

## גרפים

$V/N$  - הצמתים בגרף,  $M/E$  –הקשתות בגרף

זמני ריצה:

אלגוריתם	פעולה	זמן ריצה
<b>סריקה</b>		
BFS - סריקה רוחבית		$O(V + E)$
DFS - סריקה לעומק		$O(V + E)$
עץ לא מכוון (לא יער ולא חייב להיות בינארי)	סריקה	$O(V)$ – כי בעץ לא מכוון $ E  =  V  - 1$
SCC - רק"ח - רכיב קשיר חזק/היטב) - מעגלים	מחלק לקבוצות צמתים קשורים מעגלים בגרף <b>מכוון</b> מפעיל Explore על הצמתים הממוינים הפוך מזמן היציאה בגרף המשוחלף	$O(E + V)$
MST (עפ"מ)-עץ פורש מינימלי: (גרף שמחבר את כל הצמתים ב- $(V-1)$ קשתות ובמינימום משקל) עובד על גרף <b>קשיר לא מכוון</b> ו <b>מושקל</b> (גם במשקל שלילי)		
1. קרוסקל (עובר על קשתות)	$O(1)$ Union - $V$ פעמים	סה"כ $O(V)$
	$O(1)$ Find - $2E$ פעמים	סה"כ $O(E)$
	מיון כל הקשתות	$O(E \log E)$
	סה"כ	$O(E \log E) = O(E \log(V^2)) = O(2E \log v) = O(E \log V)$
2. פרים (עובר על צמתים)	הוצאה מהערימה $O(v \log v)$ שינוי ערך ותיקון ערימה $O(E \log v)$	$O(E + V \log V)$ הגרף קשיר ולכן $E \geq V-1$ זמן הריצה $O(E \log V)$ (אם ממומש במערך - $O(V^2)$ )
אלגוריתם שמקבל SRC ומביא את הדרך בעלת המשקל הנמוך ביותר ממנו לכל שאר הצמתים בגרף: עובד על גרף <b>מושקל</b>		
1. דייקסטרה (יעיל יותר בזמן הריצה) עובד רק על משקלים <b>חיוביים</b>	הוצאה מהערימה $O(v \log v)$ שינוי ערך ותיקון ערימה $O(E \log v)$	$O((E+V) \log V)$ (אם ממומש במערך - $O(V^2)$ )
2. בלמן (מסתדר עם משקלים שליליים) ולא עם מעגלים שליליים	עובר $V-1$ פעמים על כל הקשתות ומבצע תיקונים (כדי למצוא מעגל שלילי יש להפעיל פעם נוספת)	$O(EV)$

מושגים:

**גרף מכוון** - גרף בו כל הקשתות מכוונות רק לכיוון אחד.

**גרף לא מכוון** – גרף שבו הקשתות דו צדדיות.

**מעגל** - צומת שיש ממנה קשת יוצאת וקשת נכנסת.

**גמ"ל** - DAG – גרף **מכוון ללא מעגלים** .

**גרף קשיר** – אין צמתים מבודדים בגרף, (מספר הקשתות הוא לפחות  $(V-1)$ ).

**עץ** – גרף קשיר **ללא מעגלים** .

**גרף ממושקל** – גרף שבו הקשתות בעלות ערך מספרי.

**דרגת כניסה** – מס' הקשתות הנכנסות לצומת  $V$ .

**דרגת יציאה** – מס' הקשתות היוצאות מצומת  $V$ .

**דרגה** - בגרף לא מכוון, מס' השכנים של הצומת  $V$ .

**שורש/מקור**- צומת שדרגת הכניסה שלה היא 0.

**בור**- צומת שדרגת הכניסה שלה היא עד  $V-1$  ודרגת היציאה שלה היא 0.

**ADJ**- מטריצת סמיכויות – מטריצה בגודל  $N \times N$  המכילה 1 באם יש קשת מצומת  $i$  ל- $j$ , ו-0 אם אין.

**מסילה** – מסלול.

**קוטר הגרף** -הינו המקסימום מבין המרחקים המינימליים בין זוגות צמתים בגרף.

### BFS – סריקה רוחבית

מוצא מסלול קצר ביותר מצומת  $U$  ל- $V$ .

סורק רק את הקודקודים שנגישים מ- $S$ .

מסתדר עם מעגלים.

צומת לבנה- צומת שלא ביקרו בה.

צומת אפורה – צומת שנמצאת בתור (ביקרו בה ולא בצאצאיה).

צומת שחורה – צומת שביקרו בה ובצאצאיה.

### DFS – סריקה לעומק

קשת קדימה – מאב לצאצא.

קשת אחורה – מצאצא לאב.

קשת עץ – מאב לבן.

קשת חוצה (cross edge) – קשת שלא מחברת בין אב לצאצא.

אם בגרף יש קשת אחורה אזי יש מעגל.

קשת  $UV$  היא קשת עץ או קשת קדימה אם"ם:  $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$

קשת  $UV$  היא קשת אחורית אם"ם:  $d(v) < d(u) < f(u) < f(v)$

קשת  $UV$  היא קשת חוצה אם"ם:  $d(v) < f(v) < d(u) < f(u)$

### מיון טופולוגי- רק בגרף קשיר מכוון ללא מעגלים - DAG

ממין את הצמתים ע"י הפעלת DFS והכנסה למחסנית בזמן יציאה.

הצמתים ממוינים באופן שאין בן שמופיע לפני אב קדמון שלו.

באמצעותו ניתן להגיע למסלול הכי ארוך בגרף והכי קל בגרף.

### דייקסטרה

אם מוסיפים לכל הקשתות אותו ערך בחיבור המסלול הכי קל יכול להשתנות,

אם מוסיפים לכל הקשתות אותו ערך בכפל המסלול הכי קל לא משתנה.

כדי למצוא מסלול קצר ביותר:

1. נשתמש ב-BFS זמן הריצה שלו לינארי  $O(E+V)$ :

אם הגרף לא ממושקל

אם הגרף ממושקל במשקלים זהים

אם הגרף ממושקל במשקלים חיוביים ושלמים, והמשקל המקסימלי קטן מ-

$\log(V)$  ניתן לחלק כל קשת למס' קשתות כמשקל הקשת ואז להריץ BFS זמן

הריצה הוא  $O((E+V) * \text{משקל מקסימלי})$

2. אם הגרף מכוון ממושקל וחסר מעגלים ניתן למצוא מסלול קל ביותר מ-S ל-T ע"י

מציאת מסלולים קלים ביותר ב-DAG - מיון טופולוגי זמן הריצה שלו לינארי

$O(E+V)$ .

3. אם הגרף ממושקל במשקלים חיוביים נשתמש באלגוריתם של דייקסטרה זמן

הריצה  $O((E+V)\log V)$

אם הגרף ממושקל גם במשקלים שליליים נשתמש בבלמן זמן הריצה הוא  $O(EV)$   
(לא מסתדר עם מעגלים שליליים) - כדי למצוא מעגל שלילי מפעילים שוב את בלמן על  
הקשתות ובודקים האם נעשה שיפור, אם כן – יש מעגל