

中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2020 学年第 1 学期 姓 名：_____

学 院/系：数学学院（珠海） 学 号：_____

考试方式：闭卷 年级专业：_____

考试时长：100 分钟 班 别：_____

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共六道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答-----

一、计算下列极限（共 5 小题，1-3 小题每题 6 分，4-5 小题每题 7 分，共 32 分）

$$1、 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$2、 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^3 + 3^n}$$

$$3、 \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$4、 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x \right), \quad a, b, c \text{ 是常数}$$

5、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+k^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$

二、求下列函数的导函数（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1、设 $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$, 求 $y''(x)$

2、设 $F(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$, 其中 $f(t)$ 连续, 求 $F'(x)$

3、设 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

4、设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

三、求下列不定积分（共 2 小题，共 14 分）

1、 $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos(x - \ln x) dx$ (6 分)

2、 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$, $a \neq 0$ (8 分)

四、求 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并指出其类型。 (8 分)

五、 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (14 分)

- 1、 α 满足什么条件时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点右连续? (4 分)
- 2、 α 满足什么条件时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点右导数存在? (4 分)
- 3、 α 满足什么条件时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 点右连续? (6 分)

六、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足 $f([a, b]) \subset [a, b]$,

证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$ 。 (8 分)