

실험계획법 및 최적설계

Hae-Jin Choi

School of Mechanical Engineering,
Chung-Ang University

2014.10.16



목차

1. Introduction to DOE

[실험계획법 소개]

2. Factorial Experiments (2^2)

3. Factorial Experiments (2^3)

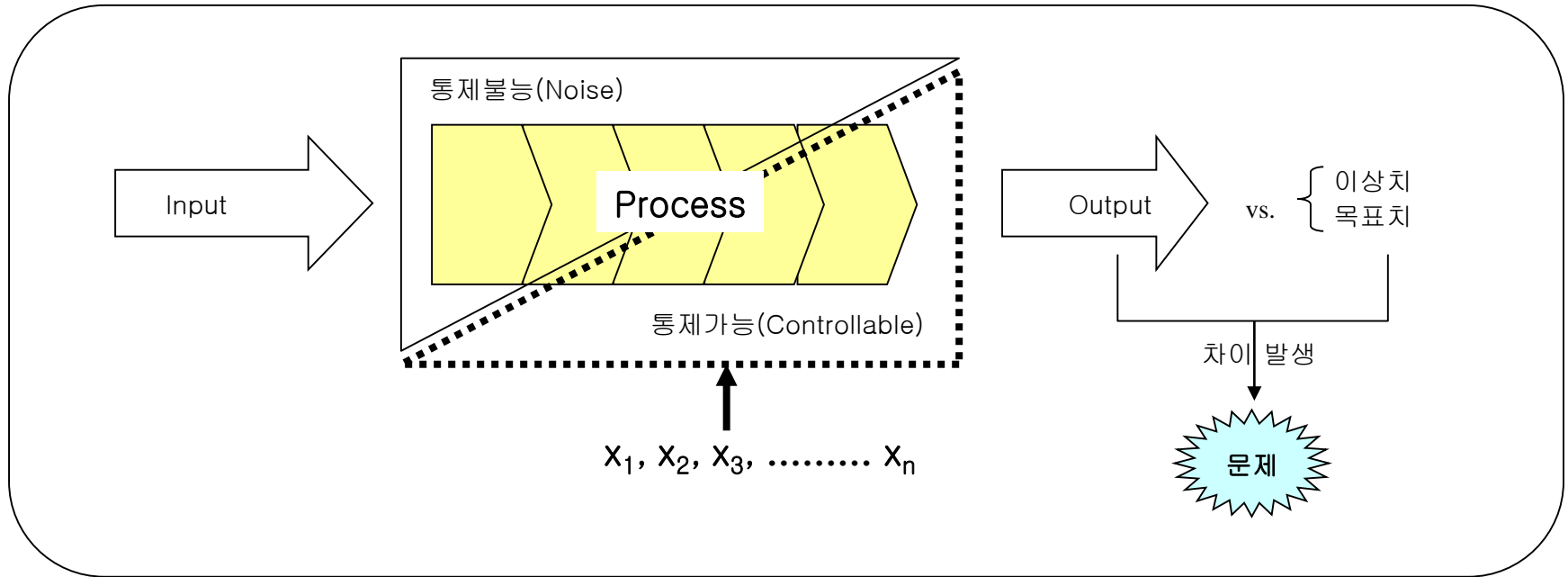
실험계획의 정의

실험계획법(Design of Experiments)이란?

- 해결하고자 하는 문제에 대하여
- 실험을 어떻게 행하고
- 데이터를 어떻게 취하며
- 어떠한 통계적 방법으로 데이터를 분석하면
- 최소의 실험횟수에서
- 최대의 정보를 얻을 수 있는가

를 계획하는 것이다.

실험계획의 개념



- ✓ 전통적 실험계획법 : 통제 용이한 요인을 Control하여 최적의 결과를 얻는다.
- ✓ Taguchi 기법 : 잡음까지 고려하여 실제 사용현장에서 잡음에 둔감한 우수한 성능특성을 지닌 결과를 얻는다.
- ※ 최소의 실험(시간/비용 절감)을 통하여 유용한 결과를 도출한다.

3. Factorial Experiments (Ch.5. Factorial Experiments)

Hae-Jin Choi

School of Mechanical Engineering,
Chung-Ang University

Introduction to Factorials

- Most experiments for process and quality improvement involve several variables. Factorial experimental designs are used in such situations. Specially, by a factorial experiment we mean that in each complete trial or replicate of the experiment all possible combinations of the levels of the factors are investigated. Thus, if there are two factors A and B with a levels of factor A and b levels of factor B, then each replicate contains all ab possible combinations.

2-Way ANOVA 예제

예제: 합금의 강도에 영향을 미치는 인자로 합성온도와 가열촉매가 있다. 높은 강도의 합금을 제작하고자 합성온도 3수준(200, 300, 400℃), 가열촉매 2수준(A, B)에서 2번씩 반복하여 랜덤하게 실험한 결과 다음의 데이터를 얻었다. 각 인자와 교호작용의 효과에 대해 조사하고, 가장 높은 강도를 주는 조건을 찾고 싶다.

《합금의 강도》

항목		합성온도		
		200℃	300℃	400℃
촉매	A	80, 69	103, 111	117, 140
	B	122, 132	141, 143	185, 186

2-Way ANOVA 예제

☞ Minitab step#1 : Worksheet에 데이터 입력

촉매	온도	강도
A	200	80
A	200	69
A	300	103
A	300	111
A	400	117
A	400	140
B	200	122
B	200	132
B	300	141
B	300	143
B	400	185
B	400	186

가열촉매 및 합성온도별 합금강도 데이터를 Stack하여 1열로 쌓는다.

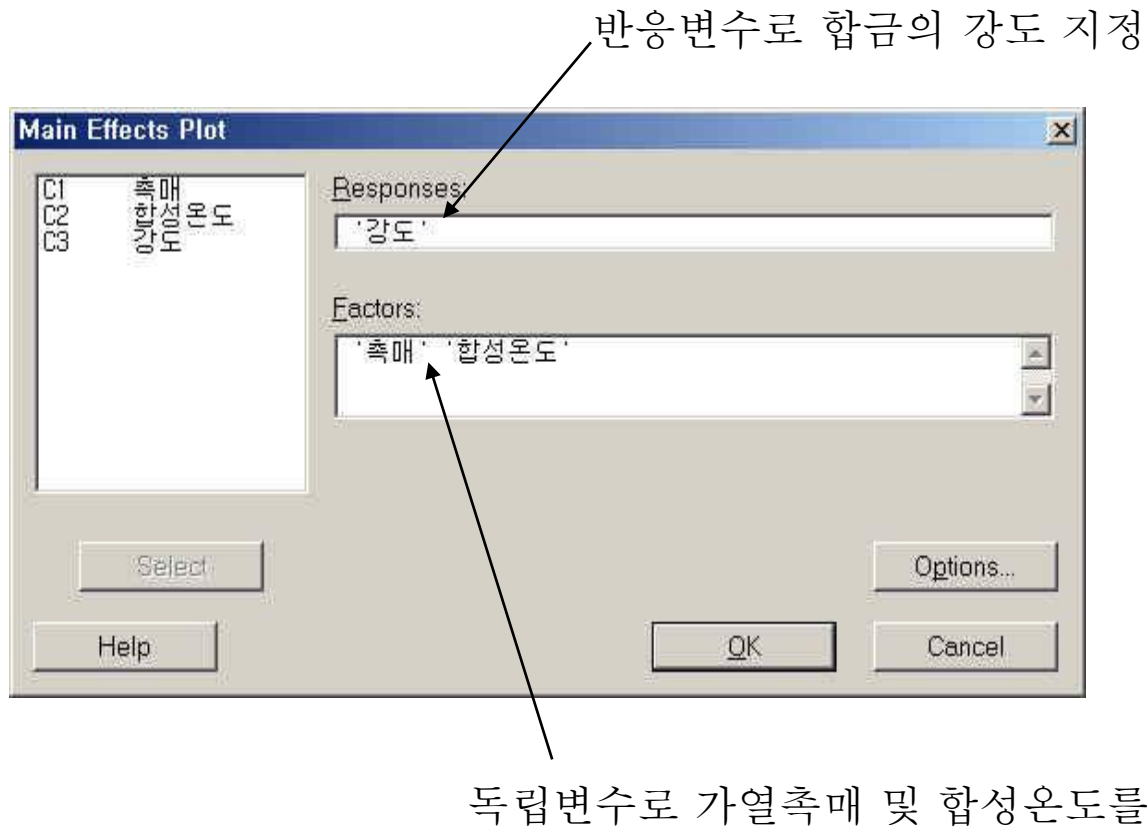
2원 배치 이상에서는 항상 1열로 Stack되어야 분석이 가능하다.

2-way.mtw에 저장되어 있다.

2-Way ANOVA 예제

☞ Minitab step#2 : 그래프에 의한 시각적 해석 (주효과)

명령어 : Stat > ANOVA > Main Effects plot...

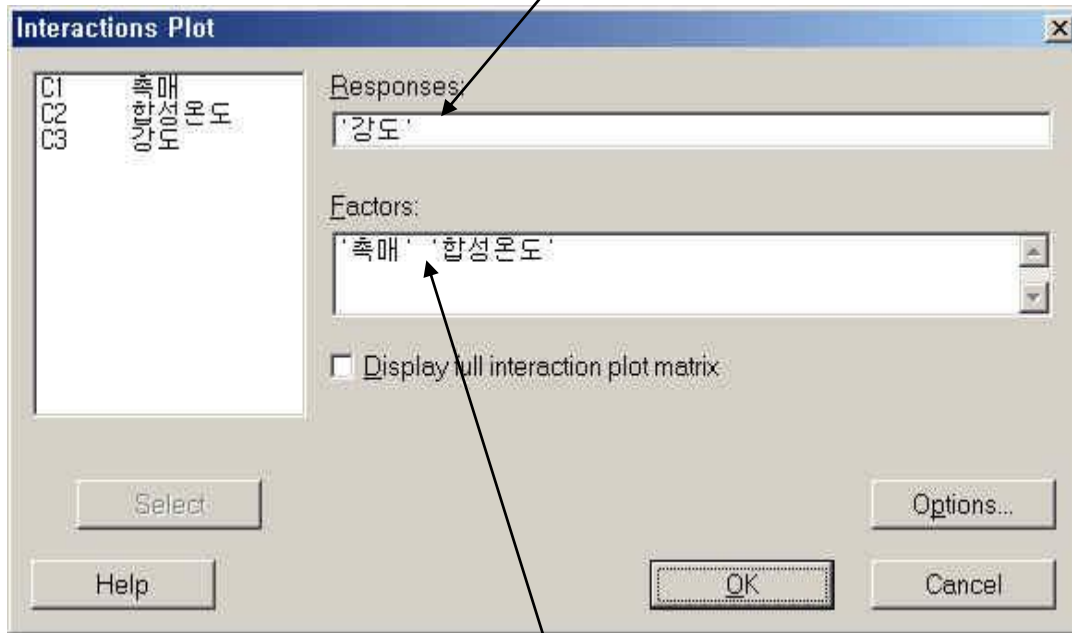


2-Way ANOVA 예제

☞ Minitab step#3 : 그래프에 의한 시각적 해석 (교호작용)

명령어 : Stat > ANOVA > Interactions plot...

반응변수로 합금의 강도 지정



The image shows the 'Interactions Plot' dialog box in Minitab. On the left, a list of variables includes C1, C2, C3, and '합금의 강도'. The 'Responses' field contains '강도'. The 'Factors' field contains '가열처리' and '합성온도'. There is a checkbox for 'Display full interaction plot matrix' which is currently unchecked. At the bottom are buttons for 'Select', 'Help', 'Options...', 'OK', and 'Cancel'. An arrow points from the text '반응변수로 합금의 강도 지정' to the 'Responses' field. Another arrow points from the text '독립변수로 가열처리 및 합성온도를 지정' to the 'Factors' field.

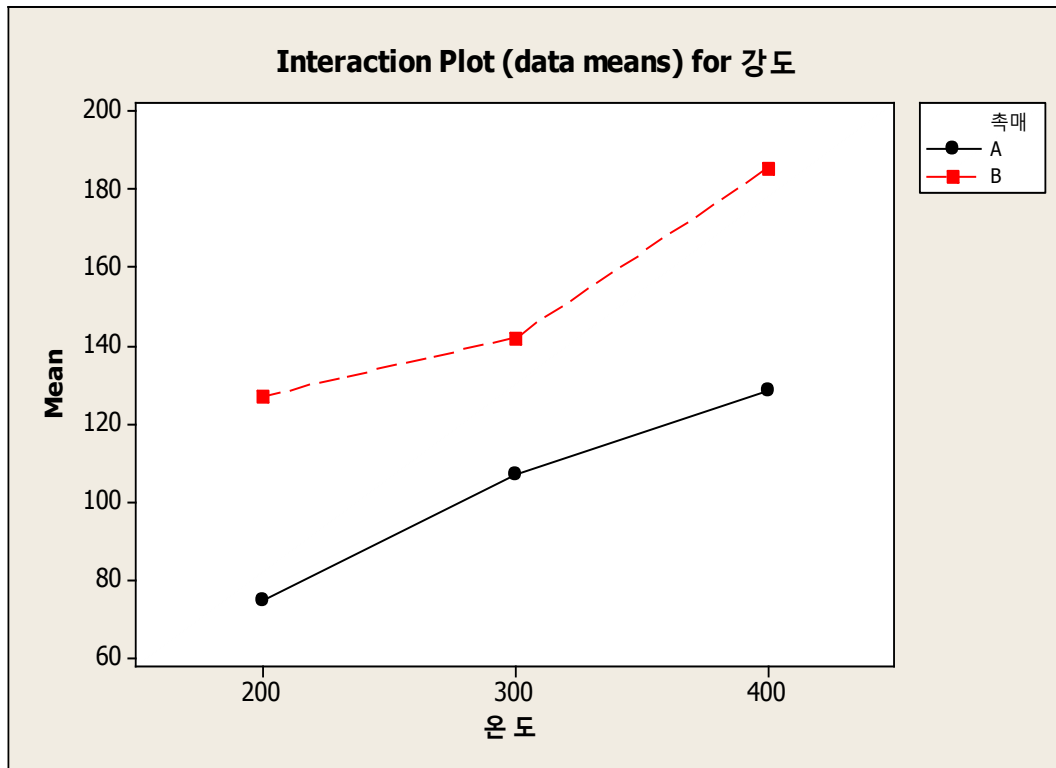
※ 주효과와 동일하게 지정한다

독립변수로 가열처리 및 합성온도를 지정

2-Way ANOVA 예제

그래프에서 연결된 선이 거의 평행선에 가까우므로 촉매와 합성온도간의 교호작용이 유의하지 않을 것으로 예상된다.

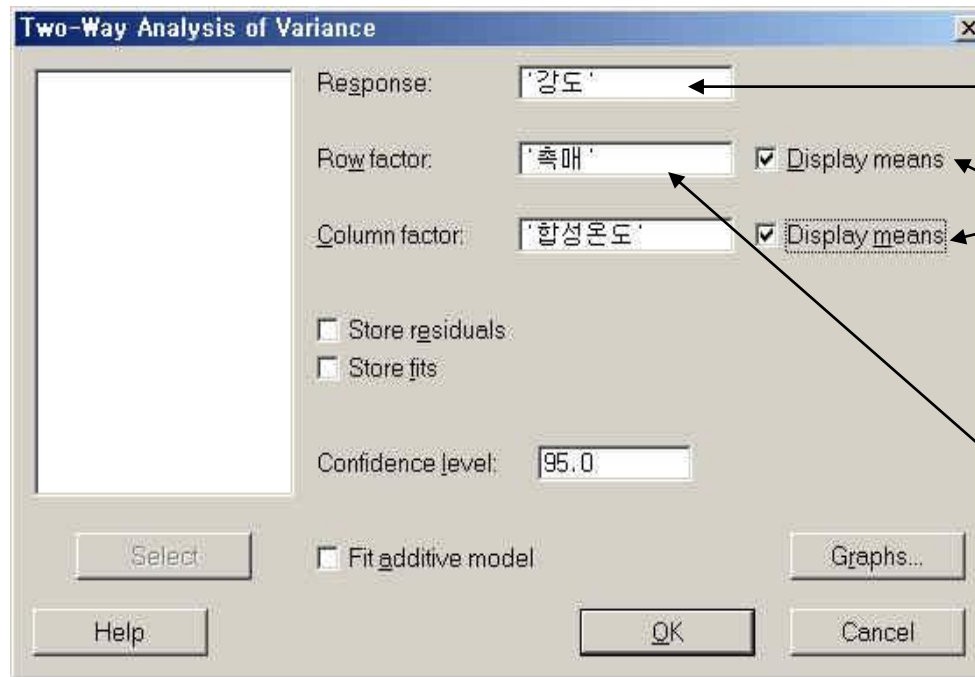
단, 최종 판단은 통계적 분석(p-value)으로 내리도록 한다.



2-Way ANOVA 예제

☞ Minitab step#4 : Two-way ANOVA(2원 배치)로 분석

명령어 : Stat > ANOVA > Two-way ANOVA...



반응변수 합성강도 지정

각 인자수준에 대하여
모평균의 점 추정치와
95% 신뢰구간을 출력

독립변수 가열속매 및
합성온도 지정.
Row/Column 임의로 지정 가능

먼저, 교호작용이 유의 하다고 가정하고 분석한다.

2-Way ANOVA 예제

☞ Minitab step#5 : ANOVA 분석 표의 확인

p-value가 0.05보다 작기 때문에 촉매와 온도는 강도에 영향을 미친다고 할 수 있다.

Two-way ANOVA: 강도 versus 촉매, 온도

Source	DF	SS	MS	F	P
촉매	1	6960.1	6960.08	101.98	0.000
온도	2	6379.2	3189.58	46.73	0.000
Interaction	2	270.2	135.08	1.98	0.219
Error	6	409.5	68.25		
Total	11	14018.9			

S = 8.261 R-Sq = 97.08% R-Sq(adj) = 94.64%

교호작용의 효과는 $p\text{-value}=0.219 > 0.05$ 로 유의하지 않아 교호작용을 오차 항에 Pooling하여 재 분석이 필요하다.

Statistical Hypothesis

- A statistical hypothesis is a statement about the parameters of a probability distribution. For example, we may think that the mean values of distributions are equal. This may be stated formally as

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a \quad (\text{Null hypothesis})$$

$$H_1 : \text{At least one mean is different} \quad (\text{Alternative hypothesis})$$

- Type I error the null hypothesis is rejected when it is true.
- Type II error the null hypothesis is accepted when it is false

2³ 실험의 설계

[자동차 Case Study]

교통경찰 K씨는 자동차 운전과 보행인의 안전에 관한 논문을 작성하고자 한다.

1. 인자 (factor) 선정

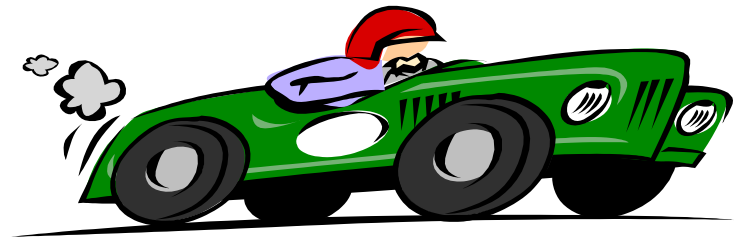
자동차 운전시 어떤 인자가 보행인의 안전에 영향을 미칠 것인지 결정한다.

: 운전자의 혈중 알코올 농도, 자동차의 속도, 보행인의 옷 색깔

2. 반응 (response) 선정

보행인의 안전을 정량적으로 수치화할 수 있는 또 실험가능한 반응을 선정한다.

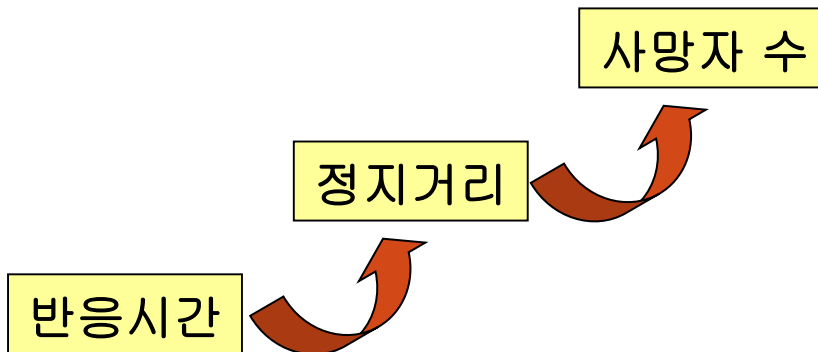
: 운전자가 브레이크 페달을 밟는 반응시간



2³ 실험의 설계

교통경찰 K씨가 관심이 있는 것은 자동차 사고에 의한 사망자 수를 줄이는 것이다. 따라서 CTQ(Critical To Quality)는 ‘사망자 수’이나, 이는 실험을 통해 측정하는 것은 곤란한 문제이므로 이를 대용할 대체 특성으로 ‘정지거리’ 또는 ‘반응시간’ 등을 고려할 수 있다.

운전 시뮬레이터로 간단히 실험할 수 있도록 특성치 y로 운전자의 ‘반응시간’을 선정하기로 한다. 시뮬레이터는 프로그램에 따라 정지깃발(보행인)이 출현하면 운전자가 브레이크 페달을 밟는 것으로 실험하기로 한다.



<실험인자 및 수준의 선택>

	인자	- 조건	+ 조건
A	음주 정도	없음	소주 4잔
B	자동차 속도	60Km	100Km
C	돌발색	검정	빨강

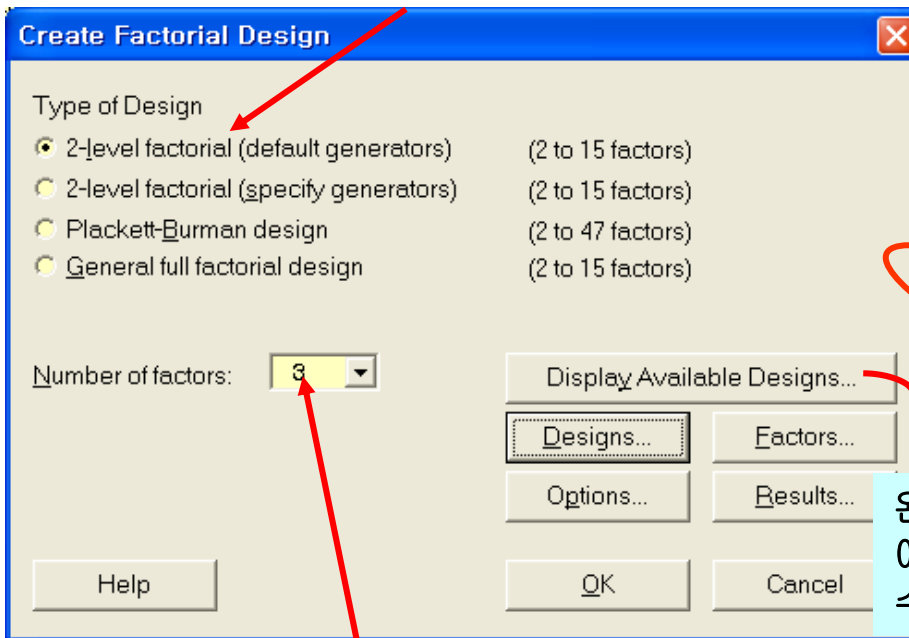
※ 소주 4잔 : 혈중알코올 농도 ~ 0.01%

2³ 실험의 설계

☞ Minitab step#1 : 요인배치 실험의 설계

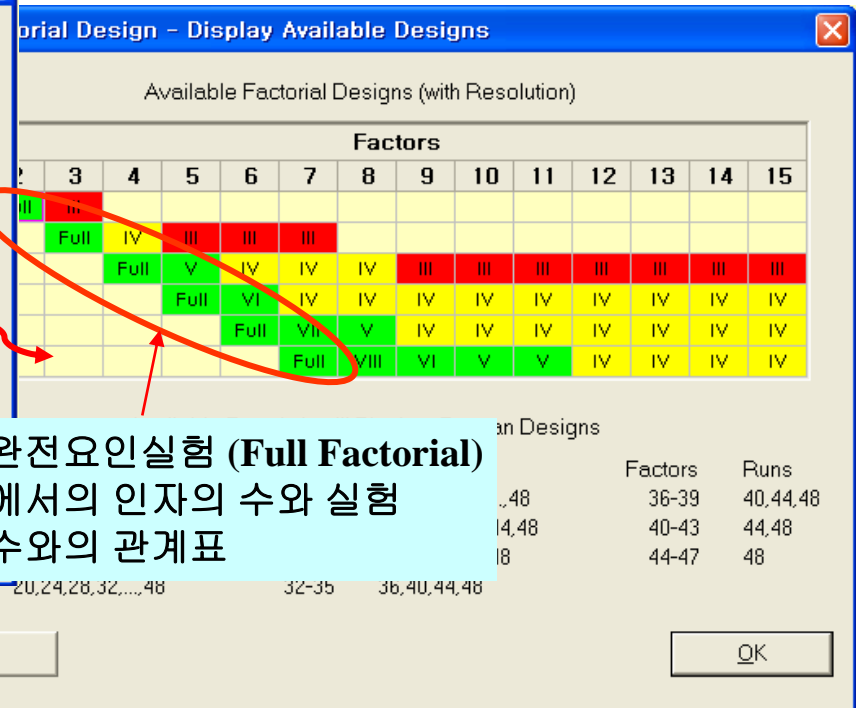
MINITAB - Ver.14. *Stat> DOE> Factorial> Create Factorial Design...*

2^N 요인실험의 기본설정



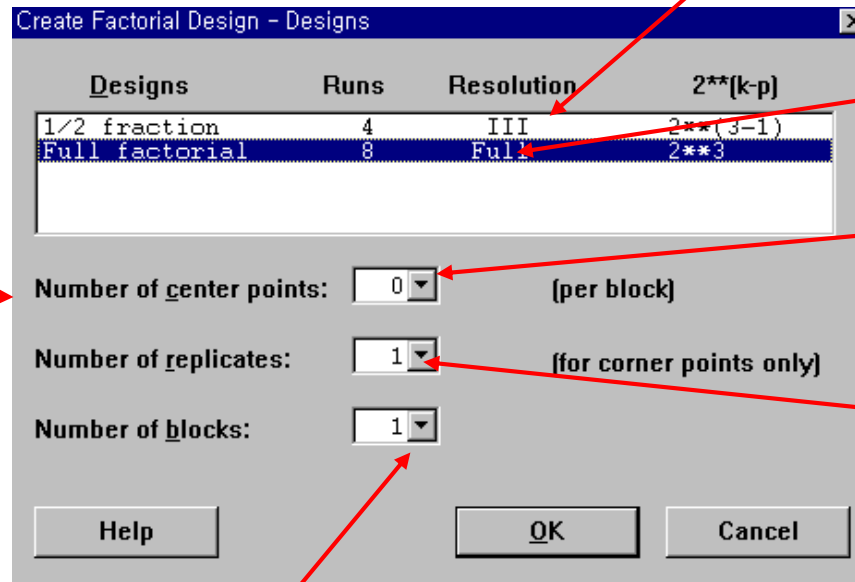
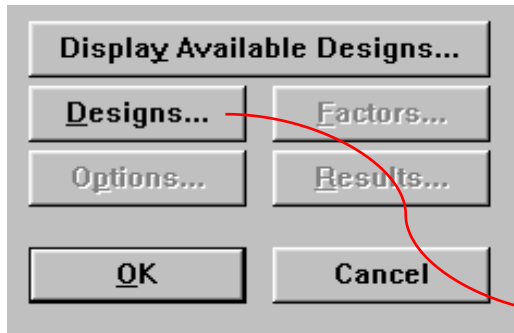
실험할 인자의 개수 결정
3을 선택한다.

실험설계를 위한 참고표



2³ 실험의 설계

Design... 선택 후 나머지 Tab이 활성화 된다.



일부 실시법 실행시 선택한다.

완전요인실험으로
선택한 후 OK 클릭!

인자의 수준 중심에서
실험할 경우 선택

실험의 반복 회수를
결정한다.

Blocking 하여 실험할 때 설정한다.

2³ 실험의 설계

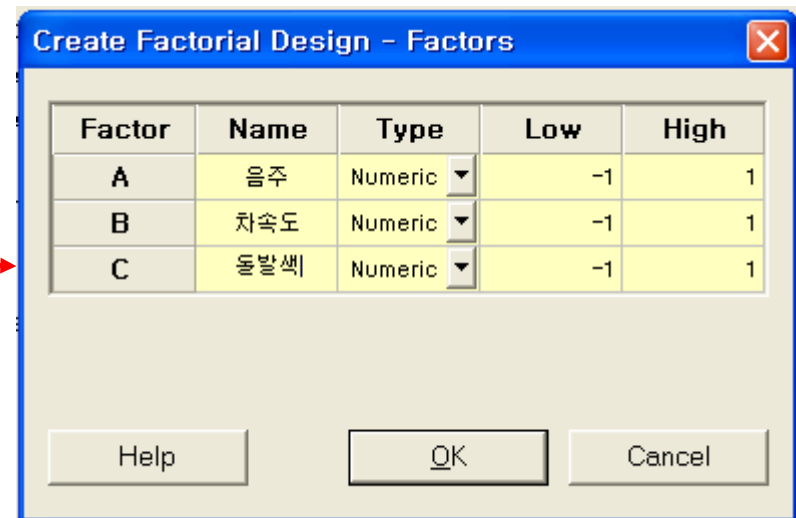
Factors Tab을 선택하여 필요한 선택을 한다.



모든 선택이 끝나면
클릭 OK!

※ Options...과 Results... Tab은
그대로 두어도 무방하다.

실험할 인자의 이름과 수준을 표시할 수
있는 창



2³ 실험의 설계

Session 창 정보

Session

Current worksheet: Worksheet 2

Factorial Design

Full Factorial Design

Factors: 3 Base Design: 3, 8
 Runs: 8 Replicates: 1
 Blocks: none Center pts (total): 0

All terms are free from aliasing

총 실험수
 반복수 1회

Worksheet 창 정보

Worksheet 4 ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	음주	차속도	돌발색	
1	3	1	1	1	-1	1	-1	
2	6	2	1	1	1	-1	1	
3	5	3	1	1	-1	-1	1	
4	1	4	1	1	-1	-1	-1	
5	7	5	1	1	-1	1	1	
6	2	6	1	1	1	-1	-1	
7	4	7	1	1	1	1	-1	
8	8	8	1	1	1	1	1	
9								
10								

실험조건

랜덤화된 실험순서

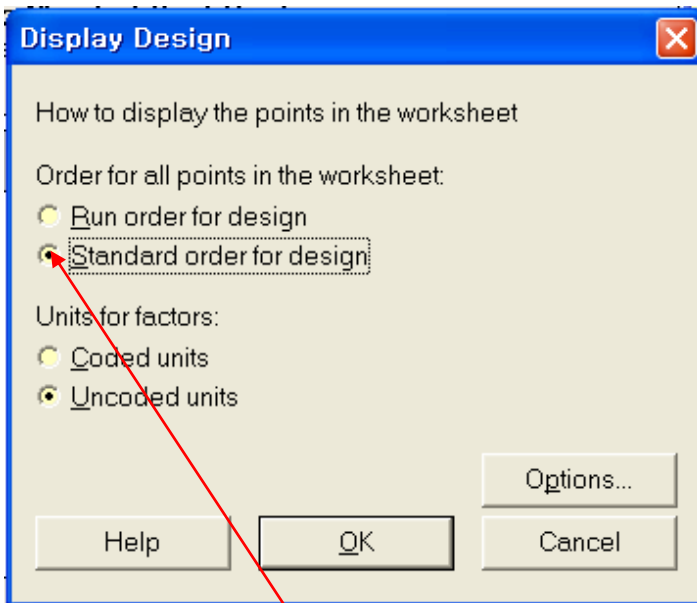
데이터 매트릭스의 표준화된 순서

2³ 실험의 실시

☞ Minitab step#2 : 표준순서 정렬 및 실험의 실시

MINITAB - Ver. 14. *Stat > DOE > Display Design ...*

C8 컬럼에 실험결과를 직접 입력한다.



표준순서대로 정렬하도록
선택하고 OK 클릭!

Worksheet 4 ***									
↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	음주	차속도	돌발색	반응시간	
1	1	4	1	1	-1	-1	-1	340	340
2	2	6	1	1	1	-1	-1	860	860
3	3	1	1	1	-1	1	-1	360	360
4	4	7	1	1	1	1	-1	880	880
5	5	3	1	1	-1	-1	1	320	320
6	6	2	1	1	1	-1	1	710	710
7	7	5	1	1	-1	1	1	350	350
8	8	8	1	1	1	1	1	720	720
9									
10									

2³ 실험의 분석

☞ Minitab step#3 : 요인배치 실험의 분석 및 해석

MINITAB - Ver. 14. *Stat > DOE > Factorial > Analyze Factorial Design ...*

The image shows two Minitab dialog boxes side-by-side. The left box is 'Analyze Factorial Design' and the right box is 'Analyze Factorial Design - Terms'. Red arrows point from text annotations to specific elements in the dialog boxes.

Analyze Factorial Design Dialog:

- Factor: C8 반응시간
- Responses: '반응시간'
- Buttons: Terms..., Covariates..., Prediction..., Graphs..., Results..., Storage..., Weights..., Select, Help, OK, Cancel

Analyze Factorial Design - Terms Dialog:

- Include terms in the model up through order: 3
- Available Terms: A:음주, B:차속도, C:들발색
- Selected Terms: A:음주, B:차속도, C:들발색, AB, AC, BC, ABC
- Buttons: >, >>, <, <<, Cross, Default, Help, OK, Cancel
- Options: ☐ Include blocks in the model, ☐ Include center points in the model

Annotations:

- 반응시간(Y)을 클릭한 후 Select 버튼 선택.
- 모델식에서 효과의 차수로 항목을 일괄 선택.
- 개별항목의 선택
- 모든 항목 선택 후 OK 버튼을 클릭!

2³ 실험의 분석

효과와 잔차의 그래프 분석 선택 창

Terms... Covariates... Prediction...
Graphs... Results... Storage...
Weights...
OK Cancel

StdOrder
RunOrder
CenterPt
Blocks
음주
차속도
돌발색
반응시간

Select

Help

Effects Plots
☒ Normal ☒ Pareto Alpha: 0.05
Residuals for Plots:
☒ Regular ☐ Standardized ☐ Deleted
Residual Plots
☒ Individual plots
☐ Histogram
☐ Normal plot
☐ Residuals versus fits
☐ Residuals versus order
☐ Four in one
☐ Residuals versus variables:
OK Cancel

효과에 대한 플롯 방법들.

제 1종 오류

잔차값의 표현 방법들.

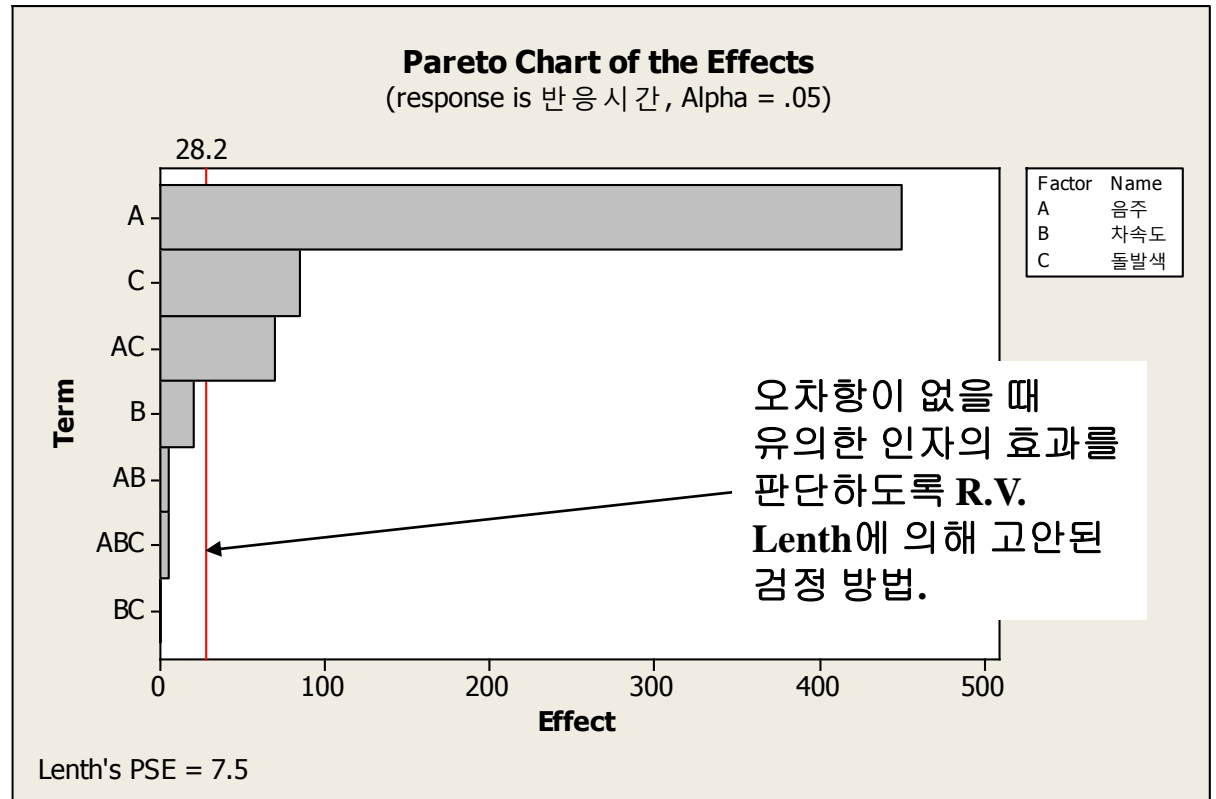
잔차의 플롯 방법들.

모두 선택 후 OK 클릭!

분석결과의 해석

잔차에 의한 실험의 오차를
계산할 수 없을 때 그래프로
인자들의 효과가
통계적으로 유의한 지를
판단할 수 있다.

본 예에서 적색라인보다
큰 값을 갖는 인자의 효과는
Alpha =0.05 에서 유의한
것으로 판단한다.



분석결과의 해석

Session 창 분석데이터 검토

Session		
Factorial Fit: 반응시간 versus 음주, 차속도, 돌발색		
Estimated Effects and Coefficients for 반응시간 (coded units)		
Term	Effect	Coef
Constant		567.50
음주	450.00	225.00
차속도	20.00	10.00
돌발색	-85.00	-42.50
음주*차속도	-5.00	-2.50
음주*돌발색	-70.00	-35.00
차속도*돌발색	-0.00	-0.00
음주*차속도*돌발색	-5.00	-2.50

Terms?
Effect?
Coef= Effect/2 ?

Effect(효과) 계산

Order	A	B	C	Y(반응시간)	AC
1	-	-	-	340ms	+
2	+	-	-	860ms	-
3	-	+	-	360ms	+
4	+	+	-	880ms	-
5	-	-	+	320ms	-
6	+	-	+	710ms	+
7	-	+	+	350ms	-
8	+	+	+	720ms	+

Coef: Coefficient(계수)의 줄임 말.

$$\text{돌발색(C)의 효과계산} = \bar{y}_+ - \bar{y}_- = \frac{320 + 710 + 350 + 720}{4} - \frac{340 + 860 + 880 + 360}{4} = -85$$

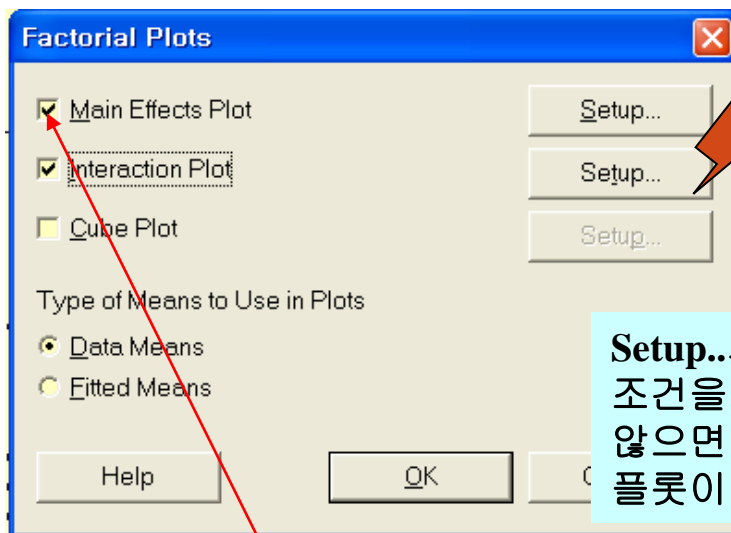
$$\text{음주(A)*돌발색(C) 교호효과 계산} = \frac{340 + 360 + 710 + 720}{4} - \frac{860 + 880 + 320 + 350}{4} = -70$$

효과의 그래프 분석

☞ Minitab step#4 : 요인배치 실험의 그래프 작성

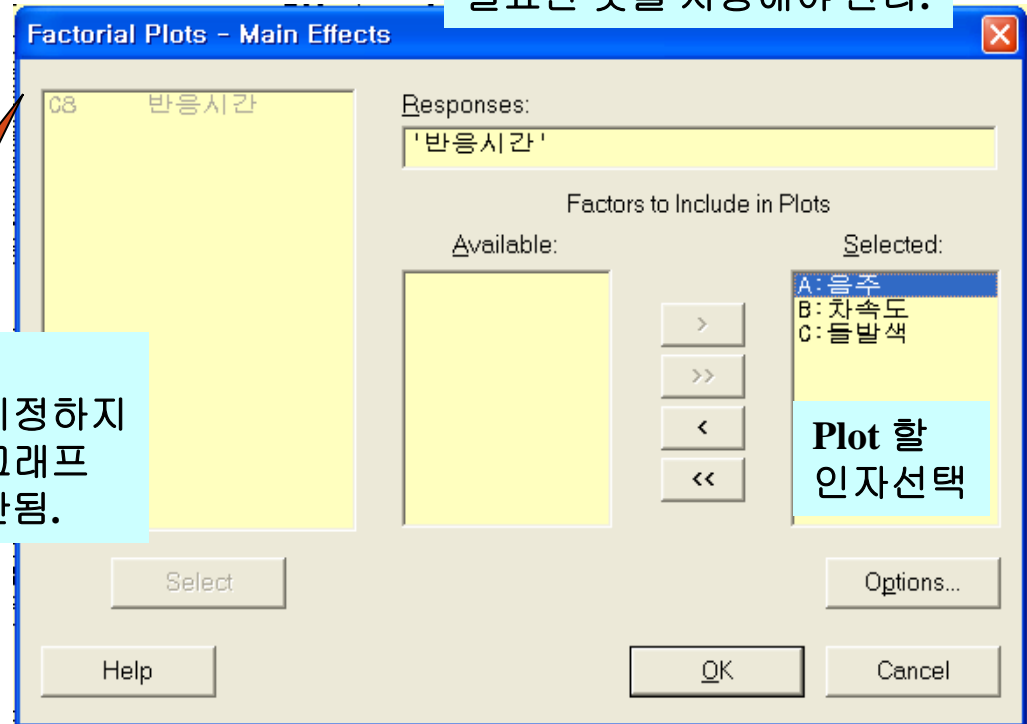
MINITAB - Ver.14. Stat > DOE > Factorial > Factorial Plots...

반드시 Setup...을 선택해서
필요한 것을 지정해야 한다.



Setup..의
조건을 지정하지
않으면 그래프
플롯이 안됨.

원하는 Plot을
선택한다.

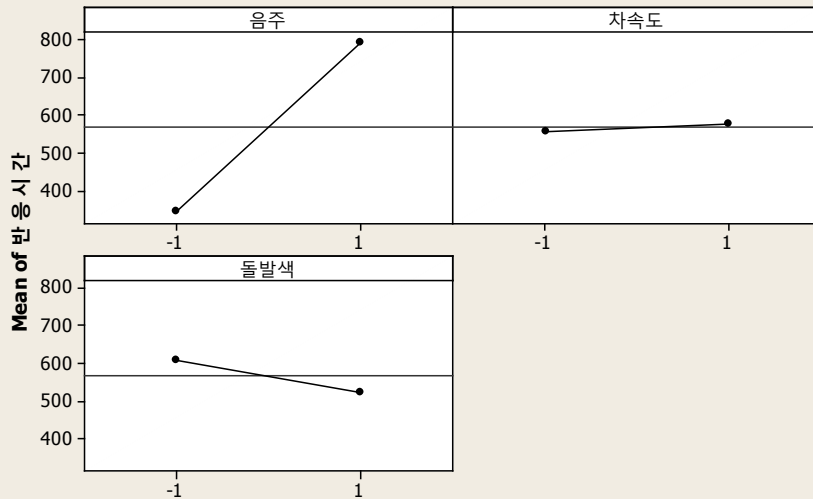


Plot 할
인자선택

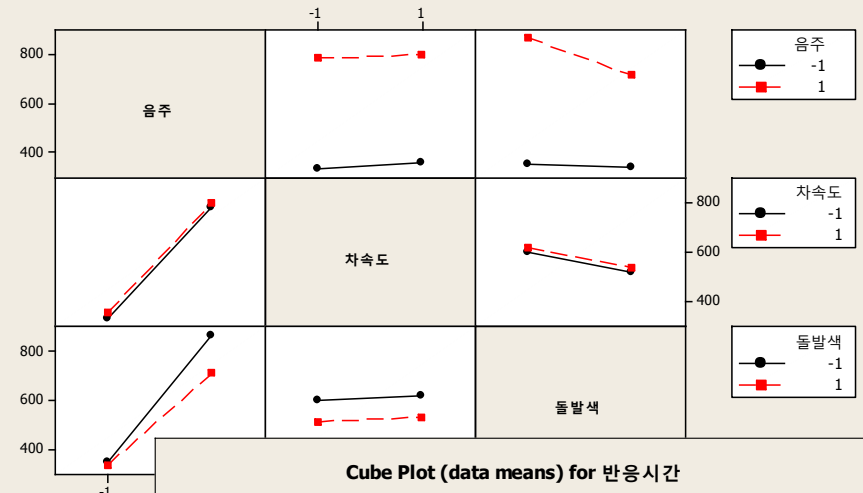
선택이 끝나면 OK 클릭!

효과의 그래프 분석

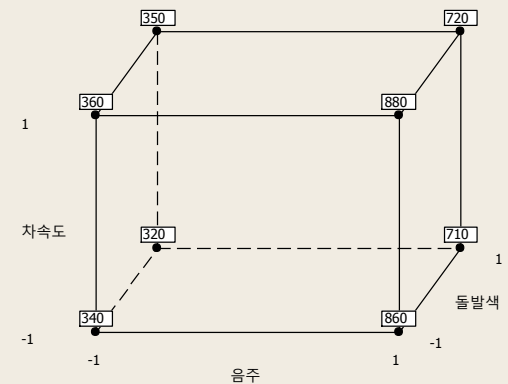
Main Effects Plot (data means) for 반응시간



Interaction Plot (data means) for 반응시간



Cube Plot (data means) for 반응시간



교호효과가 있을 때는 주효과 분석은 생략한다!!

즉, 교호작용을 우선적으로 해석한다.

선형방정식의 결정

☞ Minitab step#5 : $Y=f(X)$ 모형으로 변환

Session		
Factorial Fit: 반응시간 versus 음주, 차속도, 돌발색		
Estimated Effects and Coefficients for 반응시간 (coded units)		
Term	Effect	Coef
Constant		567.50
음주	450.00	225.00
차속도	20.00	10.00
돌발색	-85.00	-42.50
음주*차속도	-5.00	-2.50
음주*돌발색	-70.00	-35.00
차속도*돌발색	-0.00	-0.00
음주*차속도*돌발색	-5.00	-2.50

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 567.5 \text{ (전체 데이터의 평균)} \\ \beta_1 = 225.0 \\ \beta_2 = 10.0 \\ \beta_3 = -42.5 \\ \beta_{12} = -2.5 \\ \beta_{13} = -35.0 \\ \beta_{23} = 0 \\ \beta_{123} = -2.5 \end{array} \right.$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3$$

반응시간(Y) = **567.5 + 225.0 음주량 + 10.0 차속도 - 42.5 돌발색 - 2.5 음주x차속도 ...**

단, 음주량, 차속도, 돌발색은 +1, -1 의 부호화한 수치.