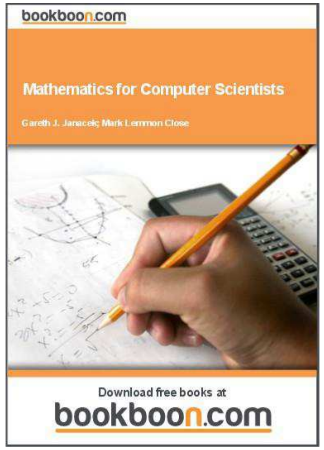
w02-Lec1

Mathematics and Computer Science: Numbers

Assembled for 204111
by Kittipitch Kuptavanich

Numbers

- **Integers**
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal



Integers

$1, 2, 3, 4, \ldots, 101, 102, \ldots, n, \ldots, 2^{32582657}-1, \ldots$

- **Integer หรือจำนวนเต็ม**
- **เริ่มจากจำนวนนับ (Natural/Counting Number)**
- **Then we add** 0 (zero), **defined as**

$$0 + \text{any integer } n = 0 + n = n + 0 = n$$

- **Negative integer:** $-n$, **defined as**
  - $-n$ **is the number which when added to** n **gives zero**

$$n + (-n) = (-n) + n = 0$$

Simple Rules for Integers

- **For integers a and b**

1. $a + b = b + a$
2. $a \times b = b \times a$ or $ab = ba$

(1–2: **commutative**)

3. $-a \times b = -ab$
4. $(-a) \times (-b) = ab$
5. a^k = **shorthand for** a **multiplied by itself** k **times.**

   $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

   Note: $a^n \times a^m = a^{n+m}$
6. $n^0 = 1$

Numbers

- Integers
- **Factors and Primes**
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Factors and Primes

- **Many integers are products (ผลคูณ) of smaller integers, for example**

$$\boxed{2 \times 3 \times 7 = 42}$$

- **Here 2, 3 and 7 are called the <u>factors</u> (ตัวประกอบ) of 42**
- **<u>factorization</u> = การแยกตัวประกอบ**

Factors and Primes [2]

- **Not all integers have factors such as**

$$3, 5, 7, 11, 13, \ldots, 2^{216091}-1, \ldots$$

- **These number are called primes (จำนวนเฉพาะ)**
- **พิจารณาการหาร (division)**
  - **ในกรณีหารไม่ลงตัว จะเหลือเศษของการหาร (remainder)**

$$\boxed{9 = 2 \times 4 + 1}$$

Factors and Primes [3]

- **เมื่อนำ 9 มาหารด้วย 4 จะเหลือเศษ 1**

$$\boxed{9 = 2 \times 4 + 1}$$

- **For any integers x and y**

$$\boxed{y = k \times x + r}$$

- **where r is the remainder (เศษของการหาร)**
  - กรณี r เป็น 0 (ศูนย์) เรากล่าวได้ว่า <u>x หาร y ลงตัว</u> (x เป็นตัวหาร)
    - หรือ y <u>หารด้วย</u> x ลงตัว
    - x *divides* y หรือ $x \mid y$ โดยเส้นตั้งใช้แสดงการหารลงตัว
    - เช่น $2 \mid 128$, $7 \mid 49$ (*ตัวหารอยู่ด้านหน้า)
    - กรณี 3 หาร 4 ไม่ลงตัว แทนด้วยสัญลักษณ์ $3 \nmid 4$

$\boxed{\nmid}$

indivisible symbol

Factorization

- ในการหาตัวประกอบของ integer n เราสามารถใช้วิธีการลองหาร n ด้วยจำนวนเฉพาะ

$$k = 2, 3, 5, 7, 11, 19, \ldots.$$

- ถ้า n หารด้วย k ลงตัว $\longrightarrow$ k เป็น factor ของ n
  - ทำการหารอีกครั้งด้วย k
- ถ้า n หารด้วย k ไม่ลงตัว
  - ลองจำนวนเฉพาะตัวถัดไป

Factorization [2]

List of primes: 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23, 29......
more at: http://primes.utm.edu/lists/small/1000.txt

- ตัวอย่าง 2394

1. $2394/2 = 1197$
2. **Can't divide** by 2 **again so try** 3
3. $1197/3 = 399$
4. $399/3 = 133$
5. **Can't divide** by 3 **again so try** 5
6. **Can't divide** by 5 so try 7
7. $133/7 = 19$ (19 **is prime so we are done**)

$$2394 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 19$$

Factorization [3]

Notes:

- จำนวนเฉพาะมีมากมายไม่จำกัด
- เป็นไปไม่ได้ ที่จะมี list ของจำนวนเฉพาะทั้งหมด
- หรือไม่สามารถหา list ของจำนวนเฉพาะได้
- **Solution:**
  - ใช้เลขคี่ตัวถัดไป จากตัวหารปัจจุบัน
  - ทำไมถึงไม่ใช้เลขคู่?
- ทฤษฎี : ตัวประกอบเฉพาะ*ตัวแรก*ของจำนวนเต็มใด ๆ จะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับรากที่สองของจำนวนเต็มนั้น ๆ
  - **Why?**
  - ดังนั้นหากตัวหาร k มากกว่า $\sqrt{n}$ แล้วยังไม่สามารถหา k ที่ $k \mid n$ แสดงว่า n เป็นจำนวนเฉพาะ (ควรหยุดหาตัวประกอบต่อ)

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- **Modular Arithmetic**
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Modular Arithmetic [1]

- **Operator ที่ใช้ในการหาร กรณีสนใจเศษของการหาร คือ modulo หรือ mod**
  - **Operator: % (C/C++, Java, python)**
- **The operator simply gives the remainder after division. For example,**

1. $25 \bmod 4 = 1$ **because** $25 \div 4 = 6$ **remainder** 1.
2. $19 \bmod 5 = 4$ **because** $19 = 3 \times 5 + 4$.
3. $24 \bmod 5 = 4$.
4. $99 \bmod 11 = 0$.

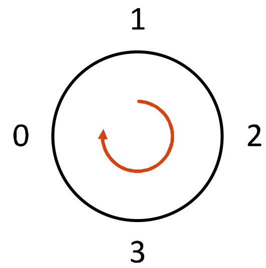
Modular Arithmetic [2]

- **We will ignore cases with negative number for now.**
- **These results can be written in a different ways**

$25 = 1 \bmod 4$ OR $\underline{25 \bmod 4 = 1}$

We will use this notation in this class

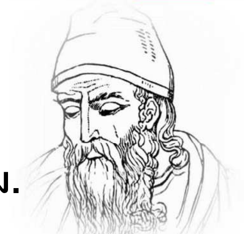
- **Modular arithmetic is sometimes called clock arithmetic.**
- $47 \bmod 4$
  - **Going around** 11 **times**
  - **And** $\frac{3}{4}$
  - **Stops at** 3



Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- **The Euclidean Algorithm**
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

The Euclidean Algorithm



Euclid

- **ในคณิตศาสตร์ ตัวหารร่วมมาก หรือ ห.ร.ม. (อังกฤษ: greatest common divisor: gcd) ของจำนวนเต็มสองจำนวนซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่หารทั้งสองจำนวนลงตัว เช่น**
  - **gcd ของ 15 และ 25 คือ 5**
- **The Euclidean algorithm for finding the gcd is one of the oldest algorithms known, it appeared in Euclid's Elements around 300 BC.**

Image: http://www.glogster.com/codster72011/fun-facts-about-euclid/
Ref: http://th.wikipedia.org/wiki/ตัวหารร่วมมาก

The Euclidean Algorithm [2]

- **Suppose a is an integer smaller than b.**

1. Divide b by a.
2. If the remainder is zero, then b is a multiple of a and we are done. (a is the gcd)
3. If not, divide the divisor a by the *remainder*.
4. Continue dividing the last divisor by the last remainder, until the *remainder* is zero
5. The last non-zero *remainder* is the gcd

The Euclidean Algorithm [3]

- **For example 246 and 72**

STEP 1	246	mod	72	=	30
STEP 2	72	mod	30	=	12
STEP 3	30	mod	12	=	6
STEP 4	12	mod	6	=	0

- **So the gcd of 246 and 72 is 6**

The Euclidean Algorithm [4]

- **Now let's try 1071 and 462**

STEP 1		mod		=	
STEP 2		mod		=	
STEP 3		mod		=	

- **So the gcd is** $\boxed{}$

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- **Rational and Reals**
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Rationals and Reals

- A rational number (จำนวนตรรกยะ) is a number that can be written as $\frac{P}{Q}$ where P and Q are integers. Examples are:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{7}{6}$$

- For every integer n, except zero, there is an inverse (อินเวอร์ส), written $\frac{1}{n}$ which has the property that

$$n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times n = 1$$

- multiplying $\frac{1}{n}$ by m gives a fraction $\frac{m}{n}$. These are called rational numbers

Rationals and Reals [2]

- นอกจากนี้ ยังมีตัวเลขที่ไม่ใช่ทั้งจำนวนเต็ม และ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เช่น $\sqrt{2}$ ที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ เรียกว่า จำนวนอตรรกยะ (irrational numbers)
- จำนวนจริง (real numbers)
  - Irrational: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
  - Rational: $-3.4, \frac{3}{4}, 9.454545\ldots, \ldots$
  - Integer: $-2, 5, -9, 0, \ldots$
  - Whole: $0, 1, 2, 3, \ldots$
  - Natural: $1, 2, 3, \ldots$

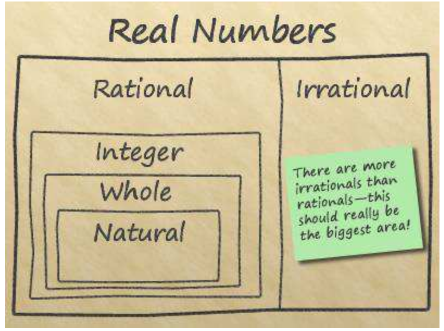


Image: http://leferemath.weebly.com/rational-numbers.html

Notations

เครื่องหมายอื่น ๆ

- If x is less than (น้อยกว่า) y
  - then we write $x < y$. If there is a possibility that they might be equal then $x \leq y$ (น้อยกว่าหรือเท่ากับ)
  - We can also write $y > x$ or $y \geq x$
    - y is greater than (มากกว่า) x or greater than or equal to (มากกว่าหรือเท่ากับ) x

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- **Ceiling and Floor functions**
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Notations [2]

- Floor function (ฟังก์ชันพื้น) of a real number x, denoted by $\lfloor x \rfloor$ or `floor(x)`, เป็นฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ x เช่น
  - `floor(2.7)` หรือ $\lfloor 2.7 \rfloor$ มีค่าเท่ากับ 2
    - $\lfloor 5 \rfloor$ มีค่าเท่ากับ 5
  - แต่ `floor(-3.6)` หรือ $\lfloor -3.6 \rfloor$ มีค่าเท่ากับ -4
  - ปัดลงไปทางด้านซ้ายของเส้นจำนวนหากไม่ใช่ integer
- Ceiling function (ฟังก์ชันเพดาน) $\lceil x \rceil$ ทำหน้าที่ตรงข้ามกับ floor
  - `ceiling(2.7)` หรือ $\lceil 2.7 \rceil$ มีค่าเท่ากับ 3
  - ปัดขึ้นไปทางด้านขวาของเส้นจำนวนหากไม่ใช่ integer

Notations [3]

- The absolute value (ค่าสัมบูรณ์ หรือ *modulus*) of x written $|x|$ is just x when $x \geq 0$ and $-x$ when $x < 0$ so $|2| = 2$ and $|-6| = 6$
- The famous result about the absolute value is that for any x and y

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$$

Notations [4]

- We met a^b when we discussed integers and in the same way we can have x^y when x and y are not integers e.g. $2.5^{3.67}$ or $0.25^{1/2}$
- Note however that

$a^0 = 1$ for all a except zero
$0^b = 0$ for all values of b where $b > 0$
0^0 is undefined mathematically (in python/C you might get 1)

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- **Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal**

Number Systems

- ระบบจำนวนที่เราคุ้นเคยและพบมากที่สุดในชีวิตประจำวันคือเลขฐาน 10 (Decimal System)
- 3459 is shorthand (รูปย่อ) for

$$3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 9$$

OR

$$3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

- ตำแหน่ง (position) ของตัวเลขมีความสำคัญ

Number Systems [2]

- เราทราบว่า $10^3 = 1000$ กรณีเลขยกกำลังเป็นจำนวนลบ (negative) เช่น 10^{-3} หมายถึงเศษส่วนในรูป $\frac{1}{10^3}$
- ในเลขฐานสิบ เราใช้จุดทศนิยม (Decimal Point) และตำแหน่งตัวเลขหลังจุดทศนิยมเพื่อแสดงเศษส่วนในกรณีที่มีส่วนเป็น 10^n
- เราสามารถเขียน 123.456 ในรูป

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \; + . + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$$

Decimal Point

Number Systems [3]

- Today the common number systems are
  - Decimal number system: ใช้สัญลักษณ์ 0 – 9; ฐาน (base) 10
  - Binary number system: ใช้สัญลักษณ์ 0,1; ฐาน 2
  - Hexadecimal number system: ใช้สัญลักษณ์ 0-9 และ A-F; ฐาน 16
    - here $A \equiv 10, B \equiv 11, C \equiv 12, D \equiv 13$ $E \equiv 14, F \equiv 15$.
  - Octal number system: ใช้สัญลักษณ์ 0-7; ฐาน 8

Binary

- เช่นเดียวกันกับในกรณีเลขฐาน 10 ที่ตำแหน่งแต่ละตำแหน่งแทน 10^n ในระบบเลขฐานสอง แต่ละตำแหน่งแทนด้วย 2^n

Decimal number		in powers of 2	power of 2: 3	2	1	0	Binary number
8	=	2^3	1	0	0	0	1000
7	=	$2^2+2^1+2^0$	0	1	1	1	111
6	=	2^2+2^1	0	1	1	0	110
5	=	2^2+2^0	0	1	0	1	101
4	=	2^2	0	1	0	0	100
3	=	2^1+2^0	0	0	1	1	11
2	=	2^1	0	0	1	0	10
1	=	2^0	0	0	0	1	1

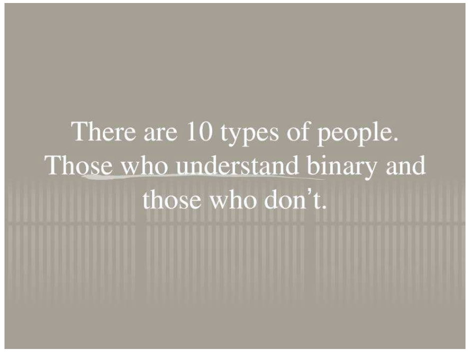
Binary Conversion

- เราสามารถใช้ modulo (การหารเอาเศษ) ในการเปลี่ยนเลขฐาน 10 เป็นเลขฐาน 2 ตัวอย่างเช่น 88
- เมื่อ x/2 = 0 ให้เขียน column สุดท้ายจากล่างขึ้นบน
- จะได้ว่า
  - $88_{10} = 1011000_2$
- วิธีนี้สามารถใช้ แปลงเลขฐาน 10 เป็นฐานอื่น ๆ เช่นกัน

x	x/2	remainder
88	44	0
44	22	0
22	11	0
11	5	1
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Binary Conversion [2]

- **Let's try with 95**
- $95_{10} =$ ____________ $_2$



x	$x/2$	remainder
95		

Binary Decimals

- การเปลี่ยนเลขทศนิยมจากฐาน 10 เป็น ฐาน 2 เราจะใช้ฟังก์ชัน floor
- เมื่อ x × 2 = 1 ให้เขียน column สุดท้ายจาก<u>บนลงล่าง</u>
- จะได้ว่า
  - $0.6875_{10} = 0.1011_2$

x	x ×2	$\lfloor x \times 2 \rfloor$
0.6875	1.375	1
0.375	0.75	0
0.75	1.5	1
0.5	1	1

Binary Decimals [2]

- **Let's try with 0.4**
- ในบางกรณีเราจะได้ทศนิยมไม่รู้จบ
- $0.4_{10} =$ ____________ $_2$

repeat

x	x ×2	$\lfloor x \times 2 \rfloor$
0.4		

Addition in Binary

0+0 = 0
0+1 = 1
1+1 = 10 (เนื่องจาก 1 + 1 มีค่าเกิน 1 ใส่ 0 และ ทดไปหลักถัดไป)
1+1+1 = 1+(1+1) =1+10 =11

- การบวกเลขในเลขฐาน 2 มีลักษณะคล้ายในฐาน 10

	1	1	0	1	0	1	
+	1	0	1	1	1	0	
1	1	0	0	0	1	1	Sum
	↑			↑			

ตำแหน่งที่เกิดการทดเลข

204111: Fundamentals of Computer Science

Subtraction in Binary

	1	1	0	1	0	1	
-	1	0	1	1	1	0	
	0	0	0	1	1	1	difference

- การลบเลขในเลขฐานสองมีลักษณะคล้ายในฐาน 10 หากตัวตั้งในหลักใด ๆ ไม่พอสำหรับการลบ ก็ให้ "ขอยืม" จากหลักถัดไป

204111: Fundamentals of Computer Science

Multiplication in Binary

การคูณเลขฐาน 10

		1	2	5	6	7	8	ตัวตั้ง
×					3	8	7	ตัวคูณ
		8	7	9	7	4	6	คูณ 7
1	0	0	5	4	2	4		ขยับซ้าย 1 ตำแหน่งแล้วคูณ 8
3	7	7	0	3	4			ขยับซ้าย 2 ตำแหน่งแล้วคูณ 3
4	8	6	3	7	3	8	6	ผลบวกสามบรรทัด

การคูณเลขฐาน 2

			1	0	0	1	1	1	0	Multiplicand
×						1	0	1	Multiplier
		1	0	0	1	1	1	0	times 1
	0	0	0	0	0	0	0		Shift left one and times 0
1	0	0	1	1	1	0			Shift left two and times 1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	Add to get the product

204111: Fundamentals of Computer Science

Tips

ข้อสังเกต

$111_2 = 7$ and $111_2 \times 2 = 14 = 1110_2$
$101_2 = 5$ and $101_2 \times 2 = 10 = 1010_2$

- การคูณเลขใด ๆ ในฐาน 2 ด้วย 2 ให้ขยับเลขนั้นไปทางซ้าย 1 ตำแหน่งแล้วเติม 0

Octal

- การเปลี่ยนเลขฐาน 2 เป็นฐาน 8 (= 2^3) ให้แบ่งเลขฐานเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 ตัวเริ่มจากหลัก 2^0
- เช่น 11000010001
- แล้วจึงเปลี่ยนเลขในแต่ละกลุ่มเป็นค่าในฐาน 10 (0-7)

```
0 = 000
1 = 001
2 = 010
3 = 011
4 = 100
5 = 101
6 = 110
7 = 111
```

11000010001

11 000 010 001

3 0 2 1

Hexadecimal

- การเปลี่ยนเลขฐาน 2 เป็นฐาน 16 (= 2^4) ให้แบ่งเลขฐานเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 ตัวเริ่มจากหลัก 2^0
- เช่น 01011110101101010010
- แล้วจึงเปลี่ยนเลขในแต่ละกลุ่มเป็นค่าในเลขฐาน 16

```
A = 10
B = 11
C = 12
D = 13
E = 14
F = 15
```

1011110101101010010

101 1110 1011 0101 0010

5 14 11 5 2

5EB52

Binary Conversion Tips

- ในกรณีการแปลงเลขฐาน 10 จำนวนที่ไม่มากนักเป็นฐาน 2 เราอาจใช้วิธีการลบเลขแทน

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256	128	64	32	16	8	4	2	1

- เช่น 213
  - จากตารางพบว่า 213 มากกว่า 2^7 (1 ตามด้วย 0 ทั้งหมด 7 ตัว)
  - ใส่ 1 _ _ _ _ _ _ _
- เหลือ 213 – 128 = 85
  - พบว่า 85 มากกว่า 2^6
  - ใส่ 1 1 _ _ _ _ _ _
- เหลือ 85 – 64 = 21
  - พบว่า 21 มากกว่า 2^4
  - ใส่ 1 1 _ 1 _ _ _ _
- เหลือ 21 – 16 = 5
  - พบว่า 5 มากกว่า 2^2
  - ใส่ 1 1 _ 1 _ 1 _ _
- เหลือ 5 – 4 = 1
  - ใส่ 1 1 _ 1 _ 1 _ 1
  - ได้ 1101 0101

Conversion Exercise

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256	128	64	32	16	8	4	2	1

Fill in the missing entries

Decimal	Binary	Hexadecimal
0	0000 0000	0x00
167	________	________
62	________	________
188	________	________
________	0011 0111	________
________	1000 1000	________
________	1111 0011	________
________	________	0x52
________	________	0xAC
________	________	0xE7

Final Notes

[Math] is a little like programming, it takes time to understand a lot of code and you never understand how to write code by just reading a manual - you have to do it! Mathematics is exactly the same, you need to do it.

Homework

- **Memorize these table**

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256	128	64	32	16	8	4	2	1

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Summary

- **Integers**
- **Factors and Primes**
- **Modular Arithmetic**
- **The Euclidean Algorithm**
- **Rational and Reals**
- **Ceiling and Floor functions**
- **Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal**

Conversion Exercise [KEY]

Fill in the missing entries

Decimal	Binary	Hexadecimal
0	0000 0000	0x00
167	1010 0111	0xA7
62	0011 1110	0x3E
188	1011 1100	0xBC
55	0011 0111	0x37
136	1000 1000	0x88
243	1111 0011	0xF3
82	0101 0010	0x52
172	1010 1100	0xAC
231	1110 0111	0xE7