5.1 (1) $V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

$V(x) = x^TAx = x^T\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}x$, 因为顺序主子式 $2>0$,

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$. 所以$A>0$, $V(x)$为正定函数

(2) $V(x) = x^TAx = x^T\begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}x$, 因为主子式 $8, 2, 1 > 0$,

$\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$,

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16+4+4-2-16-8 < 0.$$

所以A不定, $V(x)$为不定函数.

(3) $V(x) = x^TAx = x^T\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}x$, 因为顺序主子式 $1>0$,

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 - \frac{1}{4} < 0$.

所以A为不定矩阵, $V(x)$为不定函数.

(5). $V(x) = x^TAx = x^T\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}x$, 因为顺序主子式 $1>0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 33-2-2-3-11-4 = 11 > 0$$

所以$A>0$, $V(x)$为正定函数.

5.4 $|sI-A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -\frac{m}{2} & s \end{vmatrix} = s\left|s^2-\frac{m}{2}\right|$

$s_1=0$, $s_2=-\sqrt{\frac{m}{2}}$, $s_3=\sqrt{\frac{m}{2}}$，因此只有 $0<m<2$ 时，原系统在原点是大范围渐近稳定的.

5.5 对于线性系统来说，李雅普诺夫第一方法中结论是全局性的，是充分必要的.

$|sI-A| = \begin{vmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{vmatrix} = s^2+(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0.$

两个特征值同时具有负实部的充要条件为 $a_{11}+a_{22}<0$，$a_{11}a_{22}>a_{12}a_{21}$.

5.7 取 $V(x,t)=\frac{1}{2}(x_1^2+(t+1)x_2^2)$

$\dot{V}(x,t) = x_1\dot{x}_1+\frac{1}{2}x_2^2+(t+1)x_2\dot{x}_2$

$= x_1x_2+\frac{1}{2}x_2^2+(t+1)x_2\left(-\frac{1}{t+1}x_1-10x_2\right)$.

$= -(10t+\frac{19}{2})x_2^2<0.$

$\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(x)=\infty$. 所以系统在原点处大范围渐近稳定.

5.11. $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

由 $A^TP+PA=-I$ 得

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

$\begin{cases} -2p_{11}+4p_{12}=-1 \\ p_{11}-4p_{12}+2p_{22}=0 \\ 2p_{12}-6p_{22}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11}=\frac{7}{4} \\ p_{22}=\frac{3}{8} \\ p_{12}=\frac{5}{8} \end{cases}$.

即得 $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

因为 $p_{11}=\frac{7}{4}>0$，$\det\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}=\frac{17}{64}>0.$

可知P是正定阵，因此系统在原点处是大范围渐近稳定的。系统的李雅普诺夫函数及其沿轨迹的导数分别为

$V(x)=x^TPx=\frac{1}{2}(14x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2)>0$.

$\dot{V}(x)=-x^TQx=-x^Tx=-(x_1^2+x_2^2)<0$.

因为 $\lim_{\|x\|\to\infty}V(x)=\infty$，所以系统在原点处大范围渐近稳定.

5.12. 易知 $(0,0)$ 为其唯一的平衡状态. 取 $V(x)=x_1^2+x_2^2$，则有.

① $V(x)=x_1^2+x_2^2>0$.

② $\dot{V}(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1-(1+x_2)^2x_2\end{bmatrix}$

$=-2x_2^2(1+x_2)^2$.

1. 当 x_1 任意，$x_2\equiv0$.

2. x_1 任意，$x_2\equiv-1$.

这两种情况 $\dot{V}(x)=0$ 以外，均有 $\dot{V}(x)<0$. 所以，$\dot{V}(x)$ 为负半定.

③ 检查 $\dot{V}(\phi(t;x_0,0))$ 是否恒等于0.

考察情况1，状态轨线 $\phi(t;x_0,0)=[x_1(t),0]^T$，则由于 $x_2(t)\equiv0$，可导出 $\dot{x}_2(t)\equiv0$，将此代入系统的方程可得.

$\dot{x}_1(t)=x_2(t)\equiv0$.

$0=\dot{x}_2(t)=-(1+x_2(t))^2x_2(t)-x_1(t)=-x_1(t)$.

这表明，除了点 $(x_1=0,x_2=0)$ 外，$\phi(t;x_0,0)=[x_1(t),0]^T$ 不是系统的受扰运动解.

考察情况2，$\phi(t;x_0,0)=[x_1(t),-1]^T$，则由 $x_2(t)=-1$ 可导出 $\dot{x}_2(t)=0$，

代入方程可得 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)\equiv-1$.

$0=\dot{x}_2(t)=-(1+x_2(t))^2x_2(t)-x_1(t)=-x_1(t)$.

显然这是一个矛盾的结果，表明 $\phi(t;x_0,0)=[x_1(t),-1]^T$ 也不是系统的受扰运动解.

综上分析可知，$\dot{V}(\phi(t;x_0,0))\neq0$.

④. 当 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ 时，显然有 $V(x) = \|x\|^2 \to \infty$.

于是，可以断言，此系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的.