C.C. Méthodes Numériques et Optimisation

Simplexe :

Si on considère que le type A est designé par la variable x_1 ;

Le type B est désigné par la variable x_2

Le type C est désigné par la variable x_3

Le but du fabriquant est donc de maximiser son profit.

La fonction économique est alors :

$$\max \ Z = 11x_1 + 16x_2 + 15x_3$$

Les contraintes moulage, découpage et emballage seront donc représentées par les fonctions suivantes :

$$x_1 + 2x_2 + 3/2\, x_3 \leqslant 12000$$

$$2/3\, x_1 + 2/3\, x_2 + x_3 \leqslant 4600$$

$$1/2\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/2\, x_3 \leqslant 2400$$

Le système devient alors :

$$\text{Max } Z = 11x_1 + 16x_2 + 15x_3$$

$$\text{S.C} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3/2\, x_3 \leqslant 12000 \\ 2/3\, x_1 + 2/3\, x_2 + x_3 \leqslant 4600 \\ 1/2\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/2\, x_3 \leqslant 2400 \\ x_1 \geqslant 0 ;\ x_2 \geqslant 0 ,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

forme canonique :

$$\text{Max } Z = 11x_1 + 16x_2 + 15x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3/2\, x_3 + e_1 \not\leqslant 12000$$

$$2/3\, x_1 + 2/3\, x_2 + x_3 + e_2 \not\leqslant 4600$$

$$1/2\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/2\, x_3 + e_3 \not\leqslant 2400$$

avec $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$; $x_3 \geqslant 0$

$x_1, x_2, x_3 = 0$; $e_1 = 12000$, $e_2 = 4600$; $e_3 = 2400$

but : notre travail est de transformer les variables non basiques x_1, x_2 et x_3 en variable basiques ce qui nous aidera à déterminer le nombre de douzaines de chaque type d'accessoires à produire pour obtenir un profit maximal.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z	b
max :	-11	-16	-15	0	0	0	1	0
	1	$\boxed{2}$	$3/2$	1	0	0	0	12000
	$2/3$	$2/3$	1	0	1	0	0	4600
	$1/2$	$1/3$	$1/3$	0	0	1	0	2400

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z	b
-3	0	-3	8	0	0	1	9600
$1/2$	1	$3/4$	$1/2$	0	0	0	6000
$-1/3$	0	$-1/2$	$-1/3$	-1	0	0	-600
$\boxed{-1/3}$	0	$-1/12$	$1/6$	0	-1	0	-400

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z	b
0	0	$-9/4$	$13/2$	0	9	1	99600
0	-1	$-5/8$	$-3/4$	0	$3/2$	0	-5400
0	0	$-5/12$	$1/6$	-1	1	0	-200
1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	3	0	1200

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Z	b
0	0	0	$28/5$	$27/5$	$18/5$	1	100200
0	-1	0	-1	$3/2$	0	0	-5100
0	0	1	$-2/5$	$12/5$	$-12/5$	0	1800
-1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-18/5$	0	600

Par analogie : $Z = 100200$

$x_1 = 600$

$x_2 = 5100$

$x_3 = 4800$

et :

$e_1, e_2, e_3 = 0$.

Conclusion : Pour obtenir un profit maximal, il faudra 600 douzaines du type d'accessoires A ; 5100 douzaines du type d'accessoires B et 4800 douzaines du type d'accessoires C.

Question 2 :

Q2 : 2 raffineries:

raf1: 20 000 $/jours
Production par jour: 400 barils de qualités supérieurs
: 300 barils de qualites moyenne
200 barils de qualités inférieur

raf2: 25 000 $
Xtion par jour : 300 barils de qualités superieur
400 barils de qualités moyenne
500 barils de qualités inferieures

total barils qualité sup: 25000
total barils qualité moy: 27000
total barils qualité inf: 30 000

	raf 1	raf2	commandes totales
qualité supérieur	400	300	25000
qualité moyenne	300	400	27000
qualites inferieure	200	500	30 000
Coût	20 000	25 000	/

$$Z = 20\,000 x_1 + 25\,000 x_2$$
$$400 x_1 + 300 x_2 \geq 25000$$
$$300 x_1 + 400 x_2 \geq 27000$$
$$200 x_1 + 500 x_2 \geq 30\,000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Par analogie de la méthode big M on a:

$\min Z = \max(-Z) \Rightarrow \max(-Z) : -Z = -20000x_1 - 25000x_2$

$\mathrm{Max}(-Z) = Z_1 \rightarrow Z_1 = -20000x_1 - 25000x_2 - Ma_1 - Ma_2 - Ma_3$ ①

$400x_1 + 300x_2 - x_3 + a_1 = 25000$ ②

$300x_1 + 400x_2 - x_4 + a_2 = 27000$ ③

$200x_1 + 500x_2 - x_5 + a_3 = 30000$ ④

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3 \geq 0$ ⑤

①: $Z_1 + 20000x_1 + 25000x_2 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3 = 0$

Considérons ② et ③

$$\begin{cases} 400x_1 + 300x_2 - x_3 + a_1 = 25000 \\ 300x_1 + 400x_2 - x_4 + a_2 = 27000 \end{cases}$$

Si on faisait ② + ③ :

$700x_1 + 700x_2 - x_4 - x_3 + a_1 + a_2 = 52000$ ⑥

en multipliant ⑥ par $(-M)$ puis en sommant avec ① on obtient :

$-M \times$ ⑥ : $-700Mx_1 - 700Mx_2 + Mx_4 + Mx_3 - \cancel{Ma_1} - \cancel{Ma_2} = -52000M$

①: $Z_1 + 20000x_1 + 25000x_2 + \cancel{Ma_1} + \cancel{Ma_2} + Ma_3 = 0$

$Z_1 + (20000 - 700M)x_1 + (25000 - 700M)x_2 + Mx_3 + Mx_4 + Ma_3 = -52000M$ ⑦

* $-M \times$ ④ : $-200Mx_1 - 500Mx_2 + Mx_5 - Ma_3 = -30000M$ ⑧

(7) + (8) : $Z_1 + (20000 - 900M)x_1 + (25000 - 1200M)x_2 + Mx_3 + Mx_4 + Mx_5$

$= -82000M$

La solution optimale est : $Z_1 = 175\,000$

$x_1 = 25$

$x_2 = 50$

Question 3 :

	client 1	client 2
usine 1	30	25
usine 2	36	30

$$\min Z_1 = 30x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 30x_4$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_3 + x_4 \leq 300$$

$$x_1 + x_3 = 200$$

$$x_2 + x_4 = 300$$

La forme canonique nous donne :

$$\max Z = -\min z_1 = -(30x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 30x_4) + Ma_1 + Ma_2$$

$$Z + (30x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 30x_4) - Ma_1 - Ma_2$$

$$x_1 + x_2 + e_1 = 400$$

$$x_3 + x_4 + e_2 = 300$$

$$x_1 + x_3 + a_1 = 200$$

$$x_2 + x_4 + a_2 = 300$$

La solution optimale est $Z = 14000$

$x_1 = 200$

$x_2 = 200$

$x_3 = 0$

$x_4 = 100$