שאלה 1 (16 נקודות: סע' <u>**א'** - 10 נק'</u>; סע' <u>**ב'** - 6 נק'</u>)

<u>הגדרה</u>:

שתי מחרוזות A ו-B הן מחרוזות **דומות** אם A ו-B מורכבות מאותם תווים, ומספר המופעים של כל תו ב-A זהה למספר המופעים של כל תו ב-B, אך לא בהכרח באותו הסדר.

<u>דוגמאות</u>: abab ו-abba הן דומות.
abbb ו-aabb אינן דומות.
aab ו-aabb אינן דומות.

נתון מערך S המכיל n מחרוזות <u>שונות זו מזו</u>: $S[1], S[2], \ldots, S[n]$, שאורכיהן אינם בהכרח שווים זה לזה.

אורכה של כל מחרוזת $S[i]$ הוא $1 \leq |S[i]| \leq 15$, $1 \leq i \leq n$.

המחרוזות במערך הנתון הן מעל הא״ב $\{a,b,c,...x,y,z\}$ (כל 26 האותיות הקטנות בא״ב האנגלי).

אנו מעוניינים לבדוק האם קיים במערך לפחות זוג אחד של מחרוזות דומות.

א. **תארי** באופן מילולי אלגוריתם יעיל ככל האפשר במקרה הממוצע, המקבל מערך S כנ״ל ומחזיר ערך *True* אם קיימות ב-S שתי מחרוזות דומות; אחרת, מחזיר ערך *False*.
הדרכה: השתמשי באחד ממבני הנתונים שנלמדו בקורס.

ב. נתחי והסבירי את סיבוכיות המקום וזמן הריצה של האלגוריתם שכתבת.

שאלה 2 (16 נקודות: סע' <u>**א'**-8 נק'</u>; סע' <u>**ב'**- 8 נק'</u>)

נתון עץ חיפוש בינרי T בעל n ערכים מספריים שונים זה מזה.

א. **כתבי** בפסאודו-קוד או בשפת תכנות כלשהי אלגוריתם בסיבוכיות זמן ריצה $O(n)$, הבודק האם קיימים בעץ T שני צמתים שסכום מפתחותיהם שווה לפעמיים ערך מפתח השורש. כלומר, האם קיימים בעץ x, y כך ש:

$$x.key + y.key = 2 * T.root.key$$

האלגוריתם יחזיר זוג מצביעים, אחד ל-x ואחד ל-y במידה והם קיימים, אחרת יחזיר זוג מצביעי NULL.
האלגוריתם יכול להשתמש בזכרון קבוע בלבד.

ב. נתחי והסבירי את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שכתבת.

שאלה 3 (20 נקודות)

הציעי מבנה נתונים S שבאמצעותו ניתן לממש את **<u>כל</u>** הפעולות הבאות, בסיבוכיות זמן $O(1)$ לכל פעולה.

תארי בקצרה את מבנה הנתונים והסבירי כיצד תתבצע כל פעולה בזמן הריצה הנדרש.

הערה: מבנה הנתונים יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים בסיסיים.

שם הפעולה	מה מבצעת הפעולה	סיבוכיות נדרשת
Insert (S,x)	הכנסת איבר חדש x בעל ערך מספרי, למבנה הנתונים S	$O(1)$
Delete (S)	מחיקה מתוך S של האיבר האחרון שהוכנס אליו	$O(1)$
Max (S)	החזרת הערך של האיבר המקסימלי במבנה S (ללא הוצאתו מהמבנה)	$O(1)$
Add (S,a)	הגדלת כל הערכים הקיימים כבר במבנה S בערך a (חיובי)	$O(1)$

שאלה 4 (16 נקודות: סעי' <u>א' - 10 נק'</u>; סעי' <u>ב' - 6 נק'</u>)

בהינתן מטריצה $Mat[n,m]$ שערכיה הם מספרים טבעיים אי שליליים, נגדיר:

1) שורה i **חזקה** משורה אחרת j כאשר מתקיימת אחת מבין שתי האפשרויות הבאות:

- המספר המקסימלי בשורה i גדול ממש מהמספר המקסימלי בשורה j.
- המספר המקסימלי בשורה i שווה למקסימלי ב- j וגם $i>j$.

2) k השורות **החזקות ביותר** הן השורות שכל אחת מהן חזקה מ-n-k השורות האחרות (לפחות).

<u>דוגמה:</u> במטריצה $Mat[5,3]$ שלהלן,

עבור k=2, 2 השורות החזקות ביותר הן 2 ו- 3,

עבור $k=3$, 3 השורות החזקות ביותר הן: 2, 3 ו-1.

1	50	1	2
2	49	48	1000
3	6	50	4
4	4	14	39
5	40	3	9

א. **כתבי** בפסאודו-קוד או בשפת תכנות כלשהי אלגוריתם יעיל ככל האפשר, המוצא את $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ השורות החזקות ביותר במטריצת קלט בגודל $n \times m$.

הדרכה: השתמשי באחד ממבני הנתונים שנלמדו בקורס.

ב. לצורך ניתוח הסיבוכיות, הניחי כי m קבוע.

נתחי והסבירי את סיבוכיות המקום וזמן הריצה של האלגוריתם שהצעת.

שאלה 5

א. <u>הגדרה</u>:

עבור גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נגדיר כי שני מסלולים הם **זרים בקשתות** אם אין להם אף קשת משותפת.

כלומר, שני מסלולים P_1, P_2 הם זרים בקשתות כאשר:

$$\forall e \in P_1, \qquad e \in P_1 \iff e \notin P_2$$

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ושני צמתים $s, t \in V$ נציע את האלגוריתם הבא:

```
Alg (G, s, t)
Nopath ← False
Counter ← 0
While Nopath = False
    BFS (G, s)
    If dist[t] = ∞
      Then
          Nopath ← True
      Else
          Path ← ReconstructPath (s, t, prev)
          E ← Delete_from_E (E, Path)
          Counter ← Counter +1
Return Counter
```

כאשר השגרות BFS ו-ReconstructPath והמערכים *dist* ו-*prev* הם כפי שהוגדרו בקורס (ומופיעים בחומר העזר בעמ' 34), והשגרה Delete_from_E מוחקת מתוך E את כל הקשתות המיוצגות ע"י הצמתים ב- *Path*.

<u>הוכיחי או הפריכי (ע"י דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:</u>

האלגוריתם $\text{Alg}\ (G, s, t)$ מוצא תמיד את המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות בין s ל-t.

ב. נתון גרף ממושקל, קשיר ולא מכוון, $G=(V,E)$, עם משקלי קשתות שהם מספרים טבעיים חיוביים <u>השונים</u> זה מזה.

עבור מספר טבעי $k \geq 0$ נגדיר את $G_k=(V, E_k)$ להיות תת-הגרף של G המכיל את קבוצת כל הצמתים V של G, ומתוך E את קבוצת כל הקשתות E_k שמשקל כל אחת מהן הוא לכל היותר k.

(i) הוכיחי או הפריכי (ע"י דוגמה נגדית) את הטענה הבאה: (10 נק')

לכל k שעבורו G_k קשיר, משקלו של עץ פורש מינימלי (MST) של G_k זהה למשקל עץ פורש מינימלי של G.

(ii) אנו מעוניינים למצוא את ה-k הגדול ביותר עבורו הגרף G_k אינו קשיר.

תארי באופן מילולי אלגוריתם יעיל ככל הניתן, המקבל כקלט גרף G ומחזיר את הערך k המבוקש. (7 נק')

הסבירי את נכונות האלגוריתם שהצעת ונתחי את סיבוכיות זמן הריצה שלו. (3 נק')