

高数（一）上学期期中试题

一. 求下列极限 (每小题 5 分, 共 20 分)

1. 设 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$, (1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, (2) 证明 $\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+1}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x-1}}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m, n 是自然数).

二. 求下列函数的导数 (每小题 5 分, 共 15 分)

1. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$

2. $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x,$ 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0},$

3. $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 = 5, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2 y}{dx^2}.$

三. 求下列积分 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx,$ 2. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx,$ 3. $\int \frac{1}{x^2(1+x)} dx,$ 4. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} (a > 0),$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $\int_1^5 f(x-3) dx,$

四. (12 分) 设 $f(x)$ 为正值的连续函数, 且 $f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2+\cos t} dt$, 求 $f(x).$

五. (13 分) 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$, 求证: 至少存在一点

$\xi \in [0, a]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi+a).$

六. (10 分) 证明: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} dx \leq \frac{\pi}{12e}$ 提示: $\frac{\sin x}{e^x} \leq \frac{1}{e}, \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{12}.$