一、函数与极限

1、集合的概念

一般地我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫集合（简称集）。集合具有确定性（给定集合的元素必须是确定的）和互异性（给定集合中的元素是互不相同的）。比如“身材较高的人”不能构成集合，因为它的元素不是确定的。

我们通常用大字拉丁字母 A、B、C、……表示集合，用小写拉丁字母 a、b、c……表示集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记作：a∈A，否则就说 a 不属于 A，记作：a　A。

⑴、全体非负整数组成的集合叫做非负整数集（或自然数集）。记作 N

⑵、所有正整数组成的集合叫做正整数集。记作 N^{+}或 N_{+}。

⑶、全体整数组成的集合叫做整数集。记作 Z。

⑷、全体有理数组成的集合叫做有理数集。记作 Q。

⑸、全体实数组成的集合叫做实数集。记作 R。

集合的表示方法

⑴、列举法：把集合的元素一一列举出来，并用“｛｝”括起来表示集合

⑵、描述法：用集合所有元素的共同特征来表示集合。

集合间的基本关系

⑴、子集：一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，我们就说 A、B 有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 A　B（或 B　A）。。

⑵相等：如何集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 是集合 A 的子集，此时集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全一样，因此集合 A 与集合 B 相等，记作 A＝B。

⑶、真子集：如何集合 A 是集合 B 的子集，但存在一个元素属于 B 但不属于 A，我们称集合 A 是集合 B 的真子集。

⑷、空集：我们把不含任何元素的集合叫做空集。记作　，并规定，空集是任何集合的子集。

⑸、由上述集合之间的基本关系，可以得到下面的结论：

①、任何一个集合是它本身的子集。即 A　A

②、对于集合 A、B、C，如果 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，则 A 是 C 的子集。

③、我们可以把相等的集合叫做“等集”，这样的话子集包括“真子集”和“等集”。

集合的基本运算

⑴、并集：一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集。记作 A∪B。（在求并集时，它们的公共元素在并集中只能出现一次。）

即 A∪B＝｛x|x∈A，或 x∈B｝。

⑵、交集：一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集。记作 A∩B。

即 A∩B＝｛x|x∈A，且 x∈B｝。

⑶、补集：

①全集：一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集。通常记作 U。

②补集：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集。简称为集合 A 的补集，记作 $C_U A$。

即 $C_U A$＝｛x|x∈U，且 x　　A｝。

集合中元素的个数

⑴、有限集：我们把含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集。

⑵、用 card 来表示有限集中元素的个数。例如 A＝｛a,b,c｝，则 card(A)=3。

⑶、一般地，对任意两个集合 A、B，有

$card(A)+card(B)=card(A\cup B)+card(A\cap B)$

我的问题：

1、学校里开运动会，设 A＝｛x|x 是参加一百米跑的同学｝，B＝｛x|x 是参加二百米跑的同学｝，C＝｛x|x 是参加四百米跑的同学｝。学校规定，每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项，请你用集合的运算说明这项规定，并解释以下集合运算的含义。⑴、A∪B；⑵、A∩B。

2、在平面直角坐标系中，集合 C=｛(x,y)|y=x｝表示直线 y=x，从这个角度看，集合 D=｛(x,y)|方程组：2x-y=1,x+4y=5｝表示什么？集合 C、D 之间有什么关系？请分别用集合语言和几何语言说明这种关系。

3、已知集合 A=｛x|1≤x≤3｝，B=｛x|(x-1)(x-a)=0｝。试判断 B 是不是 A 的子集？是否存在实数 a 使 A＝B 成立？

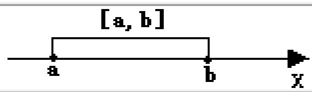
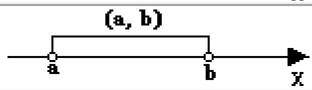
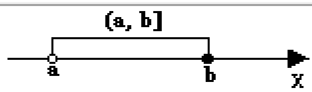
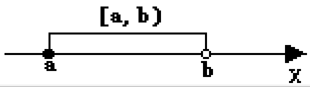
4、对于有限集合 A、B、C，能不能找出这三个集合中元素个数与交集、并集元素个数之间的关系呢？

5、无限集合 A＝｛1，2，3，4，…，n，…｝，B＝｛2，4，6，8，…，2n，…｝，你能设计一种比较这两个集合中元素个数多少的方法吗？

2、常量与变量

⑴、变量的定义：我们在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，我们把其称之为**常量**；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们则把其称之为**变量**。**注：**在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们则把它看作常量。

⑵、变量的表示：如果变量的变化是连续的，则常用**区间**来表示其变化范围。在数轴上来说，**区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体。

区间的名称	区间的满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	a≤x≤b	[a，b]	
开区间	a＜x＜b	（a，b）	
半开区间	a＜x≤b 或 a≤x＜b	（a，b]或[a，b）	 

以上我们所述的都是有限区间，除此之外，还有无限区间：

[a，+∞)：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：a≤x＜+∞；

(-∞，b)：表示小于 b 的实数的全体，也可记为：-∞＜x＜b；

$(-\infty, +\infty)$：表示全体实数，也可记为：$-\infty < x < +\infty$

注：其中$-\infty$和$+\infty$，分别读作"负无穷大"和"正无穷大",它们不是数,仅仅是记号。

(3)、**邻域**：设 α 与 δ 是两个实数，且 δ>0.满足不等式 $|x-\alpha| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 α 的 δ 邻域，点 α 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径。

2、函数

(1)、**函数的定义**：如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**。变量 x 的变化范围叫做这个**函数的定义域**。通常 x 叫做**自变量**，y 叫做**函数值（或因变量）**，变量 y 的变化范围叫做这个**函数的值域**。注：为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 y=f(x)、y=F(x)等等来表示。这里的字母"f"、"F"表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系,它们是可以任意采用不同的字母来表示的。如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。这里我们只讨论单值函数。

(2)、**函数相等**

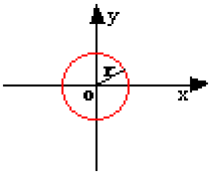
由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域。由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称两个**函数相等**。

(3)、**域函数的表示方法**

a)：解析法：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法。例：直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是：$x^2+y^2=r^2$

b)：表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法。例：在实际应用中，我们经常会用到的平方表，三角函数表等都是用表格法表示的函数。

c)：图示法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法。一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量。例：直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆用图示法表示为：



3、函数的简单性态

(1)、**函数的有界性**：如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)| \le M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们就称 f(x)在区间 I 有界，否则便称无界。

注：一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数

例题：函数 cosx 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的.

(2)、**函数的单调性**：如果函数$f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而增大，即：对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加**的。如果函数$f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而减小，即：对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$时，有$f(x_1) > f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调减小**的。

例题：函数$f(x)$=x^2在区间(-∞,0)上是单调减小的，在区间(0,+∞)上是单调增加的。

(3)、函数的奇偶性

如果函数$f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足$f(-x)=f(x)$,则$f(x)$叫做偶函数;如果函数$f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$叫做奇函数。

注：偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

(4)、函数的周期性

对于函数$f(x)$，若存在一个不为零的数 *l*，使得关系式$f(x+l)=f(x)$对于定义域内任何 x 值都成立，则$f(x)$叫做**周期函数**，*l* 是$f(x)$的周期。

注：我们说的周期函数的周期是指最小正周期。

例题：函数$\sin x, \cos x$是以 2π 为周期的周期函数；函数 tgx 是以 π 为周期的周期函数。

4、反函数

(1)、反函数的定义：设有函数$y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0时，变量 x 在函数的定义域内必有一值 x_0与之对应，即$f(x_0)=y_0$，那末变量 x 是变量 y 的函数.这个函数用$x=\varphi(y)$来表示，称为函数$y=f(x)$的反函数.

注：由此定义可知，函数$y=f(x)$也是函数$x=\varphi(y)$的反函数。

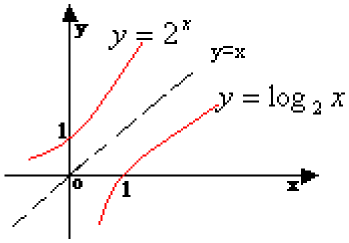
(2)、反函数的存在定理：若$y=f(x)$在(a，b)上严格增(减)，其值域为 R，则它的反函数必然在 R 上确定，且严格增(减).

注：严格增(减)即是单调增(减)

例题：$y=x^2$，其定义域为(-∞,+∞)，值域为[0,+∞).对于 y 取定的非负值,可求得 x=±$\sqrt{y}$.若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间(-∞,+∞)上，函数不是严格增(减)，故其没有反函数。如果我们加上条件，要求 x≥0，则对 y≥0、x=$\sqrt{y}$就是 $y=x^2$在要求 x≥0 时的反函数。即是：函数在此要求下严格增(减).

(3)、反函数的性质：在同一坐标平面内，$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$的图形是关于直线 y=x 对称的。

例题：函数$y=2^x$与函数$y=\log_2 x$互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线y=x对称的。如右图所示：



5、复合函数

复合函数的定义：若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的函数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内，那末，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称后一个函数是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称复合函数，记作$y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量。

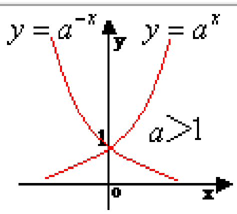
注：并不是任意两个函数就能复合；复合函数还可以由更多函数构成。

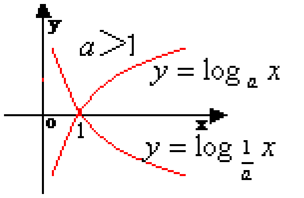
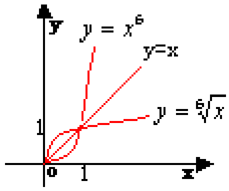
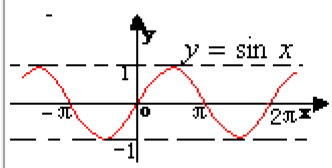
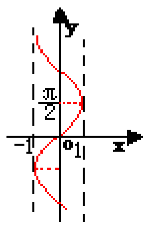
例题：函数$y=\arcsin u$与函数$u=2+x^2$是不能复合成一个函数的。

因为对于$u=2+x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），使$y=\arcsin u$都没有定义。

6、初等函数

(1)、基本初等函数：我们最常用的有五种基本初等函数，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数。下面我们用表格来把它们总结一下：

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$		a)：不论 x 为何值，y 总为正数； b)：当 x=0 时，y=1.

对数函数	$y=\log_a x (a>0,\ a\neq 1)$		a):其图形总位于 y 轴右侧,并过(1,0)点 b):当 a>1 时,在区间(0,1)的值为负;在区间(-,+∞)的值为正;在定义域内单调增.
幂函数	$y=x^a$ a 为任意实数	 这里只画出部分函数图形的一部分。	令 a=m/n a):当 m 为偶数 n 为奇数时,y 是偶函数; b):当 m,n 都是奇数时,y 是奇函数; c):当 m 奇 n 偶时,y 在(-∞,0)无意义.
三角函数	$y=\sin x$ (正弦函数) 这里只写出了正弦函数		a):正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 b):正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leq 1$
反三角函数	$y=\arcsin x$ (反正弦函数) 这里只写出了反正弦函数		a):由于此函数为多值函数,因此我们此函数值限制在[-π/2, π/2]上,并称其为反正弦函数的主值.

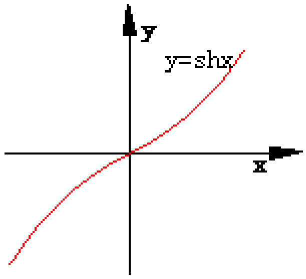
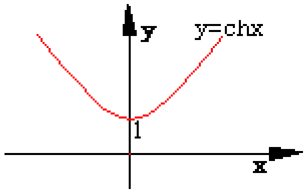
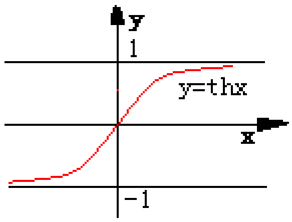
(2)、初等函数：由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数.

例题： $y=2^{\cos x}+\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 8x)$ 是初等函数。

7、双曲函数及反双曲函数

(1)、双曲函数：在应用中我们经常遇到的双曲函数是：(用表格来描述)

函数的名称	函数的表达式	函数的图形	函数的性质

双曲正弦	$shx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$		a)：其定义域为：(-∞，+∞)； b)：是奇函数； c)：在定义域内是单调增
双曲余弦	$chx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$		a)：其定义域为：(-∞，+∞)； b)：是偶函数； c)：其图像过点(0，1)；
双曲正切	$thx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$		a)：其定义域为：(-∞，+∞)； b)：是奇函数； c)：其图形夹在水平直线 y=1 及 y=-1 之间；在定域内单调增；

我们再来看一下双曲函数与三角函数的区别：

双曲函数的性质	三角函数的性质
$sh0=0, ch0=1, th0=0$	$\sin 0=0, \cos 0=1, \tan 0=0$
shx 与 thx 是奇函数，chx 是偶函数	sinx 与 tanx 是奇函数，cosx 是偶函数
$ch^{2}x-sh^{2}x=1$	$\sin^{2}x+\cos^{2}x=1$
它们都不是周期函数	都是周期函数

双曲函数也有和差公式：

$$sh(x\pm y)=shxchy\pm chxshy$$

$$ch(x\pm y)=chxchy\pm shxshy$$

$$th(x\pm y)=\frac{thx\pm thy}{1\pm thxthy}$$

(2)、反双曲函数：双曲函数的反函数称为反双曲函数.

a)：反双曲正弦函数　　$arshx=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$ 其定义域为：(-∞，+∞)；

b)：反双曲余弦函数 $archx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 其定义域为：[1,+∞)；

c)：反双曲正切函数 $arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ 其定义域为：(-1,+1)；

8、数列的极限

我们先来回忆一下初等数学中学习的数列的概念。

(1)、数列：若按照一定的法则，有第一个数 a_1，第二个数 a_2，…，依次排列下去，使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 a_n，那末，我们称这列有次序的数 a_1，a_2，…，a_n，…为数列. 数列中的每一个数叫做数列的项。第 n 项 a_n 叫做数列的一般项或通项.

注：我们也可以把数列 a_n 看作自变量为正整数 n 的函数，即：$a_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数

(2)、极限：极限的概念是求实际问题的精确解答而产生的。

例：我们可通过作圆的内接正多边形，近似求出圆的面积。

设有一圆，首先作圆内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作圆的内接正二十四边形，其面积记为 A_3；依次循下去(一般把内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n)可得一系列内接正多边形的面积：A_1，A_2，A_3，…，An，…，它们就构成一列有序数列。我们可以发现，当内接正多边形的边数无限增加时，An 也无限接近某一确定的数值(圆的面积)，这个确定的数值在数学上被称为数列 A_1，A_2，A_3，…，An，… 当 n→∞(读作 n 趋近于无穷大)的极限。

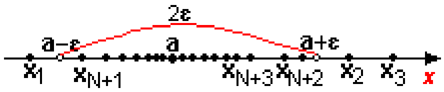
注：上面这个例子就是我国古代数学家刘徽(公元三世纪)的割圆术。

(3)、数列的极限：一般地，对于数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 来说，若存在任意给定的正数 ε(不论其多么小)，总存在正整数 N，使得对于 n>N 时的一切 x_n 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那末就称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a .

记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a\quad(n\to\infty)$

注：此定义中的正数 ε 只有任意给定，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思。且定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ε 是有关的，它是随着 ε 的给定而选定的。

(4)、数列的极限的几何解释：在此我们可能不易理解这个概念，下面我们再给出它的一个几何解释，以使我们能理解它。数列 x_n 极限为 a 的一个几何解释：将常数 a 及数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上作点 a 的 ε 邻域即开区间(a-ε，a+ε)，如下图所示：



因不等式$|x_n-a|<\varepsilon$与不等式$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$等价，故当 n>N 时，所有的点$x_n$都落在开区间(a-ε，a+ε)内，而只有有限个(至多只有 N 个)在此区间以外。

注：至于如何求数列的极限，我们在以后会学习到，这里我们不作讨论。

(5)、数列的有界性：对于数列x_n，若存在着正数 M，使得一切x_n都满足不等式|x_n|≤M，则称数列x_n是有界的，若正数 M 不存在，则可说数列x_n是无界的。

定理：若数列x_n收敛，那末数列x_n一定有界。

注：有界的数列不一定收敛，即：数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件。例：数列 1，-1，1，-1，…，$(-1)^{n+1}$，… 是有界的，但它是发散的。

9、函数的极限

前面我们学习了数列的极限，已经知道数列可看作一类特殊的函数，即自变量取 1→∞内的正整数，若自变量不再限于正整数的顺序，而是连续变化的，就成了函数。下面我们来学习函数的极限.

函数的极值有两种情况：a)：自变量无限增大；b)：自变量无限接近某一定点 x_0，如果在这时，函数值无限接近于某一常数 A，就叫做函数存在极值。我们已知道函数的极值的情况，那么函数的极限如何呢 ？

下面我们结合着数列的极限来学习一下函数极限的概念!

(1)、函数的极限(分两种情况)

a):自变量趋向无穷大时函数的极限

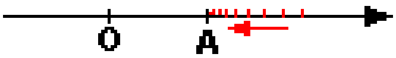
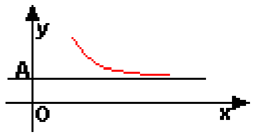
定义：设函数$y=f(x)$，若对于任意给定的正数 ε(不论其多么小)，总存在着正数 X，使得对于适合不等式$|x|>X$的一切 x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那末常数 A 就叫做函数$y=f(x)$当 x→∞时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

下面我们用表格把函数的极限与数列的极限对比一下：

数列的极限的定义	函数的极限的定义

存在数列$a_n = f(n)$与常数A,任给一正数ε>0,总可找到一正整数N，对于n>N的所有a_n都满足$\lvert a_n - A\rvert$< ε 则称数列a_n，当x→∞时收敛于A记：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。	存在函数$y = f(x)$与常数A，任给一正数ε>0，总可找到一正数X，对于适合$\lvert x\rvert > X$的一切x，都满足$\lvert f(x) - A\rvert < ε$，函数$y = f(x)$当x→∞时的极限为A，记：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。
	

从上表我们发现了什么 ？？ 试思考之

b):自变量趋向有限值时函数的极限。我们先来看一个例子.

例：函数$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$，当x→1时函数值的变化趋势如何？函数在x=1处无定义.我们知道对实数来讲，在数轴上任何一个有限的范围内，都有无穷多个点，为此我们把x→1时函数值的变化趋势用表列出，如下图：

x	…0.9	0.99	0.999	…	1	…	1.001	1.01	1.1	…
f(x)	…1.9	1.99	1.999	…	2	…	2.001	2.01	2.1	…

从中我们可以看出x→1时，$f(x)$→2.而且只要x与1有多接近，$f(x)$就与2有多接近.或说：只要$f(x)$与2只差一个微量ε，就一定可以找到一个δ，当$\lvert x - 1\rvert$< δ 时满足$\lvert f(x) - 2\rvert$< δ **定义：**设函数$f(x)$在某点x_0的某个去心邻域内有定义，且存在数A，如果对任意给定的ε(不论其多么小)，总存在正数δ，当0<$\lvert x - x_0\rvert$< δ 时，$\lvert f(x) - A\rvert$< ε 则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时存在极限，且极限为A，记：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

注：在定义中为什么是在去心邻域内呢？这是因为我们只讨论$x\to x_0$的过程，与$x=x_0$出的情况无关。此定义的核心问题是：对给出的ε，是否存在正数δ，使其在去心邻域内的x均满足不等式。

有些时候，我们要用此极限的定义来证明函数的极限为A，其证明方法是怎样的呢？

a):先任取ε>0;

b):写出不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$;

c):解不等式能否得出去心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$,若能;

d):则对于任给的 $\varepsilon>0$,总能找出 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

10、函数极限的运算规则

前面已经学习了数列极限的运算规则,我们知道数列可作为一类特殊的函数,故函数极限的运算规则与数列极限的运算规则相似。

(1)、函数极限的运算规则

若已知 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)\to A, g(x)\to B$.

则:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B \qquad \lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(B\neq 0)$$

推论:

$$\lim_{x\to x_0}k\cdot f(x)=kA,(k\text{为常数}) \qquad \lim_{x\to x_0}[f(x)]^m=A^m,(m\text{为正整数})$$

在求函数的极限时,利用上述规则就可把一个复杂的函数化为若干个简单的函数来求极限。

例题:求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-1}{4x^3+x^2-x+3}$

解答:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1}{4x^3+x^2-x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}4x^3+\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}3}=\frac{3+1-1}{4+1-1+3}=\frac{3}{7}$$

例题:求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

此题如果像上题那样求解,则会发现此函数的极限不存在.我们通过观察可以发现此分式的分子和分母都没有极限,像这种情况怎么办呢?下面我们把它解出来。

解答:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}$$

注：通过此例题我们可以发现：当分式的分子和分母都没有极限时就不能运用商的极限的运算规则了，应先把分式的分子分母转化为存在极限的情形，然后运用规则求之。

函数极限的存在准则

学习函数极限的存在准则之前，我们先来学习一下左、右的概念。

我们先来看一个例子：

例：符号函数为 $\operatorname{sgn} = \begin{cases} -1, x<0 \\ 0, x=0 \\ 1, x>0 \end{cases}$

对于这个分段函数，x 从左趋于 0 和从右趋于 0 时函数极限是不相同的. 为此我们定义了左、右极限的概念。

定义：如果 x 仅从左侧($x<x_0$)趋近 x_0时，函数 $f(x)$ 与常量 A 无限接近，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时的左极限. 记：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

如果 x 仅从右侧($x>x_0$)趋近 x_0时，函数 $f(x)$ 与常量 A 无限接近，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时的右极限. 记：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

注：只有当 $x \to x_0$时，函数 $f(x)$ 的左、右极限存在且相等，方称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$时有极限

函数极限的存在准则

准则一：对于点 x_0 的某一邻域内的一切 x，x_0 点本身可以除外(或绝对值大于某一正数的一切 x)有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$

那末 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，且等于 A

注：此准则也就是夹逼准则.

准则二：单调有界的函数必有极限.

注：有极限的函数不一定单调有界

两个重要的极限

一：$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

注：其中 e 为无理数，它的值为：e=2.718281828459045…

二：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

注：在此我们对这两个重要极限不加以证明.

注：我们要牢记这两个重要极限，在今后的解题中会经常用到它们.

例题：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$

解答：令 $t=\frac{-x}{2}$，则 x=-2t，因为 x→∞，故 t→∞，

则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-2t}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-2t}=\lim\limits_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^{-2}=e^{-2}$

注：解此类型的题时，一定要注意代换后的变量的趋向情况，象 x→∞时，若用 t 代换 1/x，则 t→0.

无穷大量和无穷小量

无穷大量

我们先来看一个例子：

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 x→0 时，可知 $|f(x)|\to\infty$，我们把这种情况称为 $f(x)$ 趋向无穷大。为此我们可定义如下：设有函数 y=$f(x)$，在 x=x_0 的去心邻域内有定义，对于任意给定的正数 *N*(一个任意大的数)，总可找到正数 δ，当

$0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>N$ 成立，则称函数当 $x\to x_0$ 时为无穷大量。

记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ （表示为无穷大量，实际它是没有极限的）

同样我们可以给出当 x→∞时，$f(x)$ 无限趋大的定义：设有函数 y=$f(x)$，当 x 充分大时有定义，对于任意给定的正数 *N*(一个任意大的数)，总可以找到正数 *M*，当 $|x|>M$ 时，$|f(x)|>N$ 成立，则称函数当 x→∞时是无穷大量，记为：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量。

定义：设有函数 $f(x)$，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ（或正数 *M*），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>M$）的一切 x，所对应的函数值满足不等式 $|f(x)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 x→∞）时 为无穷小量.

记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ ）

注意：无穷大量与无穷小量都是一个变化不定的量，不是常量，只有 0 可作为无穷小量的唯一常量。无穷大量与无穷小量的区别是：前者无界，后者有界，前者发散，后者收敛于 0. 无穷大量与无穷小量是互为倒数关系的.

关于无穷小量的两个定理

定理一：如果函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ (或 x→∞)时有极限 A，则差 $f(x)-A=\partial(x)$ 是当 $x\to x_0$ (或 x→∞)时的无穷小量，反之亦成立。

定理二：无穷小量的有利运算定理

a)：有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量； b)：有限个无穷小量的积仍是无穷小量；c)：常数与无穷小量的积也是无穷小量.

无穷小量的比较

通过前面的学习我们已经知道，两个无穷小量的和、差及乘积仍旧是无穷小. 那么两个无穷小量的商会是怎样的呢？好！接下来我们就来解决这个问题，这就是我们要学的两个无穷小量的比较。

定义：设 α，β 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 β 在 x_0 的去心领域内不为零，

a)：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ ，则称 α 是 β 的高阶无穷小或 β 是 α 的低阶无穷小；

b)：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$ ，则称 α 和 β 是同阶无穷小；

c)：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ ，则称 α 和 β 是等价无穷小，记作：α∽β（α 与 β 等价）

例：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$，所以当 x→0 时，x 与 3x 是同阶无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0$ ，所以当 x→0 时，x^2 是 3x 的高阶无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ，所以当 x→0 时，sinx 与 x 是等价无穷小。

等价无穷小的性质

设 $\alpha\backsim\alpha'$，$\beta\backsim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

注：这个性质表明：求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来代替，因此我们可以利用这个性质来简化求极限问题。

例题：1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}$

解答：当 $x\to0$ 时，$\sin ax\sim ax$，$\tan bx\sim bx$，故：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$

例题： 2. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\tan^3 3x}$

解答：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\tan^3 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\tan^3 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\frac{1}{2}x^2)}{(3x)^3}=\dfrac{1}{54}$

注：$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim2\cdot(\dfrac{x}{2})^2=\dfrac{x^2}{2}$

注：从这个例题中我们可以发现，作无穷小变换时，要代换式中的某一项，不能只代换某个因子。

函数的一重要性质——连续性

在自然界中有许多现象，如气温的变化，植物的生长等都是连续地变化着的.这种现象在函数关系上的反映，就是函数的**连续性**

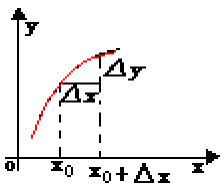
在定义函数的连续性之前我们先来学习一个概念——**增量**

设变量 x 从它的一个初值 x_1 变到终值 x_2，终值与初值的差 x_2-x_1 就叫做**变量 x 的增量**，记为：$\triangle x$ 即：$\triangle x=x_2-x_1$ 增量 $\triangle x$ 可正可负.

我们再来看一个例子：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，当自变量 x 在领域内从 x_0 变到 $x_0+\triangle x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，其对应的增量为：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

这个关系式的几何解释如下图：



现在我们可对连续性的概念这样描述：如果当 $\triangle x$ 趋向于零时，函数 y 对应的增量 $\triangle y$ 也趋向于零，即：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，那末就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

函数连续性的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，且称 x_0 为函数的 $y=f(x)$ 的**连续点.**

下面我们结合着函数左、右极限的概念再来学习一下**函数左、右连续**的概念：设函数$f(x)$在区间(a, b]内有定义，如果左极限$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$存在且等于$f(b)$，即：$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$，那末我们就称函数$f(x)$在点 b **左连续**。设函数$f(x)$在区间[a, b)内有定义，如果右极限$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$存在且等于$f(a)$，即：$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$，那末我们就称函数$f(x)$在点 a **右连续**。

一个函数在开区间(a, b)内每点连续，则为在(a, b)连续，若又在 a 点右连续，b 点左连续，则在闭区间[a，b]连续，如果在整个定义域内连续，则称为连续函数。

注：一个函数若在定义域内某一点左、右都连续，则称函数在此点连续，否则在此点不连续.

注：连续函数图形是一条连续而不间断的曲线。

通过上面的学习我们已经知道函数的连续性了，同时我们可以想到若函数在某一点要是不连续会出现什么情形呢？接着我们就来学习这个问题：函数的间断点

函数的间断点

定义：我们把不满足函数连续性的点称之为间断点.

它包括三种情形：

a)：$f(x)$在 x_0 无定义；

b)：$f(x)$在 $x\to x_0$ 时无极限；

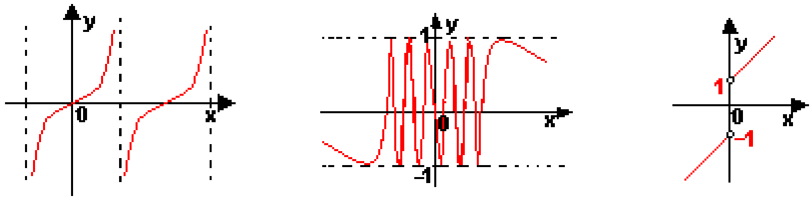
c)：$f(x)$在 $x\to x_0$ 时有极限但不等于$f(x_0)$；

下面我们通过例题来学习一下间断点的类型：

例 1： 正切函数$y=\tan x$在$x=\dfrac{\pi}{2}$处没有定义，所以点$x=\dfrac{\pi}{2}$是函数$y=\tan x$的间断点，因$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，我们就称$x=\dfrac{\pi}{2}$为函数$y=\tan x$的**无穷间断点**；

例 2：函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$在点 x=0 处没有定义；故当 x→0 时，函数值在-1 与+1 之间变动无限多次，我们就称点 x=0 叫做函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$的**振荡间断点**；

例 3：函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, \quad x=0 \\ x+1, \quad x>0 \end{cases}$ 当 x→0 时，左极限 $\lim_{x\to -0} f(x)=-1$，右极限 $\lim_{x\to +0} f(x)=1$，从这我们可以看出函数左、右极限虽然都存在，但不相等，故函数在点 x=0 是不存在极限。我们还可以发现在点 x=0 时，函数值产生跳跃现象，为此我们把这种间断点称为**跳跃间断点**；我们把上述三种间断点用几何图形表示出来如下：



间断点的分类

我们通常把间断点分成两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，且其左、右极限都存在，我们把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；不是第一类间断点的任何间断点，称为**第二类间断点.**

可去间断点

若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那末 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点。此时函数不连续原因是：$f(x_0)$ 不存在或者是存在但 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$。我们令 $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$，则可使函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，故这种间断点 x_0 称为**可去间断点**。

连续函数的性质及初等函数的连续性

连续函数的性质

函数的和、积、商的连续性

我们通过函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则，可得出以下结论：

a)：有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数；

b)：有限个在某点连续的函数的乘积是一个在该点连续的函数；

c)：两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数(分母在该点不为零)；

反函数的连续性

若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调增(或单调减)且连续，那末它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间上单调增(单调减)且连续

例：函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增且连续，故它的反函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间[-1,1]

上也是单调增且连续的。

复合函数的连续性

设函数$u=\varphi(x)$当 x→x_0时的极限存在且等于 a，即：$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$．而函数$y=f(u)$在点 u=a 连续，那末复合函数$y=f[\varphi(x)]$当 x→$x_0$时的极限也存在且等于$f(a)$．即：$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$

例题：求$\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解答：$\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\cos e$

注：函数$y=\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$可看作$y=\cos u$与$u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$复合而成，且函数$y=\cos u$在点 u=e 连续，因此可得出上述结论。

设函数$u=\varphi(x)$在点 x=x_0连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点 u=u_0连续，那末复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点 x=x_0也是连续的

初等函数的连续性

通过前面我们所学的概念和性质，我们可得出以下结论：**基本初等函数在它们的定义域内都是连续的；一切初等函数在其定义域内也都是连续的.**

闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数则是在其连续区间的左端点右连续，右端点左连续.对于闭区间上的连续函数有几条重要的性质，下面我们来学习一下：

最大值最小值定理：在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值。(在此不作证明)

例：函数 y=sinx 在闭区间[0，2π]上连续，则在点 x=π/2 处，它的函数值为 1，且大于闭区间[0，2π]上其它各点出的函数值；则在点 x=3π/2 处，它的函数值为-1，且小于闭区间[0，2π]上其它各点出的函数值。

介值定理　　在闭区间上连续的函数一定取得介于区间两端点的函数值间的任何值。即：$f(a)=\alpha$ $f(b)=\beta$，μ 在 α、β 之间，则在[a，b]间一定有一个 ξ，使$f(\xi)=\mu$

推论：　在闭区间连续的函数必取得介于最大值最小值之间的任何值。

二、导数与微分

导数的概念

在学习到数的概念之前，我们先来讨论一下物理学中变速直线运动的瞬时速度的问题。例：设一质点沿 x 轴运动时，其位置 x 是时间 t 的函数，$x=f(x)$，求质点在 t_0的瞬时速度？我们知道时间从 t_0有增

量△t 时，质点的位置有增量 $\Delta x = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$，这就是质点在时间段△t 的位移。因此，在此段时间内质点的平均速度为：$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. 若质点是匀速运动的则这就是在 t_0 的瞬时速度，若质点是非匀速直线运动，则这还不是质点在 t_0 时的瞬时速度。我们认为当时间段△t 无限地接近于 0 时，此平均速度会无限地接近于质点 t_0 时的瞬时速度，即：质点在 t_0 时的瞬时速度 $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 为此就产生了导数的定义，如下：

导数的定义：设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量△x(x+△x 也在该邻域内)时，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若△y 与△x 之比当△x→0 时极限存在，则称这个极限值为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**导数**。记为：$y'\big|_{x=x_0}$ 还可记为：$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$f'(x_0)$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在导数简称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，否则不可导。若函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内每一点都可导，就称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内可导。这时函数 $y = f(x)$ 对于区间(a,b)内的每一个确定的 x 值，都对应着一个确定的导数，这就构成一个新的函数，我们就称这个函数为原来函数 $y = f(x)$ 的导函数。

注：导数也就是差商的极限

左、右导数

前面我们有了左、右极限的概念，导数是差商的极限，因此我们可以给出左、右导数的概念。若极限 $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，我们就称它为函数 $y = f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**左导数**。若极限 $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，我们就称它为函数 $y = f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**右导数**。

注：函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的左右导数存在且相等是函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的可导的充分必要条件

函数的和、差求导法则

函数的和差求导法则

法则：两个可导函数的和(差)的导数等于这两个函数的导数的和(差). 用公式可写为：$(u \pm v)' = u' \pm v'$。其中 u、v 为可导函数。

例题：已知 $y=\frac{1}{x}+x^5+7$，求 y'

解答：$y'=(\frac{1}{x})'+(x^5)'+(7)'=-1x^{-2}+5x^4+0=-\frac{1}{x^2}+5x^4$

例题：已知 $y=\sin x-\log_a x+e^x$，求 y'

解答：$y'=(\sin x)'-(\log_a x)'+(e^x)'=\cos x-\frac{1}{x\ln a}+e^x$

函数的积商求导法则

常数与函数的积的求导法则

法则：在求一个常数与一个可导函数的乘积的导数时，常数因子可以提到求导记号外面去。用公式可写成：$(cu)'=cu'$

例题：已知 $y=3\sin x+4x^2$，求 y'

解答：$y'=(3\sin x)'+(4x^2)'=3(\sin x)'+4(x^2)'=3\cos x+4\cdot 2x=3\cos x+8x$

函数的积的求导法则

法则：两个可导函数乘积的导数等于第一个因子的导数乘第二个因子，加上第一个因子乘第二个因子的导数。用公式可写成：$(uv)'=u'v+uv'$

例题：已知 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$，求 $f(x)'$

解答：$f(x)'=(\sqrt{x})'\sin x+\sqrt{x}(\sin x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$

注：若是三个函数相乘，则先把其中的两个看成一项。

函数的商的求导法则

法则：两个可导函数之商的导数等于分子的导数与分母导数乘积减去分母导数与分子导数的乘积，在除以分母导数的平方。用公式可写成：$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

例题：已知 $f(x)=\tan x$，求 $f(x)'$

解答：

$$f(x)' = (\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

复合函数的求导法则

在学习此法则之前我们先来看一个例子！

例题： 求 $(\sin 2x)'$=?

解答： 由于 $(\sin x)' = \cos x$，故 $(\sin 2x)' = \cos 2x$ 这个解答**正确吗?**

这个解答是错误的，正确的解答应该如下：

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'] = 2\cos 2x$$

我们发生错误的原因是 $(\sin 2x)'$ 是对自变量 x 求导，而不是对 2x 求导。

下面我们给出复合函数的求导法则

复合函数的求导规则

规则： 两个可导函数复合而成的复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘上中间变量对自变量的导数。用公式表示为：

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$，其中 u 为中间变量

例题： 已知 $y = \sin^2 x$，求 $\frac{dy}{dx}$

解答： 设 $u = \sin x$，则 $y = \sin^2 x$ 可分解为 $y = u^2$，$u = \sin x$ 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (u^2)'(\sin x)' = 2u\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

注： 在以后解题中，我们可以中间步骤省去。

例题： 已知 $y = \ln\sin x$，求 $\frac{dy}{dx}$

解答： $\frac{dy}{dx} = (\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

反函数求导法则

根据反函数的定义，函数 $y = f(x)$ 为单调连续函数，则它的反函数 $x = \varphi(y)$，它也是单调连续的.

为此我们可给出反函数的求导法则，如下(我们以定理的形式给出)：

定理：若 $x=\varphi(y)$ 是单调连续的，且 $\varphi(y)\neq 0$ ，则它的反函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导，且有：

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

注：通过此定理我们可以发现：反函数的导数等于原函数导数的倒数。注：这里的反函数是以 y 为自变量的，我们没有对它作记号变换。

即： $\varphi'(y)$ 是对 y 求导， $f'(x)$ 是对 x 求导

例题：求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解答：此函数的反函数为 $x=\sin y$ ，故 $x'=\cos y$ 则：

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例题：求 $y=\arctan x$ 的导数.

解答：此函数的反函数为 $x=\tan y$ ，故 $x'=\sec^2 y$ 则：

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

高阶导数

我们知道，在物理学上变速直线运动的速度 v(t)是位置函数 s(t)对时间 t 的导数，即： $v=\frac{ds}{dt}$ ，

而加速度 a 又是速度 v 对时间 t 的变化率，即速度 v 对时间 t 的导数： $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$ ，或 $a=(s')'$ 。

这种导数的导数 $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$ 叫做 s 对 t 的二阶导数。下面我们给出它的数学定义：

定义：函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ，即： $y''=(y')'$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. 相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数. 类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数

的导数，叫做**四阶导数**，…，一般地(n-1)阶导数的导数叫做 **n 阶导数**.

分别记作：y'''，$y^{(4)}$，…，$y^{(n)}$ 或 $\frac{d^3y}{dx^3}$，$\frac{d^4y}{dx^4}$，…，$\frac{d^ny}{dx^n}$

二阶及二阶以上的导数统称**高阶导数**。由此可见，求高阶导数就是多次接连地求导，所以，在求高阶导数时可运用前面所学的求导方法。

例题：已知 $y=ax+b$，求 y''　　**解答：**因为 y'=a，故 y''=0

例题：求对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数。

解答：$y'=\frac{1}{1+x}$，$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$，$y'''=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$，$y^{(4)}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$，

一般地，可得 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

隐函数及其求导法则

我们知道用解析法表示函数，可以有不同的形式.若函数 y 可以用含自变量 x 的算式表示，像 y=sinx，y=1+3x 等，这样的函数叫**显函数**.前面我们所遇到的函数大多都是显函数.

一般地，如果方程 F(x,y)=0 中，令 x 在某一区间内任取一值时，相应地总有满足此方程的 y 值存在，则我们就说方程 F(x,y)=0 在该区间上确定了 x 的**隐函数** y.把一个隐函数化成显函数的形式,叫做**隐函数的显化**。**注：**有些隐函数并不是很容易化为显函数的，那么在求其导数时该如何呢？下面让我们来解决这个问题！

隐函数的求导

若已知 F(x,y)=0，求 $\frac{dy}{dx}$ 时，一般按下列步骤进行求解：

a)：若方程 F(x,y)=0，能化为 $y=f(x)$ 的形式，则用前面我们所学的方法进行求导；

b)：若方程 F(x,y)=0，不能化为 $y=f(x)$ 的形式，则是方程两边对 x 进行求导，并把 y 看成 x 的函数 $y=f(x)$，用复合函数求导法则进行。

例题：已知 $x^2+y^2-xy=1$，求 $\frac{dy}{dx}$

解答：此方程不易显化，故运用隐函数求导法.两边对 x 进行求导，

$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-xy)=\frac{d}{dx}(1)=0$，$2x+2yy'-(y+xy')=0$，故 $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{y-2x}{2y-x}$

注：我们对隐函数两边对 x 进行求导时，一定要把变量 y 看成 x 的函数，然后对其利用复合函数求导法则进行求导。

例题：求隐函数 $y^5+2y-x-3x^7=0$，在 x=0 处的导数

解答：两边对 x 求导 $5y^4y'+2y'-1-21x^6=0$，故 $y'=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$，当 x=0 时，y=0. 故 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$。

有些函数在求导数时，若对其直接求导有时很不方便，像对某些幂函数进行求导时，有没有一种比较直观的方法呢？下面我们再来学习一种求导的方法：对数求导法

对数求导法

对数求导的法则：根据隐函数求导的方法，对某一函数先取函数的自然对数，然后在求导。注：此方法特别适用于幂函数的求导问题。

例题：已知 $y=x^{\sin x}$ x＞0，求 y'

此题若对其直接求导比较麻烦，我们可以先对其两边取自然对数，然后再把它看成隐函数进行求导，就比较简便些。如下

解答：先两边取对数：$\ln y=\sin x\ln x$，把其看成隐函数，再两边求导

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

因为 $y=x^{\sin x}$，所以 $y'=y(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$

例题：已知 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，求 y'

此题可用复合函数求导法则进行求导，但是比较麻烦，下面我们利用对数求导法进行求导

解答：先两边取对数 $\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$ 再两边求导

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

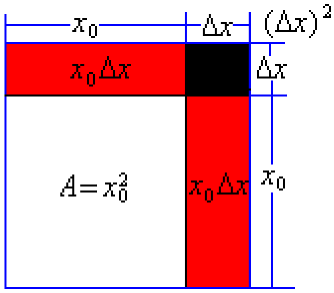
因　为 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，所　以

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

函数的微分

学习函数的微分之前，我们先来分析一个具体问题：一块正方形金属薄片受温度变化的影响时，其边长由 x_0 变到了 $x_0+\triangle x$，则此薄片的面积改变了多少？

解答：设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 是 x 的函数：$A=x_0^2$ 薄片受温度变化的影响面积的改变量，可以看成是当自变量 x 从 x_0 取的增量△x 时，函数 A 相应的增量△A，即：$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$。从上式我们可以看出，△A 分成两部分，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是△x 的线性函数，即下图中红色部分；第二部分 $(\Delta x)^2$ 即图中的黑色部分，



当△x→0 时，它是△x 的高阶无穷小，表示为：$o(\Delta x)$

由此我们可以发现，如果边长变化的很小时，面积的改变量可以近似的用地一部分来代替。下面我们给出微分的数学定义：

函数微分的定义：设函数在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\triangle x$ 在这区间内，若函数的增量可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是不依赖于△x 的常数，$o(\Delta x)$ 是△x 的高阶无穷小，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可微的**。$A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量△x 的微分，记作 dy，即：$dy=A\Delta x$。

通过上面的学习我们知道：微分 dy 是自变量改变量△x 的线性函数，dy 与△y 的差 $o(\Delta x)$ 是关于△x 的高阶无穷小量，我们把 dy 称作△y 的**线性主部**。于是我们又得出：当△x→0 时，△y≈dy. 导数的记号为：

$\frac{dy}{dx}=f'(x)$，现在我们可以发现，它不仅表示导数的记号，而且还可以表示两个微分的比值(把△x 看成 dx, 即:定义自变量的增量等于自变量的微分)，还可表示为：

由此我们得出：**若函数在某区间上可导，则它在此区间上一定可微，反之亦成立。**

微分形式不变性

什么是微分形式不边形呢？

设 $y=f(u), u=\varphi(x)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为：

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx,$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$，故我们可以把复合函数的微分写成

$$dy=f'(u)du$$

由此可见，不论 u 是自变量还是中间变量，$y=f(u)$ 的微分 dy 总可以用 $f'(u)$ 与 du 的乘积来表示，

我们把这一性质称为**微分形式不变性**。

例题：已知 $y=\sin(2x+1)$，求 dy

解答：把 2x+1 看成中间变量 u，根据微分形式不变性，则

$$dy=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx$$

通过上面的学习，我们知道微分与导数有着不可分割的联系，前面我们知道基本初等函数的导数公式和导数的运算法则，那么基本初等函数的微分公式和微分运算法则是怎样的呢？

下面我们来学习———基本初等函数的微分公式与微分的运算法则

基本初等函数的微分公式与微分的运算法则

基本初等函数的微分公式

由于函数微分的表达式为：$dy=f'(x)dx$，于是我们通过基本初等函数导数的公式可得出基本初等函数微分的公式，下面我们用表格来把基本初等函数的导数公式与微分公式对比一下：(部分公式)

导数公式	微分公式
$(C)'=0$	$d(C)=0$
$(x)'=1$	$d(x)=dx$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$d(x^n)=nx^{n-1}dx$

$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$

微分运算法则

由函数和、差、积、商的求导法则，可推出相应的微分法则. 为了便于理解，下面我们用表格来把微分的运算法则与导数的运算法则对照一下：

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + udv$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

复合函数的微分法则就是前面我们学到的微分形式不变性，在此不再详述。

例题： 设 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，求 $f(x)$ 对 x^3 的导数

解答： 根据微分形式的不变性

$$\frac{df(x)}{dx^3} = \frac{d\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{dx^3} = \frac{\left(\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)dx}{3x^2 dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{3x^4}$$

微分的应用

微分是表示函数增量的线性主部. 计算函数的增量，有时比较困难，但计算微分则比较简单，为此我们用函数的微分来近似的代替函数的增量，这就是微分在近似计算中的应用.

例题： 求 $\sqrt{1.05}$ 的近似值。

解答： 我们发现用计算的方法特别麻烦，为此把转化为求微分的问题

$$\sqrt{1.05} = \sqrt{1+0.05} = \sqrt{x+\Delta x} = f(x+\Delta x)$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.05 = 1.025$$

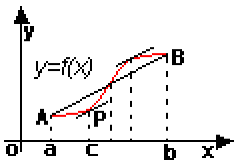
故其近似值为 1.025(精确值为 1.024695)

三、导数的应用

微分学中值定理

在给出微分学中值定理的数学定义之前，我们先从几何的角度看一个问题，如下：

设有连续函数 $y = f(x)$，a 与 b 是它定义区间内的两点(a<b)，假定此函数在(a,b)处处可导，也就是在(a,b)内的函数图形上处处都由切线，那末我们从图形上容易直到，



差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 就是割线 AB 的斜率，若我们把割线 AB 作平行于自身的移动，那么至少有一次机会达到离割线最远的一点 P(x=c)处成为曲线的切线，而曲线的斜率为 $f'(c)$，由于切线与割线是平行的，因此

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ 成立。

注：这个结果就称为微分学中值定理，也称为拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理

如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)内可导，那末在(a,b)内至少有一点 c，使

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$ 成立。

这个定理的特殊情形，即：$f(a)=f(b)$ 的情形，称为罗尔定理。描述如下：

若 $\varphi(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)$，那末在(a,b)内至少有一点 c，使 $\varphi'(c)=0$ 成立。

注：这个定理是罗尔在 17 世纪初，在微积分发明之前以几何的形式提出来的。

注：在此我们对这两个定理不加以证明，若有什么疑问，请参考相关书籍

下面我们在学习一条通过拉格朗日中值定理推广得来的定理——柯西中值定理

柯西中值定理

如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内可导，且 $g(x)$ ≠0，那末在(a，b)内至少有一点 c，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ 成立。

例题：证明方程 $5x^4-4x+1=0$ 在 0 与 1 之间至少有一个实根

证明：不难发现方程左端 $5x^4-4x+1$ 是函数 $f(x)=x^5-2x^2+x$ 的导数：

$f'(x)=5x^4-4x+1$

函数 $f(x)=x^5-2x^2+x$ 在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，由罗尔定理

可知，在 0 与 1 之间至少有一点 c，使 $f'(c)=0$，即 $5x^4-4x+1=0$

也就是：方程 $5x^4-4x+1=0$ 在 0 与 1 之间至少有一个实根

未定式问题

问题：什么样的式子称作未定式呢？

答案：对于函数 $f(x)$，$g(x)$ 来说，当 x→a(或 x→∞)时，函数 $f(x)$，$g(x)$ 都趋于零或无穷大

则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在，也可能不存在，我们就把式子 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为**未定式**。分别记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

我们容易知道，对于未定式的极限求法，是不能应用"商的极限等于极限的商"这个法则来求解的，那么我们该如何求这类问题的极限呢？

下面我们来学习**罗彼塔(L'Hospital)法则**，它就是这个问题的答案

注：它是根据柯西中值定理推出来的。

罗彼塔(L'Hospital)法则

当 x→a(或 x→∞)时，函数 $f(x)$，$g(x)$ 都趋于零或无穷大，在点 a 的某个去心邻域内(或当|x|>N)时，$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，$g'(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在

则：$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

这种通过分子分母求导再来求极限来确定未定式的方法，就是所谓的罗彼塔(L'Hospital)法则

注：它是以前求极限的法则的补充，以前利用法则不好求的极限，可利用此法则求解。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$

解答：容易看出此题利用以前所学的法则是不易求解的，因为它是未定式中的 $\dfrac{0}{0}$ 型求解问题，因此我们就可以利用上面所学的法则了。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}$$

例题： 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2+d}$

解答： 此题为未定式中的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型求解问题，利用罗彼塔法则来求解

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+b}{cx^2+d}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax}{2cx}=\frac{a}{c}$$

另外，若遇到 $0\cdot\infty$ 、$\infty-\infty$、 1^∞、 0^0 、 ∞^0 等型，通常是转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型后，在利用法则求解。

例题： 求 $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$

解答： 此题利用以前所学的法则是不好求解的，它为 $0\cdot\infty$ 型，故可先将其转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型后在求解，

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{-x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

注： 罗彼塔法则只是说明：对未定式来说，当 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且二者的极限相同；而并不是 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时，$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在，此时只是说明了罗彼塔法则存在的条件破列。

函数单调性的判定法

函数的单调性也就是函数的增减性，怎样才能判断函数的增减性呢？

我们知道若函数在某区间上单调增(或减)，则在此区间内函数图形上切线的斜率均为正(或负)，也就是函数的导数在此区间上均取正值(或负值). 因此我们可通过判定函数导数的正负来判定函数的增减性.

判定方法：

设函数 $y=f(x)$ 在[a, b]上连续，在(a, b)内可导.

a)：如果在(a, b)内 $f'(x)>0$，那末函数 $y=f(x)$ 在[a, b]上单调增加；

b)：如果在(a, b)内 $f'(x)<0$，那末函数 $y=f(x)$ 在[a, b]上单调减少.

例题： 确定函数 $f(x)=e^x-x-1$ 的增减区间.

解答： 容易确定此函数的定义域为(－∞，＋∞)

其导数为：$f'(x)=e^x-1$，因此可以判出：

当 x＞0 时，$f'(x)>0$，故它的单调增区间为(0，＋∞)；

当 x＜0 时，$f'(x)<0$，故它的单调减区间为(-∞，0)；

注： 此判定方法若反过来讲，则是不正确的。

函数的极值及其求法

在学习函数的极值之前，我们先来看一例子：

设有函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$，容易知道点 x=1 及 x=2 是此函数单调区间的分界点，又可知在点 x=1 左侧附近，函数值是单调增加的，在点 x=1 右侧附近，函数值是单调减小的. 因此存在着点 x=1 的一个邻域，对于这个邻域内，任何点 x(x=1 除外)，$f(x)<f(1)$ 均成立，点 x=2 也有类似的情况(在此不多说)，为什么这些点有这些性质呢？

事实上，这就是我们将要学习的内容——**函数的极值**，

函数极值的定义

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内一点.

若存在着x_0点的一个邻域，对于这个邻域内任何点x(x_0点除外)，$f(x) < f(x_0)$均成立，

则说$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极大值**；

若存在着x_0点的一个邻域，对于这个邻域内任何点x(x_0点除外)，$f(x) > f(x_0)$均成立，

则说$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极小值**.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点。

我们知道了函数极值的定义了，怎样求函数的极值呢？

学习这个问题之前，我们再来学习一个概念——**驻点**

凡是使$f'(x)=0$的x点，称为函数$f(x)$的驻点。

判断极值点存在的方法有两种：如下

方法一：

设函数$f(x)$在x_0点的邻域可导，且$f'(x_0)=0$.

情况一：若当x取x_0左侧邻近值时，$f'(x)$>0，当x取x_0右侧邻近值时，$f'(x)$<0，

则函数$f(x)$在x_0点取**极大值**。

情况一：若当x取x_0左侧邻近值时，$f'(x)$<0，当x取x_0右侧邻近值时，$f'(x)$>0，

则函数$f(x)$在x_0点取**极小值**。

注：此判定方法也适用于导数在x_0点不存在的情况。

用方法一求极值的一般步骤是：

a)：求$f'(x)$；

b)：求$f'(x_0)=0$的全部的解——驻点；

c)：判断$f'(x)$在驻点两侧的变化规律，即可判断出函数的极值。

例题： 求 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ 极值点

解答： 先求导数 $f'(x)=2(x+2)(x-1)^3+(x+2)^2 3(x-1)^2=(x+2)(x-1)^2(5x+4)$

再求出驻点：当 $f'(x_0)=0$ 时，x=-2、1、-4/5

判定函数的极值，如下图所示

x	(-∞,-2)	-2	(-2,-4/5)	-4/5	(-4/5,1)	1	(1,+∞)
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	+
	↗	极大	↘	极小	↗	无	↗

方法二：

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$ 时 $f''(x_0)\neq 0$.

则：a)：当 $f''(x_0)$ ＜0，函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值；

b)：当 $f''(x_0)$ ＞0，函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极小值；

c)：当 $f''(x_0)$ =0，其情形不一定，可由方法一来判定.

例题： 我们仍以例 1 为例，以比较这两种方法的区别。

解答： 上面我们已求出了此函数的驻点，下面我们再来求它的二阶导数。

$$\begin{aligned}f''(x)&=(x-1)^2(5x+4)+(x+2)[2(x-1)(5x+4)+5(x-1)^2]\\&=(x-1)[(x-1)(5x+4)+2(x+2)(5x+4)+5(x-1)(x+2)]\\&=2(x-1)(10x^2+16x+1)\end{aligned}$$

$f''(1)=0$，故此时的情形不确定，我们可由方法一来判定；

$f''(-2)$ ＜0，故此点为极大值点；

$f''(-\frac{4}{5})$ ＞0，故此点为极小值点。

函数的最大值、最小值及其应用

在工农业生产、工程技术及科学实验中，常会遇到这样一类问题：在一定条件下，怎样使"产品最多"、"用料最省"、"成本最低"等。

这类问题在数学上可归结为求某一函数的最大值、最小值的问题。

怎样求函数的最大值、最小值呢？前面我们已经知道了，函数的极值是局部的。要求$f(x)$在[a,b]上的最大值、最小值时，可求出开区间(a,b)内全部的极值点，加上端点$f(a),f(b)$的值，从中取得最大值、最小值即为所求。

例题：求函数$f(x)=x^3-3x+3$，在区间[-3，3/2]的最大值、最小值。

解答：$f(x)$在此区间处处可导，

先来求函数的极值$f'(x)=3x^2-3=0$，故 x=±1，

再来比较端点与极值点的函数值，取出最大值与最小值即为所求。

因为$f(1)=1,f(\frac{3}{2})=\frac{15}{8}$，$f(-3)=-15$，$f(-1)=5$，

故函数的最大值为$f(-1)=5$，函数的最小值为$f(-3)=-15$。

例题：圆柱形罐头，高度 H 与半径 R 应怎样配，使同样容积下材料最省？

解答：由题意可知：$V=\pi R^2\cdot H$为一常数，

面积$S=2\pi R^2+2\pi R\cdot H=2\pi R(R+H)=2\pi R(R+\frac{V}{\pi R^2})$

故在 V 不变的条件下，改变 R 使 S 取最小值。

$$\frac{dS}{dR}=4\pi R-\frac{2V}{R^2}=0$$

$$R^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi R^2 \cdot H = \frac{R^2}{2} H$$

故：$R = \frac{H}{2}$ 时，用料最省。

曲线的凹向与拐点

通过前面的学习，我们知道由一阶导数的正负，可以判定出函数的单调区间与极值，但是还不能进一步研究曲线的性态，为此我们还要了解曲线的凹性。

定义：

对区间 I 的曲线 $y = f(x)$ 作切线，如果曲线弧在所有切线的下面，则称曲线在区间 I 下凹，如果曲线在切线的上面，称曲线在区间 I 上凹。

曲线凹向的判定定理

定理一：设函数 $y = f(x)$ 在区间(a, b)上可导，它对应曲线是向上凹(或向下凹)的充分必要条件是：

导数 $f'(x)$ 在区间(a, b)上是单调增(或单调减)。

定理二：设函数 $y = f(x)$ 在区间(a, b)上可导，并且具有一阶导数和二阶导数；那末：

若在(a, b)内，$f''(x) > 0$，则 $y = f(x)$ 在[a, b]对应的曲线是下凹的；

若在(a, b)内，$f''(x) < 0$，则 $y = f(x)$ 在[a, b]对应的曲线是上凹的；

例题：判断函数 $y = \ln x$ 的凹向

解答：我们根据定理二来判定。

因为 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$，所以在函数 $y = \ln x$ 的定义域(0, +∞)内，$y'' < 0$，

故函数所对应的曲线时下凹的。

拐点的定义

连续函数上，上凹弧与下凹弧的分界点称为此曲线上的拐点。

拐定的判定方法

如果 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内具有二阶导数，我们可按下列步骤来判定 $y=f(x)$ 的拐点。

(1)：求 $f''(x)$；

(2)：令 $f''(x)$=0，解出此方程在区间(a,b)内实根；

(3)：对于(2)中解出的每一个实根 x_0，检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号，若符号相反，则此点是拐点，若相同，则不是拐点。

例题：求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点。

解答：由 $y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3})$，

令 y''=0，得 x=0，2/3

判断 y'' 在 0，2/3 左、右两侧邻近的符号，可知此两点皆是曲线的拐点。

四、不定积分

不定积分的概念

原函数的概念

已知函数 f(x)是一个定义在某区间的函数，如果存在函数 F(x)，使得在该区间内的任一点都有

dF’(x)=f(x)dx，

则在该区间内就称函数 F(x)为函数 f(x)的**原函数**。

例：sinx 是 cosx 的原函数。

关于原函数的问题

函数 f(x)满足什么条件是，才保证其原函数一定存在呢？这个问题我们以后来解决。若其存在原函数，那末原函数一共有多少个呢？

我们可以明显的看出来：若函数 F(x)为函数 f(x)的原函数，

即：F″(x)=f(x)，

则函数族 F(x)+C(C 为任一个常数）中的任一个函数一定是 f(x)的原函数，

故：若函数 f(x)有原函数，那末其原函数为无穷多个.

不定积分的概念

函数 f(x)的全体原函数叫做函数 f(x)的**不定积分**，

记作$\int f(x)dx$。

由上面的定义我们可以知道：如果函数 F(x)为函数 f(x)的一个原函数，那末 f(x)的不定积分$\int f(x)dx$就是函数族

F(x)+C.

即：$\int f(x)dx$=F(x)+C

例题：求：$\int xdx$.

解答：由于$(\frac{x^2}{2})' = x$，故$\int xdx = \frac{x^2}{2}+C$

不定积分的性质

1、函数的和的不定积分等于各个函数的不定积分的和；

即：$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

2、求不定积分时，被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来，

即：$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

求不定积分的方法

换元法

换元法（一）：设 f(u)具有原函数 F(u)，u=g(x)可导，那末 F[g(x)]是 f[g(x)]g’(x)的原函数.

即有换元公式: $\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)]+C = \left[\int f(u)du\right]_{u=g(x)}$

例题：求 $\int 2\cos 2x dx$

解答：这个积分在基本积分表中是查不到的，故我们要利用换元法。

设 u=2x，那末 cos2x=cosu，du=2dx，因此：

$$\int 2\cos 2x dx = \int \cos u du = \sin u + c = \sin 2x + c$$

换元法(二)：设 x=g(t)是单调的，可导的函数，并且 g’(t)≠0，又设 f[g(t)]g’(t)具有原函数 φ(t)，则 φ[g(x)]是 f(x)的原函数.(其中 g(x)是 x=g(t)的反函数)

即有换元公式: $\int f(x)dx = \phi[g(x)]+c = \left[\int g(t)g'(t)dt\right]_{t=g(x)}$

例题：求 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx (a>0)$

解答：这个积分的困难在于有根式，但是我们可以利用三角公式来换元.

设 x=asint(-π/2<t<π/2),那末 $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t$,dx=acostdt,于是有:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos t\cdot a\cos t = a^2\int \cos^2 t dt = a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

关于换元法的问题

不定积分的换元法是在复合函数求导法则的基础上得来的，我们应根据具体实例来选择所用的方法，求不定积分不象求导那样有规则可依，因此要想熟练的求出某函数的不定积分，只有作大量的练习。

分部积分法

这种方法是利用两个函数乘积的求导法则得来的。

设函数 u=u(x)及 v=v(x)具有连续导数.我们知道，两个函数乘积的求导公式为:

(uv)’=u’v+uv’，移项，得

uv’=(uv)’-u’v，对其两边求不定积分得：

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx ,$$

这就是**分部积分公式**

例题：求 $\int x\cos x dx$

解答：这个积分用换元法不易得出结果，我们来利用分部积分法。

设 u=x，dv=cosxdx，那末 du=dx，v=sinx，代入分部积分公式得：

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

关于分部积分法的问题

在使用分部积分法时，应恰当的选取 u 和 dv，否则就会南辕北辙。选取 u 和 dv 一般要考虑两点：

(1) v 要容易求得；

(2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出。

几种特殊类型函数的积分举例

有理函数的积分举例

有理函数是指两个多项式的商所表示的函数，当分子的最高项的次数大于分母最高项的次数时称之为**假分式**，

反之为**真分式**。

在求有理函数的不定积分时，若有理函数为假分式应先利用多项式的除法，把一个假分式化成一个多项式和一个真分式之和的形式，然后再求之。

例题：求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$

解答：

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int (\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3})dx = -5\int \frac{1}{x-2}dx + 6\int \frac{1}{x-3}dx = -5\ln(x-2)+6\ln(x-3)+C = \ln\frac{(x-3)^6}{(x-2)^5}+C$$

关于有理函数积分的问题

有理函数积分的具体方法请大家参照有关书籍，请谅。

三角函数的有理式的积分举例

三角函数的有理式是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的函数。

例题：求 $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$

解答：$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx = \int \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} = \ln(1+\sin x)+C$

关于三角函数的有理式的积分的问题

任何三角函数都可用正弦与余弦函数表出，故变量代换 u=tan(x/2)对三角函数的有理式的积分应用，在此我

们不再举例。

简单无理函数的积分举例

例题：求 $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$

解答：设 $\sqrt{x-1}=u$，于是 $x=u^2+1$，dx=2udu，从而所求积分为：

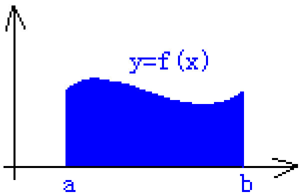
$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = \int \frac{u}{u^2+1}2udu = 2\int \frac{u^2}{u^2+1}du = 2\int (1-\frac{1}{1+u^2})du = 2(u-\arctan u)+C = 2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C$$

五、定积分及其应用

定积分的概念

我们先来看一个实际问题———求曲边梯形的面积。

设曲边梯形是有连续曲线 y=f(x)、x 轴与直线 x=a、x=b 所围成。如下图所示：



现在计算它的面积 A.我们知道矩形面积的求法，但是此图形有一边是一条曲线，该如何求呢？

我们知道曲边梯形在底边上各点处的高 f(x)在区间[a,b]上变动，而且它的高是连续变化的，因此在很小的一段区间的变化很小，近似于不变，并且当区间的长度无限缩小时，高的变化也无限减小。因此，如果把区间[a,b]分成许多小区间，在每个小区间上，用其中某一点的高来近似代替同一个小区间上的窄曲变梯形的变高，我们再根据矩形的面积公式，即可求出相应窄曲边梯形面积的近似值，从而求出整个曲边梯形的近似值。

显然：把区间[a,b]分的越细，所求出的面积值越接近于精确值。为此我们产生了**定积分的概念**。

定积分的概念

设函数 f(x)在[a,b]上有界，在[a,b]中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间[a,b]分成 n 个小区间

$[x_0, x_1], \cdots [x_{n-1}, x_n]$,

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$,作函数值 $f(\xi_i)$与小区间长度的乘积 $f(\xi_i)\triangle x_i$,

并作出和 $s=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,

如果不论对[a,b]怎样分法，也不论在小区间上的点 ξ_i 怎样取法，只要当区间的长度趋于零时，和 S 总趋于确定的极限 I,

这时我们称这个极限 I 为函数 f(x)在区间[a,b]上的**定积分**,

记作 $\int_a^b f(x)dx$ 。

即: $\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

关于定积分的问题

我们有了定积分的概念了，那么函数 f(x)满足什么条件时才可积?

定理（1）：设 f(x)在区间[a,b]上连续，则 f(x)在区间[a,b]上可积。

（2）：设 f(x)在区间[a,b]上有界，且只有有限个间断点，则 f(x)在区间[a,b]上可积。

定积分的性质

性质(1)：函数的和(差)得定积分等于它们的定积分的和(差）.

即: $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

性质(2)：被积函数的常数因子可以提到积分号外面.

即: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

性质(3)：如果在区间[a,b]上，f(x)≤g(x)，则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ （a<b)

性质(4)：设 M 及 m 分别是函数 f(x)在区间[a,b]上的最大值及最小值，则 m(b-a)≤ $\int_a^b f(x)dx$ ≤M(b-a)

性质(5)：如果 f(x)在区间[a,b]上连续，则在积分区间[a,b]上至少存在一点 ξ，使下式成立：

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

注：此性质就是**定积分中值定理**。

微积分积分公式

积分上限的函数及其导数

设函数 f(x)在区间[a,b]上连续，并且设 x 为[a,b]上的一点.现在我们来考察 f(x)在部分区间[a,x]上

的定积分 $\int_a^x f(x)dx$,我们知道 f(x)在[a,x]上仍旧连续，因此此定积分存在。

如果上限 x 在区间[a,b]上任意变动，则对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应值，所以它在[a,b]上**定义了一个函数**，记作 φ(x)：$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

注意：为了明确起见，我们改换了积分变量（定积分与积分变量的记法无关）

定理(1)：如果函数 f(x)在区间[a,b]上连续，则积分上限的函数 $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在[a,b]上具有导数，并且它的导数是 $\phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ （a≤x≤b）

(2)：如果函数 f(x)在区间[a,b]上连续,则函数 $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 f(x)在[a,b]上的一个原函数。

注意：定理（2）即肯定了连续函数的原函数是存在的，又初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系。

牛顿--莱布尼兹公式

定理(3)：如果函数 F(x)是连续函数 f(x)在区间[a,b]上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

注意：此公式被称为牛顿-莱布尼兹公式，它进一步揭示了定积分与原函数(不定积分）之间的联系。

它表明：一个连续函数在区间[a,b]上的定积分等于它的任一个原函数再去见[a,b]上的增量。因此它就

给定积分提供了一个有效而简便的计算方法。

例题：求 $\int_0^1 x^2dx$

解答：我们由牛顿-莱布尼兹公式得：$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$

注意：通常也把牛顿--莱布尼兹公式称作微积分基本公式。

定积分的换元法与分部积分法

定积分的换元法

我们知道求定积分可以转化为求原函数的增量，在前面我们又知道用换元法可以求出一些函数的原函数。因此，在一定条件下，可以用换元法来计算定积分。

定理：设函数 f(x)在区间[a,b]上连续；函数 g(t)在区间[m,n]上是单值的且有连续导数；当 t 在区间[m,n]上变化时，x=g(t)的值在[a,b]上变化，且 g(m)=a,g(n)=b；则有**定积分的换元公式：**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_m^n f[g(t)]g'(t)dt$$

例题：计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx (a>0)$

解答：设 x=asint,则 dx=acostdt,且当 x=0 时，t=0；当 x=a 时，t=π/2.于是：

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t^2 dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left[1+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

注意：在使用定积分的换元法时，当积分变量变换时，积分的上下限也要作相应的变换。

定积分的分部积分法

计算不定积分有分部积分法，相应地，计算定积分也有分部积分法。

设 u(x)、v(x)在区间[a,b]上具有连续导数 u'(x)、v'(x),则有(uv)'=u'v+uv',分别求此等式两端在[a,b]上的定积分，并移向得：$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'dx$

上式即为**定积分的分部积分公式**。

例题：计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

解答：设 $\sqrt{x}=t$,则$x=t^2$,$dx=2tdt$，且当 x=0 时，t=0；当 x=1 时，t=1.由前面的换元公式得：

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 te^t dt$$

再用分部积分公式计算上式的右端的积分。设 u=t,dv=e^{t}dt,则 du=dt,v=e^t.于是：

$$\int_0^1 te^t dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - \left[e^t\right]_0^1 = e-(e-1) = 1$$

故：$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = 2$

广义积分

在一些实际问题中，我们常遇到积分区间为无穷区间，或者被积函数在积分区间上具有无穷间断点的积分，它们已不属于前面我们所学习的定积分了。为此我们对定积分加以推广，也就是———**广义积分**。

一：积分区间为无穷区间的广义积分

设函数 f(x)在区间[a,+∞)上连续，取 b>a.如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$ 存在，

则此极限叫做函数 f(x)在无穷区间[a,+∞）上的广义积分，

记作：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，

即：$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

此时也就是说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。如果上述即先不存在，则说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，此时虽然用同样的记号，但它已不表示数值了。

类似地，设函数 f(x)在区间(-∞，b]上连续，取 a<b.如果极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$ 存在，

则此极限叫做函数 f(x)在无穷区间(-∞，b]上的广义积分，

记作：$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$，

即：$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

此时也就是说广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 收敛。如果上述极限不存在，就说广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 发散。

如果广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 都收敛，则称上述两广义积分之和为函数 f(x)在无穷区间(-∞,+∞)上的广义积分，

记作：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，

即：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$

上述广义积分统称积分区间为无穷的广义积分。

例题：计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}dx$

解答：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi$$

二：积分区间有无穷间断点的广义积分

设函数 f(x) 在 (a, b] 上连续，而 $\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty$. 取 ε >0，如果极限 $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ 存在，则极限叫做函数 f(x) 在 (a, b] 上的**广义积分，**

仍然记作：$\int_a^b f(x)dx$.

即：$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$，

这时也说广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**. 如果上述极限不存在，就说广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**。

类似地，设 f(x) 在 [a, b) 上连续，而 $\lim_{x\to b-0}f(x)=\infty$. 取 ε >0，如果极限 $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$ 存在，

则定义 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$；

否则就说广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**。

又，设 f(x) 在 [a, b] 上除点 c (a<c<b) 外连续，而 $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$. 如果两个广义积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都**收敛**，

则定义：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

否则就说广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**。

例题：计算广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a>0)

解答：因为 $\lim_{x \to a-0} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$ ，所以 x=a 为被积函数的无穷间断点，于是我们有上面所学得公式可得：

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\arcsin \frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} - 0\right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

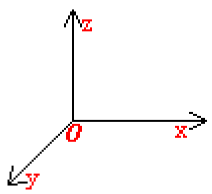
六、空间解析几何

空间直角坐标系

空间点的直角坐标系

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系，为此我们通过引进空间直角坐标系来实现。

过定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位.这三条轴分别叫做**x 轴**(横轴）、**y 轴**(纵轴)、**z 轴**(竖轴)；统称**坐标轴**.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正方向要符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从正向 x 轴以 π/2 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**，点 O 叫做**坐标原点**。（如下图所示）

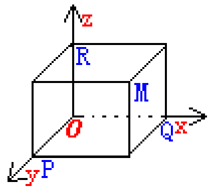


三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称**坐标面**。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序数组之间的对应关系。

例：设点 M 为空间一已知点.我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、

z 轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标依次为 x、y、z.于是空间的一点 M 就唯一的确定了一个有序数组 x,y,z.这组数 x,y,z 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x,y 和 z 为点 M 的横坐标，纵坐标和竖坐标。(如下图所示）



坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 M(x,y,z).

这样，通过空间直角坐标系，我们就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系。

注意：坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征.

例：如果点 M 在 yOz 平面上，则 x=0；同样，zOx 面上的点，y=0；如果点 M 在 x 轴上，则 y=z=0；如果 M 是原点，

则 x=y=z=0，等。

空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，为了用两点的坐标来表达它们间的距离 d 我们有公式：

$$|P_2P_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例题：证明以 A(4,3,1),B(7,1,2),C(5,2,3)为顶点的三角形△ABC 是一等腰三角形.

解答：由两点间距离公式得：

$$|AB| = \sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = 2\sqrt{7}$$
$$|BC| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6}$$
$$|CA| = \sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{6}$$

由于 $|BC|=|CA|=\sqrt{6}$，所以△ABC 是一等腰三角形

方向余弦与方向数

解析几何中除了两点间的距离外，还有一个最基本的问题就是如何确定有向线段的或有向直线的方

向。

方向角与方向余弦

设有空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$，若以 P_1 为始点，另一点 P_2 为终点的线段称为**有向线段**. 记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$. 通过原点作一与其平行且同向的有向线段 $\overrightarrow{OP}$. 将 $\overrightarrow{OP}$ 与 0x, 0y, 0z 三个坐标轴正向夹角分别记作 α，β，γ. 这三个角 α，β，γ 称为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**方向角**. 其中 0≤α≤π, 0≤β≤π, 0≤γ≤π.

关于方向角的问题

若有向线段的方向确定了，则其方向角也是唯一确定的。

方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 或相应的有向线段的**方向余弦**。

设有空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$，则其方向余弦可表示为：

$$\cos\alpha=\frac{P_1A}{|p_1p_2|}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{P_1B}{|p_1p_2|}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{P_1C}{|p_1p_2|}=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

从上面的公式我们可以得到方向余弦之间的一个基本关系式：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

注意：从原点出发的任一单位的有向线段的方向余弦就是其端点坐标。

方向数

方向余弦可以用来确定空间有向直线的方向，但是，如果只需要确定一条空间直线的方位(一条直线

的两个方向均确定着同一方位)，那末就不一定需要知道方向余弦，而只要知道与方向余弦成比例的三个数就可以了。这三个与方向余弦成比例且不全为零的数 A，B，C 称为空间直线的方向数，记作：{A，B，C}.

即：

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}$$

据此我们可得到方向余弦与方向数的转换公式：

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中：根式取正负号分别得到两组方向余弦，它们代表两个相反的方向。

关于方向数的问题

空间任意两点坐标之差就是联结此两点直线的一组方向数。

两直线的夹角

设 L_1 与 L_2 是空间的任意两条直线，它们可能相交，也可能不相交. 通过原点 O 作平行与两条直线的线段 $\overline{OP_1}$与$\overline{OP_2}$. 则线段 $\overline{OP_1}$与$\overline{OP_2}$ 的夹角称为此**两直线 L_1 与 L_2 的夹角**.

若知道 L_1 与 L_2 的方向余弦则有公式为：

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

其中： θ 为两直线的夹角。

若知道 L_1 与 L_2 的方向数则有公式为：

$$\cos\theta=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

两直线平行、垂直的条件

两直线平行的充分必要条件为：

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

两直线垂直的充分必要条件为：

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

平面与空间直线

平面及其方程

我们把与一平面垂直的任一直线称为此**平面的法线**。

设给定点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，给定法线 n 的一组方向数为 $\{A, B, C\}$ $A^2+B^2+C^2\neq 0$，则过此定点且以 n 为法线的平面方程可表示为：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, A^2+B^2+C^2\neq 0$$

注意： 此种形式的方程称为**平面方程的点法式**。

例题： 设直线 L 的方向数为{3，-4，8}，求通过点(2,1,-4)且垂直于直线 L 的平面方程.

解答： 应用上面的公式得所求的平面方程为：

$$3(x-2)-4(y-1)+8(z+4)=0$$

即 $$3x-4y+8z+30=0$$

我们把形式为：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

称为**平面方程的一般式。**其中 x,y,z 的系数 A，B，C 是平面的法线的一组方向数。

几种特殊位置平面的方程

1、通过原点

其平面方程的一般形式为：

$$Ax+By+Cz=0.$$

2、平行于坐标轴

平行于 x 轴的平面方程的一般形式为：

$$By+Cz+D=0.$$

平行于 y 轴的平面方程的一般形式为：

$$Ax+Cz+D=0.$$

平行于 z 轴的平面方程的一般形式为：

$$Ax+By+D=0.$$

3、通过坐标轴

通过 x 轴的平面方程的一般形式为：

$$By+Cz=0.$$

通过 y 轴和 z 轴的平面方程的一般形式为：

$$Ax+Cz=0，Ax+By=0.$$

4、垂直于坐标轴

垂直于 x、y、z 轴的平面方程的一般形式为：

$$Ax+D=0，By+D=0，Cz+D=0.$$

直线及其方程

任一给定的直线都有着确定的方位.但是,具有某一确定方位的直线可以有无穷多条,它们相互平行.如果要求直线再通过某一定点,则直线便被唯一确定，因而此直线的方程就可由通过它的方向数和定点的坐标表示出来。

设已知直线 L 的方向数为{l,m,n}，又知 L 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则直线 L 的方程可表示为：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

上式就是直线 L 的方程，这种方程的形式被称为**直线方程的对称式**。

直线方程也有一般式，它是有两个平面方程联立得到的，如下：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

这就是**直线方程的一般式**。

平面、直线间的平行垂直关系

对于一个给定的平面，它的法线也就可以知道了。因此平面间的平行与垂直关系，也就转化为直线间的平行与垂直关系。平面与直线间的平行与垂直关系，也就是平面的法线与直线的平行与垂直关系。

总的来说，平面、直线间的垂直与平行关系，最终都转化为直线与直线的平行与垂直关系。在此我们就不列举例题了。

曲面与空间曲线

曲面的方程

我们知道，在平面解析几何中可把曲线看成是动点的轨迹.因此，在空间中曲面可看成是一个动点或一条动曲线(直线)按一定的条件或规律运动而产生的轨迹。

设曲面上动点 P 的坐标为(x, y, z)，由这一条件或规律就能导出一个含有变量 x, y, z 的方程：

$$F(x,y,z)=0$$

如果此方程当且仅当 P 为曲面上的点时，才为 P 点的坐标所满足。那末我们就用这个方程表示曲面，并称这个方程为**曲面的方程**，把这个曲面称为**方程的图形**。

空间曲线的方程

我们知道，空间直线可看成两平面的交线，因而它的方程可用此两相交平面的方程的联立方程组来表示，这就是直线方程的一般式。

一般地，空间曲线也可以象空间直线那样看成是两个曲面的交线，因而空间曲线的方程就可由此两相交曲面方程的联立方程组来表示。

设有两个相交曲面，它们的方程是 $F_1(x,y,z)=0$， $F_2(x,y,z)=0$，那末联立方程组：

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

便是它们的交线方程。

两类常见的曲面

1、柱面

设有动直线 L 沿一给定的曲线 C 移动，移动时始终与给定的直线 M 平行，这样由动直线 L 所形成的曲面称为**柱面**，动直线 L 称为**柱面的母线**，定曲线 C 称为**柱面的准线**。

2、旋转面

设有一条平面曲线 C，绕着同一平面内的一条直线 L 旋转一周，这样由 C 旋转所形成的曲面称为**旋转面**，曲线 C 称为**旋转面的母线，**直线 L 称为**旋转面的轴**。

下面我们再列举出几种常见的二次曲面

二次曲面的名称	二次曲面的方程
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$
双曲抛物面	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

七、多元函数的微分学

多元函数的概念

我们前面所学的函数的自变量的个数都是一个，但是在实际问题中，所涉及的函数的自变量的个数往往是两个，或者更多。

例：一个圆柱体的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 与两个独立变量 r,h 有关。`

我们先以二个独立的变量为基础，来给出二元函数的定义。

二元函数的定义

设有两个独立的变量 x 与 y 在其给定的**变域中** D 中，任取一组数值时，第三个变量 z 就以某一确定的法则有唯一确定的值与其对应，那末变量 z 称为变量 x 与 y 的二元函数。

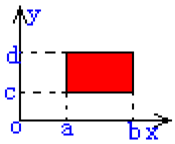
记作：z=f(x,y). 其中 x 与 y 称为**自变量，**函数 z 也叫做**因变量，**自变量 x 与 y 的变域 D 称为函数

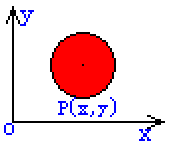
的**定义域**。

关于二元函数的定义域的问题

我们知道一元函数的定义域一般来说是一个或几个区间.二元函数的定义域通常是由平面上一条或几段光滑曲线所围成的连通的**部分平面**.这样的部分在平面称为**区域**.围成区域的曲线称为区域的**边界**，边界上的点称为**边界点**，包括边界在内的区域称为**闭域**，不包括边界在内的区域称为**开域**。

如果一个区域D(开域或闭域)中任意两点之间的距离都不超过某一常数M，则称D为**有界区域**；否则称D为**无界区域**。常见的区域有矩形域和圆形域。如下图所示：





例题：求 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域.

解答：该函数的定义域为：$x\geq\sqrt{y}$，$y\geq0$.

二元函数的几何表示

把自变量x、y及因变量z当作空间点的直角坐标，先在xOy平面内作出函数z=f(x,y)的定义域D；再过D域中得任一点M(x,y)作垂直于xOy平面的有向线段MP,使其值为与(x,y)对应的函数值z；

当M点在D中变动时，**对应的P点的轨迹就是函数z=f(x,y)的几何图形**.它通常是一张曲面，

其定义域D就是此曲面在xOy平面上的投影。

二元函数的极限及其连续性

在一元函数中，我们曾学习过当自变量趋向于有限值时函数的极限。对于二元函数z=f(x,y)我们同样可以学习当自变量x与y**趋向于有限值**ξ与η时，函数z的**变化状态**。

在平面xOy上，(x,y)趋向(ξ,η)的方式可以时多种多样的，因此二元函数的情况要比一元函数复杂

得多。如果当点(x,y)以任意方式趋向点(ξ，η)时，f(x,y)总是趋向于一个确定的常数 A，

那末就称 A 是二元函数 f(x,y)当(x,y)→(ξ，η)时的**极限**。

这种极限通常称为二重极限。

下面我们用 ε－δ 语言给出二重极限的严格定义：

二重极限的定义

如果定义于(ξ，η)的某一去心邻域的一个二元函数 f(x,y)跟一个确定的常数 A 有如下关系：对于任意给定的正数 ε，无论怎样小，相应的必有另一个正数 δ，凡是满足

$$0<(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<\delta^2$$

的一切(x,y)都使不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$ 成立，

那末常数 A 称为函数 f(x,y)当(x,y)→(ξ，η)时的二重极限。

正像一元函数的极限一样，二重极限也有类似的运算法则：

二重极限的运算法则

如果当（x,y)→(ξ，η)时，f(x,y)→A，g(x,y)→B.

那末(1)： f(x,y)±g(x,y)→A±B;

(2)：f(x,y)·g(x,y)→A·B;

(3)：f(x,y)/g(x,y)→A/B；其中 B≠0

像一元函数一样，我们可以利用二重极限来给出二元函数连续的定义：

二元函数的连续性

如果当点(x,y)趋向点(x_0,y_0)时，函数 f(x,y)的二重极限等于 f(x,y)在点(x_0,y_0)处的函数值 f(x_0,y_0)，那末**称函数 f(x,y)在点(x_0,y_0)处连续**.如果 f(x,y)在区域 D 的每一点都连续，那末**称它在区域 D 连续**。

如果函数 z=f(x,y)在(x_0,y_0)不满足连续的定义，那末我们就称(x_0,y_0)是 f(x,y)的一个**间断点**。

关于二元函数间断的问题

二元函数间断点的产生与一元函数的情形类似，但是二元函数间断的情况要比一元函数复杂，它除了有间断点，还有**间断线**。

二元连续函数的和，差，积，商(分母不为零）和复合函数仍是连续函数。

例题：求下面函数的间断线 $z=\sin\frac{1}{xy}$

解答：x=0 与 y=0 都是函数 $z=\sin\frac{1}{xy}$ 的间断线。

偏导数

在一元函数中，我们已经知道导数就是函数的变化率。对于二元函数我们同样要研究它的"变化率"。然而，由于自变量多了一个，情况就要复杂的多.在 xOy 平面内，当变点由(x_0,y_0)沿不同方向变化时，函数 f(x,y)的变化快慢一般说来时不同的，因此就需要研究 f(x,y)在(x_0,y_0)点处沿不同方向的变化率。

在**这里我们只学习(x,y)沿着平行于 x 轴和平行于 y 轴两个特殊方位变动时 f(x,y)的变化率**。

偏导数的定义

设有二元函数 z=f(x,y)，点(x_0,y_0)是其定义域 D 内一点.把 y 固定在 y0 而让 x 在 x0 有增量△x，相应地函数

z=f(x,y)有增量(称为**对 x 的偏增量**)

$$\triangle_x z=f(x_0+\triangle x)-f(x_0,y_0).$$

如果$\triangle_x z$ 与△x 之比当△x→0 时的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$ 存在，

那末此极限值称为函数 z=f(x,y)在(x_0,y_0)处**对 x 的偏导数**。

记作：$f'_x(x_0,y_0)$或 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$

关于对 x 的偏导数的问题

函数 z=f(x,y)在(x_0,y_0)处对 x 的偏导数，实际上就是把 y 固定在 y_0 看成常数后，一元函数 $z=f(x,y_0)$在 x_0 处的导数

同样，把 x 固定在 x_0，让 y 有增量△y，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$ 存在，

那末此极限称为函数 z=(x, y)在(x_0, y_0)处**对 y 的偏导数.**

记作 f'$_y$(x_0, y_0)或 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$

偏导数的求法

当函数 z=f(x, y)在(x_0, y_0)的两个偏导数 f'$_x$(x_0, y_0)与 f'$_y$(x_0, y_0)都存在时，

我们称 f(x, y)在(x_0, y_0)处**可导**。如果函数 f(x, y)在域 D 的每一点均可导，

那末称函数 f(x, y)在域 D **可导**。

此时，对应于域 D 的每一点(x, y)，必有一个对 x(对 y)的偏导数，因而在域 D 确定了一个新的二元函数，

称为 f(x, y)对 x(对 y)的**偏导函数**。简称**偏导数**。

例题： 求 $z=x^2\sin y$ 的偏导数

解答： 把 y 看作常量对 x 求导数，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$

把 x 看作常量对 y 求导数，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$

注意： 二元函数偏导数的定义和求法可以推广到三元和三元以上函数。

例题： 求 $u=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{xy}{z}$ 的偏导数。

解答： 我们根据二元函数的偏导数的求法来做。

把 y 和 z 看成常量对 x 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{z}$.

把 x 和 z 看成常量对 y 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x}{z}$.

把 x 和 y 看成常量对 z 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}$.

高阶偏导数

如果二元函数 z=f(x,y)的偏导数 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 仍然可导，

那末这两个偏导函数的偏导数称为 z=f(x,y)的**二阶偏导数**。

二元函数的二阶偏导数有四个：f″xx，f″xy，f″yx，f″yy.

注意：f″xy 与 f″yx 的区别在于：前者是先对 x 求偏导，然后将所得的偏导函数再对 y 求偏导；后者是先对 y 求偏导再对 x 求偏导. **当 f″xy 与 f″yx 都连续时，求导的结果于求导的先后次序无关。**

例题：求函数 $z=x^3y-3x^2y^3$ 的二阶偏导数.

解答： $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy-6y^3$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-18x^2y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2-18xy^2$

全微分

我们已经学习了一元函数的微分的概念了，现在我们用类似的思想方法来学习多元函数的的全增量，从而把微分的概念推广到多元函数。

这里我们以二元函数为例。

全微分的定义

函数 z=f(x,y)的两个偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 分别与自变量的增量△x，△y 乘积之和

$$f'_x(x,y)\triangle x+f'_y(x,y)\triangle y$$

若该表达式与函数的全增量△z 之差，

当 ρ→0 时，是 ρ（$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$）

的高阶无穷小，

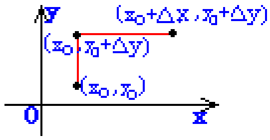
那末该表达式称为函数 z=f(x,y)在(x,y)处(关于△x，△y)的**全微分**。

记作：$dz=f'_x(x,y)\triangle x+f'_y(x,y)\triangle y$

注意：其中 $\triangle z=f'_x(x,y)\triangle x+f'_y(x,y)\triangle y+\alpha\rho$，（α 是当 ρ→0 时的无穷小）

注意：在找函数相应的全增量时，为了使△z 与偏导数发生关系，我们把由 (x_0,y_0) 变到 $(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)$

的过程分为两部：先由点(x_0, y_0)变到点(x_0, y_0+△y)，再变到点(x_0+△x, y_0+△y). 其过程如下图所示：



例题：求 $z=e^{x}\sin(x+y)$ 的全微分

解答：由于 $z'_x=e^x\sin(x+y)+e^x\cos(x+y)$，$z'_y=e^x\cos(x+y)$

所以 $dz=z'_x dx+z'_y dy=e^x[\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^x\cos(x+y)dy$

关于全微分的问题

如果偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 连续，那末 z=f(x, y)一定**可微**。

多元复合函数的求导法

在一元函数中，我们已经知道，复合函数的求导公式在求导法中所起的重要作用，对于多元函数来说也是如此。下面我们来学习多元函数的复合函数的求导公式。我们先以二元函数为例：

多元复合函数的求导公式

链导公式：

设 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 均在(x, y)处可导，函数 z=F(u, v)在对应的(u, v)处有连续的一阶偏导数，

那末，复合函数 $z=F[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在(x, y)处可导，且有链导公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

例题：求函数 $z=\ln[e^{2(x+y^2)}+(x^2+y)]$ 的一阶偏导数

解答：令 $u=e^{x+y^2}, v=x^2+y,$ 则 $z=\ln(u^2+v)$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v},\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v}$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2+y},\frac{\partial v}{\partial x}=2x$$

由链导公式可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot e^{x^2+y}+\frac{1}{u^2+v}\cdot 2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot e^{x^2+y}2y+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2}+1)$$

其中$u=e^{x+y^2},v=x^2+y$

上述公式可以推广到多元，在此不详述。

一个多元复合函数，其一阶偏导数的个数取决于此复合函数自变量的个数。在一阶偏导数的链导公式中，项数的多少取决于与此自变量有关的中间变量的个数。

全导数

由二元函数 z=f(u, v)和两个一元函数$u=\varphi(x),v=\psi(x)$复合起来的函数$z=f[\varphi(x),\psi(x)]$是 x 的一元函数.

这时复合函数的导数就是一个一元函数的导数$\frac{dz}{dx}$，称为**全导数**.

此时的链导公式为:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

例题： 设 $z=u^2v$，u=cosx，v=sinx，求$\frac{dz}{dx}$

解答： 由全导数的链导公式得：

$$\frac{dz}{dx}=2uv(-\sin x)+u^2\cos x$$

将 u=cosx，v=sinx 代入上式，得：

$$\frac{dz}{dx}=\cos^3 x-2\sin^2 x\cos x$$

关于全导数的问题

全导数实际上是一元函数的导数，只是求导的过程是借助于偏导数来完成而已。

多元函数的极值

在一元函数中我们看到，利用函数的导数可以求得函数的极值，从而可以解决一些最大、最小值的应用问题。多元函数也有类似的问题，这里我们只学习二元函数的极值问题。

二元函数极值的定义

如果在(x_0,y_0)的某一去心邻域内的一切点(x,y)恒有等式：

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$$

成立，那末就称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得**极大值** $f(x_0,y_0)$；如果恒有等式：

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$$

成立，那末就称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得**极小值** $f(x_0,y_0)$.

极大值与极小值统称**极值**.使函数取得极值的点(x_0,y_0)称为**极值点**.

二元可导函数在(x_0,y_0)取得极值的条件是： $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$.

注意：此条件只是取得极值的必要条件。

凡是使$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$的点$(x,y)$称为函数$f(x,y)$的**驻点**.可导函数的极值点必为驻点，但驻点却不一定是极值点。

二元函数极值判定的方法

设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的某一邻域内有连续的二阶偏导数.如果$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$，那末函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$取得极值的条件如下表所示：

$\triangle=B^2-AC$	$f(x_0,y_0)$
$\triangle<0$	$A<0$时取极大值
	$A>0$时取极小值

△＞0	非极值
△=0	不定

其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

例题：求 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值。

解答：设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$，则

$$f'_x(x,y)=3x^2-3y,\quad f'_y(x,y)=3y^2-3x.$$

$$f''_{xx}(x,y)=6x,f''_{xy}(x,y)=-3,f''_{yy}(x,y)=6y.$$

解方程组 $\begin{cases}3x^2-3y=0\\3y^2-3x=0\end{cases}$，得驻点(1,1)，(0,0).

对于驻点(1,1)有 $f''_{xx}(1,1)=6,f''_{xy}(1,1)=-3,f''_{yy}(1,1)=6$，故

$B^2-AC=(-3)^2-6\cdot6=-27<0$，$A=6>0$

因此，$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 在点(1,1)取得极小值 f(1,1)=-1.

对于驻点(0,0)有 $f''_{xx}(0,0)=0,f''_{xy}(0,0)=-3,f''_{yy}(0,0)=0$，故

$B^2-AC=(-3)^2-0\cdot0=9>0$

因此，$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 在点(0,0)不取得极值.

多元函数的最大、最小值问题

我们已经知道求一元函数极大值、极小值的步骤，对于多元函数的极大值、极小值的求解也可采用同样的步骤。下面我们给出实际问题中多元函数的极大值、极小值求解步骤。如下：

a)：根据实际问题建立函数关系，确定其定义域；

b)：求出驻点；

c)：结合实际意义判定最大、最小值.

例题：在平面 3x+4y-z=26 上求一点，使它与坐标原点的距离最短。

解答：a)：先建立函数关系，确定定义域

求解与原点的距离最短的问题等价于求解与原点距离的平方

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

最小的问题.但是P点位于所给的平面上,故z=3x+4y-26.把它代入上式便得到我们所需的函数关系:

$$u = x^2 + y^2 + (3x+4y-26)^2$$,-∞＜x＜+∞,-∞＜y＜+∞

b)：求驻点

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 6(3x+4y-26) = 4(5x+6y-39),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 8(3x+4y-26) = 2(12x+17y-104).$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 得唯一驻点 x=3，y=4.由于点P在所给平面上,故可知

z=-1

c)：结合实际意义判定最大、最小值

由问题的实际意义可知，原点与平面距离的最小值是客观存在的，且这个最小值就是极小值.而函数

仅有唯一的驻点.所以，平面上与原点距离最短的点为P(3,4,-1).

从上例我们可以看出，上面函数关系也可看成是：求三元函数

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$

在约束条件

3x+4y-z=26

下的最小值.一个多元函数在一个或几个约束条件下的极值称为**条件极值**。

八、多元函数的积分学

二重积分的概念及性质

前面我们已经知道了，定积分与曲边梯形的面积有关。下面我们通过曲顶柱体的体积来引出二重积分的概念，在此我们不作详述，请大家参考有关书籍。

二重积分的定义

设 z=f(x,y)为有界闭区域(σ)上的有界函数：

(1)把区域(σ)任意划分成 n 个子域(△σ$_k$)(k=1,2,3,…,n)，其面积记作△σ$_k$(k=1,2,3,…,n)；

(2)在每一个子域(△σ$_k$)上任取一点(ξ_k,η_k)，作乘积$f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$；

(3)把所有这些乘积相加,即作出和数$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

(4)记子域的最大直径 d.如果不论子域怎样划分以及(ξ_k,η_k)怎样选取,上述和数当 n→＋∞且 d→0 时的极限存在,那末称此极限为函数 f(x,y)在区域(σ)上的**二重积分**.记作:$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$

即：$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

其中 x 与 y 称为**积分变量**,函数 f(x,y)称为**被积函数**,f(x,y)dσ 称为**被积表达式**,(σ)称为**积分区域**.

关于二重积分的问题

对于二重积分的定义,我们并没有 f(x,y)≥0 的限.容易看出,当 f(x,y)≥0 时,二重积分$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$在几何上就是以 z=f(x,y)为曲顶，以(σ)为底且母线平行于 z 轴的曲顶柱体的体积。

上述就是二重积分的几何意义。

如果被积函数 f(x,y)在积分区域(σ)上**连续**，那末二重积分$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$**必定存在**。

二重积分的性质

(1).被积函数中的常数因子可以提到二重积分符号外面去.

$$\iint\limits_{(\sigma)} Af(x,y)d\sigma = A\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$$

(2).有限个函数代数和的二重积分等于各函数二重积分的代数和.

$$\iint\limits_{(\sigma)}[f_1(x,y)\pm f_2(x,y)]d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f_1(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_{(\sigma)} f_2(x,y)d\sigma$$

(3). 如果把积分区域(σ)分成两个子域(σ_1)与(σ_2), 即(σ)=(σ_1)+(σ_2), 那末:

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} f(x,y)d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} f(x,y)d\sigma$$

(4). 如果在(σ)上有 f(x, y)≤g(x, y), 那末:

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma \leqslant \iint_{(\sigma)} g(x,y)d\sigma$$

(5). 设 f(x, y)在闭域(σ)上连续, 则在(σ)上至少存在一点(ξ , η), 使

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

其中 σ 是区域(σ)的面积.

二重积分的计算法

直角坐标系中的计算方法

这里我们采取的方法是累次积分法。也就是先把 x 看成常量，对 y 进行积分，然后在对 x 进行积分，或者是先把 y 看成常量，对 x 进行积分，然后在对 y 进行积分。为此我们有积分公式，如下：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

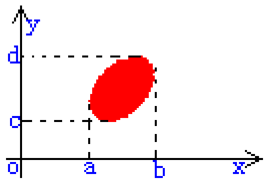
或

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

在这里我们可能会有这个问题：累次积分的上下限是怎么确定的呢？

累次积分上下限的确定方法

我们先来对区域作些补充说明：如果经过区域(σ)内任意一点(即不是区域边界上的点)作平行于 y 轴(或 x 轴)的直线，且此直线交(σ)的边界不超过两点，那末称(σ)为**沿 y 轴(x 轴)方向的正规区域**. 如果(σ)即是沿 y 轴方向也是沿 x 轴方向的正规区域，那末(σ)就称为**正规区域**. 下图所示的即为正规区域:



关于累次积分上下限的取法如下所述:

(1). 如果(σ)为沿 y 轴方向的正规区域，那末二重积分可化为先对 y 再对 x 的累次积分. 其中对 y 的积分下限是(σ)的下部边界曲线所对应的函数 $y_1(x)$，积分上限是上部边界曲线所对应的函数 $y_2(x)$. 对 x 的积分下限与上限分别是(σ)的最左与最右点的横坐标 a 与 b.

(2). 如果(σ)为沿 x 轴方向的正规区域，那末二重积分可化为先对 x 再对 y 的累次积分. 其中对 x 的积分下限是(σ)的左部边界曲线所对应的函数 $x_1(y)$，积分上限是右部边界曲线所对应的函数 $x_2(y)$. 对 y 的积分下限与上限分别是(σ)的最低与最高点的横坐标 c 与 d.

(3). 如果(σ)为正规区域，那末累次积分可以交换积分次序。

(4). 如果(σ)既不是沿 y 轴方向的正规区域，也不是沿 x 轴方向的正规区域，那末总可以把它化分成几块沿 y 轴方向的正规区域或沿 x 轴方向的正规区域，然后根据积分的性质即可求解积分.

例题：求二重积分 $I=\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)d\sigma$ ，其中(σ)是由 $y=x^2, x=1, y=0$ 所围成的区域。

解答：因为是正规区域，所以我们可先对 y 后对 x 积分，也可先对 x 后对 y 积分。这里我们采用前者先对 y 后对 x 积分：

$$I=\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dydx=\int_0^1(x^2y+\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^{x^2}dx=\int_0^1(x^4+\frac{1}{3}x^6)dx=(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{21}x^7)\Big|_0^1=\frac{26}{105}$$

极坐标系中的计算法

如果二重积分的被积函数和积分区域(σ)的边界方程均由极坐标的形式给出,那末我们如何计算呢?下面我们给出极坐标系中二重积分的计算公式.

如果极点O在(σ)的外部,区域(σ)用不等式表示为 $R_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant R_2(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则积分公式如下:

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta=\int_\alpha^\beta\int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)}f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$$

如果极点O在(σ)的内部,区域(σ)的边界方程为 $\rho=R(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,则积分公式如下:

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\theta)}f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$$

如果极点O在(σ)的边界上,边界方程为 $\rho=R(\theta)$, $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$,则积分公式如下:

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{R(\theta)}f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$$

有了上面这些公式，一些在直角坐标系中不易积出而在极坐标系中易积出的函数，我们就可以把它转化为在极坐标系中的积分即可，反之依然。

注：直角坐标与极坐标的转换公式为：

$$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$$

例题：求 $I=\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)d\sigma$ ，其中(σ)是圆环 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$

解答：由于积分域由同心圆围成以及被积函数的形式，显然，这个二重积分化为极坐标计算比较方便。

把 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ ，$d\sigma=\rho d\rho d\theta$ 代入，即可转化为极坐标系的积分形式。如

下：

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^3 d\rho d\theta$$

在对其进行累次积分计算：

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^3 d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_a^b\rho^3\,\rho d\rho\theta=\frac{1}{4}(b^4-a^4)\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}(b^4-a^4)$$

三重积分及其计算法

二重积分的被积函数是一个二元函数，它的积分域是一平面区域.如果考虑三元函数 f(x,y,z)在一空间区域(V)上的积分，就可得到三重积分的概念。

三重积分的概念

设函数 u=f(x,y,z)在空间有界闭区域(V)任意划分成 n 个子域($\triangle V_1$),($\triangle V_2$),($\triangle V_3$),…,($\triangle V_n$),它们的体积分别记作$\triangle V_k$(k=1,2,…,n).在每一个子域上任取一点(ξ_k,η_k,ζ_k)，并作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$

如果不论$\triangle V_k$怎样划分，点(ξ_k,η_k,ζ_k)怎样选取，当 n→+∞而且最大的子域直径 δ→0 时，这个和数的极限都存在，那末此极限就称为函数$f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$在域(V)上的**三重积分**,记作：

$$\iiint_V f(x,y,z)dV$$

即：

$$\iiint_V f(x,y,z)dV=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k\to 1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$

如果 f(x,y,z)在域(V)上连续，那末此**三重积分一定存在**。

对于三重积分没有直观的几何意义，但它却有着各种不同的物理意义。

直角坐标系中三重积分的计算方法

这里我们直接给出三重积分的计算公式，具体它是怎样得来的，请大家参照有关书籍。

直角坐标系中三重积分的计算公式为:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV=\iint_\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dzd\sigma$$

此公式是把一个三重积分转化为一个定积分与一个二重积分的问题，根据我们前面所学的结论即可求出。

例题：求 $I=\iiint_{(V)} xyzdV$ ，其中(V)是由平面 x=0,y=0,z=0 及 x+y+z=1 所围成的区域.

解答: 把 I 化为先对 z 积分，再对 y 和 x 积分的累次积分，那末应把(V)投影到 xOy 平面上,求出投影域(σ),它就是

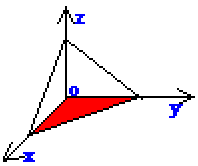
平面 x+y+z=1 与 xOy 平面的交线和 x 轴、y 轴所围成的三角区域.

我们为了确定出对z积分限,在(σ)固定点(x,y),通过此点作一条平行于z的直线,它与(V)上下边界的交

点的竖坐标：z=0 与 z=1-x-y，这就是对 z 积分的下限与上限，于是由积分公式得：

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\int_0^{1-x-y}xyz\,dz\,d\sigma$$

其中(σ)为平面区域：x≥0，y≥0，x+y≤1，如下图红色阴影部分所示：



再把(σ)域上的二重积分化成先对 y 后对 x 的累次积分，得：

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}xyz\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{xyz^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{xy}{2}(1-x-y)^2\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x}{24}(1-x)^4\,dx=\frac{1}{720}$$

柱面坐标系中三重积分的计算法

我们先来学习一下空间中的点用极坐标的表示方法。

平面上点 P 可以用极坐标(ρ，θ)来确定,因此空间中的点 P 可用数组(ρ，θ,z)来表示.显然，空间的点 P 与数组(ρ，θ,z)之间的对应关系是一一对应关系,数组(ρ，θ,z)称为空间点 P 的**柱面坐标**.它与直角坐标的关系为：

$$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z$$

构成柱面坐标系的三族坐标面分别为:

ρ=常数：以 z 轴为对称轴的同轴圆柱面族，

θ =常数：通过 z 轴的半平面族，

z =常数：与 z 轴垂直的平面族.

因此，每三个这样的坐标面确定着空间的唯一的一点，由于利用了圆柱面，所以称为**柱面坐标**。

柱面坐标系下三重积分的计算公式为：

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)}\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta, z)\rho dz d\rho d\theta$$

此处我们不在举例。

九、常微分方程

微分方程的基本概念

在许多科技领域里，常会遇到这样的问题：

某个函数是怎样的并不知道，但根据科技领域的普遍规律，却可以知道这个未知函数及其导数与自变量之间会满足某种关系。下面我们先来看一个例子：

例题：已知一条曲线过点(1,2)，且在该直线上任意点 P(x,y)处的切线斜率为 2x，求这条曲线方程

解答：设所求曲线的方程为 y=y(x)，我们根据导数的几何意义，可知 y=y(x)应满足方程：

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

我们发现这个方程中含有未知函数 y 的导数。这里我们先不求解。

微分方程的概念

我们把含有未知函数的导数（或微分）的方程称为**微分方程**。

在一个微分方程中所出现的导数的最高阶数称为**微分方程的阶**。当然阶数越高的微分方程越麻烦。

从微分方程求出未知函数是什么就叫做**解微分方程**。满足微分方程的函数（它要在某区间上连续）称为**微分方程的解**，微分方程的一般形式的解称为**微分方程的一般解**.

满足微分方程的一个有特殊要求的解称为**微分方程的一特解**，这种特解通常是**满足一定的附加条件的解**。

通常，微分方程的一般解里，含有一些任意常数，其个数与微分方程的阶数相同，因此用来确定任意常数以从一般解得出一个特解的附加条件的个数也与微分方程的阶数相同.

可分离变量的微分方程与齐次方程

下面我们来学习用积分法解一阶微分方程的问题。

并不是所有的一阶微分方程都可以用积分法求解，只有一些特殊形式的一阶微分方程可以用积分法求解，并且解法也各不相同。因此，我们学习时要认清各种微分方程的特点及它们的解法。

可分离变量的微分方程

这种方程的形式为：$y'=f(x)g(y)$

我们往往会以为将上式两端积分即可求解。其实是不对的。因为两端积分后，得

$y=\int f(x)g(y)dx$，右端是什么也求不出的，所以求不出 y 来。

其正确解法为：设 y=y(x)为所求的解，于是当 y=y(x)时，有

$$dy=y'dx=f(x)g(y)dx\text{，即}\frac{1}{g(y)}dy=f(x)g(x)$$

这一步把 y 的函数及 dy 与 x 的函数及 dx 分开了，称为**分离变量**，这是求解的关键的一步，下一步我们就可由不定积分换元法进行求解了。

例题：求方程$y'=2xy$ 的通解。

解答：这是一个可分离变量的方程，分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=2xdx,(y\neq 0)$$

两端分别积分，得

$$\ln|y|=x^2+C_1,\qquad 即 y=\pm e^{x^2}+C_1$$

令$\pm e^{C_1}=C$，得

$$y=Ce^{x^2}$$ 这就是该方程的通解。

齐次微分方程

这种微分方程的形式为：$y'=f(\frac{y}{x})$

它也不能由两端积分求解。其求解步骤为：

令 $u=\frac{y}{x}$，则$y'=xu'+u$，y 的微分方程就化成了 u 的微分方程

$$xu'+u=f(u)$$ 即：$u'=\frac{f(u)-u}{x}$

这就化成了可分离变量的微分方程，再由上面我们所学的方法就可求出方程的通解。

例题：求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$满足$y|_{x=0}=1$ 的特解。

解答：这是一个齐次方程。令 y=ux 代入，得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}$$

分离变量后，得

$$\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{1}{x}dx$$

两端分别积分，得

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+C_1$$ 或$ux=Ce^{-\frac{1}{2u^2}}$ 其中

$C = \pm e^{-C_1}$

代回 u=y/x，得原方程的通解为 $y - Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$

将初始条件 y(0)=1 代入，得 C=1.

所以满足初始条件的特解为

$$y - e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$$

线性微分方程

线性微分方程

这种微分方程的形式为：$y' + py = q$，其中，p,q 与 y,y'无关，但可以与 x 有关.它对 y 与 y'而言是一次的，故被称之为一阶线性微分方程。

当 q=0 时称为齐次线性微分方程；当 q≠0 时称为非齐次线性微分方程。

齐次线性微分方程的解法

齐次线性微分方程的形式为：$y' + py = 0$

此方程是可分离变量的微分方程，分离变量后，得：$\frac{1}{y}dy = -pdx$，这就可以由我们前面所学的方法进行求解。

例题：求 $y' + \frac{y}{x+1} = 0$ 的一般解。

解答：由此方程可得 $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x+1}dx$，故 $\ln(c_1 y) = \ln(x+1)^{-1}$

因此该方程的一般解为：$y = c(x+1)^{-1}$

非齐次线性微分方程的解法

非齐次线性微分方程的形式为：$y'+py=q$

这种方程的解法为：先求出其对应的齐次线性微分方程$y'+py=0$ 的一般解$y=ce^{-p}$，然后把 c 看作 x 的函数，再代到非齐次线性微分方程中来决定 c，使它能满足非齐次微分方程。

$y=ce^{-p}$ 中把 c 作为 x 的函数求导数比 c 作为常数求导数要多处一项：$c'e^{-p}$，所以 $y=ce^{-p}$ 中 c 作为 x 的函数代入微分方程就得到

$y'+py=c(e^{-p})'+c'e^{-p}+pce^{-p}=c'e^{-p}=q$.

所以只要$c'=qe^{p}$，即$c=\int qe^{p}dx$ 就可使非齐次线性微分方程得到满足，即$y=e^{-p}\int qe^{p}dx$ 为所求的一般解。

上面我们说学的这种解法被称为 Lagrange 常数变易法。

例题：求解 $y'+\frac{y}{x+1}=x$

解答：相应齐次线性微分方程 $y'+\frac{y}{x+1}=0$ 的一般解为：$y=c(x+1)^{-1}$

把 c 看成 x 的函数代入得：

$$c[(x+1)^{-1}]'+c'[(x+1)^{-1}]+\frac{c}{x+1}(x+1)^{-1}=c'(x+1)^{-1}=x$$

因此：c'=x(x+1)

$\therefore c=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c_1$

故：$y=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c_1\right)(x+1)^{-1}$ 就是非齐次线性微分方程的一般解。

可降阶的高阶方程

求解高阶微分方程的方法之一是设法降低方程的阶数。下面我们以二阶方程为例来学习三种可以降阶的方程。

1. 右端仅含 x 的方程：y″=f(x)

对这类方程，只须两端分别积分一次就可化为一阶方程

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

再次积分，即可求出方程得通解。

$$y = \int [\int f(x)dx]dx + C_1 x + C_2$$

例题：求方程 y″=cosx 的通解。

解答：一次积分得：

$$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1$$

二次积分即得到方程得通解：

$$y = -\cos x + C_1 x + C_2$$

2. 右端不显含 y 的方程：y″=f(x,y')

我们为了把方程降阶，可令 y'=p，将 p 看作是新的未知函数，x 仍是自变量，于是 $\frac{dp}{dx} = y''$，代入原方程得：

$$\frac{dp}{dx} = f(x,p)$$

这就是一个一阶方程，然后即可由我们前面学的方法进行求解了。

例题：求方程 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解。

解答：令 y'=p. $\frac{dp}{dx} = y''$，代入方程，得

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} p$$

分离变量后，得

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

积分，得

$p = C_1 x$. 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 x$

再积分，即得原方程的通解：

$$y=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2.$$

3. 右端不显含 x 的方程：y″=f(y,y')

我们为了把方程降阶，可令 y'=p，将 p 看作是自变量 y 的函数，有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

代入原方程，得

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

这是关于 p 的一阶方程，我们可由此解出通解，然后再代入原方程求解，即可。

例题：求方程 $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ 的通解

解答：令 $y'=p,y''=p\frac{dp}{dy}$ 代入原方程得：

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$$

它相当于两个方程：

$$p=0与y\frac{dp}{dy}-p=0$$

由第一个方程解得：y=C;

第二个方程可用分离变量法解得

$p=C_1y$

从而

$$\frac{dy}{dx}=C_1y$$

由此再分离变量，解得：

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

这就是原方程的通解（解 y=C 包含在这个解中）

线性微分方程解的结构

我们以二阶方程为例来说明线性方程解的结构，当然这些结论也适合于高阶线性微分方程。

二阶线性方程的一般形式为

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

其中 y″, y’, y 都是一次的，否则称为二阶非线性方程。

线性齐次方程解的结构

二阶线性齐次方程的形式为：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

定理：如果函数 $y_1(x)$与$y_2(x)$ 均是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的解，那末

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是该方程的解，其中 C_1, C_2 为任意常数。

线性齐次方程的这一性质，又称为**解的叠和性**。

问题：我们所求得的解 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是不是方程的 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 通解呢？

一般来说，这是不一定的，那么什么情况下它才是方程的通解呢？为此我们由引出了两个概念：**线性相关与线性独立**。

定义：设 $f_1(x)$与$f_2(x)$ 是定义在区间 I 的两个函数，如果 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \equiv C(\text{常数})$，那末称此两函数在区间 I **线性相关**，否则，即 $f_1(x)$与$f_2(x)$ 之比不恒等于一个常数，那末称此两函数**线性独立或线性无关**。

为此我们有了关于线性齐次方程特解的定理。

定理：如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是二阶线线性齐次方程的任意两个线性独立的特解，那末

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$就是该方程的通解，其中C_1,C_2为任意常数。

线性非齐次方程解的结构

二阶线性非齐次方程的形式为：

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

对于一阶线性非齐次方程我们知道，线性非齐次方程的通解等于它的一个特解与对应的齐次方程通解之和。那末这个结论对高阶线性非齐次方程适合吗？

答案是肯定的。为此我们有下面的定理。

定理：设 y 是二阶线性非齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的任一特解，Y 是与该方程对应的齐次线性方程的通解，那末 y=y+Y 就是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的通解。

我们为了以后的解题方便，又给出了一个定理，如下：

定理：设有线性非齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$. 如果$y_1(x)$与$y_2(x)$分别是方程

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$与方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$

的解，那末$y_1(x)+y_2(x)$就是原方程的解。

二阶常系数齐次线性方程的解法

前面我们已经知道了，无论是线性齐次方程和非齐次方程，它们的通解结构虽然知道，但通解的寻求却是建立在已知特解的基础上。但是，即使对二阶线性齐次方程，特解的寻求也没有一般的方法。但是对于常系数的二阶线性齐次方程，它的通解可按一定的方法很容易求的。

二阶线性齐次方程的解法

二阶线性齐次方程的一般形式为：$y''+a_1y'+a_2y=0$，其中 a_1，a_2 为实常数。

我们知道指数函数 e^{ax} 求导后仍为指数函数。利用这个性质，可适当的选择常数 ρ，使 e^{ax} 满足方程上面的方程。我们可令：$y=e^{ax}$,从而$y'=\rho e^{ax}$,$y''=\rho^2e^{ax}$，代入上面的方程得：

$$e^{ax}(\rho^2+a_1\rho+a_2)=0$$

因为 $e^{ax}\neq 0$，所以：

$$\rho^2+a_1\rho+a_2=0$$

这样，对于上面二次方程的每个根 ρ，e^{ax} 就是方程 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的一个解。方程 $\rho^2+a_1\rho+a_2=0$ 就被称为方程 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的特征方程。根据这个代数方程的根的不同性质，我们分三种不同的情况来讨论：

1. 特征方程有两个不等的实根的情形

设此两实根为 $\rho_1,\rho_2(\rho_1\neq\rho_2)$。于是 e^{ρ_1x},e^{ρ_2x} 是齐次方程 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的两个特解，由于它们之比不等于常数，所以它们线性独立，因此，方程 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的通解为：

$$y=c_1e^{\rho_1x}+c_2e^{\rho_2x}$$ 其中 c_1，c_2 为实常数。

2. 特征方程有重根的情形

此时特征方程的重根应为：$\rho_1=-\dfrac{a_1}{2}$，于是只能得到 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的一个特解：$y_1=e^{\rho_1x}$，我们可根据常数变易法再求其另一个特解为：$y_2=xe^{\rho_1x}$. 于是方程 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的通解为:

$$y=e^{\rho_1x}(C_1+C_2x)$$

3. 特征方程有共轭复根的情形

设共轭复根为 $\rho_1=a+i\beta,\ \rho_2=a-i\beta$，那末 $y_1=e^{(a+i\beta)x},y_2=e^{(a-i\beta)x}$ 是方程 $y''+a_1y'+a_2y=0$ 的两个线性独立的解，但是这种复数形式的解使用不方便，为了得到实数形式

的解，利用欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，为此可以得到方程$y''+a_1y'+a_2y=0$的通解：

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

由上面可知，求二阶常系数线性齐次方程通解的步骤为：

1. 对照方程$y''+a_1y'+a_2y=0$写出其特征方程：$\rho^2+a_1\rho+a_2=0$；

2. 求出特征方程的两个根：ρ_1，ρ_2

3. 根据ρ_1，ρ_2是不同实根，相同实根，共轭复根，分别利用上面的公式写出原方程的通解。

例题：求方程$y''-2y'-3y=0$的通解.

解答：此方程的特征方程为：

$$\rho^2-2\rho-3=0$$

它有两个不相同的实根$\rho_1=-1,\rho_2=3$，因此所求的通解为：

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

二阶常系数非齐次线性方程的解法

我们来学习二阶常系数线性非齐次方程$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$的求解方法.由前面我们知道线性非齐次方程的通解，等于它的任一特解与对应齐次方程的通解之和。前面我们已知道对应齐次方程的通解的解法，现在的关键是怎样求得特解。

二阶常系数非齐次线性方程的解法

常系数二阶线性非齐次方程的一般形式为：

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$$

下面我们根据 f(x)具有下列特殊情形时，来给出求其特解的公式：

（1）：设$f(x)=\varphi(x)e^{\mu x}$，其中 μ 为一常数，

若$\varphi(x)$为零次多项式，此时：

a):当 μ 不是特征方程的根时，可设$\bar{y} = Ae^{\mu x}$

b):当 μ 是特征方程的单根时，可设$\bar{y} = Axe^{\mu x}$

c):当 μ 是特征方程的重根时，可设$\bar{y} = Ax^2e^{\mu x}$

若$f(x) = \varphi(x)$为一 m 次多项式，即：μ=0，此时

a):当 $a_2 \neq 0$ 即 μ=0 不是特征方程的根时，可设

$$\bar{y} = B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m$$

b):当 $a_2=0$，$a_1 \neq 0$ 时，即 μ=0 是特征方程的单根时，可设

$$\bar{y} = x(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$$

c):当 $a_2=0$，$a_1=0$ 时，即 μ=0 是特征方程的重根时，可设

$$\bar{y} = x^2(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$$

例题：求方程$y''+4y'+3y = x-2$的一个特解

解答：对应的特征方程为$p^2 + 4p + 3 = 0$

原方程右端不出现$e^{\mu x}$，但可以把它看作是$(x-2)e^{0x}$，即 μ=0

因为 μ=0 不是特征方程的根，所以设特解为

$$\bar{y} = B_0 x + B_1$$

代入原方程，得

$$4B_0 + 3B_0 x + 3B_1 = x - 2$$

于是：

$$B_0 = \frac{1}{3}, B_1 = -\frac{10}{9}$$

故所求的特解为：

$$\bar{y}=\frac{1}{3}x-\frac{10}{9}$$

（2）：设 $f(x)=e^{\mu x}\varphi(x)\cos vx$ 或 $f(x)=e^{\mu x}\varphi(x)\sin vx$，其中 a，μ，v 为常数。

此时的特解为：$\bar{y}=e^{\mu x}(A\cos vx+B\sin vx)$

例题：求方程 $y''+3y=\sin 2x$ 的特解

解答：显然可设特解为：

$$\bar{y}=A\sin 2x$$

代入原方程得：

$$(-4A+3A)\sin 2x=\sin 2x$$

由此得：

$$A=-1$$

从而原方程的特解是

$$\bar{y}=-\sin 2x$$

十、无穷级数

级数的概念及其性质

我们在中学里已经遇到过级数——等差数列与等比数列，它们都属于项数为有限的特殊情形。下面我们来学习项数为无限的级数，称为无穷级数。

无穷级数的概念

设已给数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 把数列中各项依次用加号连接起来的式子 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 称为**无穷级数**，简称**级数**. 记作：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 或 $\sum a_n$，即：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$，数列的各项 $a_1, a_2, \cdots$ 称为级数的**项**，a_n 称为级数的**通项**.

取级数最前的一项，两项，…，n 项，…相加，得一数列 $S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，…，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，… 这个

数列的通项 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项的**部分和**，该数列称为级数的**部分和数列**。

如果级数的部分和数列收敛：$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，那末就称该**级数收敛**，极限值 S 称为**级数的和**。

例题：证明级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的和是 1.

证明：

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\
&= (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) \\
&= 1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

当 n→∞时，Sn→1. 所以级数的和是 1.

级数的性质

1. **级数收敛的必要条件**：收敛的级数 $\sum a_n$ 的通项 a_n 当 n→∞时趋于零，即：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

注意：此条件只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件。

例如：级数 $\sum\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 虽然在 n→∞时，通项 $a_n=\frac{1}{n}\to 0$，级数却是发散的。

此级数为**调和级数**，在此我们不加以证明。

2. 如果级数 $\sum a_n$ 收敛而它的和是 S，那末每一项乘上常数 c 后所得到的级数 $\sum ca_n$，也是收敛的，而且它的和是 cS. 如果 $\sum a_n$ 发散，那末当 c≠0 时 $\sum ca_n$ 也发散。

3. 两个收敛的级数可以逐项相加或相减。

4. 在任何收敛的级数中，不改变连在一起的有限项的次序而插入括号，所得的新级数仍收敛，其和不变。

注意：无限项的所谓和是一种极限，与有限项的和在本质上是有区别的。

5. 在一个级数的开头添入或去掉有限个项并不影响这个级数的收敛或发散。

正项级数的收敛问题

对于一个级数，我们一般会提出这样两个问题：它是不是收敛的？它的和是多少？显然第一个问题是更重要的，因为如果级数是发散的，那末第二个问题就不存在了。下面我们来学习如何确定级数的收敛和发散问题。

我们先来考虑**正项级数**(即每一项 $a_n \geqslant 0$ 的级数）的收敛问题。

判定正项级数敛散性的基本定理

定理：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分与必要条件是部分和 S_n 上有界. 如果 S_n 上无界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散于正无穷大。

例如：p 级数：$\sum \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p \leqslant 1$ 时发散。

注意：在此我们不作证明。

正项级数的审敛准则

准则一：设有两个正项级数 $\sum a_n$ 及 $\sum b_n$，而且 $a_n \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$. 如果 $\sum b_n$ 收敛，那末 $\sum a_n$ 也收敛；如果 $\sum a_n$ 发散，那末 $\sum b_n$ 也发散.

例如：级数 $\sum \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$ 是收敛的，因为当 $n>1$ 时，有 $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$，而等比级数 $\sum \frac{1}{2^n}$ 是收敛的

准则二：设有两个正项级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$ 那末这两个级数或者同时收敛，或者同时发散。

关于此准则的补充问题

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$，那末当 $\sum b_n$ 收敛时，$\sum a_n$ 也收敛；如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$，那末当 $\sum b_n$ 发散时，$\sum a_n$

也发散.

例如：$\sum \tan\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\frac{1}{n^2}\Big/\frac{1}{n^2}\right)=1$ ，而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

注意：以上这两个准则来判定一个已知级数的敛散性，都需要另选一个收敛或发散的级数，以资比较. 下面我们来学习两个只依赖于已知级数本身的审敛准则.

准则三：设有正项级数 $\sum a_n$. 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$ 存在，那末当 λ<1 时级数收敛，λ>1 时级数收敛.

注意：此准则就是**达朗贝尔准则**. 这种判定方法称为**检比法**.

例如：级数 $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\cdots$ 是收敛的，因为当 n→∞时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{2^n}{n}=\frac{2n}{n+1}\to 2>1$.

准则四（柯西准则）：如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$ 存在，那末当 λ<1 级数 $\sum a_n$ 收敛，λ>1 级数 $\sum a_n$ 发散.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n e^{-n}$ 是发散的，因为当 n→∞时，$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n^n e^{-n}}=ne^{-1}\to+\infty$

一般常数项级数的审敛准则

当级数中的正数项与负数项均为无穷多时，就称级数为**一般常数项级数**.

绝对收敛与条件收敛

设有一般常数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

取各项的绝对值所构成的级数

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

称为对应于原级数的**绝对值级数**.

绝对收敛的准则：如果对应的绝对值级数收敛，那末原级数也收敛.

注意：此时称$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$为**绝对收敛**，

如果级数$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$发散而级数$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$收敛，

则称$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$为**条件收敛**。

关于绝对收敛与条件收敛的问题

一个绝对收敛级数的正数项与负数项所组成的级数都是收敛的；

一个条件收敛级数的正数项与负数项所组成的级数都是发散的。

例题：证明：当 λ>1 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$为一绝对收敛级数.

证明：因为$\left|\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{2}}$而当 λ>1 时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}\right|$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$绝对收敛.

交错级数与它的审敛准则

交错级数就是任一相邻的两项都是符号相反的数，它是一般常数项级数的一种特殊级数.

交错级数可以写成：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$

交错级数的审敛准则(莱布尼兹准则)：

如果$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>\cdots$且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，那末级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

例如：交错级数$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$是收敛的，因为它满足莱布尼兹准则的两个条件：$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots$及$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

函数项级数、幂级数

在自然科学与工程技术中运用级数这一工具时，经常用到不是常数项的级数，而是函数项的级数.而常数项级数是研究函数项级数的基础。

函数项级数的概念

设有函数序列，$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$，其中每一个函数都在同一个区间 I 上有定义，那末表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$ 称为定义在 I 上的**函数项级数**。

下面我们来学习常见而应用广泛的一种具有如下形式的函数项级数：

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

它们的各项都是正整数幂的幂函数.这种级数称为**幂级数**，其中 c_n(n=0,1,2,…)均为常数.

显然，当上面级数中的变量 x 取定了某一个值 x_0 时，它就变为一个常数项级数。

幂级数的收敛问题

与常数项级数一样，我们把 $s_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ 称为**幂级数的部分和**。如果这部分和当 n→∞时对区间 I 中的每一点都收敛，那末称级数在**区间 I 收敛**。此时 $s_n(x)$ 的极限是定义在区间 I 中的函数，记作:s(x). 这个函数 s(x)称为级数的**和函数**，简称**和**，记作：$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$

对于幂级数，我们关心的问题仍是它的收敛与发散的判定问题，下面我们来学习关于幂级数的收敛的判定准则。

幂级数的审敛准则

准则：设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$.如果极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$ ，那末，当 $|x| < R$ 时，**幂级数收敛，而且绝对收敛**；当 $|x| > R$ 时，**幂级数发散**，其中 R 可以是零，也可以是+∞.

由上面的准则我们可知:幂级数的收敛区间是关于原点对称的区间 $|x| < R$.在这个区间内级数收敛,在这个区间外级数发散.区间 $|x| < R$ 称为幂级数的**收敛区间**，简称**敛区**。正数 R 为幂级数的**收敛半径**.

关于此审敛准则问题

讨论幂级数收敛的问题主要在于收敛半径的寻求。当 $|x| = R$ 时，级数的敛散性不能由准则来判定，需另行讨论。

例题： 求幂级数 $1+\frac{x}{2\cdot5}+\frac{x^2}{3\cdot5^2}+\cdots+\frac{x^n}{(n+1)5^n}+\cdots$ 的收敛区间.

解答： 该级数的收敛半径为：

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)5^n}}{\frac{1}{(n+2)5^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)5}{n+1}=5$$

所以此幂级数的敛区是（-5，5）.

在 x=5 与 x=-5，级数分别为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 与 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 前者发散，后者收敛.

故级数的收敛区间是[-5,5)

幂级数的性质

性质 1： 设有两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ ，如果

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f_1(x)$，$-R_1<x<R_1$

$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=f_2(x)$，$-R_2<x<R_2$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f_1(x)\pm f_2(x)$，$-R<x<R$　其中 $R=\min(R_1,R_2)$

性质 2： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的和 s(x)在敛区内时连续的.

性质 3：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的和 s(x)在敛区内的任一点均可导，且有逐项求导公式：

$$s'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2\cdots+nc_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

求导后的幂级数与原级数有相同的收敛半径。

性质 4：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的和 s(x)在敛区内可以积分，并且有逐项积分公式：

$$\int_0^x s(x)=\int_0^x c_0dx+\int_0^x c_1xdx+\cdots+\int_0^x c_nx^ndx+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

积分后所得的幂级数与原级数有相同的收敛半径。

由以上这些性质可知：**幂级数在其敛区内就像普通的多项式一样，可以相加，相减，可以逐项求导，逐项积分**。

函数的幂级数展开式

通过前面的学习我们看到，幂级数不仅形式简单，而且有一些与多项式类似的性质。而且我们还发现有一些可以表示成幂级数。为此我们有了下面两个问题：

问题 1：函数 f(x)在什么条件下可以表示成幂级数

$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$；

问题 2：如果 f(x)能表示成如上形式的幂级数，那末系数 c_n(n=0,1,2,3,…)怎样确定？

下面我们就来学习这两个问题。

泰勒级数

我们先来讨论第二个问题.假定 f(x)在 a 的邻区内能表示成

$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$ 这种形式的幂级数，其中 a 是事先给定某一常数，我们来看看系数 c_n 与 f(x)应有怎样的关系。

由于 f(x)可以表示成幂级数，我们可根据幂级数的性质，在 x=a 的邻区内 f(x)可任意阶可导. 对其幂级数两端逐次求导。得：

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\cdots,$$

$$f''(x)=2c_2+3!c_3(x-a)+\cdots,$$

……………………………………………………

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+(n+1)!c_{n+1}(x-a)+\cdots,$$

……………………………………………………

在 f(x)幂级数式及其各阶导数中，令 x=a 分别得：

$$c_0=f(a),c_1=f'(a),c_2=\frac{1}{2!}f''(a),\cdots,c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a),\cdots$$

把这些所求的系数代入 $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$ 得：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

该式的右端的幂级数称为 f(x)在 x+a 处的**泰勒级数**.

关于泰勒级数的问题

上式是在 f(x)可以展成形如 $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$ 的幂级数的假定下得出的. 实际上，只要 f(x)在 x=a 处任意阶可导，我们就可以写出函数的泰勒级数。

问题：函数写成泰勒级数后是否收敛？是否收敛于 f(x)？

函数写成泰勒级数是否收敛将取决于 f(x)与它的泰勒级数的部分和之差

$$r_n(x)=f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n]$$

是否随 n→＋∞而趋向于零. 如果在某一区间 I 中有 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0 \quad x\in I$ 那末 f(x)在 x=a 处的泰勒级数将在区间 I 中收敛于 f(x)。此时，我们把这个泰勒级数称为函数 f(x)在区间 I 中的**泰勒展开式**.

泰勒定理

设函数 f(x)在 x=a 的邻区内 n+1 阶可导，则对于位于此邻区内的任一 x，至少存在一点 c,c 在 a 与 x 之间，使得：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r_n(x) \quad \text{其中} r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

此公式也被称为**泰勒公式**。(在此不加以证明）

在泰勒公式中，取 a=0，此时泰勒公式变成：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

其中 c 在 0 与 x 之间

此式子被称为**麦克劳林公式**。

函数 f(x)在 x=0 的泰勒级数称为麦克劳林级数.当麦克劳林公式中的余项趋于零时，我们称相应的泰勒展开式为**麦克劳林展开式**.

即：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

几种初等函数的麦克劳林的展开式

1.指数函数 e^x

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$$

2.正弦函数的展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$$

3.函数 $(1+x)^m$ 的展开式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,|x|<1$$