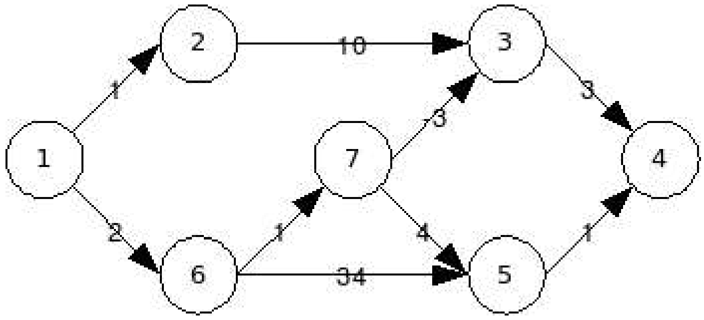
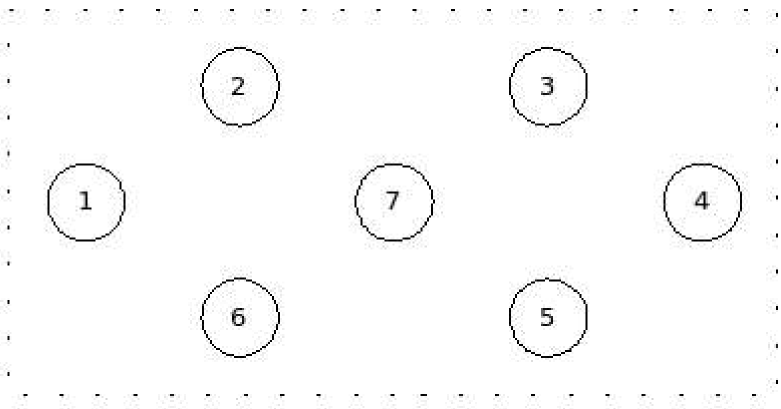
נניח שזהו הגרף המקורי:



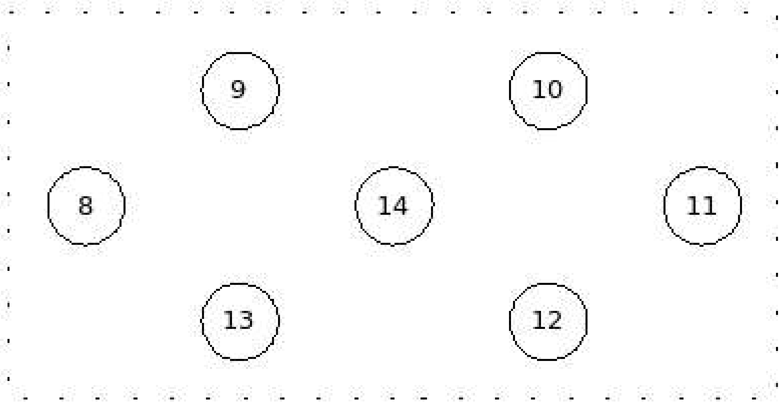
נבנה גרף חדש כך.

ראשית, נקח את צמתי הגרף V, ונשכפל אותם 3 פעמים, בקבוצות A, B, וC. לכל צומת u בקבוצה A, יש צומת $u+|V|$ בB, וצומת $u+2\cdot|V|$ בC. התרשים הבא מראה זאת.

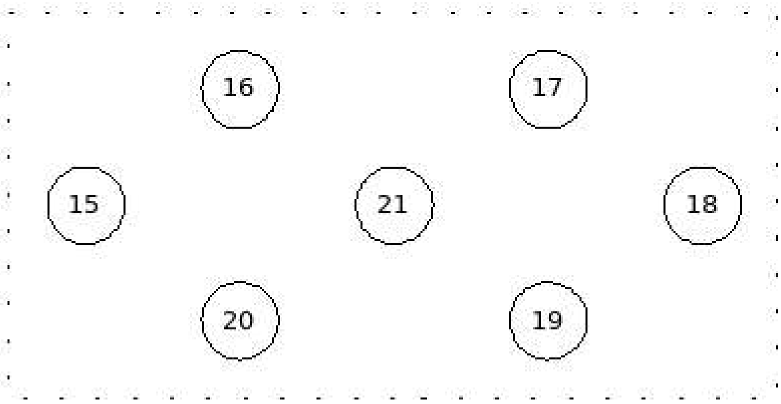
A



B

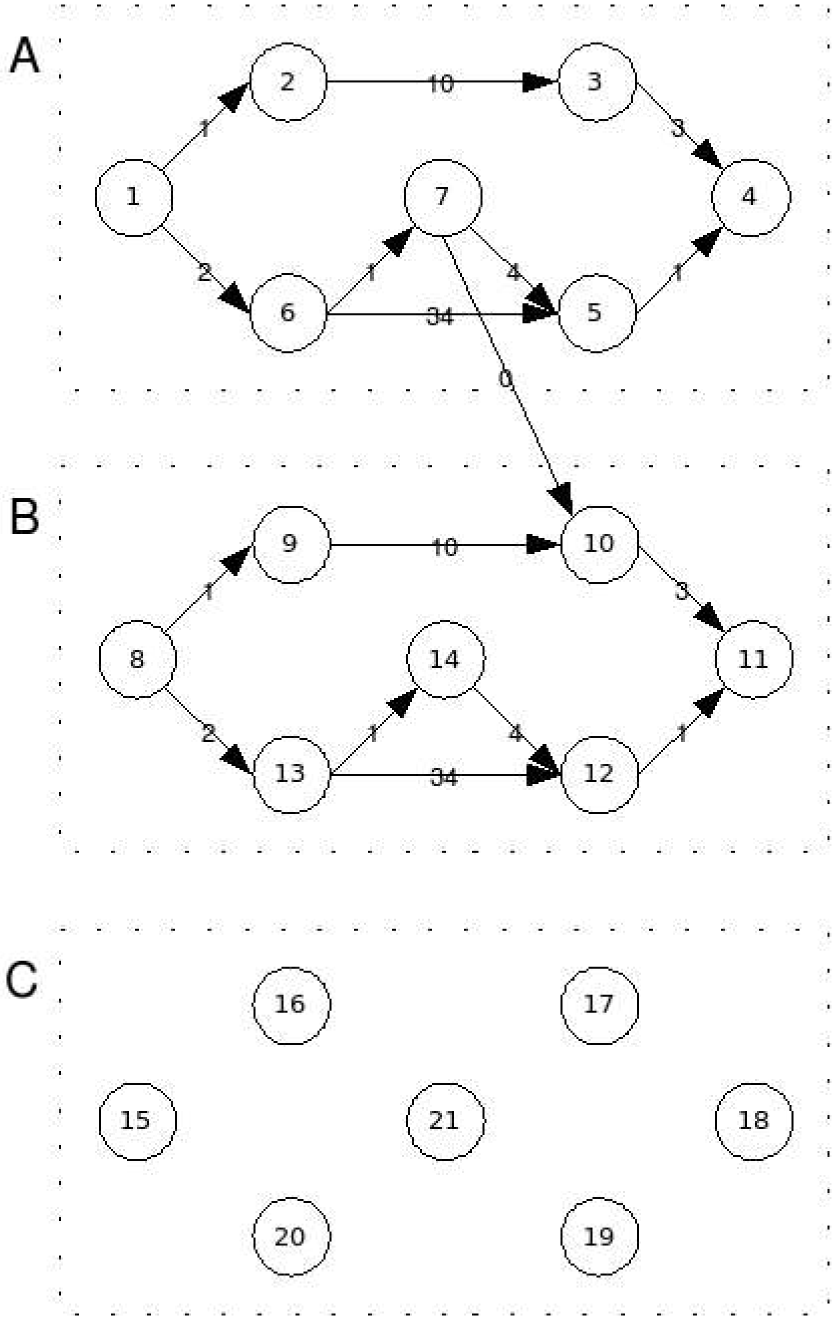


C



כעת נוסיף גם קשתות:

1. במקום כל קשת (u, v) בגרף המקורי, למעט הקשת השלילית, נמתח קשת מהצומת המתאים לu בA לצומת המתאים לv בA.
2. במקום כל קשת (u, v) בגרף המקורי, למעט הקשת השלילית, נמתח קשת מהצומת המתאים לu בB לצומת המתאים לv בB.
3. במקום הקשת השלילית (x, y) (בגרף המקורי), נמתח קשת מהצומת המתאים לx בA לצומת המתאים לy בB במחיר 0. התרשים הבא מראה זאת.



נניח שלקשת השלילית היה מחיר $-z$. בנוסף נמתח עוד שני סוגי קשתות:

1. לכל צומת u בA, נמתח קשת במחיר z בין u בA לבין $u + 2 \cdot |V|$ בC.
2. לכל צומת u בB, נמתח קשת במחיר 0 בין $u + |V|$ בB לבין $u + 2 \cdot |V|$ בC.(לא נצייר קשתות אלו מטעמי נוחות.)

נשים לב שאם כל הגרפים הנ"ל מיוצגים ברשימת שכנויות, אז סיבוכיות הבניה היא $\Theta(|V| + |E|)$.

המשפט הבא מסביר את חשיבות הגרף החדש.

משפט:

מחיר המסלול הזול ביותר מs לu בגרף המקורי, קטן בדיוק בz ממחיר המסלול הזול ביותר מs ל $u + 2 \cdot |V|$ בC בגרף החדש.

הוכחה: בגרף המקורי, ייתכן שהמסלול הזול ביותר מs לu לא השתמש בקשת השלילית, וייתכן שהשתמש בו. במקרה הראשון, תהיה קפיצה מA ישירות לC, ובמקרה השני, תהיה קפיצה מA לB ומB לC. הקפיצה מA ישירות לC עולה z יותר מאשר המסלול המקורי. הקפיצות מA לB ומB לC גם כן עולות z יותר מאשר המסלול המקורי, שכן עלות כל אחת משתי הקשתות היא 0, והנוסע לא קיבל את התשלום z מהחברה.

■

כעת כל הקשתות אינן שליליות, ומותר להריץ את Dijkstra.

קל לראות שהסיבוכיות הכוללת היא זו של Dijkstra.

שאלה 4

1. הטענה נכונה. נניח שבערימה יש s איברים. האיבר האחרון בערימה הוא באינדקס s, ואביו (אם יש לו) בהכרח יושב ב $\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$. לכן, למרות שהלולאה אינה עוברת על כל האיברים, היא מדלגת רק על ערימות בעלי איבר יחיד, שהן, עפ"י תכונת הערימה, תקינות. הלולאה תתקן כל ערימה שדורשת תיקון, בדיוק מהסיבה שראינו בהרצאה. הסיבוכיות היא $\Theta(n)$. אפשר לראות שהלולאה עוברת על חצי מהאיברים, ולכן היא $\Omega(n)$. מצד שני, היא עושה פחות מBuild-Heap, וזו היתה $O(n)$, ולכן גם לולאה זו $O(n)$.
2. הטענה נכונה. אם ילדו השמאלי של איבר במקום i נמצא באינדקס $2 \cdot i$, וילדו הימני נמצא באינדקס $2 \cdot i + 1$, אז כל מסלול מהשורש לעלה עובר על סדרת אינדקסים מונוטונית עולה. לכן, אם המערך ממויין, כל מסלול מהשורש לעלה יעבור על סדרת ערכים מונוטונית לא-יורדת. הסיבוכיות הנה מיון מיזוג, כלומר $\Theta\left(n \cdot \log(n)\right)$.
3. הטענה אינה נכונה, ומפורכת (לדוגמה) ע"י $[3, 4, 2, 1]$. הסיבוכיות הנה $\Theta(n)$, בדיוק מהניתוח שכבר ראינו לגבי הפתרון מההרצאה.
4. הטענה נכונה. היות ש `Bubble-Up(bh, i)` אינו יכול להשפיע על איברים באינדקס מעל i, הקוד שקול לסדרת פעולות `Insert`. מאותה סיבה, הסיבכויות היא זו של סדרת פעולות Insert, כלומר $\Theta\left(n \cdot \log(n)\right)$.
5. הטענה אינה נכונה, ומפורכת (לדוגמה) ע"י $[4, 1, 2, 3]$. הסיבכויות היא זו של סדרת פעולות `Insert`, כלומר $\Theta\left(n \cdot \log(n)\right)$.
