07级第二学期高等数学一期中考试试题（B卷）（08年4月）

姓名：公丕莽　　专业：07经济地理　　84

学号：07306850　　成绩：

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一．（10分）设函数 $u=\frac{xy}{z}+e^{xy^2z^3}$，求全微分 du。

10

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}+e^{xy^2z^3}\cdot y^2z^3$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{z}+2xyz^3e^{xy^2z^3}$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-xy}{z^2}+3xy^2z^2e^{xy^2z^3}$

则全微分 $du=\left(\frac{y}{z}+y^2z^3e^{xy^2z^3}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+2xyz^3e^{xy^2z^3}\right)dy+\left(\frac{-xy}{z^2}+3xy\right.$

二．（10分）设函数 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，$z=f(x,y)$ 是由方程 $F\left(\frac{x}{yz},\frac{y^2}{xz}\right)=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

10

解：$\frac{\partial F}{\partial x}=F_u\cdot\frac{1}{yz}+F_v\cdot\left(\frac{-y^2}{zx^2}\right)$

$\frac{\partial F}{\partial y}=F_u\left(\frac{-x}{y^2z}\right)+F_v\cdot\frac{2y}{xz}$

$\frac{\partial F}{\partial z}=F_u\left(\frac{-x}{yz^2}\right)+F_v\left(\frac{-y^2}{xz^2}\right)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x'}{F_z'}=\frac{F_u'\frac{1}{yz}+F_v'\left(\frac{-y^2}{zx^2}\right)}{F_u'\frac{x}{yz^2}+F_v'\frac{y^2}{xz^2}}=\frac{x^2zF_u'-y^3zF_v'}{x^3F_u'+xy^3F_v'}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y'}{F_z'}=\frac{\frac{x}{y^2z}\cdot F_u'+\frac{2y}{xz}\cdot F_v'}{\frac{x}{yz^2}\cdot F_u'+\frac{y^2}{xz^2}F_v'}=\frac{-x^2zF_u'+2y^3zF_v'}{[illegible]}$

三（10分）设函数 $z=f\left(\frac{x^2}{y}, e^y\cos x\right)$，其中 f 二阶可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \frac{2x}{y} + f_2' \cdot e^y \cdot (-\sin x)$

$= \frac{2x}{y} f_1' - e^y \sin x f_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2x}{y} f_1' - e^y \sin x f_2'\right)_y$

$= \frac{-2x}{y^2} f_1' + \frac{2x}{y}\left[f_{11}'' \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) + f_{12}'' e^y \cos x\right] + -e^y \sin x f_2' - e^y \sin x \left[f_{21}'' \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right.$
$\left. + f_{22}'' e^y \cos x\right)$

$= \frac{-2x}{y^2} f_1' + \frac{2x}{y}\left[-\frac{x^2}{y^2} f_{11}'' + f_{12}'' \cdot e^y \cos x\right] - e^y \sin x \left[f_2' + e^y \cos x f_{22}'' - \frac{x^2}{y^2} f_{21}''\right]$

四.（10分）设方程组 $\begin{cases} u^3v^3 + x^2 + y^2 = 1 \\ u^2 - v^2 + xy = 0 \end{cases}$，求 u_y'，v_y'。

解：由题意得，分别对两式两侧对 y 进行求偏导：

$$\begin{cases} 3u^2v^2(v \cdot u_y' + u \cdot v_y') + 2y = 0 \\ 2u \cdot u_y' - 2v \cdot v_y' + x = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} u_y' = \frac{-x}{2u} + \frac{v}{u^2+v^2}\left(\frac{xv}{2u} - \frac{2y}{3u^2v^2}\right) \\ v_y' = \frac{1}{(u^2+v^2)}\left(\frac{-2y}{3uv^2} + \frac{xv}{2}\right) \end{cases}$$

五 (14分) 在直角坐标系中按不同积分次序把二重积分 $I=\iint\limits_D x\,dxdy$ 化为累次积分，并从中选取一种累次积分求出积分值，其中 D 是由 $y=\sqrt{x}$，$y=6-x$，$x=0$ 所围成的区域。$\frac{28}{15}$

解 ① $I=\iint\limits_D x\,dxdy=\cancel{\int_0^2 dy\int_{\sqrt{x}}^{6-y} x\,dx}\quad \int_0^2 dy\int_{y^2}^{6-y} x\,dx$ ×

② $I=\iint\limits_D x\,dxdy=\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{x}} x\,dy+\int_4^6 dx\int_0^{6-x} x\,dy$ ×

$I=\int_0^2 dy\int_{y^2}^{6-y} x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 (y^2-12y-y^4+36)dy$

$=\frac{1}{2}\cdot(8-\frac{56}{15})$

$=\frac{32}{15}$

六. (16分) 试用柱坐标和球坐标把三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z\,dv$ 化成累次积分，并从中选取一种累次积分求出积分值，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=12$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围的 $z\geq 0$ 部分的闭区域。

解：柱坐标 $\cancel{=\int_0^{2\sqrt{3}} z\,dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr}\quad I=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\,dr\int_{r^2}^{\sqrt{12-r^2}} z\,dz$

球坐标 $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{2\sqrt{3}} \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho$

$=\int_0^{2\pi} d\theta\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi\int_0^{2\sqrt{3}} \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\right)$

$\cancel{I=\int_0^{2\sqrt{3}} z\,dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr}$

$\cancel{=2\pi\int_0^{2\sqrt{3}} z\,dz\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr}$

$=8\ \cancel{\pi}$

$I=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\,dr\int_{r^2}^{\sqrt{12-r^2}} z\,dz$

$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(12r-r^3-r^5)dr$

10

七（10分）计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2+z^2)^2 ds$，其中 L 是曲线 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$ $(0\le t\le 2)$。

解：$I=\int_L (x^2+y^2+z^2)^2 ds$

$$=\int_0^2 [e^{2t}(\cos^2t+\sin^2t+1)]^2\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}}\,dt$$

$$=\int_0^2 4\sqrt{3}e^{5t}dt$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{5}(e^{10}-1)$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{5}(e^{10}-1)$$

8

八.（10分）计算曲线积分 $I=\int_L \frac{dx+dy}{x+|y|}$，其中 L 是从 $A(4,0)$ 到 $B(0,-4)$ 再到 $C(-2,0)$ 的折线段。

解：l_{AB}：$y=x-4$ $(0\le x\le 4)$

l_{BC}：$y=-2x-4$ $(-2\le x\le 0)$

则 $I=\int_L \frac{dx+dy}{x+|y|}$

$$=\int_4^0 \frac{dx+dx}{x+(4-x)}+\int_0^{-2}\frac{dx-2dx}{3x+4}$$

$$=\int_4^0 \frac{1}{2}dx+\int_0^{-2}\frac{-dx}{3x+4}$$

$$=\cancel{-2+\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}}$$

$\frac{1}{3}\ln 2-2$

$$=\cancel{\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-2}$$

10

九.（10分）求曲面积分 $I=\iint\limits_S |y|ds$，其中 S 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分。

解：$z=4-x-y$ D_1：$x^2+y^2=1$ $y\ge 0$；D_2：$x^2+y^2=1$ $y\le 0$

则 $I=\iint\limits_S |y|ds$

$$=\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1+1+1}\,dxdy+\iint\limits_{D_2}(-y)\sqrt{1+1+1}\,dxdy$$

$$=\sqrt{3}\left[\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\,dr-\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\,dr\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$