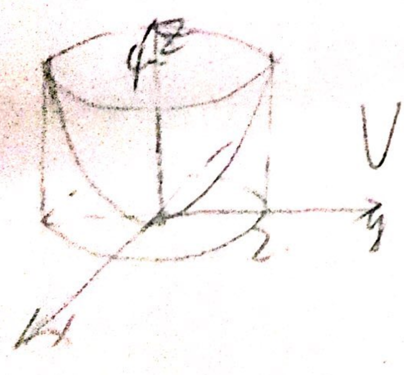
$y=\ln x \Rightarrow x=e^y$　$x=2$ 时 $y=\ln 2$.



∴ 交换顺序后

原式 $=\int_0^{\ln 2} dy\int_{e^y}^{2} f(x,y)dx$.

2．求由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $4=x^2+y^2$ 以及 $z=0$ 所围区域的体积。



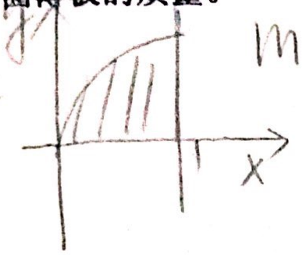
围成区域如图所示

$V=\iiint_\Omega dV=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^{x^2+y^2}dz=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=8\pi$.

. 设平面薄板 D 以 $y=\sqrt{x}, y=0, x=1$ 为边界，其上每一点密度 $\rho(x,y)=y$，求此平面薄板的质量。

解.

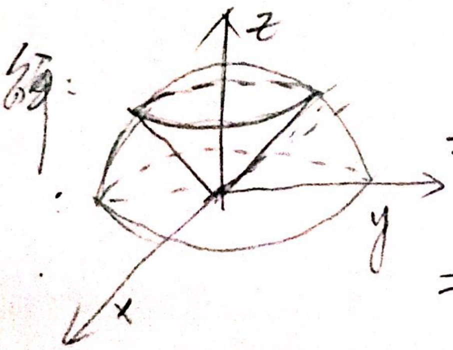


$$M=\iint_{D_{xy}}\rho(x,y)\,d\sigma$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy=\frac{1}{4}$$

4．计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是由 $z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的区域。

解:



$z=r\cos\varphi$

$x=r\sin\varphi\cos\theta$

$y=r\sin\varphi\sin\theta$

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

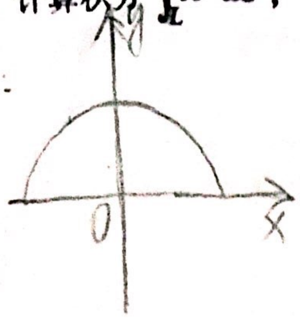
$$=\iiint_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\varphi\,d\sin\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^4\,dr$$

$$=\frac{4}{15}\pi$$

5. 计算积分 $\int_L x^2 ds$，其中 L 是上半圆周：$x^2+y^2=1, y\geq 0$.

解：



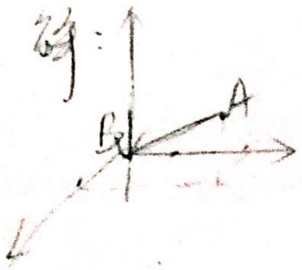
$y=\sqrt{1-x^2}$ $y'_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $ds=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int_L x^2 ds=\int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\left[-\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)+\arcsin x\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$

6. 计算 $\int_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 是从 $A(1,2,1)$ 到 $B(0,0,0)$ 的直线段。

解：



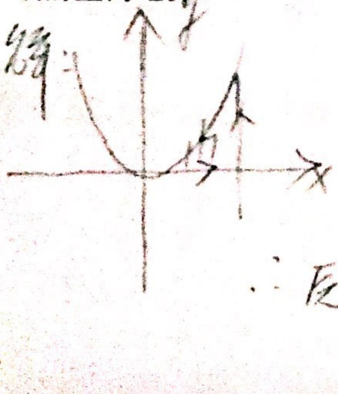
$\overrightarrow{AB}=(-1,-2,-1)$

$x=t$ $y=2t$ $z=t$ $0\leq t\leq 1$

左式 $=-\int_1^0(2t+2t+t)dt=\frac{5}{2}$

7. 计算 $\oint_L (e^x+x^2y)dx+(e^y+x^3)dy$，$L$ 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围平面区域的正向边界。

解：



$P=e^x+x^2y$

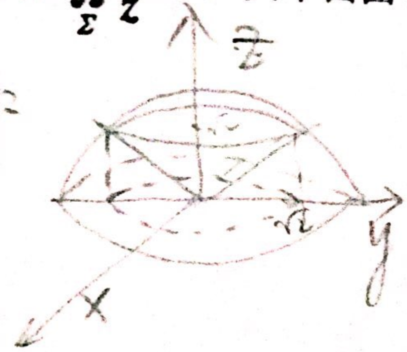
$Q=e^y+x^3$

$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2$

$\therefore$ 左式 $=\iint_{D_{xy}}(3x^2-x^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}2x^2dy=\frac{2}{5}$

8．计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$ ，其中曲面 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=4$ 被 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截的部分。

解：



$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $z_x'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ $z_y'=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

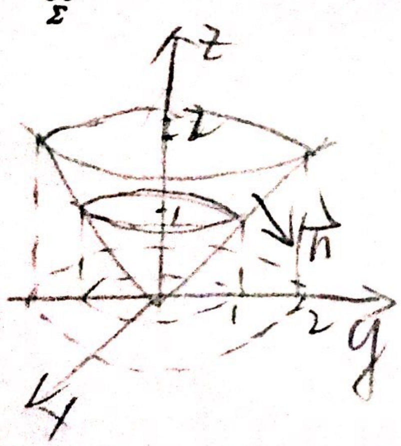
$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$

原式 $=\iint\limits_{Dxy}\frac{2}{4-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{4-r^2}dr^2$

$=2\pi\ln 2$

9．求 $I=\iint\limits_{\Sigma}z^2dxdy$，其中 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间部分曲面的外侧。

解：



$I=\iint\limits_{\Sigma}z^2dxdy$

$=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dxdy=-\iint\limits_{Dxy}(x^2+y^2)dxdy$

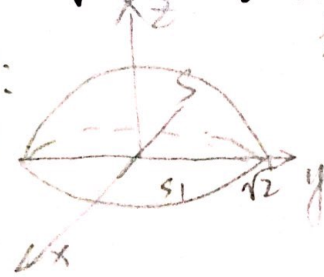
$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2\cdot r\cdot dr=-\frac{15}{2}\pi$

Scanned by CamScanner

−2

10. 求 $I = \iint\limits_{\Sigma} 2xdydz + ydzdx + 3zdxdy$，其中曲面 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 的内侧。

解:



补充平面 S_1: $z=0$: 方向指向上

跟据高斯公式

$I = \iiint\limits_{\Omega} (2+1+3)dV - \iint\limits_{S_1}$ $\quad \left(\iint\limits_{S_1} = 0\right)$

$= 6 \times V = 16\sqrt{2}\pi$

X

二. 解下列微分方程（11—13 小题各 7 分，14 小题 9 分，共 30 分）

11. 求 $y'' = y' + (y')^2$ 的通解。

缺 y. 令 $p = y'$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy} = p + p^2$

$\int \frac{1}{1+p}dp = \int dy$

$\ln(1+p) = y + C$

$p = Ce^y$

$\frac{dy}{dx} = Ce^y$

$\int \frac{1}{Ce^y}dy = \int dx$

$-\frac{1}{C_1}e^{-y} = x + C_2$

$y = \ln \frac{1}{C_1x + C_2'}$

12. 求 $2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - \sin x = 0$ 的通解。

解. $x\frac{dy^2}{dx} + y^2 - \sin x = 0$

令 $y^2 = z$

$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = \frac{\sin x}{x}$ ①

令 $\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 0$. $\int \frac{1}{z}dz = \int -\frac{1}{x}dx$

$z = \frac{C_1}{x}$ 令 $z = \frac{C_1(x)}{x}$ 代入①

$C_1(x) = \sin x$

$\int C_1(x)dx = -\cos x + C_2$

$\therefore C_1(x) = -\cos x + C_2$

$\therefore z = \frac{-\cos x + C_2}{x}$

$y^2 = \frac{-\cos x + C_2}{x}$