A

东校区 2009 学年度第一学期 09 级《高等数学一》期末考试 A 题答案

A-1

专业＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿评分＿＿＿＿

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一. 完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}$.　　其中：$0<a<b$.

解：$\because b^n \le a^n+b^n \le 2b^n$

$\therefore b \le \left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}} \le 2^{\frac{1}{n}}b$

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}b=b$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}=b$

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin 3xy}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin 3xy}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{\sin 3u}=\frac{1}{3},$$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 确定，求 y'.

方程两边对 x 求导得

$y+xy' -e^x+e^y y'=0$

$\therefore y'=\dfrac{e^x-y}{e^y+x}$

4. 设三个正数的和为 12，求 xy^2z^3 的最大值.

条件极值：

令：$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x+y+z-12)$

$$\begin{cases} L_x=y^2z^3+\lambda=0 \\ L_y=2xyz^3+\lambda=0 \\ L_z=3xy^2z^2+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=6 \end{cases}$$

唯一驻点，由实际意义可得最大值为：$2\cdot 4^2\cdot 6^3$=6912

5. 计算函数$z=x^2y+y^2$的全微分 A-2

$$dz=2xydx+(x^2+2y)dy$$

6. 求$\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$

$$\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\sin^4 x}d\sin^2 x=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$$

7. 求 $I=\int_0^2 xe^x dx$

$$I=\int_0^2 xe^x dx=\int_0^2 xde^x=xe^x|_0^2-\int_0^2 e^x dx=2e^2-e^x|_0^2=e^2+1$$

8. 求曲线$y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围成的图形的面积.

$y=x^2$ 与 $y=2-x^2$交点为（−1，1），（1，1）

$$\therefore A=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)dx=4\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{8}{3}$$

9. 求$f(x)=x^3-6x^2+9x+3$的极值,

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)=0$$
$$\therefore x=1,x=3$$
$$f''(x)=6x-12,$$
$$f''(1)=-6<0,\therefore \text{极大值为}f(1)=7$$
$$f''(3)=6>0,\therefore \text{极小值为}f(3)=3$$

10 求曲线$L:\begin{cases}x=t,\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$在$P_0(1,1,1)$处的切线方程和法平面方程。

$$L:\text{在}P_0\text{点的切向量为}:\vec{\tau}=(x_t',y_t',z_t')|_{t=1}=(1,2t,3t^2)|_{t=1}=(1,2,3)$$

$$\therefore \text{切线方程为}:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

$$\therefore \text{法平面方程为}:(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

二. 计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 求函数$y=\frac{1-x}{1+x}$在点$x_0=0$处的 n 阶泰勒公式.

$$y=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$$

A-3

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n + o(x^n)$

$y = -1 + \frac{2}{1+x} = -1 + 2(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n))$

$= 1 - 2x + 2x^2 + \cdots + (-1)^n 2x^n + o(x^n)$

2. 求函数$u = xyz$在点$A(5,1,2)$沿到点$B(9,4,14)$的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数.

$\overrightarrow{AB} = (4,3,12)$,其方向余弦为:

$\cos\alpha = \frac{4}{13}, \cos\beta = \frac{3}{13}, \cos\gamma = \frac{12}{13}$

方向导数为：$u_x|_A \cos\alpha + u_y|_A \cos\beta + u_z|_A \cos\gamma$

$= yz|_A \cos\alpha + xz|_A \cos\beta + xy|_A \cos\gamma = \frac{98}{13}$

3. 求过直线$L: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$和点$P_0(1,2,3)$的平面方程.

过 L 的平面束方程为：$x + 2y - z + 1 + \lambda(2x - 3y + z) = 0$

平面过（1，2，3），代入解得：$\lambda = 3$

$\therefore$平面方程为:$7x - 7y + 2z + 1 = 0$

三． 完成下列各题（每小题 4 分，共 12 分）

1.设$u = f(x, xy, xyz)$,其中f有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

$u_x = f_1(x,xy,xyz) + f_2(x,xy,xyz)y + f_3(x,xy,xyz)yz$

$u_{xz} = f_{13}xy + f_{23}xy^2 + f_{33}xy^2z + yf_3$

2. 证明$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但在此点不可微

$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\because 0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|}{2}$ $\therefore$由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ $0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)|x| = \frac{|x|}{2}$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）连续。

$f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0; \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$

$= f_y(0,0)$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）可导。

偏导存在.

$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y|$

(A·Δx+B·Δy)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$ A-4.

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$ 与k有关，

$\therefore f(x,y)$在（0，0）不可微。

3. 设$f(x)$为非负函数，它在$[a,b]$的任一子区间内不恒等于 0，在$[a,b]$上二阶可导，且$f''(x)\ge 0$，证明方程$f(x)=0$在(a,b)内若有实根，则只能有一个.

证：假定$x_{1,}x_2\in(a,b)$ $x<x_2$都是$f(x)$的根，即$f(x_1)=f(x_2)=0$，

$\therefore \exists c\in(a,b)$，使$f'(c)=0$， $\because f(x)$为非负函数，它在$[a,b]$的任一子区间内不恒等于 0，

$\therefore \exists x_0\in(x_1,c)$有$f(x_0)>0$，$\therefore \exists \xi\in(x_1,x_0)$ 使$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\dfrac{f(x_0)}{x_0-x_1}>0$，

$\therefore f'(\xi)>f'(c)$，且$\xi<c$，这与$f''(x)\ge 0$矛盾，$\therefore \ldots$

东校区2009学年度第一学期09级《高等数学一》期末考试B题答案 B-1

专业________学号________姓名________评分________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一．完成下列各题（每小题7分，共70分）

1，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n-1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}\cdot 2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}}]^2\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n-1})=e^2$

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{\ln(1+xy)}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{\ln(1+xy)}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{\ln(1+u)}=0,$$

3. $y=f(x)$ 由方程 $ye^x+\ln y=y$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

两边对x求导得

$$ye^x+e^xy'+\frac{y'}{y}=y'$$

$$\therefore y'=-\frac{ye^x}{e^x+\frac{1}{y}-1}$$

4. 求函数$z=3x+4y$在满足$x^2+y^2=1$的条件下的最值。

令：$L(x,y,\lambda)=3x+4y+\lambda(x^2+y^2-1)$

B-2

$$\begin{cases} L_x = 3+2\lambda x = 0 \\ L_y = 4+2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{4}{5} \\ \lambda=-\frac{5}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=-\frac{4}{5} \\ \lambda=\frac{5}{2} \end{cases}$$

可得最大值为$z(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=5$;可得最小值为$z(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})=-5$;

5. 计算函数$z=x^y+3y^2$的全微分

$dz = yx^{y-1}dx+[x^y\ln x+6y]dy$

6. 求$\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$

原式$=2\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=2\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}d\sin x=\int\frac{1}{1+\sin^4 x}d\sin^2 x=\arctan(\sin^2 x)+C$

7. 求 $I=\int_0^2(x+1)\ e^x dx$

$I=\int_0^2(x+1)de^x=(x+1)e^x\ |_0^2-\int_0^2 e^x d(x+1)=3e^2-1-e^x|_0^2=2e^2$

8. 求曲线$y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围成的图形的面积.

$y=x^2$ 与$y^2=x$交点为（0，0），（1，1）

$\therefore A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\ |_0^1=\frac{1}{3}$

9. 求$f(x)=x^4-2x^3+1$的极值,

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)=0$

$\therefore x=0, x=\frac{3}{2}$

$f''(x)=12x^2-12x,$

$x=0$不是极值点

$f''\left(\frac{3}{2}\right)>0, \therefore$ 极小值为$f(\frac{3}{2})=\frac{-11}{16}$

10 求过点（2,0,－3），且与两平面$2x-2y+4z+7=0, 3x+y-2z+5=0$垂直的平面方程.

B-3

平面的方向向量为：(2, -2, 4)×(3, 1, -2) = (0, 16, 8)

$\therefore$平面方程为:$2y+z+3=0$

二. 计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 求函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 在点 $x_0=0$ 处的 n 阶泰勒公式.

$$y=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\ln(1-x)=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)]$$

$$\therefore \text{原式}=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)]-[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)]$$

$$=-2x-\frac{2x^3}{3}-\cdots\frac{2x^{2n-1}}{n}+o(x^{2n})$$

2. 求函数 $z=x^3y$ 在点 $A(1,2)$ 沿到点 $B\left(1+\sqrt{3},3\right)$ 的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数.

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{3},1\right)$,其方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},$$

方向导数为：$z_x|_A\cos\alpha+z_y|_A\cos\beta=3x^2y|_A\cos\alpha+x^3|_A\cos\beta=3\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}$

3. 求直线方程 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$ 的标准方程和参数方程

易得联立方程组有解:$(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3},0)$

直线的方向向量为：(1, -1, 1)×(2, 1, -3) = (2, 5, 3)

$$\therefore \text{直线的标准方程为:}\frac{(x-\frac{1}{3})}{2}=\frac{(y+\frac{2}{3})}{5}=\frac{z}{3}$$

$$\therefore \text{直线的参数方程为:}\begin{cases} x=2t+\frac{1}{3} \\ y=5t-\frac{2}{3} \\ z=3t \end{cases}$$

三. 完成下列各题（每小题 4 分，共 12 分）

1. $z=f(x^2y,\frac{y}{x})$,其中f为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ B-4

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'x^2+f_2'\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xf_1'+2x^3yf_{11}''-yf_{12}''-\frac{1}{x^2}f_2'+2yf_{21}''-\frac{y}{x^3}f_{22}'',$$

2. 证明$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但在此点不可微

$\because 0\le|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ $\therefore$由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）连续。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0;\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）偏导数存在。 $\Delta z=f(0+x,0+y)-f(0,0)$

$(A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta z-\text{●}}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{(x^2+y^2)}$$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{k}{(1+k^2)}$与$k$有关，

$\therefore f(x,y)$在（0，0）不可微。

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上存在三阶导数，且$f(1)=0$；设函数$F(x)=x^3f(x)$ 证明在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$F'''(\xi)=0$

证：$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$

$\because F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，$F(1)=0$

$\therefore F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理，存在$\xi_1\in(0,1)$,使得$F'(\xi_1)=0$。

$F'(x)$在$[0,\xi_1]$上满足罗尔定理，存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$,使得$F''(\xi_2)=0$。

$F''(x)$在$[0,\xi_2]$上满足罗尔定理，存在$\xi\in(0,\xi_2)$,使得$F'''(\xi)=0$

证：由泰勒公式

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3$

$0<\xi<x<1$

由$F(0)=F'(0)=F''(0)=0$, $F(1)=0$

得 $\frac{F'''(\xi)}{3!}=0$

$F'''(\xi)=0$, $0<\xi<x<1$

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题

D-1

专业__________学号__________姓名__________评分________

警示 **《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"**

一．完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$　　2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}$　　3. $y=x\arccos x^2$，求 y'

4. 已知 $y=y(x)$ 满足 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$，求 $y'(0)$　　5. $y=x^2e^{3x}$，求 $y^{(20)}$ $y^{(2)}$

6 求 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　　7. 求 $\int x\ln(1+x)dx$　　8. 求 $\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx$

9. 已知 $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，求一个同时垂直于 $\vec{a},\vec{b}$ 的向量。答：$\boldsymbol{-8\vec{i}+10\vec{j}+14\vec{k}}$

10. 求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的 n 阶泰勒公式。

解：$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)$　$\therefore \ln x=\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k(x-2)^k}{k\cdot 2^k}+\circ\left((x-2)^n\right).$

二．完成下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 证明不等式 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$　$(b>a>0)$

证：$\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$，其中 $b>\xi>a>0$。

由于 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，所以 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

2. 求过直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$ 和点 $P_0(1,2,3)$ 的平面方程。

3. 设 $u=f(x,xy,xyz)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$.

答：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xy\left(f_{13}''+yf_{23}''+yzf_{33}''\right)+yf_3'$

4. 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数。 D-2

解 由于$v=\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}=\dfrac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$

所以$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}v_1+\dfrac{\partial z}{\partial y}v_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. 要做一个容积为1立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

解 假设圆桶的底面半径为 r，高为 h，则圆桶的容积为$\pi r^2h=1$，表面积为$S=2\pi rh+2\pi r^2$。令$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-1)$，

求偏导，得到$\begin{cases}L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0,\\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0,\end{cases}$

解得$h=2r$，再代入约束条件$\pi r^2h=1$，得到$r=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$

根据题意，目标函数必有最小值，所以可知当底面半径为$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$，高为$\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$时用料最省。

6. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数$f_x(x,y),f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

解 由定义，$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x^2+0^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0$，

当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$x^2+y^2\neq 0$。

由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x}\cos\dfrac{1}{2x^2})$，

极限不存在，所以$f_x(x,y)$在原点$(0,0)$不连续。同理$f_y(x,y)$在原点$(0,0)$也不连续。但由于$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$

$=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，所以函数在$(0,0)$可微。

$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题答案 C-1

一. 完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin 2xy}$

令$u=xy$,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}u=0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{\sin 2u}=\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{1+u}}{2\cos 2u}=\frac{1}{2}.$$

3. $y=x\arccos x^{2}$，求 y' $\qquad y'=acr\cos(x^{2})-\dfrac{2x^{2}}{\sqrt{1-x^{4}}}$.

4. 设$z+\cos(xy)=e^{z}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

$$z_x-y\sin(xy)=e^{z}\cdot z_x$$

$$z_x=\frac{y\sin(xy)}{1-e^{z}}.$$

5. 设$f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$,求$df(1,1 1)$.

$$f_x(x,1,1)=(x)'=1,f_x(1,1,1)=1$$

$$f_y(1,y,1)=(\frac{1}{y})'=-\frac{1}{y^{2}},f_y(1,1,1)=-1$$

$$f_z(1,1,z)=(1)'=0,f_z(1,1,1)=0$$

$$df(1,1,1)=f_x(1,1,1)dx+f_y(1,1,1)dy+f_z(1,1,1)dz=dx-dy.$$

2.

C-2

6 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx \;=\int\frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}+c.$

7. 求$\int x\ln(1+x)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+c.$$

8. 求$\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}.$

9.已知$\vec{a}=i+j+3k,\vec{b}=2i+3j-k$,求一个同时垂直于$\vec{a},\vec{b}$的向量。

$\vec{a}\times\vec{b}=-10i+7j+k$

10. 求$f(x)=\ln(x-1)$在$x=2$处的n阶泰勒公式。

$$\ln(x-1)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n).$$

二．完成下列各题（每小题**5**分，共**30**分）

1. 求过直线$L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$和点$P_0(1,2,3)$的平面方程。

$7x-7y+2z+1=0$

2. 设$u=f\left(x,xy,xyz\right)$,其中f有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_2'+zf_3'+xf_{12}''+xzf_{13}''+xyf_{22}''+xyzf_{23}''+xyzf_{32}''+xyz^2f_{33}''$$

3. 求函数$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数。

$$\frac{\partial z}{\partial l}=(z_x(1,0),z_y(1,0))\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2)\cdot(1,-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3

4. 求函数$u=\sin x\sin y\sin z$在条件$x+y+z=\frac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$下的极值和极值点。 c-3

$$F(x,y,z,\lambda)=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$$

$$F_x=\frac{\cos x}{\sin x}=0,F_y=\frac{\cos y}{\sin y}=0,F_z=\frac{\cos z}{\sin z}=0,F_\lambda=x+y+z-\frac{\pi}{2}=0.$$

$$x_0=y_0=z_0=\frac{\pi}{6},u_{\max}=\frac{1}{8}.$$

5. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数$f_x(x,y),f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2})$不存在，故$f_x(x,y)$不连续。

因为$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y}}f_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(2y\sin\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{y}\cos\frac{1}{2y^2})$不存在，故$f_y(x,y)$不连续。

但是$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\upsilon}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0.$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$df(0,0)=0.$

4.

6．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 二阶可导，证明存在 $\eta\in(a,b)$，使得下式成立 C-4

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)。$$

令 $g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$，则 $g(x)$ 在 $[\frac{a+b}{2},b]$ 可导，

$g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2}),g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a).$

由微分中值定理 $g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\frac{b-a}{2},\xi\in(\frac{b+a}{2},b)$

即 $f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\frac{b-a}{2}$ ，$\xi\in(\frac{b+a}{2},b)$ (1)

$g'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2}),$

又因为 $f'(x)$ 在 $[\xi-\frac{b-a}{2},\xi]$ 可导，由微分中值定理可得

$f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})=f''(\eta)\cdot\frac{b-a}{2},\eta\in(a,b)$ (2)

综合（1），（2）式可得

$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2$ ，$\eta\in(a,b)$.

09 级一期 A 卷参考解答

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}\cdot\left(-2/x^2\right)}{-1/x^2}=2\lim\limits_{x\to\infty}e^{2/x}=2e^0=2$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,则

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{6},\quad 于是\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^y=e^{-1/6}.$$

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

解 原式$\displaystyle=\int\left(\frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

解 令 $x+2=t^3, dx=3t^2dt$,则

原式$\displaystyle=\int\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int(t-1)dt+3\int\frac{1}{1+t}dt$

$$=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|t+1|+C \quad =\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3(x+2)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right|+C.$$

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

解　令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^2 te^t dt=2\left[te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t dt\right]=2\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)=2(e^2+1).$$

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

证明　令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$左边=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^{2010}t}{\sin^{2010}t+\cos^{2010}t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=右边.$$

而,左边+右边= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$,　故　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\frac{\pi}{4}$.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{x}{1+x^2+y^2}$,　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2}$,　于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1,2)}=\frac{x}{1+x^2+y^2}\bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{1+1+4}=\frac{1}{6},\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1,2)}=\frac{y}{1+x^2+y^2}\bigg|_{(1,2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$du\big|_{(1,2)}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1,2)}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1,2)}dy=\frac{dx+2dy}{6}.$$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解　$l=\overline{AB}=(1,2,-2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y,\frac{\partial f}{\partial y}=2x,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z.\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=-2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=4,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=-2.$$

因此, $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=(-2)\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$.

而在点 A 处方向导数的最大值为　$|g|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　令 $F(x,y)=z^3-3xyz-1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2},$$

$$=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z^2-xy)^2}=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\cdot\frac{yz}{z^2-xy}}{(z^2-xy)^2}$$

$$=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2)$, $B(4,4,2)$, $C(4,2,4)$, 求向量 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的夹角.

解　$\overline{AB}=(2,2,0)$, $\overline{AC}=(2,0,2)$, 设所求夹角为 α, 则

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{2\times2+2\times0+0\times2}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=z$ 的平面方程.

解 L_1 的参数方程为 $x=t, y=-t, z=2(t-1)$，化为标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2},$$

其方向向量为 $l_1=(1,-1,2)$，而直线 L_2 的方向向量为 $l_2=(1,1,1)$，故所求平面法向量为

$$n=l_1\times l_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3i+j+2k=(-3,1,2).$$

所求平面过点(0,0,—2),故所求平面方程为 $-3x+y+2(z+2)=0$,即 $3x-y-2z=4$.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

解 $f'(x)=(x-1)(x-2)^2$,从而驻点为 $x_1=1, x_2=2$.列表如下

x	$(-\infty,1)$	1	（1，2）	2	（2，$+\infty$）
$f'(x)$	—	0	+	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	非极值	↗

所求函数最小值为

$$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=\int_0^1(t^3d-5t^2+8t-4)dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+4-4=-\frac{17}{12}.$$

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$,求(1)函数的单调区间与极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

解 函数的定义域为 $(-\infty, -1)\cup(-1,+\infty)$, 且

$$f'(x)=\frac{3x^2(1+x)^2-x^3\cdot 2(1+x)}{2(1+x)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(1+x)^3-(x^3+3x^2)\cdot 3(1+x)^2}{2(1+x)^6}=\frac{3x}{(1+x)^4}.$$

从而函数的驻点为 0, −3.又二阶导数为零的点为 0,列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	凸↗	极大	凸↘	凸↗	拐点	凹↗

函数的单调增加区间为$(-\infty,-3)$和$(0,+\infty)$,单调减少区间为$(-3,-1)$.极小值点为−3.凹区间为$(0,+\infty)$,凸区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$,拐点为$(0,0)$.下面再求渐近线.

显然,直线 $x=-1$ 是垂直渐近线.而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty$$

因而曲线无水平渐近线,但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(1+x)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(1+x)^2}-\frac{x}{2}\right]=-1,$$

因而曲线有斜渐近线　　$y=\frac{1}{2}x-1.$

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证:$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$

证　令 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$, 则当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,$$

故此函数单调增加.而容易验证$f(0)=0$,故当$x>0$时,$f(x)\geq 0$,此即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x>0.$$

又，$f(-x)=1-x\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=1-x\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)-\sqrt{1+x^2}=f(x)$,

从而 $$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x\in R.$$

2.设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内可导,且$f(0)=0,f(1)=1$,求证:

(1)存在$\alpha\in(0,1)$,使得$f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点$\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证 (1)令$g(x)-f(x)+x-1$, 则$g(0)=f(0)-1<0,g(1)=f(1)+1-1=1>0$.

于是由介值定理,存在$\alpha\in(0,1)$,使得$g(\alpha)=0$, 即$f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)由 Larrganger 定理,在区间$(0,\alpha)$内存在ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

在区间$(\alpha,\ 1)$内,存在η,使得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

于是存在两个不同的点$\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

高数下

一.(每小题 6 分,共 12 分)求极限: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

二.(每小题 6 分,共 24 分)求下列积分:

(1) $\int\dfrac{dx}{2\left(2+x^{10}\right)}$; (2) $\int\cos(\ln x)dx$; (3) $\int_1^e\dfrac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

三.(每小题 7 分,共 21 分)

(1)设 $z(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,求 $dz\big|_{(0,1)}$;

(2)已知 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1)$, $B(3,-2,-2)$,求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数,并求此函数在电 A 处方向导数的最大值.

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 给出,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

(1)给定空间三点: $A(1,2,0)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,-1,2)$,求 ΔABC 的面积 S.

(2)求经过直线 L_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{4}$ 且平行于直线 L_2: $x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}, x>0$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,求(1)此函数的单调区间与极值点;(2)此函数的凹凸区间与拐点;(3)此函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证不等式 $\sin x+\tan x>2x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0$, $f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$.
求证: $f(x)\neq 0, x\in(a,b)$.

09 级二期期末 B 卷试题.完成以下共 13 题,除最后两题各 6 分外其余各题各 8 分.

一.求初值问题: $\begin{cases}(2xy-1)dx+x^2dy=0,\\ y(1)=2.\end{cases}$

二.计算累次积分 $I=\int_0^1 dy\int_y^1 \sin x^2 dx.$

三.验证数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ 收敛,并求其和.

四.若函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\dfrac{\cos(xy)}{x}dx,\quad y>0$, 求 $g'(x)$.

五.计算曲线积分 $I=\oint_{L^+}(ye^x-\sin x^3)dx+(e^x+x^3+\sin y^3)dy$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=1$,逆时针方向.

六.求解一阶常微分方程: $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{6y}{x}+xy^2=0.$

七.求解二阶非齐次方程的初值问题: $\begin{cases}y''-4y'+3y=1+e^{2x},\\ y(0)=y'(0)=1.\end{cases}$

八.计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}(x^3z+x)dydz+(\cos y-x^2yz)dzdx-x^2z^2dxdy$, 其中 S^+为曲面 $z=2-x^2-y^2, 1\le z\le 2$, 取上侧.

九.若函数 $\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x+n}-\dfrac{1}{x+n-1}\right)$, 的和函数,并证明其在区间$(0,+\infty)$上一致收敛.

十.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$ 的收敛半径,收敛域及和函数.

十一. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=2$ 处的泰勒展开式,并求其收敛域.

十二. 判别数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛,

十三. 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

09级一期月卷

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题.

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2),B(4,4,2),C(4,2,4)$,求向量 $\overline{AB},\overline{AC}$ 的夹角.

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$，求(1)函数的单调区间于极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证:$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x\in R.$

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续,在开区间(0,1)内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$,求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$,使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

09级一期A卷参考解答

一.(每小题6分,共12分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}\cdot\left(-2/x^2\right)}{-1/x^2}=2\lim\limits_{x\to\infty}e^{2/x}=2e^0=2$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,则

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{6},\quad 于是\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^y=e^{-1/6}.$$

二.(每小题6分,共24分)完成如下各题

1. $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

解 原式 $=\displaystyle\int\left(\frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

解 令 $x+2=t^3$, $dx=3t^2dt$, 则

$$原式=\int\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int(t-1)dt+3\int\frac{1}{1+t}dt$$

$=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|t+1|+C \quad =\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3(x+2)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right|+C.$

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

解　令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^2 te^t dt = 2\left[te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t dt\right]=2\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)=2(e^2+1).$$

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

证明　令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$左边=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^{2010}t}{\sin^{2010}t+\cos^{2010}t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=右边.$$

而,左边+右边$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$, 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\frac{\pi}{4}$.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{1+1+4}=\frac{1}{6},\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$du\big|_{(1,2)}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}dy=\frac{dx+2dy}{6}.$$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1),B(3,1,-1)$，求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数，并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解 $l=\overline{AB}=(1,2,-2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y,\frac{\partial f}{\partial y}=2x,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z.\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=-2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=4,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=-2.$$

因此，$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=(-2)\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$.

而在点 A 处方向导数的最大值为 $|g|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解 令 $F(x,y)=z^3-3xyz-1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2},$$

$$=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z^2-xy)^2}=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\cdot\frac{yz}{z^2-xy}}{(z^2-xy)^2}$$

$$=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

四.(第一小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2),B(4,4,2),C(4,2,4)$，求向量 $\overline{AB},\overline{AC}$ 的夹角.

解 $\overline{AB}=(2,2,0),\overline{AC}=(2,0,2)$，设所求夹角为 α，则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2\times2+2\times0+0\times2}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

2.求经过直线$L_1:\begin{cases}x+y=0,\\x-y-z-2=0,\end{cases}$且平行于直线$L_2:x=y=z$的平面方程.

解 L_1的参数方程为$x=t,y=-t,z=2(t-1)$，化为标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2},$$

其方向向量为$\boldsymbol{l}_1=(1,-1,2)$，而直线$L_2$的方向向量为$\boldsymbol{l}_2=(1,1,1)$，故所求平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-3,1,2).$$

所求平面过点(0,0,−2),故所求平面方程为$-3x+y+2(z+2)=0$,即$3x-y-2z=4$.

五.(7 分)求函数$f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2dt$的极值.

解 $f'(x)=(x-1)(x-2)^2$，从而驻点为$x_1=1,x_2=2$.列表如下

x	$(-\infty,1)$	1	(1，2)	2	(2，+∞)
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	非极值	↗

所求函数最小值为

$$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=\int_0^1(t^3d-5t^2+8t-4)dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+4-4=-\frac{17}{12}.$$

六.(12 分)设函数$f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$,求(1)函数的单调区间与极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

解 函数的定义域为$(-\infty,\ -1)\cup(-1,+\infty)$,且

$$f'(x)=\frac{3x^2(1+x)^2-x^3\cdot 2(1+x)}{2(1+x)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(1+x)^3-(x^3+3x^2)\cdot 3(1+x)^2}{2(1+x)^6}=\frac{3x}{(1+x)^4}.$$

从而函数的驻点为 0, −3.又二阶导数为零的点为 0,列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	凸↗	极大	凸↘	凸↗	拐点	凹↗

函数的单调增加区间为$(-\infty,-3)$和$(0,+\infty)$,单调减少区间为$(-3,-1)$.极小值点为−3.凹区间为$(0,+\infty)$,凸区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$,拐点为$(0,0)$.下面再求渐近线.

显然,直线$x=-1$是垂直渐近线.而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty$$

因而曲线无水平渐近线.但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(1+x)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(1+x)^2}-\frac{x}{2}\right]=-1,$$

因而曲线有斜渐近线 $y=\frac{1}{2}x-1.$

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证:$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$

证 令$f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$,则当$x>0$时,

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,$$

故此函数单调增加.而容易验证$f(0)=0$,故当$x>0$时,$f(x)\geq 0$,此即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x>0.$$

又，$f(-x)=1-x\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=1-x\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)-\sqrt{1+x^2}=f(x),$

从而 $$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x\in R.$$

2.设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内可导,且$f(0)=0$, $f(1)=1$,求证:

(1)存在$\alpha\in(0,1)$,使得$f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点$\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足$f'(\xi)f'(\eta)=1$

证 (1)令$g(x)-f(x)+x-1$, 则$g(0)=f(0)-1<0,g(1)=f(1)+1-1=1>0.$
于是由介值定理,存在$\alpha\in(0,1)$,使得$g(\alpha)=0$, 即$f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)由 Largranger 定理,在区间$(0,\alpha)$内存在ξ使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

在区间$(\alpha, 1)$内, 存在η使得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

于是存在两个不同的点$\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$,满足$f'(\xi)f'(\eta)=1.$

08级 3

一.(每小题 7 分,共 28 分)

1.若函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^2}\dfrac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求 $g'(y)$.

3.级数二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x}dxdy$,其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.

4.求解一阶常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$.

二.(10 分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0$,求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段,求如上曲线积分 I.

三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$,其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,求上侧.

四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$; (2) $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

六.(10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其和函数.

八.(6 分)研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

08级B卷

一.(每小题 7 分,共 28 分) 2.设函数$g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求$g'(y)$.

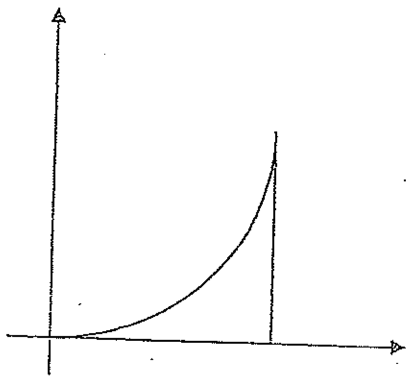
解 $g'(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{-x\sin(xy)}{x}dx+3y^2\frac{\cos y^3y}{y^3}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\cos\sqrt{y}y}{\sqrt{y}}$

$$=-\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\sin(xy)dx+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=\frac{\cos xy}{y}\Big|_{\sqrt{y}}^{y^3}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}$$

$$=\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{y}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=4\frac{\cos y^4}{y}-\frac{3\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}.$$

3.计算二重积分$\iint_D\frac{\sin x}{x}dxdy$,其中 D 是由$y=x^2, y=0, x=1$所围成的区域.

解 $\iint_D\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1 x\sin xdx$



$$=\int_0^1 xd(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos xdx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1.$$

4.求解一阶常微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$.

解 方程改写为 $\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$, ① 把 x 看作 y 的函数,是一阶线性方程.

先解方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x$, 分离变量,得 $\frac{dx}{x}=\frac{2}{y}dy$, $\ln x=2\ln y+\ln C$, 即 $x=Cy^2$.

用常数变易法,令$x=C(y)y^2$,则 $\frac{dx}{dy}=C'(y)y^2+2C(y)y$, 代入①,得

$C'(y)y^2=-y$, 因此 $C'(y)=-y^{-1}$, $C(y)=-\ln Cy$, 于是原方程的通解为 $x=-y^2\ln Cy$.

二.(10 分)设曲线积分$I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关,其中函数$\varphi(x)$连续可导且$\varphi(0)=0$,求函数$\varphi(x)$;又设$L$为曲线$y=x^{2009}$上从点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段,求如上曲线积分$I$.

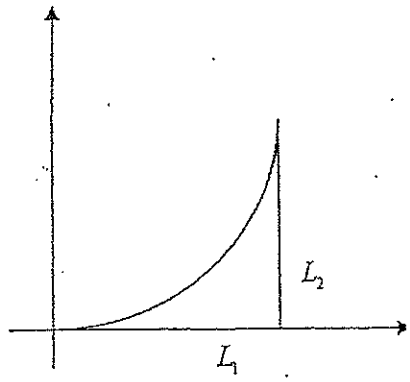
解 $P=xy^2, Q=y\varphi(x)$, 因为积分与路径无关,故必有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x)$,

即得 $\varphi'(x)=2x$, $\varphi(x)=x^2+C$, 由于 $\varphi(0)=0$, 得 $C=0$, 故 $\varphi(x)=x^2$.

$$I=\int_L xy^2dx+x^2ydy=\int_{L_1+L_2} xy^2dx+x^2ydy$$

$$=\int_{L_1} xy^2dx+x^2ydy+\int_{L_2} xy^2dx+x^2ydy$$

$$=0+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}.$$



三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, 取上侧.

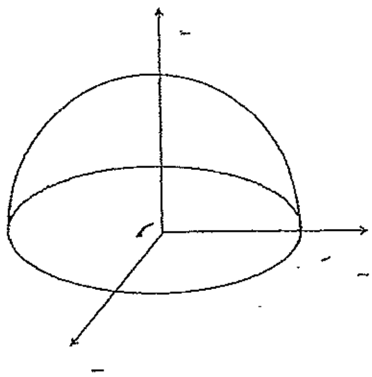
解 取 A: $z=0$ 为辅助平面, $\dfrac{\partial P}{\partial x}=4x^3-z, \dfrac{\partial Q}{\partial y}=z, \dfrac{\partial R}{\partial z}=0$. 由高斯公式,

$$I=\iint\limits_{S^++A}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy, =\iiint\limits_{\Omega}(4x^3-z+z+0)dV \overset{\text{由对称性}}{=} 0.$$

故 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$

$$=\iint\limits_{A^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy,$$

$$=-4\iint\limits_{A^+}y^2dxdy=-4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sin^2\theta rdrd\theta=-16\pi.$$



四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

解 先解齐次方程 $y''-2y'+y=0$. 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$.

重根 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 故通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$.

对非齐次方程 $y''-2y'+y=1$. ①可设特解为 $y=C$, 代入①, 得 C=1.

对非齐次方程 $y''-2y'+y=e^x$. ②因 1 是二重根, 可设特解为 $y=Cx^2e^x$,

代入②, 得$C=\dfrac{1}{2}$,即得特解为$y=\dfrac{1}{2}x^2e^x$. 于是, 原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+1.$$

由 $y(0)=2$,得$C_1=1$.

由 $y'=(C_1+C_2x+\dfrac{x^2}{2})e^x+(C_2+2x)e^x$ 得 $y'(0)=C_1+C_2=2$, 得 $C_2=1$.

故初值问题的解为 $\qquad y=(1+x+\dfrac{x^2}{2})e^x+1.$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$; $\qquad$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

解 (1)因 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=1$, 而无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛, 由比较判别法的极限形式得, 无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$ 收敛.

(2)因 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^{7/3}}\Big/\frac{1}{x^{4/3}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, 而瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{4/3}}dx$ 发散,故瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$ 发散

六.(10 分)求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

解 $\displaystyle l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}\Big/\frac{1}{n(n-1)}=1$, 故收敛半径 R=1. 收敛区间为 $(-1, 1)$ 收敛域为 $[-1, 1]$.

记 $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $\displaystyle xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\triangleq F(x)$ 于是 $\displaystyle F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$$F''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \text{于是 } F'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$$

$\displaystyle F(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x)$, 故 $\displaystyle f(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=x-2$, 则所求的展开式为

$$f(x)=\ln 3x=\ln(6+3t)=\ln 6+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n2^n}=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}$$

收敛域为 $-1<\frac{x-2}{2}\le 1$,即 $0<x\le 4$ 或 $(0,4]$.

八.(6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

解　显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$, 记 $f(x)=x-\ln x$, 则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0\quad(x>1)$,

从而 $f(n)$ 递增,即 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减,由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛.

但 $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 也发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

证　因 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$. 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,

故必有 $a_n\ge a>0, n=1,2,\cdots$, 从而 $\frac{1}{1+a_n}\le\frac{1}{1+a}<1$. 于是 $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n\le\left(\frac{1}{1+a}\right)^n, n=1,2,\cdots$.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛,由比较判别法;级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

08级

一,完成以下各题(每小题 7 分,共 28 分)

1.若 $u(x,y)=\sqrt{e^x\cos y-\sin(xy)}$,求 $u_x(0,0),u_y(0,0)$.

2.若函数 $z=z(x,y)$满足方程$x+y+z=e^z$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx$.

4.求解一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$.

二.(10 分)求曲线积分$I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$, 其中$L$为曲线y=$\sin\frac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.

三.(10 分)计算曲面积分$I=\iint\limits_{S^+}\left(y^2+z^2\right)dydz+yzdzdx+z\left(x^3+y^2\right)dxdy$, 其中 S 为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

四. (10 分)求解初值问题:$\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\frac{1}{3},y'(0)=3.\end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\alpha>0$.

六. (10 分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成$(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

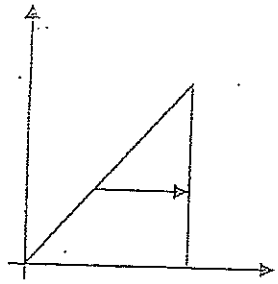
八.(6 分)研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$的敛散性.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n; 且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

08级答

一,完成以下各题

3.计算累次积分. $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx.$

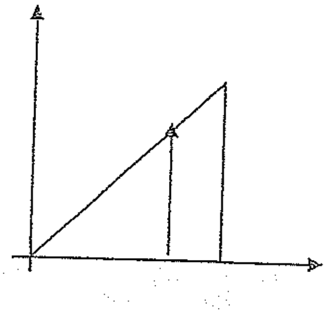


解 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^x y^2e^{-x^4}dy$

$=\int_0^1 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^x e^{-x^4}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$

$=\frac{1}{12}\int_0^1 e^{-x^4}dx^4=\frac{1}{12}\left.\left(-e^{-x^4}\right)\right|_0^1$

$=\frac{1}{12}\left(1-e^{-1}\right).$



4.求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}.$

解 先解 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0.$ 分离变量,得 $\frac{dy}{y}=-\cos x dx$

$\ln y=-\sin x+\ln C,\qquad y=Ce^{-\sin x}.$

令 $y=C(x)e^{-\sin x}$. 则 $y'=C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}.$

代入原方程,得 $C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}+C(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x}.$

即 $C'(x)=1,\quad C(x)=x+C.$ 从而方程通解为

$y=(x+C)e^{-\sin x}.$

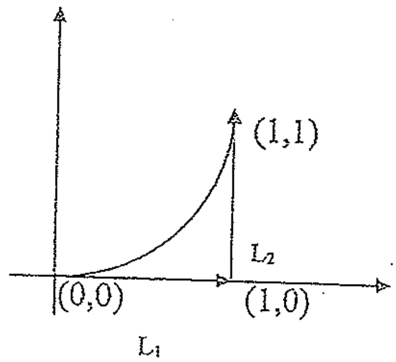
二.(10 分)求曲线积分 $I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy,$

其中L为曲线y=sin$\frac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.

解 $P=e^y+x, Q=xe^y-2y, \frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$

故积分值和路径无关,从而

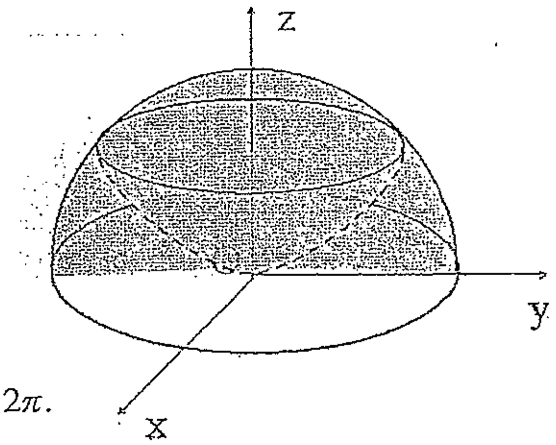
$I=\int_{L_1+L_2}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$



$$=\int_0^1 (e^0+x)dx+\int_0^1 (e^y-2y)dy=e-\frac{1}{2}.$$

三.(10 分)计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}\left(y^2+z^2\right)dydz+yzdzdx+z\left(x^3+y^2\right)dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

解　记 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 2\}$, 则有高斯公式及对称性,



$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(z+x^3+y^3\right)dV=\iiint\limits_{\Omega}zdV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_r^{\sqrt{4-r^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(4-2r^2\right)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\cdot(2-r^2)dr^2=\pi\left(2r^2-\frac{1}{2}r^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=2\pi.$$

四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\frac{1}{3},y'(0)=3.\end{cases}$

解　齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$. 特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$.

因此齐次方程的通解为　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

由于 0 不是特征方程的根,故设非齐次方程的特解为 $y=ax+b$, 代入原方程,比较系数,得 $a=-1,b=\frac{1}{3}$. 即原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$.

由定解条件,得 $\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ -C_1+3C_2-1=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=1.\end{cases}$

初值问题的解为　$y=-e^{-x}+e^{3x}-x+\frac{1}{3}$.

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\alpha>0$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{1+x},(x>0)$ 而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散,

由比较判别法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, 故 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$和$\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx,\alpha>0$同敛散.

而当$\alpha-1<1$即$\alpha<2$时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 收敛; 当$\alpha-1\ge1$即$\alpha\ge2$时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 发散. 故

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\begin{cases}\text{收敛,当}0<\alpha<2,\\ \text{发散,当}\alpha\ge2.\end{cases}$$

六. (10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

解 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}\overset{t=\frac{x-1}{2}}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}$$

$$(x-1)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=g(t),\qquad g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t},$$

因此 $$g(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|,$$

$$(x-1)f(x)=-\ln\left|1-\frac{x-1}{2}\right|=\ln2-\ln|3-x|,$$

从而 $$f(x)=\frac{\ln2-\ln|3-x|}{x-1}.$$

由于 $a_n=\frac{1}{2^n},l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,收敛半径为 R=2,

收敛区间为 $-1<t<1,-1<\frac{x-1}{2}<1$,即 $-1<x<3$. 即$(-1,3)$.

又由于级数当 $x=-1$ 收敛,当 $x=3$ 时发散,故收敛区域为$[-1,3)$.

七. (10 分)把函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=\frac{x}{5}$,则

$$f(x)=\ln(7+x-2)=\ln 7+\ln\left(1+\frac{x-2}{7}\right)=\ln 7+\ln(1+t)$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{7^n}$$

其收敛域为 $-1<\frac{x-2}{7}\le 1$,即　$-5<x\le 9$.

八. (6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 的敛散性.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}=1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 也发散,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 不绝对收敛.

但　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}=0$, 又函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}$ 单调下降,即 $f(n)=\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 关于 n 单调下降,于是由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 收敛.因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 条件收敛.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n;且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

证　记 $f(x)=x^n+nx-1$, 则 $f(1)=n>0$, $f(0)=-1<0$. 故由 $f(x)$ 的连续性,必有 $x_n\in(0,1)$, 使 $f(x_n)=0$. 又 $f'(x)=n(x^{n-1}+1)>0$, 即 $f(x)$ 严格单调,故根唯一.

又,由 $f(x_n)=x_n^n+nx_n-1=0$, 得　$nx_n=1-x_n^n<1$,　$x_n<\frac{1}{n}$,　$x_n^{\alpha}<\frac{1}{n^{\alpha}}$.

当 $\alpha>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛,故由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.证毕.

一,完成以下各题(每小题 7 分,共 28 分)

1.若 $u(x,y)=\sqrt{e^x\cos y-\sin(xy)}$,求 $u_x(0,0),u_y(0,0)$.

2.若函数 $z=z(x,y)$满足方程$x+y+z=e^z$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx$.

4.求解一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$.

二.(10 分)求曲线积分$I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$, 其中$L$为曲线y= $\sin\frac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.

三.(10 分)计算曲面积分$I=\iint\limits_{S^+}\left(y^2+z^2\right)dydz+yzdzdx+z\left(x^3+y^2\right)dxdy$, 其中 S 为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

四. (10 分)求解初值问题:$\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\frac{1}{3},y'(0)=3.\end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;　　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\alpha>0$.

六. (10 分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成$(x-2)$的幂级数,并求其收敛域.

八.(6 分)研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$的敛散性.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n;且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

东校区高等数学（一）期末考试试卷

（2006 学年度第一学期）

姓名：　　　　　　　　　　专业：

学号：　　　　　　　　　　成绩：

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、　求如下函数的导数（每小题 7 分，共 21 分）

1、设函数　$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

2，设函数　$y=(x^2+\cos x)^{\sin x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

3，设函数 y=y(x) 由参数方程 $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ 给出，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

二，　求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1，$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1+x}{x}\right)$

2，$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

三、 完成如下各题（每小题 7 分，共 28 分）

1、$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

2、$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

3、$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$

4、求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=e^{-1}$，$x=e$ 及 x 轴所围平面图形的面积。

四，（第 1 小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分）

1，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$。

2，求通过直线 l_1：$\begin{cases}2x+3y+3z=0\\x+2z-4=0\end{cases}$ 且与直线 l_2：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ 平行的平面的方程。

五，（6 分）若 $f(0)=0$ 而当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt}{x^3}$，

求 $f'(0)$。

一，（每小题 7 分，共 28 分）

1，设函数 $z(x,y)=\dfrac{x^2}{2y}+f(xy)$，其中函数 f 二阶可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

2， 若隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 y'。

3，设函数 $g(y)=\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx$， $y>0$，求 $g'(y)$。

4， 计算积分：$I=\displaystyle\int_1^2 dy\int_y^2\frac{\sin x}{x-1}dx$。

二，（10 分）求曲线积分 $I=\displaystyle\oint_{\ell}(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy$，其中 ℓ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的上半周由点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$。

三，（10 分）计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{S^+}x\,dydz+(y+y^2)\,dzdx+z\,dxdy$，其中 S^+ 为曲面 $z=x^2+y^2$，$0\le z\le 1$，取下侧。

四，（每小题 7 分，共 14 分）

1，求解微分方程初值问题：$\begin{cases}xy'+y=e^x\\ y(1)=1\end{cases}$ 。

2，求微分方程：$y''-4y'+3y=1+e^{2x}$ 的通解。

五，讨论如下广义积分的敛散性：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x+1}}$， （2）$\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x^{4/3}}dx$

六，（每小题 8 分，共 16 分）

（1）求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}(x-3)^n$ 的收敛半径，收敛区间和收敛域。

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开式。

七，（7 分）讨论无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin x}{5+x^3}dx$ 的敛散性，若积分收敛，研究其是绝对收敛还是条件收敛？

八,(5分)设序列 $\{na_n\}$ 收敛,级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 也收敛,求证:级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

一.(每小题6分,共12分)求下列极限: 1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

二.(每小题6分,共24分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$; 2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; 3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

三.(每小题7分,共21分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

四.(第一小题4分,第二小题6分,共10分)

1.已知点 $A(2,2,2)$, $B(4,4,2)$, $C(4,2,4)$, 求向量 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的夹角.

2.求经过直线 L_1: $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y-z-2=0, \end{cases}$ 且平行于直线 L_2: $x=y=z$ 的平面方程.

五.(7分)求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

六.(12分)设函数 $f(x)=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求(1)函数的单调区间于极值点,(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题7分,共14分)

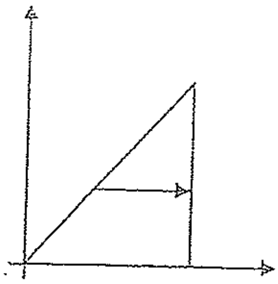
1.求证: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2}$, $x\in R$.

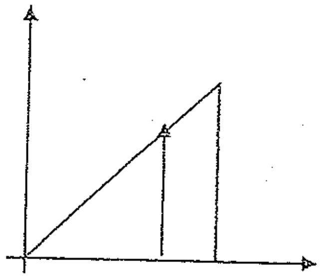
2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

一,完成以下各题





3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx.$

解 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2e^{-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^x y^2e^{-x^4}dy$

$$=\int_0^1 \frac{y^3}{3}\bigg|_0^x e^{-x^4}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1 e^{-x^4}dx^4=\frac{1}{12}\left(-e^{-x^4}\right)\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left(1-e^{-1}\right).$$

4.求解一阶线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}.$

解 先解 $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=0.$ 分离变量,得 $\dfrac{dy}{y}=-\cos xdx$

$$\ln y=-\sin x+\ln C,\qquad y=Ce^{-\sin x}.$$

令 $y=C(x)e^{-\sin x}$.则 $y'=C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}.$

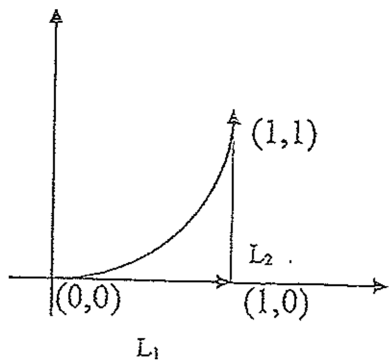
代入原方程,得 $C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}+C(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x}.$

即 $C'(x)=1,\quad C(x)=x+C$.从而方程通解为

$$y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

二.(10 分)求曲线积分 $I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy,$

其中L为曲线y=sin$\dfrac{\pi x}{2}$上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.



解 $P=e^y+x,Q=xe^y-2y,\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x},$

故积分值和路径无关,从而

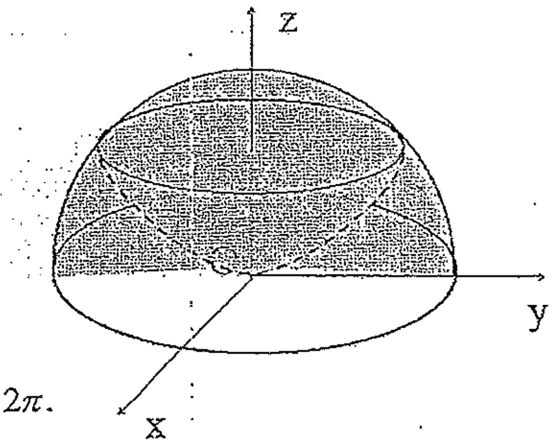
$$I=\int_{L_1+L_2}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$$

$$= \int_0^1 (e^0 + x)dx + \int_0^1 (e^y - 2y)dy = e - \frac{1}{2}.$$

三.(10 分)计算曲面积分 $I = \iint_{S^+} (y^2 + z^2) dydz + yzdzdx + z(x^3 + y^2) dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

解　记 $\Omega = \{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \le 2\}$, 则有高斯公式及对称性,

$$I = \iiint_\Omega (z + x^3 + y^3) dV = \iiint_\Omega z dV$$



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} z dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(4 - 2r^2) dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \cdot (2 - r^2) dr^2 = \pi \left(2r^2 - \frac{1}{2} r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

四. (10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 3x + 1, \\ y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 3. \end{cases}$

解　齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

因此齐次方程的通解为　　$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

由于 0 不是特征方程的根,故设非齐次方程的特解为 $y = ax + b$, 代入原方程,比较系数,得 $a = -1, b = \frac{1}{3}$. 即原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3}$.

由定解条件,得　$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 3C_2 - 1 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1. \end{cases}$

初值问题的解为　　$y = -e^{-x} + e^{3x} - x + \frac{1}{3}$.

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x|\sin x|}$;　　　(2) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0$.

解　(1)　因为 $\dfrac{1}{1+x|\sin x|}\ge\dfrac{1}{1+x},(x>0)$ 而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$ 发散,

由比较判别法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2)　因为 $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\Big/\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 故 $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$ 和 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx,\alpha>0$ 同敛散.

而当 $\alpha-1<1$ 即 $\alpha<2$ 时, $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 收敛; 当 $\alpha-1\ge1$ 即 $\alpha\ge2$ 时, $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 发散. 故

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\begin{cases}\text{收敛},\text{当}0<\alpha<2,\\ \text{发散},\text{当}\alpha\ge2.\end{cases}$$

六. (10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

解　$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}\overset{t=\frac{x-1}{2}}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}$$

$$(x-1)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=g(t),\qquad g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t},$$

因此　$$g(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|,$$

$$(x-1)f(x)=-\ln\left|1-\frac{x-1}{2}\right|=\ln2-\ln|3-x|,$$

从而　$$f(x)=\frac{\ln2-\ln|3-x|}{x-1}.$$

由于 $a_n=\dfrac{1}{2^n},l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$, 收敛半径为 R=2,

收敛区间为 $-1<t<1,-1<\dfrac{x-1}{2}<1$, 即 $-1<x<3$. 即 $(-1,3)$.

又由于级数当 $x=-1$ 收敛, 当 $x=3$ 时发散, 故收敛区域为 $[-1,3)$.

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=\dfrac{x}{5}$, 则

$$f(x)=\ln(7+x-2)=\ln 7+\ln\left(1+\frac{x-2}{7}\right)=\ln 7+\ln(1+t)$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{7^n}.$$

其收敛域为 $-1<\dfrac{x-2}{7}\le 1$, 即　$-5<x\le 9$.

八. (6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 的敛散性.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}=1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 也发散,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 不绝对收敛.

但　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}=0$, 又函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}$ 单调下降,即 $f(n)=\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 关于 n 单调下降,于是由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 收敛.因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$ 条件收敛.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一正实根 x_n; 且当 $\alpha>1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

证　记 $f(x)=x^n+nx-1$, 则 $f(1)=n>0$, $f(0)=-1<0$. 故由 $f(x)$ 的连续性,必有 $x_n\in(0,1)$, 使 $f(x_n)=0$. 又 $f'(x)=n(x^{n-1}+1)>0$, 即 $f(x)$ 严格单调, 故根唯一.

又,由 $f(x_n)=x_n^n+nx_n-1=0$, 得　$nx_n=1-x_n^n<1$,　$x_n<\dfrac{1}{n}$,　$x_n^{\alpha}<\dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

当 $\alpha>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛,故由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.证毕.

一.(每小题 7 分,共 28 分)

1.若函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^2}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$,求 $g'(y)$.

3.级数二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$,其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.

4.求解一阶常微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$.

二.(10 分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0$,求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段,求如上曲线积分 I.

三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$,其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,求上侧.

四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$; (2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

六.(10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其和函数.

八.(6 分)研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots, \{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

一.(每小题 7 分,共 28 分)　2.设函数 $g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{\cos(xy)}{x}dx, y>0$, 求 $g'(y)$.

解　$g'(y)=\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\frac{-x\sin(xy)}{x}dx+3y^2\frac{\cos y^3 y}{y^3}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\cos\sqrt{y}y}{\sqrt{y}}$

$$=-\int_{\sqrt{y}}^{y^3}\sin(xy)dx+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=\frac{\cos xy}{y}\bigg|_{\sqrt{y}}^{y^3}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}$$

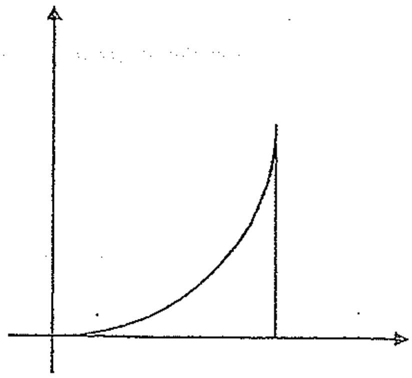
$$=\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{y}+3\frac{\cos y^4}{y}-\frac{\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}=4\frac{\cos y^4}{y}-\frac{3\cos y^{\frac{3}{2}}}{2y}.$$

3.计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy$, 其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成的区域.

解　$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1 x\sin x dx$

$$=\int_0^1 xd(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos xdx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1.$$



4.求解一阶常微分方程　$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$.

解　方程改写为　$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2}{y}x-y$, ① 把 x 看作 y 的函数,是一阶线性方程.

先解方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x$, 分离变量,得 $\frac{dx}{x}=\frac{2}{y}dy$,　$\ln x=2\ln y+\ln C$, 即 $x=Cy^2$.

用常数变易法,令 $x=C(y)y^2$, 则　$\frac{dx}{dy}=C'(y)y^2+2C(y)y$, 代入①,得

$C'(y)y^2=-y$, 因此 $C'(y)=-y^{-1}$, $C(y)=-\ln Cy$, 于是原方程的通解为　$x=-y^2\ln Cy$.

二.(10 分)设曲线积分 $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中函数 $\varphi(x)$ 连续可导且 $\varphi(0)=0$, 求函数 $\varphi(x)$;又设 L 为曲线 $y=x^{2009}$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的弧段,求如上曲线积分 I.

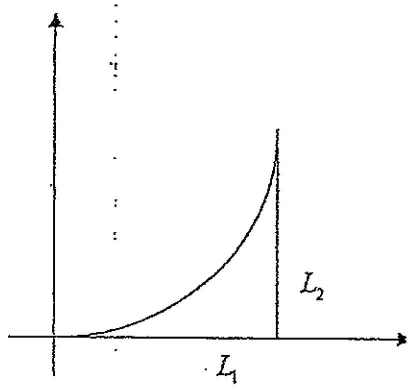
解　$P=xy^2, Q=y\varphi(x)$，因为积分与路径无关,故必有 $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy=\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x)$,

即得 $\varphi'(x)=2x$, $\varphi(x)=x^2+C$, 由于 $\varphi(0)=0$, 得 $C=0$, 故 $\varphi(x)=x^2$.

$$I=\int_L xy^2dx+x^2ydy=\int_{L_1+L_2} xy^2dx+x^2ydy$$

$$=\int_{L_1} xy^2dx+x^2ydy+\int_{L_2} xy^2dx+x^2ydy$$

$$=0+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}.$$



三.(10 分)级数曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, 取上侧.

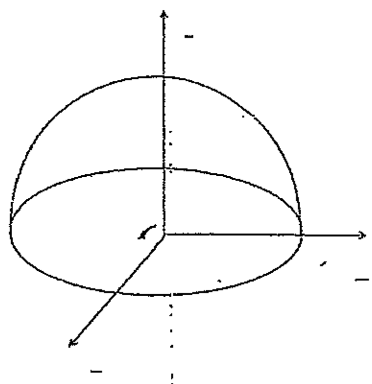
解　取 A: $z=0$ 为辅助平面, $\frac{\partial P}{\partial x}=4x^3-z, \frac{\partial Q}{\partial y}=z, \frac{\partial R}{\partial z}=0$. 由高斯公式,

$$I=\iint\limits_{S^++A}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy,=\iiint\limits_{\Omega}(4x^3-z+z+0)dV\overset{\text{由对称性}}{=}0.$$

故 $I=\iint\limits_{S^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy$

$$=\iint\limits_{A^+}(x^4-xz)dydz+(x^3+yz)dzdx-4y^2dxdy,$$

$$=-4\iint\limits_{A^+}y^2dxdy=-4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sin^2\theta rdrd\theta=-16\pi.$$



四.(10 分)求解初值问题: $\begin{cases} y''-2y'+y=1+e^x, \\ y(0)=2, y'(0)=2. \end{cases}$

解　先解齐次方程　$y''-2y'+y=0$.　特征方程为　$\lambda^2-2\lambda+1=0$.

重根 $\lambda_1=\lambda_2=1$,　故通解为　$y=(C_1+C_2x)e^x$.

对非齐次方程 $y''-2y'+y=1$. ①可设特解为 $y=C$, 代入①,得 C=1.

对非齐次方程 $y''-2y'+y=e^x$. ②因 1 是二重根, 可设特解为 $y=Cx^2e^x$,

代入②, 得$C=\frac{1}{2}$,即得特解为$y=\frac{1}{2}x^2e^x$. 于是, 原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+1.$$

由$y(0)=2$,得$C_1=1$.

由$y'=(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2})e^x+(C_2+2x)e^x$得$y'(0)=C_1+C_2=2$, 得$C_2=1$.

故初值问题的解为 $y=(1+x+\frac{x^2}{2})e^x+1$.

五.(每小题 5 分;共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$; (2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$.

解 (1)因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-x+1}}\Big/\frac{1}{x^{3/2}}=1$, 而无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛, 由比较判别法的极限形式得, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$ 收敛.

(2)因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^{7/3}}\Big/\frac{1}{x^{4/3}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, 而瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{x^{4/3}}dx$ 发散,故瑕积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{3}}}dx$ 发散

六.(10 分)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径和收敛域,并求其和函数.

解 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}\Big/\frac{1}{n(n-1)}=1$, 故收敛半径 R=1. 收敛区间为 (-1, 1) 收敛域为[-1, 1] .

记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $xf(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\triangleq F(x)$ 于是$F'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$$F''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\text{于是}F'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$$

$F(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x)$, 故 $f(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$.

七.(10 分)将函数 $f(x)=\ln 3x$ 在点 $x_0=2$ 展开成幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=x-2$, 则所求的展开式为

$$f(x)=\ln 3x=\ln(6+3t)=\ln 6+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n2^n}=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}.$$

收敛域为 $-1<\frac{x-2}{2}\le 1$,即 $0<x\le 4$ 或 $(0,4]$.

八.(6 分)研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性.

解　显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$, 记 $f(x)=x-\ln x$, 则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0\quad(x>1)$,

从而 $f(n)$ 递增,即 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减,由莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛.

但 $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 也发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

九.(6 分)设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,求证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

证　因 $a_n>0, n=1,2,\cdots,\{a_n\}$ 单调递减,故 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$. 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,

故必有 $a_n\ge a>0, n=1,2,\cdots$, 从而 $\frac{1}{1+a_n}\le\frac{1}{1+a}<1$. 于是 $\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n\le\left(\frac{1}{1+a}\right)^n, n=1,2,\cdots$.

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛,由比较判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

05学年度上学期05级高等数学（一）试题

（东校区B卷）

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、　求下列极限（每小题6分，共12分）

1、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$　　　　2、$\lim\limits_{x\to 0+0}(\tan x)^{\sin x}$，

二、　完成下列各题（每小题6分，共24分）

1、设 $y=\dfrac{\sin e^x}{1+x^2}+\ln\sqrt{x}$，求 dy。

2、设 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$，求 y'。

3、设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

4、求曲线 $y e^x+\ln y=1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程。

三、　求下列积分（每小题6分，共24分）：

1、$\int\left(\dfrac{1}{x\ln x}+\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$　　　　2、$\int\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$，

3、$\int_a^b|2x-a-b|\,dx$，　　　　4、$\int_{-1}^{1}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

四、（8分）

若当　$x\neq 0$　时　$f(x)=\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt}{x^3}$，　而　$f(0)=0$，　求

$f'(0)$。

五，（8分）求通过直线 $l_1:\begin{cases} x+2y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ 并且与直线

$$l_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-1}$$ 平行的平面的方程。

六，（12分） 设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$，

（1） 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点；

（2） 讨论函数 $f(x)$ 的凸凹性区间与拐点；

（3） 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

七，（每小题6分，共12分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，求证：

（1） 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2） 对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

六、（11分） 设函数 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，（1） 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点

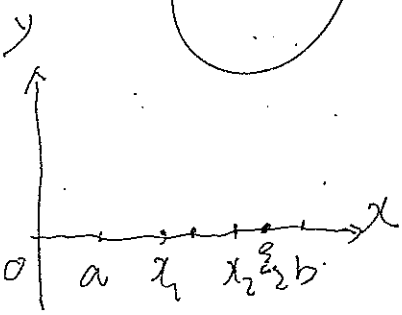
（2）求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点；（3） 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

七、（每小题 6 分，共 12 分）

1，证明：当 $x>1$ 时成立不等式，　$(1+x)\ln x > 2(x-1)$ 。

2，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，在开区间 $(a,\ b)$ 上可导，$f(b)=1$，又有 (a,b) 中两点 $x_1<x_2$，满足　$f(a)+f(x_1)+f(x_2)=3$ 。

求证：在区间 $(a,\ b)$ 中存在一点 c，满足　$f'(c)=0$ 。



证：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导.

由中值定理：$f(b)-f(x_2)=f'(\xi_2)(b-x_2)$

$f(b)-f(x_1)=f'(\xi_1)(b-x_1)$

$f(b)-f(a)=f'(\xi_3)(b-a)$

由 $f(b)=1$，$f(a)+f(x_1)+f(x_2)=3$

所以 $f'(\xi_2)(b-x_2)+f'(\xi_1)(b-x_1)+f'(\xi_3)(b-a)=0$

又由 $b-a\neq 0$，$b-x_1\neq 0$，$b-x_2\neq 0$，且 $b-a\neq b-x_1\neq b-x_2$

如果 $f'(\xi_1)\neq 0$，$f'(\xi_2)\neq 0$，$f'(\xi_3)\neq 0$ 则等号不成立.

05学年度上学期

05级高等数学(一)试题(东校区)

(第2期)

(B卷答案)

一、求极限

1 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2 原式 $= 1$

二、

1 $dy = \frac{(1+x^2)e^x\cos e^x - 2x\sin e^x}{(1+x^2)^2}dx + \frac{1}{2x}dx$

2 $y' = \sqrt{x^2-a^2}$

3 $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+t^2}{4t}$

4 $x+2y-2=0$

中山大學 考试草稿纸

三、

1. 原式 $= \ln(\ln x) + 2\sin\sqrt{x} + C$

2. 原式 $= \ln(1+\sin^2 x) + C$

3. 原式 $= \frac{1}{2}(a-b)^2$

4. 原式 $= 0$

四、 $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(1-\cos x)}{4x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}$

2

中山大學 考试草稿纸

五:

直线 l_1 的方向向量 $n_1=(-2, 2, -2)$

直线 l_2 的方向向量 $n_2=(2, -1, -1)$

所求平面的法向量

$n=n_1\times n_2=(-4, -6, -2)$

所求平面过直线 l_1 上点 $P_1(1, 1, 0)$.

所求平面方程

$-4(x-1)-6(y-1)-2z=0$

即 $2x+3y+z-5=0$

3

中山大學 考试草稿纸

六、

(1) 单调递增区间 $(-\infty,-3)$，$(-1,0)$，$(0,+\infty)$

单调递减区间 $(-3,-1)$，极大值点 $x=-3$。

(2) 凸区间 $(-\infty,0)$，凹区间 $(0,+\infty)$

拐点 $x=0$。

(3) 垂直渐近线 $x=-1$，斜渐近线 $y=\frac{x}{2}-1$。

七、(1) 令 $g(t)=f(t)-t$，则 $g(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续。

又 $g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}>0$，$g(1)=f(1)-1=-1<0$。

∴ 由介值定理，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g(\eta)=0$。

即 $f(\eta)=\eta$。

(2) 令 $g(t)=e^{\lambda t}(f(t)-t)$，则 $g(t)$ 在 $[0,\eta]$

连续，在 $(0,\eta)$ 可导，且 $g(0)=g(\eta)=0$。

∴ 由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$ 满足 $g'(\xi)=0$。

由此即得证等式。

求导得到 $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(1+x^2)x^2}<0,$

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调下降，又

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{2}=0,$$

由此知道当当 $x>0$ 时，$F(x)>0$，移项即得证。

2 设函数 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，其中 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上二阶可导且有 $f(2)=0$，证明存在 $\xi(1<\xi<2)$ 使得 $F''(\xi)=0$。

证明：由 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上二阶可导，故 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上二阶可导，因为 $f(2)=0$，故 $F(1)=F(2)=0$。

在 $[1,2]$ 上应用罗尔定理，至少存在一点 $x_0,(1<x_0<2)$，使得 $F'(x_0)=0$。

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，得到 $F'(1)=0$。

在 $[1,x_0]$ 上对 $F'(x)$ 应用罗尔定理，至少有点 $\xi(1<\xi<x_0<2)$ $F''(\xi)=0$。

课室名称：________ 座位号：________

任课教师：________

姓名：________

学号：________ 专业：________

年级：________ 学院：________

装 订 线 封 线

中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2019 学年第 1 学期　　　学院/系：数学学院

考试方式：闭卷　　　考试时长：100 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
签名											

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------ 以下为试题区域，共 10 道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答 ------

得分

一、计算下列极限（共10小题，每小题5分，共50分）

1、$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+x^2-2}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{1+x+x^2}=-1$$

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^x$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{2x+3}x}=e^{-1}$$

3、$\lim\limits_{x\to3+0}\left(x-[x]\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to3+0}\left(x-[x]\right)=\lim\limits_{x\to3+0}x-\lim\limits_{x\to3+0}[x]=3-3=0$

4、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=0-0=0$$

5、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$，其中 $A>0$，$B>0$，$C>0$.

设 $M=\max(A,B,C)$，则

$$M\le\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}\le\sqrt[n]{3M^n}=M\cdot3^{\frac{1}{n}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}=M$。

6、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}-1}$.

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{1+(x-1)}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\frac{1}{2}(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=4$$

7、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x\ln(1+x)}$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e(\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=-\frac{e}{2}$$

8、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}\right)$.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=3$$

9、利用定积分的定义求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

10、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+2n}\right)$.

解

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+2n}\le\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

由于$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}\to\dfrac{1}{2}$，根据夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+2n}\right)=\frac{1}{2}$$

得分

二、下列函数的导函数（6 分）

1、$y=e^{x^x}$.

解　做复合函数分解：$y=e^u$，$u=x^x=e^{x\ln x}=e^v$，$v=x\ln x$。根据复合函数链式法则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=e^u\cdot e^v\cdot(1+\ln x)=e^{x^x}x^x(1+\ln x)。$$

2、$y=(\sin x)^x$.

解　做微分演算

$$dy=de^{x\ln\sin x}$$
$$=e^{x\ln\sin x}d(x\ln\sin x)$$
$$=e^{x\ln\sin x}d(\ln\sin x\cdot dx+xd(\ln\sin x))$$
$$=(\sin x)^x d\left(\ln\sin x\cdot dx+x\frac{1}{\sin x}d(\sin x)\right)$$
$$=(\sin x)^x d\left(\ln\sin x\cdot \cancel{dx}+x\frac{\cos x}{\sin x}\cdot \cancel{dx}\right)$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=(\sin x)^x \cancel{d}(\ln\sin x+x\csc x)$$

a.c 2015

得分

三、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}$.（6 分）

解

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)+f(a)-f(a+t)}{2t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)}{2t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$
$$=f'(a)-\frac{1}{2}f'(a)=\frac{1}{2}f'(a)$$

得分

四、设 $y=x^2e^{2x}$，求 $\dfrac{d^{100}y}{dx^{100}}$.（6 分）

$(x^2e^{2x})^{(100)}$

解

$$\frac{d^{100}y}{dx^{100}}=x^2\left(e^{2x}\right)^{(100)}+C_{100}^1\cdot 2x\left(e^{2x}\right)^{(99)}+C_{100}^2\cdot 2\left(e^{2x}\right)^{(98)}$$
$$=x^2 2^{100}e^{2x}+C_{100}^1\cdot 2x2^{99}e^{2x}+C_{100}^2\cdot 2\cdot 2^{98}e^{2x}$$
$$=2^{100}\left(x^2+100x+2475\right)e^{2x}$$

得分

五、设 $y=y(x)$ 是由 $y=f(x+y)$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.（6 分）

解 两边求导数

$$y'=f'(x+y)\left(1+y'\right)$$

$$y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}=-1+\frac{1}{1-f'(x+y)},\quad 1+y'=\frac{1}{1-f'(x+y)},$$

$$y''=\frac{f''(x+y)\cdot\left(1+y'\right)}{\left(1-f'(x+y)\right)^2}=\frac{f''(x+y)}{\left(1-f'(x+y)\right)^3}$$

得分

六、设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1\le x\le 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.（6 分）

解 函数的定义域为 $[-1,+\infty)$，$\forall x_0\neq 0$，在 x_0 的一个小邻域内，$f(x)$ 是一个初等函数，根据初等函数的连续性定理，$f(x)$ 在 x_0 连续。

间断点只能在 $x_0=0$ 处，因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1},\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$$

所以 $x_0=0$ 是函数的第一类跳跃型间断点。

得分

七、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.（6 分）

解 记 $\alpha=\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}-2$，根据题目的条件，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$。于是

$$f(x)=1+\alpha x+\frac{\sin x}{x}+2x$$

由极限的四则运算，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1+0\cdot 0+1+2\cdot 0=2。$$

得分

八、指出函数 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ 的所有间断点，并判断其类型.（6 分）

解 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)}$，$x=1$ 是函数的可去间断点，$x=2$ 是函数的第二类无穷型间断点。

得分

九、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个实根.（6 分）

证 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，

$$F(0)=f(a)-f(0),$$

$$F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)=-F(0),$$

分两种情况讨论：

1、如果 $f(a)=f(0)$，则 $x=0$ 是方程的根；

2、如果 $f(a)\neq f(0)$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,a]$ 上满足零点定理，于是 $\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $F(\xi)=0$，即 ξ 是方程的根。

总之，方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个实根。

得分

十、设 $f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上连续的单调下降函数，记 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，证明在区间 (a,b) 内，$F'(x)\le 0$.（6 分）

证 $\forall x\in(a,b)$，$x-a>0$，

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{1}{x-a}\left(f(x)-\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right)$$

根据积分中值定理，$\exists\xi\in[a,x]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$。 由于函数单调下降，

所以 $f(x)-f(\xi)\le 0$，于是 $F'(x)=\dfrac{1}{x-a}\left(f(x)-f(\xi)\right)\le 0$。

数一

10.

中山大学本科生期末考试

14

考试科目：《高等数学（一）》（A 卷）

学年学期：2014 学年第 2 学期　　　　姓　　名：________________

学　院/系：数计学院　　　　　　　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　　　　　　　　　学　　院：________________

考试时长：120 分钟　　　　　　　　年级专业：________________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

————————以下为试题区域，共七道大题，总分100分，考生请在答卷纸上作答————————

一、求如下极限（共 2 小题，每小题6分，共12分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$；

2、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

二、求如下积分（共 4 小题，每小题7分，共28分）

1、$\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}dx$；

2、$\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$；

3、$\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^2 dx$；

4、$\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx$。

三、(共 10 分)

已知平面 π: $y+2z-2=0$ 与直线 $L:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+2=0\end{cases}$,

(1) 问直线L和平面π是否平行?

(2) 如直线L与平面π平行，则求直线L与平面π的距离，如不平行，则求直线L与平面π的交点。

(3) 求经过直线L且与平面π垂直的平面方程。

四、(共6分)

求函数 $F(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值。

五、(共11分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$, (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2) 求函数$f(x)$的凸凹区间与拐点; (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

六、完成如下各题(共 3 小题，每小题7分，共21分)

1，求函数 $z(x,y)=e^{xy}\ln\left(x^2+y^2\right)$ 在点$P(1,1)$处的全微分。

2，若隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

3，求函数 $u=xy^2+yz^3+3$ 在点$A(2,-1,1)$处的梯度及其在点A处沿向量 $l=(1,2,2)$ 的方向导数.

七、完成如下各题（共 2 小题，每小题6分，共12分）

1，求证： $e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$，　$x > 0$ 。

2，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，　求证：存在点 $\xi \in (0,1)$，满足　$f(\xi) + f(1-\xi) = 0$ 。

设 $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{1-x} f(t)dt$

13

珠海校区 2013 学年度第二学期 13 级《高等数学一》期末考试题 A

学院/专业__________ 学号__________ 姓名__________ 评分______

阅卷教师签名：__________

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一， 求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1， $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

2， $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

二，求如下积分（每小题 7 分，共 28 分）

1， $\int\dfrac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$

2, $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$

3, $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$

4, $\int_1^e \frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$

三,(每小题 5 分,共 10 分)

1, 已知点 $A(2,2,2)$, $B(4,4,2)$, $C(4,2,4)$,求向量 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 的夹角。

2, 求经过直线 L_1: $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y-z-2=0, \end{cases}$ 且平行于直线 L_2: $x=y=z$ 的平面的方程。

四，（6分）求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的极值。

五，（11分）设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点；（2）求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点；（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线。

六，完成如下各题（每小题7分，共21分）

1，求函数 $z(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 在点 $P(1,1)$ 处的全微分。

2 若隐函数 $Z=z(x,y)$ 由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

3．求函数 $u(x,y,z)=xyz$ 在点 $P(1,3,-3)$ 沿空间曲线 $x=t^2$，$y=3t^2$，$z=-3t^3$ 的切线方向的方向导数。

七，（每小题 6 分，共 12 分）

1，求证： $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2}$，　$x\in R$。

2，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a+0)f'(b-0)>0$，求证：在区间 (a,b) 中存在点 ξ,η，满足 $f(\xi)=0$，$f''(\eta)=0$。

15715615901，郑家宝

（也是微信号）

12 12

珠海校区 2012 学年度第一学期 12 级《高等数学一》期末考试题 A

学院/专业______________学号____________姓名____________评分______

阅卷教师签名：________________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一， 完成如下各题（每小题 7 分，共 21 分）

1，设函数 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$， 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

2，求函数 $z(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $P(1,1)$ 处的全微分。

3，求函数 $u(x,y,z)=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处方向导数增加最快的方向，并求沿该方向的方向导数。

二， 求如下极限（每小题 6 分，共 12 分）

1，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

2，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

三， 完成如下各题（每小题 7 分，共 28 分）

1，$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

2，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin x+\cos^6 x\right)dx$

3，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

4，求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=e^{-1}$， $x=e$ 及 x 轴所围平面图形的面积。

四，（第 1 小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分）

1，$|\bar{a}|=1$，$|\bar{b}|=5$，$\bar{a}\cdot\bar{b}=-1$，求 $|\bar{a}\times\bar{b}|$ 。

2，求通过直线 $l_1: \begin{cases} 2x+3y+3z=0 \\ x+2z-4=0 \end{cases}$ 且与直线 $l_2: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 平行的平面的方程。

五，（6 分）若隐函数$z=z(x,y)$由方程 $x+y+z=xyz$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

六，（11 分） 设函数 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，（1） 求函数$f(x)$的单调区间与极值点； （2）求函数$f(x)$的凸凹区间与拐点； （3） 求函数$f(x)$的渐近线。

七，（每小题 6 分，共 12 分）

1，证明：当 $x>1$ 时成立不等式 $(1+x)\ln x>2(x-1)$ 。

2，设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，令 $F(x)=x^2\int_x^1 f(t)dt$， $0\le x\le 1$，求证： 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 满足 $F''(\xi)=0$ 。

珠海校区 2011 年第一学期 10 级

《高等数学一》期末考试题 A 答案

一,求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-x(-\sin x)}{1-\cos x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=3.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^{x}.$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2-2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2-2x}\right)^{(2-2x)\cdot\frac{x}{2-2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

二,求如下积分

1. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx.$

解: $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx=\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}de^{x}=\int\left(1-\frac{1}{1+e^{x}}\right)de^{x}=e^{x}-\ln(1+e^{x})+C.$

2. $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^{2}}dx.$

解: $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^{2}}dx=\int\ln x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^{2}}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$

3. $\displaystyle\int_{1}^{e^{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

解: $\displaystyle\int_{1}^{e^{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_{1}^{e^{2}}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_{1}^{3}u^{-\frac{1}{2}}du=\left[2\sqrt{u}\right]\Big|_{1}^{3}=2(\sqrt{3}-1).$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^{2}-1\right|dx.$

解: $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^{2}-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^{2}-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^{2}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^{2}-1\right)dx=4.$

三,完成如下各题

1..若 $z(x,y)=\sin(xy)+\cos^2(xy)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)-y\sin(2xy),\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-x\sin(2xy)$.

2.已知函数 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1)$,$B(3,-2,-2)$,求此函数在点 A 处沿由 A 到到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解: $\overline{AB}=(2,-2,-3),l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}},\dfrac{-2}{\sqrt{17}},\dfrac{-3}{\sqrt{17}}\right)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\sqrt{y^2+z^2}},\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\sqrt{y^2+z^2}}$$

所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_A=\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_A=0,\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_A=\dfrac{1}{2}$;于是此函数在点 A 处沿 l 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{17}}+0\times\frac{-2}{\sqrt{17}}+\frac{1}{2}\times\frac{-3}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

此函数在点 A 处方向导数的最大值为

$$\left.\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\right|_A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=xyz$ 给出,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 方程两边对 x 求导,得 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}$, 故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-1}{1-xy}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz-1}{1-xy}\right)=\frac{(1-xy)y\dfrac{\partial z}{\partial x}-(-y)(yz-1)}{(1-xy)^2}=\frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}.$$

四、 1.若$|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=5, \bar{a}\cdot\bar{b}=-6$,求 $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

解：$\cos<\bar{a},\bar{b}>=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=-\dfrac{3}{5}$,故 $\sin<\bar{a},\bar{b}>=\dfrac{4}{5}$.于是

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin<\bar{a},\bar{b}>=8.$$

2.求通过直线 $l_1:\begin{cases}x+2y+z-3=0,\\ x-z-1=0;\end{cases}$ 并且与直线 $l_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 平行的平面方程.

解：两直线的方向向量分别为$\vec{e}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$, $\vec{e}_2=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$,

故所求平面的法向量为$\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 2 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-4\bar{i}-6\bar{j}-2\bar{k}$.

又易知点(1,1,0)在直线 l_1 上,故所求平面方程为 $-4(x-1)-6(y-1)-2z=0$, 即

$$2x+3y+z-5=0.$$

五、 记 $F(x)=\int_0^x\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^3}dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^3}dt,\quad x>0$, 求证:$F(x)$是常数,并求此常数.

解：因为$F'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{\sqrt{1/x}}{1+(1/x)^3}=0,\ x>0$,所以$F(x)$是常数.

于是,对任意 $x>0$,

$$F(x)=F(1)=2\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t^3}dt=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{1+(\sqrt{t^3})^2}d\sqrt{t^3}=\frac{4}{3}\arctan\sqrt{t^3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

六、 设函数$f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点;(2)求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点;(3)求函数 $f(x)$ 的渐近线.

解：(1) $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,单调增区间为$(-\infty, 1)$,$(3,+\infty)$;单调减区间为$(1,3)$.

无极大值点, 极小值点为 $x=2$.

(2) $f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4}$, 凸区间为 $(-\infty, 0)$, 凹区间为 $(0,1), (1,+\infty)$. 拐点为 $x=0$ 或$(0,0)$.

(3) 显然有垂直渐近线 $x=1$;而由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=2,$$

故函数有斜渐近线 $y=x+2$.

七, 1. 求证: $(1+x)\ln^2(1+x)\le x^2,\quad x\ge 0.$

证: 记 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2,\quad x\ge 0$. 则 $f(0)=0$, 且

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x-x^2,\quad x\ge 0,\quad f'(0)=0.$$

$$f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0, x\ge 0.$$

故 $f'(x)$ 单调降, 即 $f'(x)<f'(0)=0, x>0$. 于是 $f(x)$ 单调降, 即

$f(x)<f(0)=0, x>0$. 不等式得证.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续,在开区间$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$. 求证:存在两个不同的点 $\xi\in(0,1), \eta\in(0,1)$, 满足 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$.

证明:由闭区间上连续函数的介值定理,存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=\frac{1}{2}$.

在区间$[0,c]$上,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(0,c)$, 使得 $f(c)-f(0)=f'(\xi)c$,.

在区间$[c,1]$上,由拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(c,1)$, 使得 $f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$,.

即有 $\frac{1}{f'(\xi)}=2c$, $\frac{1}{f'(\eta)}=2(1-c)$. 于是 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2$. 且显然 $\xi\ne\eta$. 证毕.

谨以此文献给所有坚持考前突击流的朋友们！！

大家都是过来人。。这些公式都是对做题非常非常非常有用的，知道和不知道绝对不一样，一下午的血汗啊~~那些是个人都知道的公式我都省掉了，剩下的全部是精华，看看有没有你没见过的。如果觉得有帮助，别忘了分享一下！

WORD 里的特殊字符不能发在日志里，所以只能发图了

和差化积

$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin(\frac{\theta+\varphi}{2})\cos(\frac{\theta-\varphi}{2})$

$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos(\frac{\theta+\varphi}{2})\sin(\frac{\theta-\varphi}{2})$

$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos(\frac{\theta+\varphi}{2})\cos(\frac{\theta-\varphi}{2})$

$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin(\frac{\theta+\varphi}{2})\sin(\frac{\theta-\varphi}{2})$

积化和差

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

万能公式

$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

平方关系

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

等价无穷小

$e^x-1\sim x$ $\ln(x+1)\sim x$

$(1+ax)^b-1\sim abx$

$\log_a(x+1)\sim\frac{x}{\ln a}$ $a^x-1\sim x\ln a$

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$ $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$ $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

基本初等函数导数

$(\tan x)'=\sec^2 x$ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

微分的类似，不写了

高阶导数

$$(x^k)^{(n)}=\begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & n<k \\ n! & , n=k \\ 0 & , n>k \end{cases}$$

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n(a>0)$ $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

重要极限

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0(a>1,k>0)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{a}=1\ (a>0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$

常用 Maclaurin 公式

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

不定积分公式

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + c$$

变上限定积分求导公式

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

参数方程求曲线弧长、旋转体侧面积

$x = f(t), y = g(t), (t \in [\alpha, \beta])$

弧长 $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

侧面积 $S = 2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

直角坐标系求曲线弧长、旋转体侧面积

$y = f(x), (x \in [a, b])$

弧长 $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

侧面积 $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

极坐标系求曲线弧长、旋转体侧面积

$r = r(\theta), (\theta \in [\alpha, \beta])$

弧长 $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$

侧面积 $S = 2\pi\int_\alpha^\beta [r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$

点到平面距离公式

平面 π :Ax+By+Cz+D=0 过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，

法向量$\vec{n}=(A,B,C)$ 则点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到π的距离

$$d=\frac{\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

点到直线距离公式

直线 L 过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，

方向向量$\vec{s}=(X,Y,Z)$ 则点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

两直线距离公式

L_1过$M_1(x_1,y_1,z_1)$,方向向量$\vec{s_1}=(X_1,Y_1,Z_1)$

L_2过$M_2(x_2,y_2,z_2)$,方向向量$\vec{s_2}=(X_2,Y_2,Z_2)$

L_1L_2平行时 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s_1}|}{|\vec{s_1}|}$

L_1L_2异面时 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$

10 年

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题

D-1

专业____________学号____________姓名__________评分________

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$　　2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}$　　3. $y=x\arccos x^2$，求 y'

4. 已知 $y=y(x)$ 满足 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$，求 $y'(0)$　　5. $y=x^2e^{3x}$，求 $y^{(20)}$ $y^{(n)}$

6 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　　7. 求 $\int x\ln(1+x)dx$　　8. 求 $\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx$

9. 已知 $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，求一个同时垂直于 $\vec{a},\vec{b}$ 的向量。答：$-8\vec{i}+10\vec{j}+14\vec{k}$

10. 求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的 n 阶泰勒公式。

解：$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$　$\therefore \ln x=\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(x-2)^k}{k\cdot 2^k}+o\left((x-2)^n\right)$.

二、完成下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 证明不等式 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$　$(b>a>0)$.

证：$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a)$，其中 $b>\xi>a>0$。

由于 $\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$，所以 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$

2. 求过直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$ 和点 $P_0(1,2,3)$ 的平面方程。

3. 设 $u=f(x,xy,xyz)$，其中 f 有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$

答：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$　$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xy\left(f_{13}''+yf_{23}''+yzf_{33}''\right)+yf_3'$.

4. 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数。 $\sqrt{2}$

解 由于$v=\frac{\overline{PQ}}{|PQ|}=\frac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$

所以$\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}=\frac{\partial z}{\partial x}v_1+\frac{\partial z}{\partial y}v_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 要做一个容积为1立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

解 假设圆桶的底面半径为 r；高为 h，则圆桶的容积为$\pi r^2h=1$，表面积为$S=2\pi rh+2\pi r^2$。令$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-1)$，

求偏导，得到$\begin{cases}L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0,\\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0,\end{cases}$

解得$h=2r$，再代入约束条件$\pi r^2h=1$，得到$r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

根据题意，目标函数必有最小值，所以可知当底面半径为$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，高为$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$时用料最省。

6. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数$f_x(x,y),f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

解 由定义，$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x^2+0^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0$，

当$(x,y)\neq(0,0)$时， $f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$， $x^2+y^2\neq 0$。

由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2})$，

极限不存在，所以$f_x(x,y)$在原点$(0,0)$不连续。同理$f_y(x,y)$在原点$(0,0)$也不连续。但由于$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$

$=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，所以函数在$(0,0)$可微。

1.

东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题答案 C-1

一、完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin 2xy}$

令 $u=xy$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}u=0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{\sin 2u}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{1+u}}{2\cos 2u}=\frac{1}{2}.$$

3. $y=x\arccos x^2$，求 y'　　$y'=acr\cos(x^2)-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}.$

4. 设 $z+\cos(xy)=e^z$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$z_x-y\sin(xy)=e^z\cdot z_x$

$z_x=\frac{y\sin(xy)}{1-e^z}.$

5. 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$; 求 $df(1,1,1)$.

$f_x(x,1,1)=(x)'=1,\ f_x(1,1,1)=1$

$f_y(1,y,1)=(\frac{1}{y})'=-\frac{1}{y^2},\ f_y(1,1,1)=-1$

$f_z(1,1,z)=(1)'=0,\ f_z(1,1,1)=0$

$df(1,1,1)=f_x(1,1,1)dx+f_y(1,1,1)dy+f_z(1,1,1)dz=dx-dy.$

2.

C-2

6 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx \quad =\int\frac{2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}+c.$

7. 求$\int x\ln(1+x)dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+c.$

8. 求$\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}.$

9已知[redacted]$\vec{b}=2i+3j-k$,求一个同时垂直于$\vec{a},\vec{b}$的向量。

$\vec{a}\times\vec{b}=-10i+7j+k$

10. 求$f(x)=\ln(x-1)$在$x=2$处的n阶泰勒公式。

$$\ln(x-1)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n).$$

二、完成下列各题（每小题5分，共30分）

1. 求过直线$L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$和点$P_0(1,2,3)$的平面方程。

$7x-7y+2z+1=0$

2. 设$u=f\left(x,xy,xyz\right)$,其中f有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x}$[redacted]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_2'+zf_3'+xf_{12}''+xzf_{13}''+xyf_{22}''+xyzf_{23}''+xyzf_{32}''+xyz^2f_{33}''$$

3. 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数。

$$\frac{\partial z}{\partial l}=(z_x(1,0),z_y(1,0))\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2)\cdot(1,-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3

4. 求函数$u=\sin x\sin y\sin z$在条件$x+y+z=\frac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$下的极值和极值点。 c-3

$F(x,y,z,\lambda)=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$

$F_x=\frac{\cos x}{\sin x}=0, F_y=\frac{\cos y}{\sin y}=0, F_z=\frac{\cos z}{\sin z}=0, F_\lambda=x+y+z-\frac{\pi}{2}=0.$

$x_0=y_0=z_0=\frac{\pi}{6}, u_{\max}=\frac{1}{8}.$

5. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数$f_x(x,y); f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0.$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0,,0+y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2})$不存在，故$f_x(x,y)$不连续。

因为$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y}}f_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(2y\sin\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{y}\cos\frac{1}{2y^2})$不存在，故$f_y(x,y)$不连续。

$$但是\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\upsilon}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0.$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$df(0,0)=0.$

4.

6. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，使得下式成立 C-4

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)\text{。}$$

令$g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$，则$g(x)$在$[\frac{a+b}{2},b]$可导，

$g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2})$，$g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a)$.

由微分中值定理 $g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\frac{b-a}{2},\xi\in(\frac{b+a}{2},b)$

即$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)\cdot\frac{b-a}{2}\ ,\xi\in(\frac{b+a}{2},b)$ (1)

$g'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})$，

又因为$f'(x)$在$[\xi-\frac{b-a}{2},\xi]$可导，由微分中值定理可得

$f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})=f''(\eta)\cdot\frac{b-a}{2},\eta\in(a,b)$ (2)

综合 (1)，(2)式可得

$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2\ ,\eta\in(a,b)$.

09级一专B

一.(每小题6分,共12分)求极限: (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

二.(每小题6分,共24分)求下列积分:

(1) $\int\dfrac{dx}{2(2+x^{10})}$; (2) $\int\cos(\ln x)dx$; (3) $\int_1^e\dfrac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

三.(每小题7分,共21分)

(1)设 $z(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,求 $dz\big|_{(0,1)}$;

(2)已知 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1)$, $B(3,-2,-2)$,求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数,并求此函数在电 A 处方向导数的最大值.

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 给出,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题4分,第二小题6分,共10分)

(1)给定空间三点: $A(1,2,0)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,-1,2)$,求 ΔABC 的面积 S.

(2)求经过直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.

五.(7分)求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$ 的极值.

六.(12分)设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,求(1)此函数的单调区间与极值点;(2)此函数的凹凸区间与拐点;(3)此函数的渐近线.

七.(每小题7分,共14分)

1.求证不等式 $\sin x+\tan x>2x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0$, $f''(x)\neq0$, $x\in(a,b)$. 求证: $f(x)\neq0$, $x\in(a,b)$.

09级一期B卷参考解答

一.(每小题6分,共12分)求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{4x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{12x^2\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{24x}=\frac{1}{8}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ln\cos x}$.而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x/\cos x}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

二. (每小题6分,共24分)求下列积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}$;

解 $$\int\frac{dx}{x(2+x^{10})}=\int\frac{x^9dx}{x^{10}(2+x^{10})}=\frac{1}{10}\int\frac{dx^{10}}{x^{10}(2+x^{10})}$$;

$$=\frac{1}{20}\left(\int\frac{dx^{10}}{x^{10}}-\int\frac{dx^{10}}{2+x^{10}}\right)=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x^{10}}{2+x^{10}}\right|+C.$$

(2) $\int\cos(\ln x)dx$;

解 $$\int\cos(\ln x)dx\overset{u=\ln x}{=}\int e^u\cos u\,du=\int e^u d\sin u=e^u\sin u-\int\sin u\,de^u$$

$$=e^u\sin u+\int e^u d\cos u=e^u\sin u+e^u\cos u-\int e^u\cos u\,du$$

所以 $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx=\frac{e^u}{2}[\sin u+\cos u]+C=\frac{x}{2}[\sin\ln x+\cos\ln x]+C.$

(3) $\int_1^e \frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)}$;

解 $$\int_1^e \frac{dx}{x\left(2+\ln^2 x\right)} \overset{u=\ln x}{=} \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d(u/\sqrt{2})}{1+(u/\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt \overset{s=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin s}{\sin s+\cos s}ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt.$$

而 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2},$$

于是 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{\pi}{4}.$$

三. (每小题 7 分, 共 21 分)

(1)设 $z(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求 $dz\big|_{(0,1)}$;

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}=0$, 故 $dz\big|_{(0,1)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}dx + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}dy = dx.$

(2)已知 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 及点 $A(1,0,1)$, $B(3,-2,-2)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解 $\overline{AB}=l=(2,-2,-3)$,故 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{-3}{\sqrt{17}}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{y}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{z}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2}$$

于是 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{17}}+0\times\frac{(-2)}{\sqrt{17}}+\frac{1}{2}\frac{(-3)}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{2\sqrt{17}}.$$

在 A 点的方向导数最大值为 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x,y,z)=e^z-x-y-z$, 则 $\frac{\partial F}{\partial x}=-1,\frac{\partial F}{\partial y}=-1,\frac{\partial F}{\partial z}=e^z-1$.于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{e^z-1},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{e^z-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)=\frac{-e^z}{(e^z-1)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-e^z}{(e^z-1)^3}.$$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

(1)给定空间三点:$A(1,2,0),B(-1,3,1),C(2,-1,2)$,求$\Delta ABC$的面积$S$.

解 根据向量积的定义,可知三角形 ABC 的面积

$$2S_{\Delta ABC}=|AB||AC|\sin\angle A=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

由于 AB=(-2, 1, 1), AC=(1, -3, 1), 故

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=5i+5j+5k,\qquad \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(2)求经过直线 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=\frac{z}{2}$ 的平面方程.

解　平面的法向量为 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2i+0j-k$,又显然所求平面过点(1,-2,-3)

故所求平面方程为　$2(x-1)+0(y+2)-(z+3)=0$,即 $2x-z-5=0$.

五. (7 分)求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>0$ 的极值.

解　$f'(x)=\frac{d}{dx}(e^{\frac{\ln x}{x}})=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$,

令　$f'(x)=0$,得驻点 $x=e$.又 当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$,故此点

为极大值点,极大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

六. (12 分)设函数 $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,求(1)此函数的单调区间与极值点;(2)此函数的凹凸区间与拐点;(3)此函数的渐近线.

解　$f'(x)=\frac{3(x-1)^2(x+1)^2-2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^4}$

$$=\frac{(x-1)^2[3(x+1)-2(x-1)]}{(x+1)^3}=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},$$

$$f''(x)=\frac{[2(x-1)(x+5)+(x-1)^2](x+1)^3-3(x-1)^2(x+5)(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{(x-1)[(3x+9)(x+1)-3(x-1)(x+5)]}{(x+1)^4}=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	凸, ↗	极大值-27/2	凸, ↘	凸, ↗	拐点(1, 0)	凹, ↗

单调增加区间为 $(-\infty,-5)$, $(-1,1)$ 和 $(1,+\infty)$,单调减少区间为 $(-5,-1)$ 函数在点

x=−5 处取到极大值, 极大值为 $f(-5)=-27/2$.

曲线的凸区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,1)$, 凹区间为 $(1,+\infty)$, 曲线拐点为 $(1,0)$.

显然曲线有垂直渐近线 x=−1, 曲线无水平渐近线. 由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5,$$

因此曲线有斜渐近线 $y=x-5$.

(七. (每小题 7 分, 共 14 分)

1.求证不等式 $\sin x+\tan x>2x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$;

证 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$, 则 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$,

$$f''(x)=-\sin x+2\sec x\cdot\sec x\tan x=\frac{\sin x(2-\cos^3 x)}{\cos^3 x}\geq 0,$$

故 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$, 在区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内单调增加, 而 $f'(0)=0$, 于是

在区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ 在区间 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内单调增加,

于是 $f(x)=\sin x+\tan x-2x>f(0)=0$. 证毕.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0, f''(x)\neq 0, x\in(a,b)$.

求证: $f(x)\neq 0, x\in(a,b)$.

证 用反证法. 设存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$. 于是由罗尔定理,

$$\exists\xi\in(a,c),\exists\eta\in(c,b),\text{使得}f'(\xi)=f'(\eta)=0.$$

同样由罗尔定理, $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(a,b)$, 使得 $f''(\zeta)=0$. 矛盾.

01A

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限: 1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;　　2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;　　3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du\big|_{(1,2)}$.

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2)$, $B(4,4,2)$, $C(4,2,4)$, 求向量 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 的夹角.

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\ x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x)=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求(1)函数的单调区间于极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2}$, $x\in R$.

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证:

(1)存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

(2)存在两个不同的点 $\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.