

注意事项：

1. 请用“大写数字+顿号+题型”将不同题型进行区分；
2. 建议优先使用 word 自带的公式编辑器进行公式编辑；
3. 题号与内容、选项与内容之间尽量不要使用空格、回车，以免习题导入失败；
4. 习题导入后，请再次核对习题内容，未成功导入的习题请手动添加至题库中。

以下为习题模板：

1、主观题

1. 求表面积为 a^2 ，体积最大的圆柱体的体积。

设圆柱体底面半径为 r ，高为 h

圆柱体的体积为 $V = \pi r^2 h$

表面积为 $a^2 = 2\pi r^2 + 2\pi r h$,

$$\text{消去 } h \text{ 得 } V(r) = \frac{1}{2}r(a^2 - 2\pi r^2)$$

$$V'(r) = \frac{1}{2}(a^2 - 6\pi r^2) = 0,$$

$$\text{得唯一稳定点 } r_0 = \frac{a}{\sqrt{6\pi}},$$

由题目可知该问题有最大值，

$$\text{所以 } V_{\min} = V(r_0) = \frac{a^3}{3\sqrt{6\pi}}$$

2. 求二元函数 $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ ，在椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任意一点处沿外法线的方向导数。

椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点 (x_0, y_0) 处的法向量为 $\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right)$,

$$\text{方向导数为 } \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{|\vec{n}|} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{x_0}{a^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{y_0}{b^2} \right)$$

$$= \frac{1}{|\vec{n}|} \left(\frac{1}{y_0^2} \cdot \frac{x_0}{a^2} - \frac{2x_0}{y_0^3} \cdot \frac{y_0}{b^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \frac{x_0}{y_0^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{b^2} \right)$$

3. 求二重积分 $\iint_D xy^2 dx dy$ ，其中积分区域 D 是由椭圆盘 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} \leq 1$ 。

设 $x = 2r \cos \theta + 1$, $y = 3r \sin \theta - 1$,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 6r$$

区域 D 对应的区域 D' 为 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \iint_{D'} (2r \cos \theta + 1)(3r \sin \theta - 1)^2 6r dr d\theta \\ &= \iint_{D'} \left(2r \cos \theta (3r \sin \theta - 1)^2 + (3r \sin \theta - 1)^2 \right) 6r dr d\theta \\ &= \iint_{D'} (3r \sin \theta - 1)^2 6r dr d\theta = \iint_{D'} (9r^3 \sin^2 \theta + r - 6r^2 \sin \theta) 6r dr d\theta \\ &= 6 \iint_{D'} (9r^3 \sin^2 \theta + r) dr d\theta = 54 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \\ &= \frac{27\pi}{2} + 6\pi = \frac{39\pi}{2} \end{aligned}$$

4. 求满足下列等式的函数 $u(x, y)$:

$$du = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$$

$$\begin{aligned} du &= (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy \\ &= 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy - y^2 \sin x dx + 2y \cos x dy \\ &= \cos y d(x^2) + x^2 d(\cos y) + y^2 d(\cos x) + \cos x d(y^2) \\ &= d(x^2 \cos y) + d(y^2 \cos x) \\ &= d(x^2 \cos y + y^2 \cos x) \end{aligned}$$

所以 $u = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$, C 为任意常数

5. 求第二型曲面积分

$$\iint_S dy dz - x dz dx + e^{x^2+y} \sin(x-z) dx dy,$$

其中 S 是曲面

$$y = e^x, \quad 1 \leq y \leq e, \quad 0 \leq z \leq 2$$

的前侧。

对于曲面 S , $dxdy = 0$, $dydz = -\frac{\partial y}{\partial x} dzdx = -ydzdx$

S 在 xOz 面的投影区域为 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 2$

$$\begin{aligned} & \iint_S dydz - xdzdx + e^{x^2+y} \sin(x-z) dxdy \\ &= \iint_S (-y-x) dzdx = \iint_D (x+e^x) dzdx = \int_0^2 dz \int_0^1 (x+e^x) dx = 2e-1 \end{aligned}$$

6. 求方程 $(x+1)y' + 1 = 2e^{-y}$ 的通解。

$$(x+1)y' + 1 = 2e^{-y}$$

若 $x = -1$, 方程不成立

若 $y = \ln 2$, 上述方程成立,

$y = \ln 2$ 为一个解

若 $y \neq \ln 2, x \neq -1$, 分离变量得

$$\frac{dy}{2e^{-y}-1} = \frac{dx}{x+1}$$

两边积分得 $\int \frac{dy}{2e^{-y}-1} = \int \frac{dx}{x+1}$,

$$-\ln|e^y - 2| = \ln|x+1| + C'$$

$$(e^y - 2)(x+1) = \pm e^{-C'} = C(C \neq 0)$$

$y = \ln 2$ 对应方程中 $C = 0$,

$$\text{所以 } (e^y - 2)(x+1) = C,$$

$$\text{通解为 } y = \ln \left(2 + \frac{C}{x+1} \right)$$

7. 求二阶常系数线性微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cos x$ 的通解

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cos x$$

对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$,

有重特征根 $\lambda = -2$,

所以齐次方程有通解 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

$-2 \pm i$ 不是特征根, 所以原方程有特解

$$y = e^{-2x} (A \cos x + B \sin x)$$

代入原方程得 $-e^{-2x} (A \cos x + B \sin x) = e^{-2x} \cos x$

对比系数得 $A = -1, B = 0$,

特解为 $y = -e^{-2x} \cos x$

所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \cos x$$

8. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 是否收敛, 若收敛求级数的和。

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0$$

所以级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \text{ 收敛}$$

$$x > 0 \text{ 时, } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \frac{dx^{n+1}}{dx}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = xe^x$$

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x xe^x dx = (x-1)e^x + 1$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

9. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = a$, 其中 $0 < a < \infty$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = a$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = a > 0$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = a$ 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{\frac{1}{n^2}} = a^2 > 0$,

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.