

Q1. 20%

What is the running time complexity of Dijkstra's algorithm on a weighted tree (positive weights) with n nodes? Is it efficient?

Explain your answer.

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם של דijkstrra על עץ ממושקל (משקלים חיוביים)
בעל n צמתים? האם הוא יעיל?
הסביר את תשובה.

זמן הריצה הוא $O(n \log n)$. זמן הריצה של האלגוריתם של דijkstrra הוא $O(n \log n)$, ועבור
עץ גם מספר הקשתות וגם מספר הצמתים הוא (n) .
האלגוריתם לא יעיל כי בעץ יש מסלול יחיד מצמת לצמת ו-BFS ימצא אותו בזמן לנאר
בגודל העץ.

Q2. 20%

Describe an efficient algorithm that finds an MST in a weighted undirected connected graph with n vertices and n edges (the number of edges = the number of vertices.)

Compute the running time complexity of the algorithm

תاري אלגוריתם ייעיל שモצא עפ"מ בגרף קשר ממושקל לא מכון בעל n צמתים ו- n קשתות
(מספר הקשתות = מספר הצמתים).
חשי את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם.

האלגוריתם יבצע BFS (מצמת כלשהו) ויגלה את הקשת היחידה $\{v, u\}$ שאינה בעץ ה-BFS.
(יש קשת אחת כדי בדיק כי מספר הצמתים = מספר הקשתות, והגרף קשר).
BFS נסוף מ- v ימצא את המסלול ממנו ל- u . הקשת הכבידה ביותר מבין קשתות המסלול ו- $\{v, u\}$ תמחק מהגרף ויישאר העפ"מ.
זמן הריצה (n) .

Q3. 20%

A tournament is a directed graph obtained by assigning a direction for each edge in an undirected complete graph (there is an edge between every pair of nodes.)

Prove or give a contrary example: every tournament (with more than two nodes) contains a cycle.

טורניר הוא גרף מכון המתקבל מהגדרת כיון לכל קשת בגרף לא מכון מלא (יש קשת בין כל שני צמתיים).

הוכיחי או הציג דוגמה נגדית: בכל טורניר (בעל יותר משלני צמותים) יש מעגל.

לא נכון.

דוגמה נגדית:

$$V=\{1,2,3\}$$

$$E=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$$

Q4. 20%

Given a directed graph and an edge in that graph, we want to know whether the edge is a part of a cycle.

Describe an efficient algorithm that solves that problem.

Compute the running time complexity of the algorithm.

בהתנחתן גרף מכון וקשת בגרף, נרצה לדעת האם הקשת היא חלק ממילול.

תארו אלגוריתם יעיל לפתורון הבעיה.

חשבו את סיבוכיות הזמן הריצה של האלגוריתם.

נניח שהקשת היא (v, u) . נמחק אותה מהגרף ונירץ BFS מ- v . הקשת היא חלק ממילול אם

ורק אם יש מסלול מ- v ל- u בגרף לאחר המחיקה.

זמן הריצה $O(V+E)$.

Q5. 20%

An application you are working on uses directed graphs. The operations the application needs are:

- Add an edge to the graph.
- Check if an edge is in the graph.
- Reverse the directions of all the edges in the graph.

Explain how to represent the graph and implement the operations efficiently.

The running time of each operation should be $O(1)$.

ישום שאתה מפתחת משתמש בגרפים מכוונים. הפעולות שהשימוש צריך הן:

- הוספה קשת לגרף
- בדיקה האם קשת נמצאת בגרף
- הפיכת כיווני כל הקשתות

הסבירו כיצד ליצג את הגרף ואיך למש את הפעולות ביעילות.

זמן הריצה של כל פעולה צריך להיות $O(1)$.

הגרף יוצג במטריצת סמיכויות ומדובר שיאמר האם הכוונים הפוכים או לא.

לפני הוספה קשת לגרף נבדוק את הדגל, ואם הכוונים הפוכים תתווסף קשת הפוכה.

לפני בדיקה האם קשת בgraf נבדוק האם הגרף "הפור" ונחפש את הקשת בהתאם.

הפיכת כיווני הקשתות תעשה על-ידי הפיכת הערך בדגל.