ניתוח אלגוריתמים וסיבוכיות

נושא הקורס הוא ניתוח אלגוריתמים. אנו נראה במהלך הקורס קבוצות שונות של אלגוריתמים מסוגים שונים, כאשר מה שיעניין אותנו יהיו האלגוריתמים עצמם ולא מבני הנתונים בהם אנחנו משתמשים.
הרעיון של שימוש באלגוריתמים הוא למצוא פיתרון אופטימאלי לבעיה נתונה בעזרת רצף פעולות מסוים.
הבעיות שיוצגו לנו הם בעיקר מהתחום הבדיד, להם אנחנו נצטרך למצוא יעד – מקסימום או מינימום.
ניתקל גם בהמשך הקורס בקבוצות שונות של אלגוריתמים, כאשר כל סוג שונה של קבוצה בא לפתור טווח מסוים של בעיות בדרך אחרת.

אלגוריתמים חמדניים Greedy Algorithm

הגדרה: "אלגוריתם שמקבל החלטות לפי נתונים קיימים, ללא תכנון קדימה".

אלגוריתם זה לא בוחן את ההשפעות על "מה יקרה אם", אלא מוצא איזה דרך שנראית מתאימה ומובילה לפיתרון ועובד עליה עד הסוף. במקרים המתאימים, אכן ניתן להוכיח שמדובר על אלגוריתם שהוא אופטימלי, כלומר הוא מביא את התוצאה הטובה ביותר. כמובן, שאלגוריתם זה לא פותר **כל** בעיה – אם נרצה לטפס לראש ההר ונראה דרך שהיא ישרה, אולי זה יהיה יותר נוח, אבל כנראה שלא נגיע כך לפסגה.

נראה מספר דוגמאות שמקיימות את האלגוריתם הזה -

עלינו לסדר תיק. לתיק יש תבולה של משקל מסוים W אותו אנחנו נדרשים למלא, ועלינו להחליט מבין כל החפצים המונחים לפנינו, אילו חפצים ייכנסו, על מנת לקחת איתנו את המקסימום האפשרי. הצעה פשוטה לפתרון הבעיה היא, להתחיל בלהכניס את החפצים הקטנים יותר לתוך התיק, וכך גם אם לא נמלא את התיק עד סופו, נדע לפחות שהכנסנו כמה שיותר פריטים.

הפתרון הזה נראה יחסית פשוט, אבל יש לנו מספר שאלות עליו:

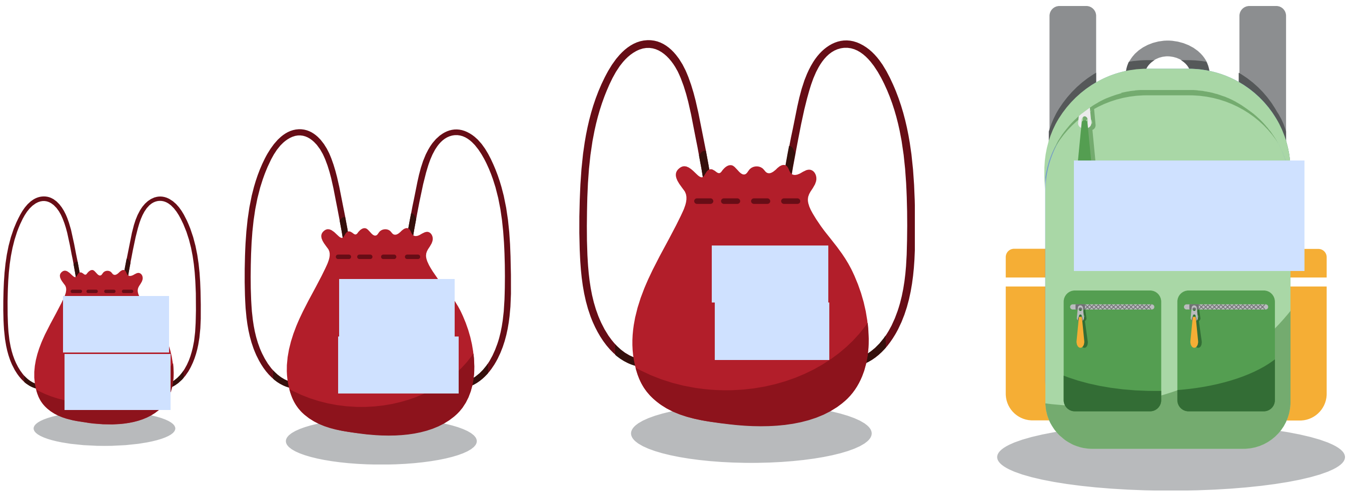
- מי אמר שהפתרון הזה הוא באמת הטוב ביותר?
- מי יכול להבטיח לנו שהפתרון הזה יהיה יעיל גם בפעם הבאה שננסה אותו?

ההצעה שאנחנו הבאנו (הכנסה של החפץ הקל יותר ראשון) שייכת לסוג פתרונות שנקרא "פתרון חמדני"- פתרנו את הבעיה באופן המהיר ביותר, אך ללא שום התחשבות באפשרות שיש פתרון אחר יעיל יותר.
בהמשך נראה שעבור לא מעט בעיות אותן ניתן לפתור באופן חמדני שכזה, אם נשנה את התנאים ולו במעט, לא נוכל למצוא את הפתרון הזה והוא לא יעבוד. באופן כללי ניתן לומר שהתהליך אותו אנחנו עוברים מורכב משני שלבים: 1. ביצוע הפתרון החמדני. 2. קבלה של תת-מבנה אופטימלי – באופן שדומה קצת לאינדוקציה, רק הפוך. אנחנו ביצענו את הפיתרון החמדני, וקיבלנו עוד חלק קטן יותר שגם עליו אנחנו יכולים לבצע פתרון חמדני דומה.

עכשיו ניקח את הבעיה שהצגנו קודם, שלב אחד קדימה. בעת במקום שיהיה לנו רק שדה של משקל עבור כל פריט, יהיה לנו גם חשיבות. האם יש לנו דרך למצוא איזה פתרון אופטימלי על פי משקל / חשיבות / שילוב של שניהם?

אם נרצה למשל, לקחת את סכום החשיבויות הגבוה ביותר, יכול להיות שאם נלך בשיטה שרצינו לפי המשקל, הפתרון לא יקיים בכלל את הדרוש, מאחר והוא לא יעמוד בתנאי הכללי, כי אין לנו הבטחה לאיזה יחס משקל-חשיבות.

ניתן להשתמש עבור זה גם בפתרון <u>נאיבי</u> – חישוב של "חשיבות סגולית" של כל פריט בשקלול של משקל ומספר חשיבות, והציון שייצא לנו יוכל בעת להוות איזה מדד להכנסה נכונה. בשביל להבין כיצד זה יעבוד בצורה נכונה, נציג את הבעיה בצורתה המוכרת והרשמית יותר –



בעיית תרמיל הגב בשברים

גנב נכנס לחנות עם שק שמוגבל במשקל מסוים. לפניו בחנות מונחים פריטים אותם הוא מעוניין לגנוב. עבור כל פריט יש משקל ומחיר, ומתוך כל פריט ניתן לקחת גם חלקים ממנו ולא חייבים את כולו בשלמותו.

<u>המטרה:</u> למלא את השק כך שערך הפריטים שהגנב לוקח יהיה מקסימלי[1].

קל לראות, שניתן לחשב באופן די פשוט, ולהגיע למסקנה שנכניס קודם את השק של 10 ק"ג ולאחר מכן את ה20, ולבסוף עוד 20 ק"ג מהשק הנותר. הפתרון הזה נעשה בצורה חמדנית על פי התנאים שהגדרנו לעיל – ראשית, הבאנו פתרון חמדני – הכנסנו את מה ששווה הכי הרבה, ואחר כך נותרנו עם תת-מבנה אופטימלי דומה – צריך להכניס 40 ק"ג לתוך התיק.

ושוב נשאלת השאלה – כיצד ניתן להוכיח שזה באמת פיתרון אופטימלי, ואין שום פיתרון שיהיה יותר טוב? (בהנחה שיכול להיות שנמצא פתרונות שהם שווים באיכותם, אך לא כאלה טובים יותר)

דבר נוסף שכדאי לשים לב – בשונה מבעיות אחרות שנתקלנו בהם, גם אם היינו רוצים אין לנו אפשרות להציג את כל הקומבינציות האפשריות, וזאת מאחר שאנחנו תמידי יכולים להתקזז על המשקל מכל שקית עד שזה יביא לנו מרחב פתרונות אינסופי (לקחת 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 וכן על זה הדרך).

נוכיח את נכונות האלגוריתם בצורה פורמלית:

נתונים n חומרים כך שלחומר ה-i, P_i יש משקל W_i ומחיר V_i ולכן מחיר סגולי C_i (ממויינים לפי המחיר הסגולי, כלומר החומר שעבורו i=1 הוא בעל המחיר הסגולי הגבוה ביותר).
הפתרון החמדני נותן לנו רווח כולל V.

1. <u>תבנית הבחירה החמדנית</u>

---

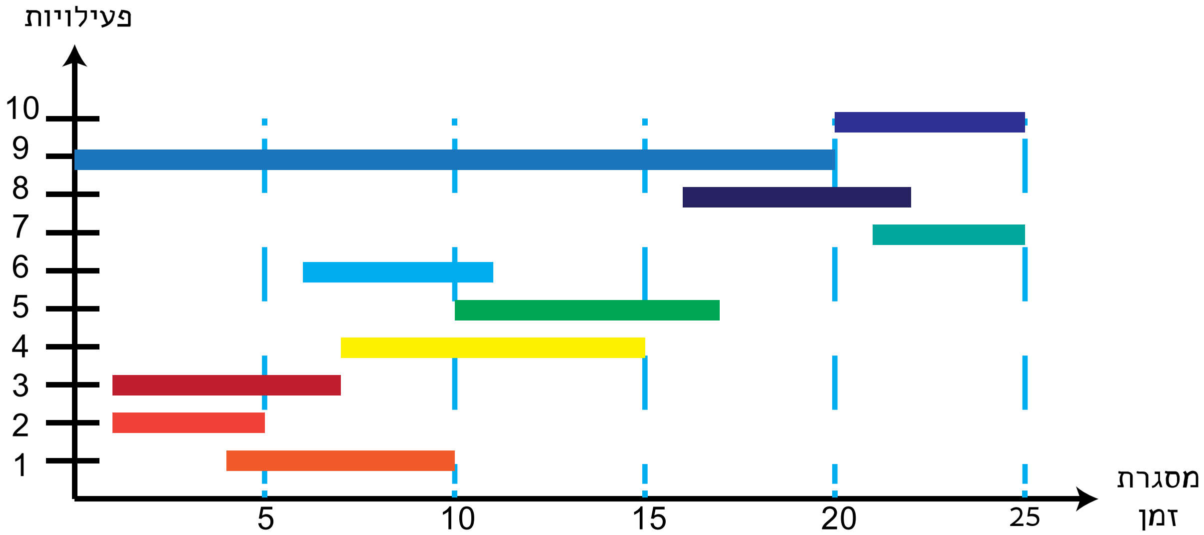
[1] במובן שמאחר וניתן לקחת גם חלקים מהסחורה, השק בסופו של דבר צריך להיות מלא.

נניח (בשלילה) שקיים חומר ששימוש דווקא בו יביא לנו פיתרון אופטימלי V_1-
- אם החומר P_1 קיים גם בפיתרון הזה, אז $V = V_1$ וזו סתירה להנחת השלילה.
- אחרת: ניקח מהחומר P_1 כמות כלשהי שאינה גדולה מ- W_1 ונחליף אותה עם כמות חומר זהה מהחומר P_x. בהכרח קיבלנו פתרון עם רווח גדול יותר – סתירה. (במילים פשוטות יותר: הוצאת החומר בעל הערך הגבוה ביותר בהכרח מביא לנו אופציה שהיא פחות טובה – בחירה בחומר שהמחיר הסגולי שלו נמוך יותר)

2. <u>תת המבנה האופטימלי:</u>

לאחר שכבר בחרנו את החומר P_1, נשארנו עם תת-בעיה, עלינו להוכיח שגם אותה נוכל לפתור באותו אופן ולקבל פיתרון אופטימאלי.
נניח שהפתרון לתת הבעיה ייתן רווח V
נניח (בשלילה) שקיים פיתרון אחר לתת הבעיה, שייתן רווח V'>V
לכן נצרף לפתרון הזה את P_1 ונקבל סה"כ פתרון טוב יותר עבור הבעיה המקורית.
(ובעברית: אם נמצא פתרון לתת הבעיה שהוא אופטימלי ושונה ממה שכבר הצענו, אז מעצם ההגדרה נוכל להחיל את הפתרון גם על הבעיה בכללות, והפתרון שהצענו הוא לא אופטימלי, אבל כבר הוכחנו שהוא כן אופטימלי ולכן יש פה סתירה).

בעיית בחירת הפעילויות



בעיה מוכרת וידועה – צריך לשבץ קורסים בתוך כיתה. עבור כל קורס יש את טווח הזמנים בו הוא צריך להיות פעיל. אנחנו רוצים למצוא את הדרך האופטימלית לשיבוץ הקורסים בכיתות. מן הסתם, אסור שתהיינה התנגשות בין שני שיעורים, ואנחנו מחפשים את הפתרון שייתן את התוצאה הטובה ביותר.

קודם כל, עלינו לוודא מה דרוש מאתנו על מנת שייחשב סידור אופטימלי - האם אנחנו מחפשים ניצולת מקסימלית של הכיתה, חוסר בטלה מינימלי (דבר שפה פחות משמעותי אך בתחומים אחרים משפיע יותר), או כל הגדרה אחרת שתבוא בשאלה. במקרה זה אנחנו מדברים על מספר פעילויות מקסימלי, כאשר אין הבדל מבחינת חשיבות בין שיעור של יחידת זמן אחת לבין 10 יחידות זמן.

הגדרה רשמית של השאלה תיראה באופן הבא:

> נתונה קבוצה של n פעילויות המבקשות להשתמש באותו משאב אשר יכול לשרת רק פעילות אחת בו-זמנית. לכל פעילות יש זמן התחלה (s_i) וזמן סיום (f_i) כאשר מתקיים $f_i>s_i$. כאשר $0 \le s_i \le f_i \le$ (T) ונתון זמן מקסימלי לביצוע כל הפעולות (T), וכל הפעילויות מתבצעות בזמן החצי-פתוח $[0,t)$.

בפשטות – כל עוד שתי פעילויות לא מתנגשות אחת עם השנייה, הכל בסדר. כמובן שפעילות יכולה להסתיים באותה שעה בדיוק בה מתחילה פעילות חדשה.

בנוסף נגדיר את $S = \{1,2....,n\}$ בקבוצת הפעילויות הקיימת, וכל תת קבוצה אפשרית תסומן באות גדולה מתחילת הABC.

השאיפה שלנו היא למצוא אלגוריתם / דרך פעולה שיביא לנו את מקסימום הפעילויות תחת תת-הזמן האפשרי. נבחן מספר אפשרויות –

<u>משך שיעור מינימלי</u> – $A = \{7,6\}$

כדאי לשים לב, פה קודם כל הגדרנו את 7 שהוא הכי קצר, ורק לאחר מכן את 6 שהוא הקצר ביותר מבין אלו שנשארו לא בחפיפה.

<u>משך שיעור מקסימלי</u> – $A = \{9,10\}$

מתחילים עם שיעור באורך 20, ואז כבר לא ממש נשאר אופציות.

<u>זמן תחילת שיעור</u> – $A = \{9,10\}$

השיעור הראשון הוא 0-20 מה שתופס לנו כמעט את כל מרווח הזמן.

<u>זמן סיום השיעור</u> - $A = \{2,6,8\}$, $B = \{3, 4, 8\}$ $C = \{1, 5, 7\}$

ברור לנו שזהו אלגוריתם הרבה יותר אופטימלי מכל מה שהצענו עד עכשיו. בדרך כלל אנחנו עלולים לחשוב שהפתרון החמדני הוא דווקא האינטואיטיבי, אך כאן זה בהחלט לא אינטואיטיבי.

אנחנו יכולים גם להוכיח שהאלגוריתם הזה עובד – איך ניתן להוכיח זאת? ניתן לראות ששום פיתרון אחר מבין כל האלגוריתמים שהצענו לא הביא לתוצאה מוצלחת יותר, אך כמובן ש"לא ראיתי אינה ראיה", ואנחנו מחפשים דרך פורמלית יותר.

דרך הפתרון המלא לתכנון חמדני כולל שלושה שלבים:

1. מגדירים אלגוריתם שיקול חמדני ובודקים שהוא מוביל לפתרון אופטימלי עבור מספר דוגמאות שונות. אין צורך לבדוק את כל הקומבינציות האפשריות, אלא רק לראות שהרעיון נשמר.
2. (בסיס האינדוקציה החמדנית) מוכיחים שקיים פתרון אופטימלי (לפחות אחד) שמקיים את הפתרון החמדני (לפחות בפעם הראשונה).
3. (שלב מעבר האינדוקציה) מוודאים שלבעיה יש תת מבנה אופטימלי – מהפתרון שמקיים את (2) נגזר פתרון לתת הבעיה – שהוא אופטימלי לאותה תת-בעיה. אנחנו לוקחים את הקבוצה שהצענו כפיתרון אופטימלי ומורידים את האיבר הראשון מתוכו (כולל כל הפעילויות המתנגשות איתו) ובודקים כעת עבור קבוצת הפעילויות הנותרת את הפתרון האופטימלי מתוך שארית הקבוצה A.

הוכחה:

ללא הגבלת הכלליות נניח שהפעילויות ממוינות לפי זמני סיום מוקדמים תחילה.

1. <u>טענה</u>: קיים פיתרון $A \subseteq S$ אופטימלי המקיים את השיקול החמדני. כלומר $1 \in A$
<u>הוכחה</u>: S סופית. לכן מספר הקבוצות $A \subseteq S$ סופי ולכן לבעיה קיים פתרון אופטימלי.
תהי A פתרון אופטימלי .
אם $1 \in A$ אז סיימנו.
אחרת, קיימת פעילות $i \neq 1$ כך ש $i \in A$ ובעלת זמן סיום הכי מוקדם שם.
אם $s_i \geq f_1$ אז פעילות 1 לא מתנגשת עם i ולא עם שאר הפעילויות של A. לכן הקבוצה A כולל {1} מכילה פעילויות המתיישבות זו עם זו, ו- $|A \cup \{1\}|>|A|$ בסתירה לאופטימליות של A.
לכן בהכרח הם משולבים, ו-A אופטימלית.
2. <u>טענה</u>: נגדיר 's, המכיל i שאינו 1 ומתיישב איתו (לא מתנגשים) – הגדרת תת בעיה מאותה סוג
תהי $A' = A-1$ באשר A היא מהטענה הנ"ל. אז 'A אוטימאלית עבור 'S.
<u>הוכחה</u> :(בשלילה) אם 'A איננה אופטימלית עבור 'S אז קיימת $B' \subseteq S'$ כך ש $|B'|>|A'|$. נגדיר $B = B' \cup \{1\}$. אזי B מכילה פעילויות המתיישבות זו עם זו שכן $B' \subseteq S'$ ו- 'S מכילה רק פעילויות המתיישבות עם 1.
בעת $B \subseteq S$ ו- $|b|>|a|$ - סתירה.

נסתכל בעת על הקוד. נתון לנו מערך D באורך n. המכיל 3 שדות
$D.1[j] = Sj$, $D.2[j] = Fj$, $D.3[j] = j$, $b[j] = 1$

```
Greedy-Selector(D,n)
  Sort D with respect to D.2
  with non-increasing order
  Initialize array B of zero bits with length n
  B[1]<-1
  Last<-1
  For j=2 to n do
    if D.1[j]>=D.2[last] then
       b[j]<-1
       last<-j
  Initialize empty set A
  for j =1 to n do
       if b[j] ==1 then
       A <- Au{D.3[j]}
  return A
```

קבוצת שורות	זמן ריצה	הערות
1	Nlogn	מיון מיזוג או ערימה
2	N	
3	1	
4	1	
5	N	

6	1	
7	N	
8	1	
סה"כ	Nlog2n	

בעיית תזמון התדלוק

מספר רכבים עומדים בתחנת דלק, כאשר ניתן להכניס בכל פעם רק רכב אחד לתדלוק. כמובן שלכל רכב יש זמן תדלוק אחר.

<u>הבעיה:</u> כיצד ניתן למצוא את זמן התדלוק האופטימלי, כלומר לשחרר את כל הרכבים תחת הזמן הקצר ביותר?

אנחנו שואפים שזמן ההמתנה הכולל יהיה מינימלי, ולכן גם פה אנחנו נלך על הSJF (Shortest Job First) שאנחנו מכירים וניתן לרכב שמתדלק הכי מהר להיות ראשון. האם זה באמת אופטימלי? כן. גם במקרה זה הפיתרון האינטואיטיבי הביא לו את התוצאה הטובה יותר, וגם נוכיח זאת פורמלית במבנה שלמדנו:

1. <u>תכונת הבחירה החמדנית:</u>
יש להוכיח שאמנם קיים פתרון אופטימלי שבו הבחירה הראשונה היא החמדנית.
נניח בשלילה שקיים תזמון אופטימלי של זמני התדלוק, שבו המכונית הראשונה אינה זו עם זמן התדלוק המינימלי.
אם נחליף את המכונית הראשונה עם המכונית שיש לה זמן תדלוק מינימלי, נקבל סך הכל זמן המתנה שאינו ארוך יותר.
סתירה!
2. <u>תכונת תת המבנה האופטימלי:</u>
יש להוכיח שבהינתן פתרון אופטימלי לבעיה, אם נוותר על המכונית הראשונה (ונשאל את אותה בעיה בדיוק באופן חדש) נקבל פתרון אופטימלי לבעיה בלי המכונית הראשונה.
- נניח בשלילה שבהינתן תזמון אופטימלי למכוניות 1...n בפתרון של תזמון המכוניות 2...n אינו אופטימלי.
- אזי קיים פיתרון אחר שמשבץ את המכוניות 2...n באופן טוב יותר.

- נבחר את התזמון הבא:
  - נבחר את התזמון של מכונית 1, ואחר כך את התזמון של שאר המכונית על פי האלגוריתם החדש (הטוב יותר, לכאורה) נקבל תזמון טוב יותר לקבוצת המכוניות 1...n
  - סתירה!

לו היה בנמצא אופציה בלשהי לסדר את כל המכוניות מלבד הראשונה בצורה אופטימלית, אזי ההוספה של אותו רכב (כמובן בהקשר של ההוספה שלו לכלל המערך של המכוניות האמורות לתדלק) אמור להיות עדיין אופטימלי, אבל יש פה סתירה.