1．判断.$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{1}{\ln n}$的敛散性

解：容易知道本级数是正项级数。面对数项级数的判别问题。很多时候需要观察其中的无穷小并将其等价化。容易知道$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$，因此由$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{1}{\ln n}\sim\frac{1}{n\ln n}$可知原级数与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$敛散性相同，由积分判别法可知与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散，故原级数发散。

2．判断.$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$的敛散性

解：因为平方的存在，本级数也是正项级数。类似于上题，本题同样需要对通项的无穷小量进行解读，因为$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{n}$，所以$\ln^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^2}$，自然可以知道原级数收敛。

为了做好级数判别的问题，需要认真巩固上半学期无穷小比阶的知识。

3. 判断.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}$的敛散性

解：本题其实是课本上出现例题，主要需要注意的就是$\varphi=2n\pi$时，级数相当于调和级数是发散的，其余情况，可证明通项分子$\cos n\varphi$部分和有界，而$\frac{1}{n}$单调趋于 0，使用狄利克雷判别法就可以证明这个级数是收敛的。

4. 判断.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$在$x\in(1,+\infty)$的一致收敛性,然后证明其和函数在$x\in(1,+\infty)$连续。

解：因为$\frac{1}{x^n}$在$x\in(1,+\infty)$不一致收敛到 0 函数（构造点列$x_n=\sqrt[n]{2}$，则$\frac{1}{x_n^n}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0$），可以知道这个函数项级数是不一致收敛的。

不过因为可以证明$\forall x_0>1,\exists\delta>0$，使得$1+\delta<x_0$,可证函数项级数在$x\in[1+\delta,+\infty)$一致收敛（因为$\frac{1}{x^n}\le\frac{1}{(1+\delta)^n}$,由 M 判别法可证）。这样由$\frac{1}{x^n}$的连续型可知和函数$S(x)$在$x\in[1+\delta,+\infty)$连续，特别的在$x=x_0$处连续。由$x_0$任意性可知和函数$S(x)$在$x\in(1,+\infty)$连续。

5. 求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域与和函数

解：本题的收敛半径是很容易求得的，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}=1$可知收敛半径为$1$.两个端点也比较容易知道$x=1$时调和级数发散，$x=-1$时交错调和级数收敛。(前面缺项不影响敛散性)。故收敛域为$[-1,1)$

这个级数如果想处理分母的n可以先对通项除以x再逐项积分获得。本题也可以用补项转化为泰勒展开公式的应用，不过应用时要注意次数的改变和本身的缺项，有$x\in(-1,1)$时：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n-x=-\ln(1-x)-x$$

根据$x=-1$为收敛点及和函数连续性可知和函数在$x\in[-1,1)$都等于$-\ln(1-x)-x$

6. 计算e^x在$x=1$处的幂级数表达式，并求出收敛域

解：这里要注意幂级数是在$x=1$处，故幂级数应该有形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$的表达式。为了解决这个问题，需如下计算：

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{x-1}=\mathrm{e}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}}{n!}(x-1)^n$$

由e^{x-1}收敛域为$x\in(-\infty,+\infty)$可以知道原级数的收敛域也是$x\in(-\infty,+\infty)$.

这个题目不难。重点是大家理解不在原点处的泰勒级数的概念和展开方法。

7. 计算函数$\arctan\frac{1-x}{1+x}$的麦克劳林级数表达式。

解：本函数不容易直接进行表示和展开，需要对其进行求导，得：

$$\left(\arctan\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)'=\frac{1+2x+x^2}{2+2x^2}\cdot\frac{-2}{1+2x+x^2}=-\frac{1}{1+x^2}$$

因此由$-\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$，以及$\arctan\frac{1-0}{1+0}=\frac{\pi}{4}$,可知：

$$\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}+\int_0^x-\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n+1}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$$

本题在中间实际上可以注意到在$x=0$ 附近，$\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}-\arctan x$,利用公式进行计算也是可以的。

8. 计算函数$\sin x\cos 2x$的麦克劳林级数表达式。

解：本题如果写成两个幂级数乘积的形式将很难计算出最终的幂级数。需要对三角函数做积化和差变换后再展开，过程如下：

$$\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[3^{2n+1}-1]}{2\cdot(2n+1)!}x^{2n+1}$$

9. 判断广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x, p>0$的收敛性与绝对收敛性

解：本积分在$x=0$可能为瑕点，故分为两个积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$与$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$来讨论。

首先，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$在$p>1$时是绝对收敛的，因为$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$收敛。

而当$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$条件收敛，因为$\forall A>1,\left|\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos A|\le 2.$

而$\frac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)$单调下降趋于 0，由狄利克雷判别法可证明积分收敛。

另一方面，$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}$，由$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x$收敛但$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p}\mathrm{d}x$发散可得条件收敛。

然后，我们分析.$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$。首先，$0<p\le 1$时，可以注意到$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^p}=\begin{cases}0, & 0<p<1\\ 1, & p=1\end{cases}$,此时$x=0$不是瑕点，积分自然收敛且绝对收敛。

$p>1$时，$x=0$为瑕点，瑕积分为非负函数积分。注意到$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$.由 p-瑕积分性质，易知$p<2$时，瑕积分收敛且绝对收敛，$p\ge 2$时瑕积分发散。

综上，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$需要两部分积分同时收敛（或无穷限积分收敛且无瑕点）。总结得$0<p\le 1$时，积分条件收敛。$1<p<2$时，积分绝对收敛。$p\ge 2$时，积分发散。

10. 判断广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x, p>0$的收敛性与绝对收敛性

解：本题同样分成两部分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$与$\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$来讨论，

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$，讨论过程与第 8 题完全类似，可知$p>1$时积分绝对收敛，$0<p\le 1$时积分条件收敛。

而对于$\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$，$x=0$必为瑕点且$\cos x\sim 1$,因此该非负函数积分与$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$敛散性相同，故有$0<p<1$时积分收敛且绝对收敛，而$p\ge 1$时积分发散。

综上$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$在$0<p<1$时条件收敛，在$p\ge 1$时发散。

11. 已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，$F(x)=\int_0^x(2u-x)f(x-u)\mathrm{d}u$,证明：若$f(x)$单调递减，则$F(x)$单调递增。

证：本题直接利用带参变限求导可得$F'(x)=xf(0)+\int_0^x(2u-x)f'(x-u)-f(x-u)\mathrm{d}u$,但

这个表达式仍然复杂且不易分析。本题需要先对原始函数进行积分换元。

本题正确思路：令$t = x - u$,有

$$F(x) = \int_0^x (2u - x)f(x - u)\mathrm{d}u = -\int_x^0 (x - 2t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (x - 2t)f(t)\mathrm{d}t$$

此时可得：

$$F'(x) = (x - 2x)f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x \cdot f(x) = \int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t$$

注意到在积分区间内部有$t < x$,由$f(x)$单调递减，知$f(t) > f(x)$，故

$$F'(x) = \int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t > 0$$

从而可证$F(x)$为单调递增的函数。■