

בז"ד

טופס הנחיות

נבחנת יקרה, נא קראי בתשומת לב את ההנחיות ל מבחן ופועל בהתאם:
שים לב, במהלך הבדיקה יש לשמר על שקט מוחלט בכיתה.
חשוב! אין להשתמש במחשבון במהלך הבדיקה!

1. השאלות מנוסחות באנגלית (עם תרגום לעברית) את התשובות ניתן לכתוב בעברית. את הקוד יש למשב בשפה C.
2. נא השתמשי בדףים אישיים עבור הטיעות.
3. כאשר את נתקלת בבעיה בעת פתרון שאלה, ומחליטה שאת מזקקת לשיעור, אנא מלאי את 'טופס השאלה' המצורף והעברי לשומרת בכיתה. תהילך מעבר השאלה ל'מנחה', והעברת התשובה חזרה אליך, ערכאת זמן – אך אנו ממליצים, שתנצלי זמן זה לפתרון שאלה אחרת ב מבחן, ותחזרי לשאלת זו, לכשtagיעו לידך התשובה לשאלתך.
4. בסיום המבחן אנא נעלמי את קובץ המבחן כקובץ PDF כשם הקובץ הינו תעודה זהה שלך.
5. חומר העזר המותר ב מבחן, הוא כל חומר כתוב /או מודפס או חומר שהועלה מראש למחשב אשר אינו מחובר בשום צורה לרשות(איסור זה חל גם על מחשבון).
6. משך המבחן כ 4 שעות.

בהצלחה רבה

Q1.

Prove or give a counterexample:

Given an undirected graph it is always possible to direct the edges so the graph becomes a directed acyclic graph.

הוכיח או תני דוגמה נגדית:

בහינתן גרף לא מכוון תמיד אפשר לכוון את הקשתות כך שיתקבל גרף מכוון ללא מעגלים.

תשובה:

נתאר אלגוריתם שמכoon את הקשתות כנדרש.

לכל רכיב קשורות נבצע BFS. כל צמת נסמן בرمאה שלו בעז. את כל הקשתות נכוון מהצמת בرمאה הנמוכה יותר לצמת בرمאה הגבוהה יותר (אם רמות שני הצלמיים זהות – הכוון לא משנה).

Q2.

Prove that any connected undirected graph $G = (V, E)$ satisfies $|E| \geq |V| - 1$.

הוכיחי שכל גרף קשור ולא מכוון $G = (V, E)$ מתקיים $|E| \geq |V| - 1$.

תשובה:

נ裏ץ BFS על הגרף ונתקבל עץ BFS. מספר הקשתות בעץ הוא $|V| - 1$, כי לכל צמת יש שכן אחד ויחיד בrama שעלי (חוץ מאשר לשורש). לכן בגרף יש לפחות $|V| - 1$ קשתות.

Q3.

Write (in pseudocode) an algorithm that colors the vertices of an undirected connected graph in two colors: red and black. Every black vertex must have a red neighbor and any red vertex must have a black neighbor.

The graph is represented as an adjacency list.

The running time of the algorithm should be $O(n)$ (n is the number of the vertices in the graph).

כתבי (בפסידוקוד) אלגוריתם שצבע קדקוד גראף לא מכוון וקיים נתון בשני צבעים: שחור ואדום. לכל צמת שחור חייב להיות שכן אדום ולכל צמת אדום חייב להיות שכן שחור.
הגרף מיוצג ברשימה שכנוויות.

זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(n)$.

תשובה:

נעבור על כל צמותי הגרף ולכל צמת נבצע:

אם הצמת לא צבוע וגם שכנו הראשון (שבודאי קיים כי הגרף קשור, ואפשר למצוא אותו בזמן קבוע) לא צבעו אז נקבע את הצמת בשחור ואת שכנו באדום.
אם הצמת לא צבעו ושכנו צבעו, נקבע את הצמת בצבע שלא בו צבעו השכן.

```

for i←1 to n do
    c[i]←non
for i←1 to n do
    let j be the first neighbor of node i
    if c[i]=non and c[j]=non
        then c[i]←black
        c[j]←red
    else if c[i]=non and c[j]=red
        then c[i]←black
    else if c[i]=non
        then c[i]←black

```

Q4.

All the edges of a graph have the same weight, except of one edge e. describe an algorithm that finds the MST of this graph. Its running time is linear in the size of the graph.

לכל הקשתות של גרף יש אותו משקל, חוץ מלકשת אחת א' .
תארו אלגוריתם המוצא MST בגרף. זמן היריצה שלו לינארי בגודל הגרף.

תשובה:

אם משקל הקשת החരיפה קטן ממשקל שאר הקשתות נריצ' BFS מצמת שהוא אחד מצד' הקשת החרייה. עץ BFS המתתקבל הוא העפ"מ.
אם משקל הקשת החרייה גדול ממשקל שאר הקשתות, נוציא אותה מהעץ ונריצ' BFS. אם עז ה- BFS שמתתקבל מכיל את כל צמתי הגרף אז הוא העפ"מ. אם העז המתתקבל לא מכיל את כל הצמתים, נחזיר את הקשת לgraf ומבצע BFS. העז המתתקבל הוא העפ"מ.

Q5.

Some of the vertices of a directed weighted graph (with positive weights) are colored red, some are colored black and some are not colored.

Describe an efficient algorithm (as efficient as dijkstra's algorithm) that find the shortest path from a red vertex to a black one.

חלק מקדוקדי גרף מכון ומושקל (משקלים חיוביים) צבועים באדום, חלק מהקדוקדים צבועים בשחור, וחלק לא צבועים.

תاري אלגוריתם עיל (יעיל כמו האלגוריתם של דייקסטרה) שモצא מסלול קצר ביותר מצמת אדום לצמת שחור.

תשובה:

נוסף צמת מקור לgraf וממנו נמתח קשת, במשקל 0, לכל הצמתים האדומים.

נוסף צמת יעד לgraf ונמתח אליו קשתות, במשקל 0, מכל הצמתים השחורים.

נ裏יך דייקסטרה מהמקור לעד. מהמסלול שהתקבל נוריד את צמת המקור וצמת היעד ונקבל את המסלול המבוקש.