3. יהי G גרף פשוט מסדר גדול מ 1. הוכח: קיימים 2 קודקודים ב G עם דרגה זהה.

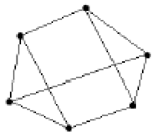
3. יהא G גרף מסדר n, מספר האפשרויות לדרגות בגרף הוא $n-1$, כי כל קודקוד יכול להיות מחובר ל 0 עד $n-1$ קודקודים, אבל אם יש קודקוד מדרגה 0 אז בהכרח אין קודקוד מדרגה $n-1$ וכן להיפך. קיבלנו שיש n קודקודים ו $n-1$ דרגות שונות אפשריות ולכן לפי עיקרון שובך היונים קיימים לפחות 2 קודקודים בעלי דרגה זהה.

4. מצא את הגרפים הפשוטים בהם יש <u>בדיוק</u> 2 קדקודים עם דרגה זהה.

4.  - דרגת כל קודקוד היא 1.

7. האם קיים גרף עם סדרת הדרגות הבאה:
א. 3,3,3,3,3,3
ב. 3,3,3,3,3
ג. 1,1,2,3,4,5

7. א. כן.



ב. לא כי סכום הדרגות הוא אי זוגי בסתירה למשפט: $\sum_{v\in V} degree(v) = 2|E|$.
ג. לא. כי יש 2 קודקודים המחוברים לפחות ל 4 מתוך ה 5 האחרים ולכן לא ייתכן שקיימים 2 קדקודים בעלי דרגה 1.

8. האם ייתכן כי בגרף G בו דרגת כל קודקוד שווה ל 3 יהיו 100 צלעות?

8. לא, כי לפי משפט סכום הדרגות נקבל: $3|V| = 2 \cdot 100$ אבל 200 לא מתחלק ב 3.

11. הוכח כי אם בגרף G יש n קודקודים , $n+4$ קשתות וכל הדרגות לפחות 3, אז $n \geq 8$.

11. לפי משפט סכום הדרגות, נקבל: $3n \geq 2(n+4)$ ומכאן: $n \geq 8$.

12. הוכח כי אם בגרף n קודקודים שדרגת כולם לפחות 3 ואין בו מעגל באורך לכל היותר 4 אז: $n \geq 10$.

12. יהא G גרף על n קודקודים כך ש $\deg(v) \geq 3$ לכל $v \in V$ ואין בו מעגל עם פחות מ 5 צלעות. צ"ל: $n \geq 10$. יהא $u \in V$ כלשהו, לפי הנתונים, $\deg(u) \geq 3$, כלומר, ל u יש לפחות 3 שכנים שונים. לכל אחד מהשכנים יש לפחות 2 שכנים ייחודיים (מלבד u) כאשר אין קשת בין 3 השכנים של u כי אחרת נקבל מעגל באורך 3 ואין שכן משותף ל 2 מתוך השכנים של u כי אחרת נקבל מעגל באורך 4. ולכן בהכרח קיימים לפחות: $1+3+3*2=10$ קודקדים (u , 3 השכנים שלו ועוד 2 שכנים עבור כל שכן של u). מש"ל.

13. הוכח שהגרף עם 100 קדקודים שדרגת כולם היא לפחות 50 הוא גרף קשיר.

13. יהיו $u, v \in V$, צ"ל: קיים מסלול ביניהם. אם $(u, v) \in E$ סיימנו. אחרת, מתבונן בקבוצות השכנים של u, v: קבוצות אלו נחתכות כי לכל אחד מהם 50 שכנים מתוך 98 הקודקודים הנותרים ולכן קיים $w \in N(u) \cap N(v)$ ($N(x)$ – מסמן את קבוצת השכנים של x) ומכאן שקיים המסלול (u, w, v) ומכאן שהגרף קשיר. מש"ל.

16. הוכיחו כי בכל קבוצה בת מספר זוגי של אנשים יש לפחות 2 אנשים שמספר המכרים המשותף שלהם זוגי.

16. נמיר את הבעיה לגרף שבו כל קודקוד מייצג אדם וכל צלע מייצגת היכרות. נשתמש בטענה: אם מספר הקודקודים בגרף הוא אי זוגי אז בהכרח קיים קודקוד אחד לפחות שדרגתו זוגית כי אחרת, סך כל הדרגות יהיה אי זוגי. נפרק למספר מקרים:

א. קיים אדם x עם מספר מכרים אי זוגי. לפי הטענה, קיים אדם y עם מספר מכרים זוגי מתוך השכנים של x. (ייתכן גם 0) ולכן מספר המכרים המשותפים שלהם הוא זוגי.

ב. לכולם מספר מכרים זוגי. נבחר אדם x כלשהו, מספר האנשים ש x לא מכיר הוא אי זוגי כי סה"כ יש מספר זוגי של אנשים פחות מספר זוגי ופחות x נקבל מספר אי זוגי. לפי הטענה, בקבוצה ש x לא מכיר קיים y המכיר בקבוצה זו מספר זוגי של אנשים. ומכיוון שסה"כ מספר האנשים ש y מכיר הוא זוגי אז גם מספר האנשים ש y מכיר מתוך השכנים של x הוא זוגי ולכן מספר השכנים המשותפים של x ו y בהכרח זוגי. מש"ל.

17. יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. הוכח כי אם לכל $e \in E$ הגרף: $G-\{e\}$ הוא עץ, אז G הוא מעגל.

17. יהא $G=(V,E)$ גרף כלשהו. נניח שלכל $e \in E$ מתקיים $G-\{e\}$ עץ. צ"ל: G מעגל. יהיו $u,v \in V$ כלשהם. לפי ההנחה, מספר המסלולים בין u ל v הוא 2 מכיוון שאם יש ביניהם מסלול אחד ונוריד קשת $e \in E$ מהמסלול ביניהם נקבל שהגרף אינו קשיר בסתירה לכך שהוא עץ. ואם יש ביניהם יותר מ 2 מסלולים אז לאחר הסרת הקשת יהיו ביניהם לפחות 2 מסלולים ולכן יש בגרף מעגל, בסתירה לכך שהוא עץ. מכאן שבין כל 2 קודקודים בגרף G יש 2 מסלולים ולכן כולם נמצאים על מעגל ומכאן G מעגל. מש"ל.

18. כמה מעגלים פשוטים שונים ייתכנו לכל היותר בגרף בעל n קודקודים?

18. $\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}-\frac{n(n-1)}{2}-n-1$. – כי נבחר מתוך n הקודקודים את הקודקודים שירכיבו מעגל באורך 3, 4, וכו'.

21. הוכח שכל עץ בעל $n \geq 2$ (n סופי) קדקודים מכיל עלה.

21. יהא G עץ עם $n \geq 2$ קודקודים. נניח בשלילה שאין ב G עלים. לא ייתכן קודקוד מדרגה 0 כי הגרף לא יהיה קשיר (לא נוכל להגיע מהקודקוד בעל דרגה 0 לאחרים). ולכן בהכרח קיים קודקוד לפחות מדרגה 2. יהא $(u_0, u_1, \dots, u_k)$ $(u_0, u_1, \dots, u_k \in V)$ מסלול פשוט מקסימאלי ב G, u_0 אינו עלה ולכן קיים לו שכן נוסף מלבד u_1, נסמנו $v \in V$, אם $v \neq u_i$ לכל $1 \leq i \leq k$, אז נוכל להאריך את המסלול ע"י הוספת v בסתירה למקסימאליות של המסלול. אם $v = u_i$ לאיזה $1 \leq i \leq k$ נקבל $(v, u_0, u_1, \dots, v, \dots, u_k)$ מעגל בסתירה לכך ש G עץ. מש"ל.

22. הוכח שמספר הצלעות בעץ בעל n קודקודים הוא $n-1$.

22. נוכיח באינדוקציה על n: בסיס: $n=1$ יש $1-1=0$ קודקודים.
הנחה: הטענה נכונה עבור: $1 \leq k < n$. צ"ל: הטענה נכונה עבור n. יהא G עץ עם n קודקודים.
לפי הטענה שבכל עץ קיים עלה (בשאלה הקודמת), בהכרח יש עלה ב G, נסיר אותו.
קיבלנו גרף עם $n-1$ קודקודים. גרף זה הוא עץ כי הורדת הצלע של העלה לא פגעה בקשירות הגרף (כי העלה מחובר בצלע רק מכיוון אחד ולא מפריד בין 2 קודקודים) וכן, לא יכולים להיווצר מעגלים ע"י הורדת קודקוד/צלע. ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, בגרף שהתקבל יש $n-2$ צלעות.
נוסיף חזרה את הקודקוד והצלע שהסרנו ונקבל עץ G עם n קודקודים ו $n-1$ צלעות. מש"ל.

23. הוכח כי אם משמיטים עלה מעץ מקבלים גרף שהוא עץ.

23. ההסבר הובא בפתרון השאלה הקודמת.

24. הוכח שאם בגרף $G=(V,E)$ מתקיים: $|V| \leq |E|$ אז ב G יש מעגל.

24. נוכיח באינדוקציה על n (מספר הקודקודים): בסיס: $n=3$ אז בהכרח: $m=3$ וקיבלנו גרף משולש – מעגל. הנחה: נניח נכונות לגרפים עם $3 \leq n-1$ קודקודים ונוכיח עבור גרפים עם n קודקודים. יהא G גרף עם n קודקודים ו m צלעות. ייתכנו מספר מקרים: אם קיים קודקוד מדרגה לכל היותר 1, נסיר אותו ונקבל גרף עם $n-1$ קודקודים ו $n-1 \leq m-1$ (לפחות) צלעות ולכן לפי הנחת האינדוקציה, יש בגרף שהתקבל מעגל ולכן הוא קיים גם ב G.
אחרת, דרגת כל הקודקודים היא לפחות 2. יהא $v \in V$ קודקוד כלשהו בגרף, נטייל החל מקודקוד זה, מכיוון שדרגת כל קודקוד היא לפחות 2, לא ניתקע ומכיוון שהגרף סופי אז בהכרח נגיע בשלב כלשהו לקודקוד שכבר ביקרנו בו וסגרנו מעגל ב G. מש"ל.