

Q1. 20%

What is the running time complexity of Dijkstra's algorithm on a weighted tree (positive weights) with n nodes? Is it efficient?

Explain your answer.

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם של דייקסטרה על עץ ממושקל (משקלים חיוביים) בעל n צמתים? האם הוא יעיל? הסביר את תשובתך.

זמן הריצה הוא $O(n \lg n)$. זמן הריצה של האלגוריתם של דייקסטרה הוא $O(E \lg V)$, ועבור עץ גם מספר הקשתות וגם מספר הצמתים הוא $O(n)$. האלגוריתם לא יעיל כי בעץ יש מסלול יחיד מצמת לצמת ו-BFS ימצא אותו בזמן לינארי בגודל העץ.

Q2. 20%

Describe an efficient algorithm that finds an MST in a weighted undirected connected graph with n vertices and n edges (the number of edges = the number of vertices.)

Compute the running time complexity of the algorithm

תארי אלגוריתם יעיל שמוצא עץ"מ בגרף קשיר ממושקל לא מכוון בעל n צמתים ו- n קשתות (מספר הקשתות = מספר הצמתים). חשבי את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם.

האלגוריתם יבצע BFS (מצמת כלשהו) ויגלה את הקשת היחידה $\{u, v\}$ שאינה בעץ ה-BFS (יש קשת אחת כזאת בדיוק כי מספר הצמתים = מספר הקשתות, והגרף קשיר). BFS נוסף מ- v ימצא את המסלול ממנו ל- u . הקשת הכבדה ביותר מבין קשתות המסלול ו- $\{u, v\}$ תמחק מהגרף ויישאר העץ"מ. זמן הריצה $O(n)$.

Q3. 20%

A tournament is a directed graph obtained by assigning a direction for each edge in an undirected complete graph (there is an edge between every pair of nodes.)

Prove or give a contrary example: every tournament (with more than two nodes) contains a cycle.

טורניר הוא גרף מכוון המתקבל מהגדרת כיוון לכל קשת בגרף לא מכוון מלא (יש קשת בין כל שני צמתים).

הוכיחי או הציגי דוגמה נגדית: בכל טורניר (בעל יותר משני צמתים) יש מעגל.

לא נכון.

דוגמה נגדית:

$$V=\{1,2,3\}$$

$$E=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$$

Q4. 20%

Given a directed graph and an edge in that graph, we want to know whether the edge is a part of a cycle.

Describe an efficient algorithm that solves that problem.

Compute the running time complexity of the algorithm.

בהינתן גרף מכוון וקשת בגרף, נרצה לדעת האם הקשת היא חלק ממעגל.

תארי אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה.

חשבי את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם.

נניח שהקשת היא (u,v) . נמחק אותה מהגרף ונריץ BFS מ- v . הקשת היא חלק ממעגל אם

ורק אם יש מסלול מ- v ל- u בגרף לאחר המחיקה.

זמן הריצה $O(V+E)$.

Q5. 20%

An application you are working on uses directed graphs. The operations the application needs are:

- Add an edge to the graph.
- Check if an edge is in the graph.
- Reverse the directions of all the edges in the graph.

Explain how to represent the graph and implement the operations efficiently.

The running time of each operation should be $O(1)$.

יישום שאת מפתחת משתמש בגרפים מכוונים. הפעולות שהיישום צריך הן:

- הוספת קשת לגרף
- בדיקה האם קשת נמצאת בגרף
- הפיכת כיווני כל הקשתות

הסבירי כיצד לייצג את הגרף ואיך לממש את הפעולות ביעילות.

זמן הריצה של כל פעולה צריך להיות $O(1)$.

הגרף ייוצג במטריצת סמיכויות ודגל שיאמר האם הכיוונים הפוכים או לא.

לפני הוספת קשת לגרף נבדוק את הדגל, ואם הכיוונים הפוכים תתווסף קשת הפוכה.

לפני בדיקה האם קשת בגרף נבדוק האם הגרף "הפוך" ונחפש את הקשת בהתאם.

הפיכת כיווני הקשתות תעשה על-ידי הפיכת הערך בדגל.