

בז"ד

טופס הנחיות

נבחנת יקרה, נא קראי בתשומת לב את ההנחיות ל מבחן ופעלי בהתאם:
שים לי, במהלך הבחינה יש לשמר על שקט מוחלט בכיתה.
חשיבות! אין להשתמש במחשבון במהלך הבחינה!

1. השאלות מנוסחות באנגלית (עם תרגום לעברית) את התשובות ניתן לכתוב בעברית. את הקוד יש למשה בשפת **C**.
2. נא השתמשי בדףים אישיים עבור הטיעות.
3. כאשר את נתקלת בבעיה בעת פתרון שאלה, ומחליטה שאת נזקקת לסייע, אנא מלאי את 'טופס השאלה' המצורף והעבורי לשומרת בכיתה. תהליך מעבר השאלה ל'מנחה', והעברת התשובה חזרה אליך, עורכת זמן – אז אנו ממליצים, שתנצלי זמן זה לפתרון שאלה אחרת ב מבחן, ותחזרי לשאלת זו, לכשתגיעו לידי התשובה לשאלתך.
4. בסיום המבחן אנא נעל את קובץ המבחן כקובץ PDF כשם הקובץ הינו תעודת זהות שלך.
5. חומר העזר המותר ב מבחן, הוא כל חומר כתוב ו/או מודפס או חומר שהועלה מראש למחשב אשר אינו מחובר בשם צורה לרשות(איסור זה חל גם על מחשב).
6. משך המבחן כ 4 שעות.

בהצלחה רבה

Q1. (20%)

Prove: in an undirected graph, with more than one node, there are two nodes with the same number of neighbors.

הוכחי: בגרף לא מכוון, בעל יותר מצמת אחד, יש שני צמתים בעלי אותו מספר שכנים.

תשובה:

נניח שלכל צמת בגרף יש מספר שונה של שכנים. מכיוון שמספר השכנים האפשרי בגרף הוא בין 0 ל- $n-1$, אז בוודאי יש בגרף צמת שאין לו שכנים (נקרא לוז) וצמת שיש לו $n-1$ שכנים (נקרא לוט). כל הצמתים הם שכנים של u , ולכזאת שכן של u . מצד שני ל- u אין שכנים ולכזאת איןו שכן של u . הגיענו לסתירה, ומכאן שחייבים להיות שני צמתים בעלי אותו מספר שכנים.

Q2. (20%)

Describe an algorithm that finds the shortest path between two nodes, in an undirected connected graph with weights on the edges that are integers smaller than $\sqrt{\log m}$ (m is the number of edges in the graph).

The running time of the algorithm is $O(m\sqrt{\log m})$.

תاري אלגוריתם שモצא מסלול קצר ביותר בין שני צמתים בגרף קשור ולא מכוון שהמשקלים של קשתותיו שלמים קטנים מ- $\sqrt{\log m}$ (m הוא מספר הקשתות בגרף). זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(m\sqrt{\log m})$.

תשובה:

נחלק כל קשת למספר קשתות לפי משקלה. קשת במשקל W , נחלק ל- W קשתות. נרץ BFS על הגרף שנוצר. גודל הגרף החדש הוא $O(m\sqrt{\log m})$ וכן זה גם זמן הריצה של BFS.

Q3. (20%)

A sink in a directed graph is a node with no outgoing edges, and $n-1$ incoming edges (n is the number of nodes in the graph).

Write in pseudocode an algorithm that returns true if, and only if, there is a sink in a given directed graph that is represented in a matrix.

The running time of the algorithm is $O(n)$.

בור בgraf מכוון הוא צמת שלא יוצאות ממנו קשתות, אבל כניסה אליו $1-n$ קשותות (n הוא מספר הצלמים בגרף).

כתבו אלגוריתם, בפסידוקוד, אלגוריתם שמחזיר true אם ורק אם יש בור בgraf מכוון נתון. הגרף מיוצג במטריצה.

זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(n)$.

תשובות:

בסיום הלולאה הראשונה יש ב- r את הצלם היחיד שניתן להיות בור.
הלולאה השנייה בודקת שהוא אכן בור.

הלולאה הראשונה רצה עמודה עמודה. אם היא מגלה זה אומר שצמת c לא יכול להיות בור. אם היא מגלה true זה אומר שצמת r לא יכול להיות בור. לכן בסוף ריצתה יש ב- r את המועד היחיד להיות בור.

sink (G)

```
r←1
for c←2 to n do
    if G[r,c]
        then r←c
for c←1 to n do
    if G[r,c] or (r≠c and not G[c,r])
        then return false
return true
```

Q4. (20%)

Prove or give a counterexample: in any undirected connected graph there is a node whose removal from the graph will leave the graph connected.

הוכיחי או תני דוגמה נגדית: בכל גרף לא מכובן וקיים יש צמת שהוצאתו מהגרף תשאיר את הגרף קשור.

תשובה:

נ裏ץ BFS על הגרף ונתקבל את עץ ה-BFS. בעץ זה יש מסלול מכל צמת לכל צמת בגרף (כי הגרף קשור). אם ננטק מהעץ את אחד מעלייו העץ עדין ישאר קשור. כלומר: אם ננטק מהגרף את הצמתים הזה הגרף עדין יהיה קשור.

Q5. (20%)

Describe an algorithm that given a weighted undirected graph, finds the lightest set of edges whose removal will leave the graph connected and acyclic.

The running time of the algorithm is $O(m \log n)$. m is the number of edges in the graph, and n is the number of nodes in the graph.

תاري אלגוריתם שמקבל גרף לא מכובן וממושקל ומצא את קבוצת הקשתות הקללה ביותר שיש להוציא מן הגרף כדי לקבל גרף קשור וחסר מעגלים.

זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(m \log n)$. m הוא מספר הקשתות בגרף, ו- n הוא מספר הצמתים בגרף.

תשובה:

יש למצוא עץ פורש מקסימלי בגרף. קבוצת הקשתות שאינה בעץ היא הקבוצה המבוקשת.