תרגול 8

עצים:

הגדרות:

עץ הוא גרף לא מכוון קשיר וחסר מעגלים. עץ עם n קדקודים מכיל n-1 צלעות.

יהא G גרף עם n קדקודים, תנאי מספיק לכך ש- G הוא עץ, הוא קיום שניים מבין התנאים הבאים:

1. G קשיר.
2. G חסר מעגלים.
3. G מכיל n-1 צלעות.

בהינתן גרף לא מכוון G , תת-גרף פורש של G הוא תת-גרף שמכיל את כל קדקודי G.

עץ פורש של G הוא תת-גרף פורש של G שהוא עץ.

תרגילים:

שאלה 1:

נתון גרף קשיר $G = (V, E)$. יש להוכיח כי קיים קדקוד $v \in V$ כך שהגרף $G' = G \setminus \{v\}$ הינו גרף קשיר.

פתרון:

כיוון שהגרף G קשיר, הוא מכיל עץ פורש T.

כפי שנלמד בכיתה, בכל עץ פורש עם שני קדקודים לפחות, ישנו עלה.

נבחין כי המסלולים היחידים בהם עלה משתתף הם מסלולים בהם הוא קדקוד קצה (ראשון/אחרון).

לכן, אם ננתק עלה v מ-T, המסלולים בין כל זוגות הקדקודים שנותרו יישארו כפי שהיו וכך גם בגרף $G' = G \setminus \{v\}$. מכאן ש-G' קשיר.

שאלה 2:

נתון שבעץ מסוים T , ישנם שני מסלולים ארוכים ביותר בעלי אורך שווה, נסמנם P_1, P_2 . צריך להוכיח שהמסלולים P_1, P_2 אינם זרים בקדקודים, כלומר, יש להם קדקוד משותף אחד לפחות.

פתרון:

נניח בשלילה כי המסלולים אינם חולקים קדקוד משותף.

נתבונן בזוג קדקודים, האחד מ- P_1 והשני מ-P_2, בעלי מרחק מינימלי, v_1 ו-v_2, בהתאמה. מהמינימליות, המסלול המחבר ביניהם אינו חולק קודקוד משותף עם P_1 או עם P_2.

נסמן ב- B את תת המסלול הארוך של P_1 מבין השניים המתחילים בקצה של המסלול ומסתיימים ב-v_1 (במקרה של אורכים שווים, נבחר אחד מהם שרירותית). באופן דומה, נסמן ב- C את תת המסלול הארוך של P_2 מבין השניים המתחילים בקצה של המסלול ומסתיים ב-v_2 , וכן ב-D את המסלול בין v_1 ל- v_2.

נקבל כי שרשור המסלולים, BDC , הוא מסלול ארוך יותר מכ"א מהמסלולים P_1 ו- P_2 כיוון שמכיל שני חלקים מכ"א מהם שאורכם לפחות חצי, וכן לפחות צלע נוספת של D , בסתירה לכך ש- P_1, P_2 הינם המסלולים הארוכים ביותר בעץ, מש"ל.

<u>שאלה 3:</u>

יהי $T=(V,E)$ עץ כך ש- $|V|=n$,

א. הוכיחו שעבור כל זוג קדקודים $u,v\in V$ כך ש- $\{u,v\}\notin E$, מתקיים כי בגרף $G=(V,E\cup\{u,v\})$ יש מעגל פשוט יחיד.

ב. הוכיחו שלכל צלע $\{u,v\}\in E$, בגרף $G=(V,E\backslash\{\{u,v\}\})$ יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

<u>פתרון:</u>

א. נבחין תחילה שלא קיים בגרף המתקבל מעגל שאינו פשוט כיוון שאז גם לאחר הסרת $\{u,v\}$ הגרף T מכיל מעגל ואיננו עץ בסתירה לנתון בשאלה. מקשירות העץ נובע שקיים בעץ מסלול בין u ו- v. כעת, לאחר הוספת הצלע נוצר מעגל פשוט, נסמן אותו C_1. אם קיים בגרף G מעגל פשוט נוסף, C_2 , $\{u,v\}$ חייבת להשתתף בו, כיוון שבעץ המקורי T אין מעגלים. מכאן שב-T יש לפחות שני מסלולים בין u ו v, כלומר ישנו מעגל, בסתירה להיותו עץ.

ב. הצלע $\{u,v\}$ הינה המסלול הפשוט היחיד בין u ו- v בעץ. אם היה עוד אחד, T היה מכיל מעגל, בסתירה להיותו עץ. לכן כשמסירים אותה, ב- G לפחות שני רכיבי קשירות. נבחין שלא יתכן שיש ב- G יותר משני רכיבי קשירות כיוון שבהוספת $\{u,v\}$ ניתן לחבר לכל היותר שני רכיבים (הרכיב של u והרכיב של v) אולם G בתוספת בצלע $\{u,v\}$ זהו העץ T שהינו קשיר.

<u>שאלה 5:</u>

השאלה עוסקת במסלולי טיול אפשריים בין ערי מדינה כלשהי המתחילים בעיר מוצא א' ומבקרים ב-8 ערים בדיוק (כולל עיר המוצא א').

נניח שעבור כל עיר ישנן 9 ערים אחרות אליהן ניתן לעבור במהלך טיול באופן ישיר, אלא אם היא עיר בה מסתיים מסלול. כמו כן, אין עיר אליה ניתן לעבור משתי ערים שונות.

טיול חוקי אינו חוזר אל עיר המוצא.

א. בכמה מהערים יכול להסתיים טיול חוקי ?

ב. כמה ערים משתתפות בלפחות אחד מהטיולים החוקיים היוצאים מהעיר א' ?

<u>פתרון</u>

נמיר את הבעיה למונחים מתורת הגרפים. הגרף יתאר את מסלולי הטיול החוקיים.

הערים אליהם ניתן להגיע במהלך טיול יהיו הקדקודים ומעבר בין ערים במסלול ייוצג ע"י צלע.

לא ניתן להגיע לאותה העיר ישירות משתי ערים שונות ולא ניתן לחזור לעיר המוצא, לכן הגרף שנוצר חסר מעגלים. ניתן להגיע מעיר א' לכל הערים שיוצגו על ידי קדקוד (לפי הגדרה), לכן הגרף שנוצר קשיר ולכן עץ.

נגדיר את שורש העץ להיות העיר א'. גובה העץ יהיה 7.

א. המספר המבוקש הוא מספר העלים בעץ האמור. לכל צומת פנימי בעץ 9 בנים, לכן מספר העלים בעץ הינו 9^7.

ב. המספר המבוקש הוא מספר הצמתים בעץ. נסכם את מספר הצמתים בכל אחת מהרמות:

<u>שאלה 6:</u>

נתון גרף $G = (V, E)$ קשיר כך ש - $|V| > 1$ ועבור כל צלע $e \in E$ הגרף $G' = (V, E \setminus \{e\})$ הוא עץ. יש להוכיח שכל קדקוד ב - G הוא בעל דרגה 2 (כלומר G מעגל).

<u>פתרון:</u>

ראשית נבחין כי לכל קודקוד ב- G דרגה 2 לפחות. אחרת, ישנו קודקוד עבורו צלע יחידה החלה בו וע"י השמטתה נקבל גרף לא קשיר. נראה כי לכל קדקוד דרגה 2 בדיוק.

יהי $v \in V$ ותהי $e = \{u, v\}$ צלע ב $G -$. מהנתון, אם נשמיט את e מ - G נקבל עץ. בעץ לפחות שני עלים, ודרגת כל עלה היא 1. דרגת כל קדקוד ב-G היא לפחות 2 והסרת הצלע הפחיתה רק מדרגות u, v, לכן $u -$ ו v הם עלים בעץ G' , כלומר דרגתם המקורית הייתה בדיוק 2.