1-3 מייצרות מערך Sum באורך t, ומאתחלות את כל איבריו לFalse. הלולאה 5-10 עוברת על כל איברי A. לכל איבר כזה, 6-10 מעדכנת לTrue כל תא בSum שברור שניתן להגיע אליו מסכום האיברים שנבדקו עד כה. כל שנותר ב11 הוא להחזיר האם ניתן להגיע לסכום t.

שימו לב:

חשוב שהלולאה ב6 תהיה בסדר יורד. אותה הלולאה בסדר עולה תניב פתרונות שגויים.

קל לראות שהסיבוכיות היא $\Theta(n \cdot t)$.

פתרון מלמעלה למטה

```
Subset-Sum(A, i, t')
if t == 0
    return True

if i == 0
    return False

if SS[i, t'] != Nil
    return SS[i, t']

if Subset-Sum(A, i - 1, t') == True
    SS[i, t'] = True
    return True

if  t' ≥ A[i] and Subset-Sum(A, i - 1, t' - A[i]) == True
    SS[i, t'] = True
    return True

SS[i, t'] = False
return False
```

(נניח שSS היא מטריצה בעלת n שורות וt עמודות, המאותחלת כולה לNil. בנייתה תארך $\Theta\left(n \cdot t\right)$.)

סיבוכיות הפתרון שוב פעם $\Theta\left(n \cdot t\right)$: אתחול המטריצה עולה $\Theta\left(n \cdot t\right)$. כמו כן, נגדיר כ$T'\left(i, t'\right)$ את זמן הריצה של Subset-Sum(i, t') בהנחה שכל קריאה רקורסיבית אורכת $O(1)$. קל לראות ש$T'\left(i, t'\right) = O(1)$. הסיבוכיות הכוללת של הקריאות היא $\Theta\left(n \cdot t\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t'=1}^{t}\left[O(1)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t'=1}^{t}\left[T'\left(i, t'\right)\right]$.

שאלה 2

תשובה שגויה ע"י שימוש באלגוריתם Kruskal

כדאי לדעת:

אלגוריתם Kruskal פועל כך. ראשית הוא ממיין את קשתות הגרף על פי העלות (או המשקל, תלוי בהגדרה), ולאחר מכן הוא בוחר קשתות מעצים שונים על פי סדר המיון.

להלן הוכחה **שגויה** לקיום עפ"מ יחידי:

הוכחה: נשים לב שאם הקשתות בעלות משקלים שונים, תוצאת המיון נקבעת חד משמעית, ולכן יש רק עפ"מ יחיד שאלגוריתם Kruskal יחזיר. לכן יש עפ"מ יחיד.

תשובה זו אינה נכונה, מפני שהיא מתייחסת לאלגוריתם Kruskal בלבד. אפשר עדיין לטעון, לדוגמה, שאלגוריתם Prim יחזיר עפ"מ שונה במקרה זה (בהמשך נראה שזה בלתי אפשרי, אלא שאי אפשר להסיק זאת מהטענה שהוצגה עד עתה).

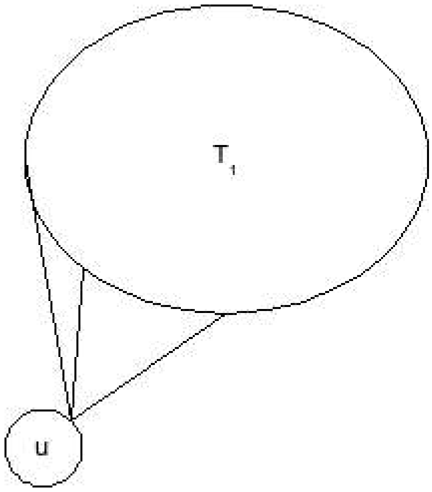
תשובה שגויה ע"י שימוש לא נכון באינדוקציה

להלן הוכחה **שגויה** באינדוקציה:

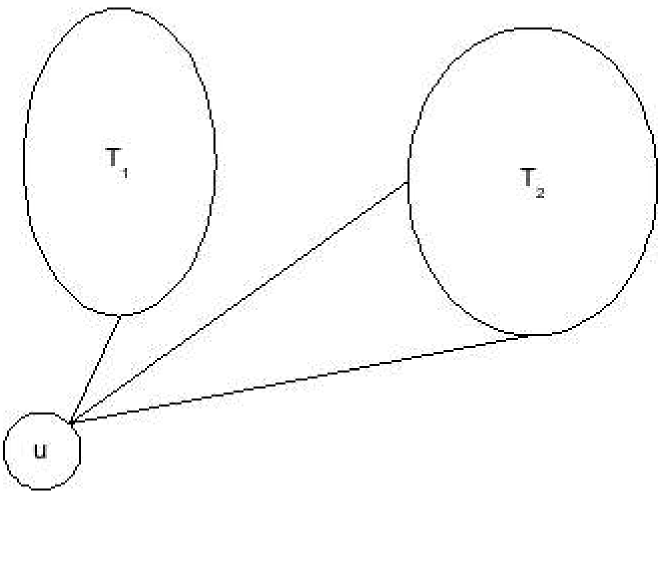
הוכחה: האינדוקציה היא על מספר הצמתים, $|V|$.

(בסיס האינדוקציה) כאשר $|V| = 1$ אז יש צומת יחיד והעפ"מ בוודאי יחידי.

(מעבר האינדוקציה), ניקח צומת כלשהו u, ונמצא את העפ"מ T_1 של הצמתים $V \setminus u$. קבוצה זו קטנה ב1 מ$|V|$, ולכן יש לה עפ"מ יחידי. נותר לחבר את u לT_1, וברור שנעשה זאת דרך הקשת הזולה ביותר בין u לבין צומת בT_1.



מדוע ההוכחה שגויה? היא מוכיחה שיש עפ"מ יחיד **מבין העפ"מים בהם יוצאת קשת יחידה מu**. היא כלל אינה סותרת את קיומו של עפ"מ כמו בתרשים הבא, שלכאורה יכול להיות אופטימאלי גם כן:



כדאי לדעת:

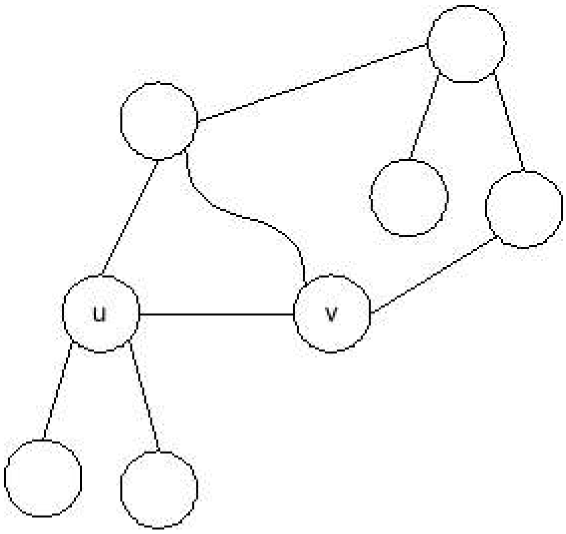
חדי העין יזהו שאין הבדל ממשי בין הטעות כאן לבין הטעות הקודמת. האינדוקציה כאן היא למעשה הפעלת אלגוריתם Prim תחת הנחות שגויות שמקבלת תוצאה כללית לגבי כל העפ"מים האפשריים.

תשובה ע"י שיקול הקשת הזולה ביותר בגרף

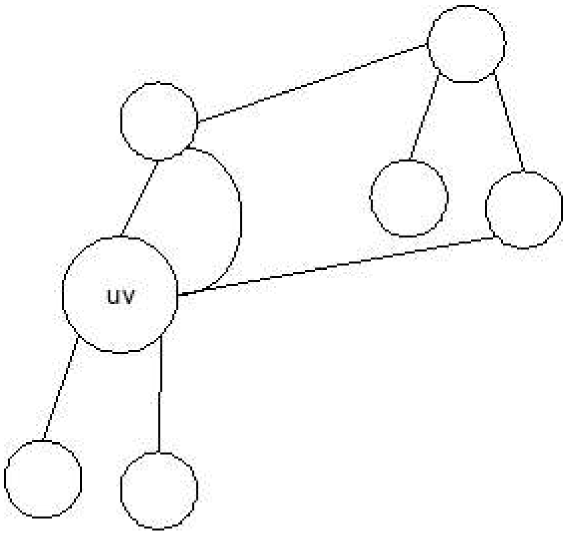
ראשית נוכיח את המשפט הבא.

משפט:

נניח ש$G=(V,E)$ הוא גרף, $u,v \in V$ הם שני צמתים, ו$e=(u,v) \in E$ היא קשת.



נגדיר כעת את הגרף $G'=(V',E')$ כגרף המתקבל מ"כיווץ" u וv לצומת יחיד, uv.



נגדיר כT' את קשתות העפ"מ בG'. אז קשתות עפ"מ זה יחד עם (u,v), כלומר $T' \bigcup (u,v)$, הם בהכרח קשתות העץ הזול ביותר הפורס את G מבין העצים הפורשים שמשתמשים ב$e=(u,v)$.

הוכחה: ראשית ברור שהתוצאה היא עץ. נניח שx וy הם שני צמתים. קל לראות שאם יש מסלול מx לy בG' המשתמש בקשתות T' בלבד , אז יש מסלול מx לy בG' המשתמש בקשתות $T' \bigcup (u,v)$ בלבד. קל לראות שאם $T' \bigcup (u,v)$ מכיל מעגל, אז גם T' מכיל מעגל.

כעת ברור גם שמדובר בעץ הזול ביותר. נניח שיש עץ פורש זול יותר $T'' \bigcup (u,v)$. אז גם T'' עץ פורש זול יותר בG', דבר שסותר את הנחתנו שT' היא קבוצת קשתות עפ"מ.

■

בעזרת המשפט הקודם נוכל להוכיח שיש עפ"מ יחידי באינדוקציה (הפעם בצורה נכונה).

הוכחה: האינדוקציה היא על מספר הצמתים, $|V|$.

(בסיס האינדוקציה) כאשר $|V| = 1$ אז יש צומת יחיד והעפ"מ בוודאי יחידי.

(מעבר האינדוקציה) ניקח את הקשת הקלה ביותר בגרף $e = (u,v)$. כבר הוכחנו שקשת זו היא חלק מכל עפ"מ. כעת "נכווץ" את הגרף ע"י הפיכת שני הצמתים, u וv, לצומת יחיד. מהנחת האינדוקציה נובע שקיים כעת עפ"מ יחיד (שהרי מספר הצמתים ירד ב1). המשפט הקודם אומר שקשתות כל עפ"מ שהתקבל בגרף המכווץ, יחד עם e, הן בדיוק קשתות העפ"מ בגרף המקורי. נובע לכן שיש עפ"מ יחיד.

■

תשובה ע"י שיקול הקשת היקרה ביותר במעגל

נניח בשלילה שיש שני עפ"מים שונים: T_1 וT_2. היות שהעפ"מים שונים אך מספר קשתותיהם שווה, קיימת בהכרח קשת e השייכת ל T_2 אך לא לT_1. הוספת קשת זו לT_1 בהכרח תיצור מעגל. נגדיר כe' את הקשת הכבדה ביותר על פני המעגל, וניזכר שקשת זו איננה חלק מאף עפ"מ. כעת אם $e' = e$, אז T_2 אינה עפ"מ; מצד שני, אם $e' \neq e$, אז T_1 אינה עפ"מ. בכל מקרה, לא ייתכן מעגל כזה, ולכן בהכרח אין שני עפ"מים שונים.

שאלה 3

נתבונן בעמודה האחרונה, ונספור את מספר ה-0-ים ומספר ה-1-ות שאנו רואים. היות שיש $m = 2^n - 1$, שורות, אז מספר ה-0-ים גדול ב1 ממספר ה-1-ות, או הפוך. נניח שמספר ה-0-ים גדול ב1 ממספר ה-1-ות (המקרה השני סימטרי). נוכל להסיק שני דברים:

1. הספרה החסרה בעמודה זו היא 1.
2. עלינו להתמקד רק בשורות בהן הספרה בעמודה זו היא 1 (קומבינטורית, לא ייתכן אחרת).כעת נתחיל את הבעיה מחדש, תוך התמקדות בחצי (בערך) מהשורות (רק אלה בהן הספרה בעמודה זו היא 1): נסתכל בעמודה הלפני אחרונה,נספור את מספר ה0-ים ומספר ה1-ות שאנו רואים , וכולי.

להלן פסוודו-קוד יעיל המממש זאת:

```
Print-Missing-Number(M)
	n = Num-Cols(M)

	Rows = Make-Stack()

	for j in [1, … 2^n - 1]
		Insert-Front(Rows, j)

	for i in [1, … n]
		Zeros = Make-Stack()
		Ones = Make-Stack()
```