תורת הגרפים – מסלולים בגרפים
דף תרגילים

שאלה 1
נתון גרף פשוט ולא מכוון $G=(V, E)$ עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R$ וטבלה שבה יש כניסה לכל זוג צמתים המכילה את אורך המסלול הקצר ביותר בין שני הצמתים בגרף.

א. נניח כי נוסיף לגרף קשת **חדשה** $e=(u, v)$ שאינה קיימת בגרף הנתון. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. יתכן כי הטבלה לא תשתנה בעקבות הוספת הקשת e (כלומר, קיימים גרף G וקשת e שעבורם לא תשתנה הטבלה).
2. אם ידוע כי פונקציית המשקל היא קבועה (כלומר: לכל הקשתות אותו משקל) ושונה מ-0 אז יתכן כי הטבלה לא תשתנה בעקבות הוספת הקשת e .

ב. נניח כי נוריד מהגרף קשת $e=(u, v)$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. יתכן כי הטבלה לא תשתנה בעקבות הורדת הקשת e (כלומר, קיימים גרף G וקשת e שעבורם לא תשתנה הטבלה).
2. אם ידוע כי פונקציית המשקל היא קבועה ושונה מ-0 אז יתכן כי הטבלה לא תשתנה בעקבות הורדת הקשת e .

הנח כי אין בגרף מעגלים שליליים, לפני ואחרי השינוי.

שאלה 2
כתוב אלגוריתם, יעיל ככל שתוכל, אשר מקבל כקלט גרף מכוון $G=(V, E)$ וצומת $u\in V$ ומוצא את כל זוגות הצמתים v_1, v_2 ב-V שיש ביניהם מסלול קצר ביותר ב-G אשר אורכו בדיוק 8 ושאינו עובר דרך u.

שאלה 3
כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל אשר מקבל כקלט גרף לא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w: E\rightarrow \{1,2\}$ ושני צמתים $s,t\in V$ ומוצא משקל מסלול קצר ביותר בין s ל- t ב- G.

הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 4
כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל, המקבל כקלט גרף לא-מכוון $G = (V, E)$ עם משקלות אי-שליליים על הקשתות, ובו כל קשת צבועה באחד משני צבעים: אדום ושחור. כמו כן, הקלט כולל צומת s בגרף. על האלגוריתם למצוא לכל צומת $v \in V$ את אורך המסלול הקצר ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-v המתחילים בקשת אדומה ומסתיימים בקשת שחורה.

נתח את סיבוכיות האלגוריתם והוכח את נכונותו.

תורת הגרפים – מסלולים בגרפים
פתרונות דף התרגילים – למרצה

מסלולים בגרפים - פתרון שאלה 1

א.

1. הטענה נכונה. למשל, אם G הוא הגרף שבו 3 צמתים {1, 2, 3} ושתי קשתות (1, 2) שמשקלה 1 ו-(2, 3) שמשקלה 2 ונוסיף את הקשת (1, 3) שמשקלה 4. במקרה זה הטבלה לא תשתנה.
2. הטענה אינה נכונה. נוכיח זאת: נסמן את המשקל של כל קשת ב-X. בגרף המקורי המרחק בין u ל-v גדול מ-X, כי או שאין מסלול בין הצמתים ואז המרחק הוא ∞ או שיש מסלול ביניהם ואז אורכו גדול מ-X כי אין קשת בין הצמתים. בגרף לאחר השינוי המרחק בין הצמתים הוא X.

ב.

1. הטענה נכונה. G יהיה הגרף שנוצר בסעיף 1א אחרי הוספת הקשת e, כלומר, V={1, 2, 3}, ובקבוצת הקשתות נמצאות הקשתות (1, 2) ממשקל 1, (2, 3) ממשקל 2 ו-(1, 3) ממשקל 4. הסרת הקשת e=(1, 3) לא תשנה את הטבלה.
2. הטענה אינה נכונה וההוכחה דומה להוכחת 2א.

מסלולים בגרפים - פתרון שאלה 2

יהי $G'=(V', E')$ כאשר $V'=V-\{u\}$ ו- $E'=\{(v_1,v_2) \mid (v_1,v_2)\in E, v_1\neq u, v_2\neq u\}$. תהיינה A_1, A_2 מטריצות בגודל $|V|\times|V|$. האלגוריתם הוא:

1. לכל צומת $v_1\in V$ בצע:

   1.1 הפעל BFS מ- v_1 על G. לכל $v_2\in V$: $A_1[v_1,v_2]\leftarrow d(v_2)$.

   1.2 הפעל BFS מ- v_1 על G'. לכל $v_2\in V$: $A_2[v_1,v_2]\leftarrow d(v_2)$.

   1.3 לכל $v_2\in V$: אם $A_1[v_1,v_2]=A_2[v_1,v_2]=8$ אז הוסף לפלט את הזוג (v_1,v_2).

זמן הריצה של האלגוריתם O(|V|{|V|+|E|}) כי הוא מריץ לכל צמת את BFS.

מסלולים בגרפים - פתרון שאלה 3

ראשית, נבנה מהגרף הנתון G גרף G' באופן הבא: עבור כל קשת $\boldsymbol{e=(u, v)}$ שמשקלה 2 נוסיף לקבוצת הצמתים של הגרף צומת $\mathbf{v^e}$ ונוסיף לקבוצת הקשתות את הקשתות $\mathbf{(u, v^e)}$ ו-$\mathbf{(v^e,v)}$. משקל הקשתות החדשות יהיה 1. עתה נפעיל בגרף החדש (שמשקל כל קשתותיו 1) BFS מ-$\boldsymbol{s}$ ונחזיר את $d(t)$. נשים לב שגודל קבוצת הצמתים בגרף החדש הוא לכל היותר $|E| + |V|$ וגודל קבוצת הקשתות הוא לכל היותר $2\cdot |E|$ ולכן סיבוכיות האלגוריתם היא $O(|E| + |V|)$.

מסלולים בגרפים - פתרון שאלה 4

נבנה מהגרף הנתון, גרף חדש *G** ללא צביעה על הקשתות, באופן הבא:

נגדיר גרף $G^*=(V^*,E^*)$ עבור $V^*=\{s\}\cup V'\cup V''$

כאשר V',V'' הם שכפולים של V, ונסמן לכל $v\in V$: $v'\in V', v''\in V''$.

1. $E^*\leftarrow\phi$
2. לכל $(u,v)\in E$:
3. $E^*\leftarrow E^*\cup\{(u',v')\}$
4. אם **(*u*, *v*)** אדומה אז
5. אם ***u*=*s*** אז $E^*\leftarrow E^*\cup\{(s,v')\}$
6. אחרת (**(*u*, *v*)** שחורה)
7. $E^*\leftarrow E^*\cup\{(u',v'')\}$

משקלות הקשתות החדשות יהיה כמשקל הקשתות המקבילות להן בגרף המקורי. כלומר, **.***w*(*u*, *v*')=*w*(*u*', *v*')=*w*(*u*', *v*'')=*w*(*u*, *v*)

סיבוכיות בניית ***G**** ליניארית, $|E^*|\le 3|E|, |V^*|\le 2|V|$.

כעת נפעיל את האלגוריתם של דייקסטרה על הגרף החדש מהצומת ***s***. התוצאות המאוחסנות ב-***d*[*v*'']** הן הרצויות.

סיבוכיות: $O(|E^*|+|V^*|\log|V^*|)=O(|E|+|V|\log|V|)$

הסבר: לכל מסלול ב-***G*** המתחיל מ-***s*** עם קשת אדומה ומסתיים ב-***v*** בקשת שחורה מתאים מסלול ב-***G**** המתחיל ב-***s*** ומסתיים ב-***v*''** (מסלול כזה יעבור מ-***s*** ל-***V*'**, יישאר שם עד הצומת לפני האחרון והקשת האחרונה תהיה מצומת ב-***V*'** אל ***v*''**), <u>ולהיפך</u>. כלומר קבוצת המסלולים ב-***G**** מ-***s*** ל-***V*''** מתאימה לקבוצת המסלולים החוקיים המוגדרים בשאלה, והאלגוריתם של דייקסטרה מחזיר את אורך המסלול המינימלי מביניהם.