1.(2)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$Ab = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^2b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

能控性矩阵 $U_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

$\operatorname{rank} U_c = 3 = n$，满足能控性的充要条件，所以该系统能控.

(3). $b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$Ab = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2b = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} U_c = 2 < n$，不满足能控性的充要条件，所以不完全能控。

3. (2) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

系统的观测矩阵 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -14 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \\ -8 & -14 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} U_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

满足能观性的充要条件，所以该系统是能观测的.

(3). $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}$

$$CA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 56 & 45 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 56 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 56 & 45 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} U_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 3 = n.$$

满足能观性的充要条件，所以是能观测的.

6. (1).

则

(2

(3).

4. $U_c=[b\ \ Ab]=\begin{bmatrix} p & p-12 \\ -1 & p \end{bmatrix}$

其行列式 $\det[b\ \ Ab]=p^2+p-12$。根据能控性的定理，若系统能控，则秩为2，即 $\det[b\ \ Ab]\neq 0$，可知 $p\neq -4$ 或 $p\neq 3$.

能观性矩阵 $U_o=\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q & 1 \\ q+1 & 12q \end{bmatrix}$

$\det\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}=12q^2-q-1$. 若系统能观，则秩为2，亦即 $\det\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}\neq 0$，可知 $q\neq \frac{1}{3}$ 或 $q\neq -\frac{1}{4}$.

5. 证明 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & -1 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 12 & -0 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}u$.

不论a, b, c取何值都不能控.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-20 & 1 & 0 \\ -4 & \lambda-16 & 0 \\ -12 & 0 & \lambda-18 \end{vmatrix}=0.$$

8. (1)

~~可知 rank~~ 解得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=18$. 将其代入特征方程得：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

可知 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \end{bmatrix}=1$.

基础解的个数 $=3-1=2$，所以存在着两个线性无关的向量 P_1、P_2，可将A化为

$$A'=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

能 因为在约当块中有相同的根，由能控判据2可知无论a、b、c为何值，

调 系统均不能控。

6. (1). $A_1=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}$ $A_2=-1$ $B_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $B_2=1$.

则组合系统的状态方程表达式为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}u=$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-4&0\\0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u.$$

$$y=\begin{bmatrix}2&1&1\end{bmatrix}x$$

(2). $U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-4\\1&-4&13\\1&-1&1\end{bmatrix}$ 秩为3，该系统能控。

$U_o=\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-3&-2&1\\6&5&1\end{bmatrix}$ 秩为3，该系统能观。

(3). $g(s)=c(sI-A)^{-1}b$

$$=\begin{bmatrix}2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}&\frac{1}{(s+1)(s+3)}&0\\\frac{-3}{(s+1)(s+3)}&\frac{s}{(s+1)(s+3)}&0\\0&0&\frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2s+5}{s^2+4s+3}$$

8. (1).
$$\begin{cases}(u+x_3)\cdot\frac{1}{s+1}=x_2\\(u+x_3)\cdot\frac{1}{s+3}=x_1\\\frac{2}{s}\cdot x_1=x_3\\u+x_1+x_2=y\end{cases}$$
整理得
$$\begin{cases}\dot{x}_1=u+x_3-3x_1\\\dot{x}_2=u+x_3-x_2\\\dot{x}_3=2x_1\\y=u+x_1+x_2.\end{cases}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&-1&1\\2&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u.$$

$$y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x+u.$$

(2). 能控性矩阵为 $U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&10\\1&-1&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$ 秩为3，所以该系统能控。

该系统的能观性矩阵为 $U_o=\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-3&-1&2\\11&1&-4\end{bmatrix}$. 秩为3，所以该系统能观。

(3). $y(s) = c(sI - A)^{-1}b$.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3s-2} & 0 & \frac{1}{s^2+3s-2} \\ \frac{2}{(s+1)(s^2+3s-2)} & \frac{1}{s+1} & \frac{s+3}{(s+1)(s^2+3s-2)} \\ \frac{2}{s^2+3s-2} & 0 & \frac{s+3}{s^2+3s-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{s^3+6s^2+5s-2}{s^3+4s^2+s-2}$$

12. (1) $U_c = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det U_c = 0$, $\operatorname{rank} U_c = 2 < 3$。因此，系统不能控。

系统可能观性矩阵为

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\det U_o = 0$, $\operatorname{rank} U_o = 2 < 3$. 因此，不能观测。

(2). 首先，由 $\det(sI - A) = 0$ 求特征根。因为

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & -2 & 1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ -1 & 4 & s \end{bmatrix} = s(s+2)^2 + (s+2) = (s+1)^2(s+2)$$

特征根 -1、-2 分别是重根和单根。因此，必须利用所数大的广义特征向量的方法决定变换矩阵。由此得到变换矩阵 P 为 $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = cP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u.$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}.$$

系统有两个能控制的变量，分别是状态变量 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$；能观测的状态变量有所.

(3). 由 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$ 构成的能控子空间系统为 $\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$ $\bar{x}_2$、$\bar{x}_3$.

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}.$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u.$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}.$$