บทที่ 6
ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง
(First-Order Logic)

การที่เอเยนต์ตรรกะจะสามารถแทนความเป็นไปต่าง ๆ ของโลกที่ตัวเองอยู่ และหาได้ว่าควรมีการกระทำอย่างไร เพื่อตอบสนองความเป็นไปของโลกนั้น สามารถใช้ตรรกศาสตร์ประพจน์ (Propositional logic) เป็นภาษาแทนความรู้ได้ในระดับเบื้องต้น พอที่จะทำให้เห็นภาพและเข้าใจแนวคิดของตรรกะ และตัว Knowledge-based agent ได้ง่าย แต่สภาพแวดล้อมของเอเยนต์ส่วนใหญ่มักจะซับซ้อนเกินกว่าจะแทนด้วยตรรกะง่าย ๆ เช่นนี้ ในบทนี้จะใช้ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง (First-order logic) หรือ FOL หรือบางครั้งเรียกว่า Predicate logic หรือ Predicate calculus ซึ่งใช้แทนความรู้ต่าง ๆ ได้ดีกว่าตรรกศาสตร์ประพจน์

6.1 **การแทนค่า** (Representation)

เหตุผลที่ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งเป็นภาษาที่ใช้สื่อความหมายหรือแทนค่าสิ่งต่าง ๆ ในโลกได้ดีกว่าตรรกศาสตร์ประพจน์มีอยู่หลายประการ ที่สำคัญคือธรรมชาติของการแทนของตรรกะแบบนี้สอดคล้องกับความเป็นไปในโลก

ภาษาการโปรแกรมต่าง ๆ เช่น ภาษาซีพลัสพลัส (C++) หรือภาษาจาวา (Java) ต่างก็เป็นภาษาที่นิยมใช้กันทั่วไป ตัวโปรแกรมทำงานตรงไปตรงมา เน้นที่กระบวนการคิดคำนวณ ใช้โครงสร้างข้อมูลแทนข้อเท็จจริง (Fact) ต่าง ๆ เช่น ใช้อาเรย์ขนาด 4x4 แทนค่าใน Wumpus world ใช้ประโยคที่เป็นรูปแบบง่าย ๆ ของการโปรแกรม เช่น World[2,2] $\leftarrow$ Pit แทนการกล่าวว่ามีหลุมอยู่ในช่อง [2,2] แต่สิ่งที่ภาษาการโปรแกรมขาดไปนั้น คือกลไกสำหรับสืบทอด (Derive) ข้อเท็จจริงมาจากข้อเท็จจริงอื่นที่มีอยู่แล้ว การอัพเดทข้อมูลแต่ละครั้ง เกิดมาจากกระบวนการเฉพาะที่โปรแกรมเมอร์เป็นผู้เขียนขึ้นเท่าที่ตนมีความรู้ในโดเมนนั้น ๆ หรือมีลักษณะที่เป็นอิสระกับโดเมน (Domain dependent) นั่นเอง การทำงานเช่นนี้เป็นแบบกระบวนการ (Procedural approach) มีการทำงานตรงกันข้ามกับแบบ Declarative approach ของตรรกศาสตร์ประพจน์ ซึ่งแยกตัวความรู้กับการสรุปความออกจากกัน การสรุปความจะเป็นอิสระกับโดเมน

การใช้โครงสร้างข้อมูลเป็นเรื่องที่เฉพาะเจาะจง และทำให้ไม่สามารถกล่าวอ้างถึงเรื่องราวต่าง ๆ อย่างยืดหยุ่นหรือแบ่งรับแบ่งสู้ได้ เช่นไม่สามารถบอกว่า “มีหลุมอยู่ในช่อง [2,2] หรือ [3,1]” หรือ “ถ้า Wumpus อยู่ในช่อง [1,1] แล้ว จะไม่อยู่ในช่อง [2,2]” เป็นต้น เพราะโปรแกรมจะเก็บค่าได้ค่าเดียวในตัวแปรเดียว นั่นคือต้องรู้ค่าอย่างแท้จริงทั้งหมด จึงจะบอกได้ หรือเก็บค่าได้ หรือไม่ก็ไม่รู้ค่าเลย คือเป็น “Unknown” แต่ไม่สามารถบอกข้อมูลเพียงบางส่วน

ตรรกศาสตร์ประพจน์เป็นภาษาแบบ Declarative ที่มีความสามารถแทนข้อมูลเพียงบางส่วนได้ แต่ก็ยังขาดความสามารถในการแทนสภาพแวดล้อมที่มีเรื่องราวเกิดขึ้นหลายเรื่องในเวลาเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ใน Wumpus world เราต้องเขียนแจกแจงความเป็นจริงเกี่ยวกับลมพัดและหลุมในแต่ละช่องดังนี้

$$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

ประโยคดังกล่าวแทนความเป็นจริงที่เกิดกับช่อง [1,1] เท่านั้น จะต้องเขียนประโยคใหม่สำหรับช่องอื่น ๆ ให้ครบถ้วน แต่ในภาษาอังกฤษสามารถพูดเพียงครั้งเดียว แต่มีความหมายครอบคลุมได้หมดว่า “Squares adjacent to pits are breezy” ภาษาไทยก็กล่าวว่า “ช่องที่ติดกับหลุมจะมีลมพัด” จะเห็นว่าภาษาธรรมชาติเป็นภาษาที่สื่อได้ความหมายจริง ๆ แต่ภาษาธรรมชาตินั้นเป็นภาษาการสื่อสารมากกว่าจะใช้ในการแทนค่า นอกจากนี้ ภาษาธรรมชาติยังมีความคลุมเคลืออีกด้วย เช่นถ้าพูดถึงคำว่า “Spring” บางคนคิดถึงฤดูใบไม้ผลิ ในขณะที่บางคนคิดถึงขดลวดเกลียวที่กระเด้งได้

จากภาษาทั้ง 2 ประเภท จึงมีแนวคิดว่าจะปรับทั้ง 2 ภาษาเข้าหากัน ตรรกศาสตร์ประพจน์บอกเล่าข้อมูลบางส่วนได้โดยไม่มีความคลุมเคลือ ส่วนภาษาธรรมชาติสามารถสื่อความหมายได้ดี เมื่อพิจารณาแล้ว ภาษาธรรมชาติมีไวยากรณ์ที่กล่าวถึงสิ่งเหล่านี้ได้แก่

1. อ็อบเจ็กต์ (Object) หมายถึงสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นคำนาม เช่น Wumpus, Square, Pit, People, Houses, Numbers, Baseball-games, Wars
2. ความสัมพันธ์ (Relation) หมายถึงตัวกริยาที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอ็อบเจ็กต์ อาจจะเป็นความสัมพันธ์ทางเดียว หรือเป็นคุณสมบัติ (Property) เช่น Red, Round, Prime, Mulitstored หรือบอกความสัมพันธ์หลายทาง เช่น Brother of, Bigger than, Inside, Part of, Has color, Occurred after, Owns
3. ฟังก์ชัน (Function) หมายถึงความสัมพันธ์ของอ็อบเจ็กต์ที่มีต่อค่าเพียงค่าเดียว เช่น Father of (ทุกคนมีพ่อคนเดียว), Best friend, One more than, Beginning of

ตัวอย่างการแยกองค์ประกอบของประโยค เช่น

1. "One plus two equals three."

อ็อบเจ็กต์ : one, two, three, one plus two

ความสัมพันธ์ : equals

ฟังก์ชัน : plus

จากตัวอย่าง "One plus two" เป็นชื่อของอ็อบเจ็กต์ ที่เกิดจากการใช้ ฟังก์ชัน "plus" กับอ็อบเจ็กต์ 2 อ็อบเจ็กต์ คือ "one" และ "two" ส่วน "three" เป็นชื่ออีกชื่อหนึ่งของอ็อบเจ็กต์ นี้

2. "Squares neighboring the Wumpus are smelly."

อ็อบเจ็กต์ : Wumpus, squares

Property : smelly

ความสัมพันธ์ : neighboring

3. "Evil King John ruled England in 1200."

อ็อบเจ็กต์ : John, England, 1200

Property : evil, king

ความสัมพันธ์ : ruled

ภาษาตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งมีไวยากรณ์และความหมายที่อาศัยอ็อบเจ็กต์และความสัมพันธ์เป็นสื่อกลาง ชีวิตความเป็นอยู่ในโลกต่างก็มองให้อยู่ในรูปของอ็อบเจ็กต์ และความสัมพันธ์ระหว่างอ็อบเจ็กต์ได้ทั้งสิ้น ไม่ว่าจะเป็นคณิตศาสตร์ ปรัชญา หรือปัญญาประดิษฐ์ ต่างก็สามารถใช้อ็อบเจ็กต์และความสัมพันธ์แทนสิ่งต่าง ๆ รอบตัวได้ ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งจึงเป็นภาษาสำคัญในการแทนความรู้เหล่านี้ได้เป็นอย่างดี

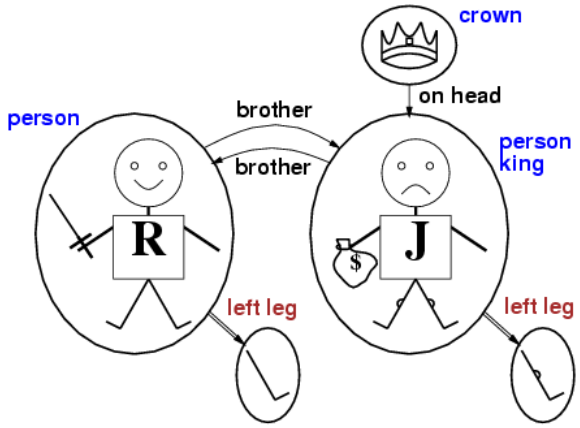
6.2 ไวยากรณ์และความหมายของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง

โมเดลของภาษาตรรกะคือโครงสร้างที่ทำให้เกิดโลกที่เอเยนต์อาศัยอยู่ โมเดลของตรรกศาสตร์ประพจน์ คือเซตของค่าความจริงของสัญลักษณ์ประพจน์ทั้งหลาย แต่โมเดลของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งซับซ้อนขึ้นกว่าเดิม ภายในโมเดลประกอบด้วยอ็อบเจ็กต์ และความสัมพันธ์ระหว่างอ็อบเจ็กต์เหล่านั้น ถ้าใช้วิธีของเซตมาบรรยายตัวภาษา ก็อาจกล่าวถึงโมเดลว่า โมเดลคือโลกแห่งหนึ่ง มีโดเมนเป็นเซตของอ็อบเจ็กต์ต่าง ๆ ที่บรรจุอยู่ในโลกนี้ ส่วนความสัมพันธ์ อาจจะมองในรูปของฟังก์ชันที่จับคู่ (mapping) ระหว่างอ็อบเจ็กต์ พิจารณาโมเดลของ FOL ในรูปที่ 6.1 ซึ่งมีการจับคู่ดังนี้

<Richard the Lionheart > → Richard’s left leg

<King John> → John’s left leg

เมื่อเข้าใจความหมายของโมเดลแล้ว จึงเขียนแทนอ็อบเจ็กต์ และความสัมพันธ์ต่าง ๆ ในรูปของภาษาตรรกะ



รูปที่ 6.1 โมเดลประกอบด้วย 5 อ็อบเจ็กต์ (ในวงรี)
ความสัมพันธ์เขียนกำกับอยู่บนอ็อบเจ็กต์

6.2.1 สัญลักษณ์และการแปลความหมาย

หน่วยพื้นฐานที่มีความหมายของ FOL คือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอ็อบเจ็กต์, ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

สัญลักษณ์มี 3 ประเภทคือ

1. สัญลักษณ์ค่าคงที่ (Constant symbol) ใช้แทนอ็อบเจ็กต์
2. สัญลักษณ์เพรดิเคต (Predicate symbol) ใช้แทนความสัมพันธ์
3. สัญลักษณ์ฟังก์ชัน (Function symbol) ใช้แทนฟังก์ชัน

สัญลักษณ์ทั้ง 3 ประเภทเขียนขึ้นต้นด้วยตัวอักษรตัวใหญ่ ตัวอย่างเช่น

สัญลักษณ์ค่าคงที่ : Richard, John

สัญลักษณ์เพรดิเคต : Brother, Person, King, Crown

สัญลักษณ์ฟังก์ชัน : Leftleg

การตั้งชื่อสัญลักษณ์ควรตั้งให้ความหมายสอดคล้องกับสิ่งที่ต้องการแทนสัญลักษณ์เพรดิเคต สำหรับฟังก์ชันอาจจะต้องใช้ Argument ประกอบอีกจำนวนหนึ่ง

ความหมาย (Semantic) เป็นสิ่งที่ต้องบอกความสัมพันธ์ของประโยคกับโมเดล เพื่อให้ตัดสินค่าความจริงได้ว่าเหตุการณ์ในโมเดลขณะนั้นเป็นอย่างไร เพื่อที่จะเข้าใจความหมายได้ จำเป็นต้องมีการแปล (interpretation) เป็นการกำหนดว่าอ็อบเจ็กต์, ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันใดแทนด้วยสัญลักษณ์ค่าคงที่ เพรดิเคต หรือฟังก์ชันตัวใด ดูจากตัวอย่างการแปลต่อไปนี้

- Richard เป็นสัญลักษณ์ค่าคงที่ หมายถึงริชาร์ด (Richard the Lionheart) ส่วน John หมายถึงกษัตริย์โหดจอห์น (Evil King John)
- Brother เป็นสัญลักษณ์เพรดิเคต หมายถึงความสัมพันธ์พี่น้อง
- King เป็นสัญลักษณ์เพรดิเคต หมายถึงความเป็นกษัตริย์
- Leftleg เป็นสัญลักษณ์ฟังก์ชัน หมายถึงขาซ้าย การที่จะระบุว่าเป็นขาซ้ายของใคร จะต้องใช้ Argument มาช่วย

6.2.2 ไวยากรณ์ของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง

ไวยากรณ์ที่เขียนตามรูปแบบ Backus-Naur form (BNF) ดูได้ในรูปที่ 6.2

Sentence	→	*AtomicSentence*
	|	*(Sentence Connective Sentence)*
	|	*Quantifier Variable, . . . Sentence*
	|	$\neg$ *Sentence*
AtomicSentence	→	*Predicate(Term, . . .)* | *Term = Term*
Term	→	*Function(Term, . . .)*
	|	*Constant*
	|	*Variable*
Connection	→	$\Rightarrow$ | $\wedge$ | $\vee$ | $\Leftrightarrow$
Quantifier	→	$\forall$ | $\exists$
Constant	→	*A* | X_1 | *John* | . . .
Variable	→	*a* | *x* | *s* | . . .
Predicate	→	*Before* | *HasColor* | *Raining* | . . .
Function	→	*Mother* | *LeftLeg* | . . .

รูปที่ 6.2 ไวยากรณ์ของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งในรูปแบบ BNF

6.2.2.1 เทอม (Term)

เทอมคือนิพจน์ตรรกะที่ใช้อ้างถึงอ็อบเจ็กต์ ดังนั้น สัญลักษณ์ค่าคงที่ก็คือเทอม แต่การที่จะตั้งชื่อให้กับอ็อบเจ็กต์ทุกอย่างในโลกนี้เป็นเรื่องที่ไม่สะดวก เพราะจะทำให้มีชื่อเกิดขึ้นจำนวนมาก เช่นภาษาอังกฤษอาจจะใช้คำว่า “King John’s left leg.” แทนที่จะตั้งชื่อกับขาซ้ายของ King John การทำเช่นนี้คือการใช้สัญลักษณ์ฟังก์ชันนั่นเอง แทนที่จะใช้สัญลักษณ์ค่าคงที่ ก็ใช้สัญลักษณ์ฟังก์ชันว่า LeftLeg(John)

เทอมอาจจะประกอบด้วยสัญลักษณ์ฟังก์ชัน ตามด้วยวงเล็บเล็กที่มีเทอมเป็น Argument อยู่อีกจำนวนหนึ่ง เทอมเช่นนี้เรียกว่า เทอมเชิงซ้อน (Complex term)

6.2.2.2 ประโยคเดี่ยว (Atomic sentence)

ประโยคเดี่ยวเกิดจากการใช้สัญลักษณ์เพรดิเคตมาประกอบกับรายการของเทอมที่อยู่ในวงเล็บ เช่น

Brother(Richard, John)

มีความหมายว่า Richard the Lionheart เป็นพี่น้องกับ King John

ประโยคเดี่ยวอาจจะมีเทอมเชิงซ้อนเป็น Argument เช่น

Married(Father(Richard), Mother(John))

มีความหมายว่า บิดาของ Richard the Lionheart แต่งงานกับมารดาของ King John

ประโยคเดี่ยวจะเป็นจริงภายในโมเดลที่กำหนดให้ ถ้าความสัมพันธ์ที่แทนด้วยเพรดิเคต ประกอบกับรายการ Argument ทั้งหลายนั้นเป็นจริง

6.2.2.3 ประโยคเชิงซ้อน (Complex sentence)

ประโยคเชิงซ้อนเกิดจากการเชื่อมประโยคเดี่ยวด้วยตัวเชื่อมทางตรรกะเหมือนกับในกรณีของตรรกศาสตร์ประพจน์ ความหมายของประโยคเชิงซ้อนที่เกิดขึ้นแปลได้เช่นเดียวกับในตรรกศาสตร์ประพจน์เช่นกัน ตัวอย่างเช่น

$\neg$ Brother(LeftLeg(Richard), John)

Brother(Richard, John) $\wedge$ Brother(John, Richard)

King(Richard) $\vee$ King(John)

$\neg$ King(Richard) $\Rightarrow$ King(John)

6.2.2.4 ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

นอกจากจะแทนอ็อบเจ็กต์ด้วยภาษาทางตรรกะได้แล้ว การแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณของอ็อบเจ็กต์ก็ทำได้เช่นกัน แต่ทั้งนี้ไม่มีการแจงจำนวนนับในตรรกะ ตัวบ่งปริมาณมาตรฐานที่ใช้ในตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งมี 2 แบบดังนี้

1. Universal quantification ($\forall$)

จากปัญหาที่พบในบทที่แล้วกับตรรกศาสตร์ประพจน์ การแทนเรื่องที่ไม่เจาะจง เช่น “Squares neighboring the Wumpus are smelly” และ “All kings are persons” เป็นเรื่องยาก แต่สำหรับตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง การแทนเช่นนี้ง่าย และทำได้เป็นธรรมชาติของภาษา ตัวอย่างเช่น “All kings are persons” แทนด้วยประโยคเชิงซ้อนที่บ่งปริมาณดังนี้

$\forall x\ \ King(x) \ \Rightarrow\ \ Person(x)$

สัญลักษณ์ $\forall$ อ่านว่า “For all” ประโยคข้างบนดังกล่าวอ่านได้ว่า “For all x, if x is a king, then x is a person.” สัญลักษณ์ x เป็นตัวแปร (Variable) ในที่นี้ตัวแปรเขียนด้วยตัวอักษรตัวเล็กเสมอ ตัวแปรเป็นเทอมในตัวของมันเองอยู่แล้ว ดังนั้นจึงสามารถนำไปใช้เป็น Argument ของฟังก์ชันได้ เช่น

LeftLeg(x)

หมายถึงขาซ้ายของใครก็ตามที่แทนด้วยตัวแปร x

เทอมที่ไม่มีตัวแปรอยู่เลยเรียกว่า Ground term

การแปลความหมายของประโยคเหล่านี้จะเป็นจริงภายในโมเดลที่กำหนดให้ ตัวบ่งปริมาณจะมีขอบเขตเฉพาะภายในโมเดลนี้เท่านั้น เช่นตัวอย่างโมเดลในรูปที่ 6.1 การแปลความหมายของประโยคจะเป็นจริงเมื่อ x หมายถึงสิ่งเหล่านี้เท่านั้น ได้แก่

x หมายถึง Richard the Lionheart

หรือ x หมายถึง King John

หรือ x หมายถึง Richard’s left leg

หรือ x หมายถึง John’s left leg

หรือ x หมายถึง the crown

ประโยค $\forall x\ \ King(x) \ \Rightarrow\ \ Person(x)$ เป็นจริง ถ้ามีการแปลอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนี้

Richard the Lionheart is a king $\Rightarrow$ Richard the Lionheart is a person

King John is a king $\Rightarrow$ King John is a person

Richard's left leg is a king $\Rightarrow$ Richard's left leg is a person

John's left leg is a king $\Rightarrow$ John's left leg is a person

The crown is a king $\Rightarrow$ the crown is a person

ตามโมเดลในรูปที่ 6.1 มีกษัตริย์คนเดียวคือ King John และจากประโยคที่ 2 ของการแปลจะได้ว่า King John เป็นคน ซึ่งสมเหตุสมผลตามที่ควรจะเป็น แต่ในกรณีที่ x มีค่าเป็นอย่างอื่นจากการแปลในประโยคอื่น ปรากฏว่า ขาซ้ายและมงกุฎ ต่างก็เป็นกษัตริย์ และได้เป็นคนด้วย และในความเป็นจริงแล้ว ประโยคอื่นอีก 4 ประโยคเป็นจริงในโมเดลนี้ เพียงแต่ไม่สามารถกล่าวข้อสรุปว่าสิ่งของอื่น ๆ เป็นคน ไม่ว่าจะเป็นขาซ้าย มงกุฎ หรือแม้แต่ริชาร์ดเองก็ตาม ทั้งนี้เนื่องจากประโยคตรรกะที่เชื่อมด้วย $\Rightarrow$ เมื่อ Premise เป็นเท็จ จะไม่มีการพิจารณาค่าความจริงของผลสรุป และประโยค Implication นี้จะเป็นจริงเสมอ (ดูได้จากตารางค่าความจริงในบทที่ 5) ดังนั้น เมื่อใช้ตัวบ่งปริมาณแบบ Universal quantification จะดูเฉพาะกฎข้อที่ Premise เป็นจริงเท่านั้น ถ้า Premise เป็นเท็จ จะไม่นำผลสรุปในกฎข้อนั้นมากล่าวถึง

ข้อผิดพลาดที่มักเกิดขึ้นเสมอ เมื่อมีการเขียนแทนความรู้ในโมเดล คือการใช้ตัวเชื่อม $\wedge$ (and) แทนที่จะใช้ $\Rightarrow$ หรือการเขียนประโยคเป็น Conjunction แทนที่จะเป็น Implication นั่นเอง ประโยค $\forall x$ King(x) $\wedge$ Person(x) มีความหมายเท่ากับเขียนประโยคว่า

Richard the Lionheart is a king and Richard the Lionheart is a person,

King John is a king and King John is a person,

Richard's left leg is a king and Richard's left leg is a person,

. . .

การเขียนเช่นนี้ไม่สื่อความหมายแบบที่ต้องการจริง ๆ และเป็นการเขียนโดยใช้คำเชื่อมไม่ถูกต้อง

2. Existential quantification ($\exists$)

ใช้เมื่อต้องการแทนบางอ็อบเจ็กต์ในโมเดลเท่านั้น เป็นตัวบ่งปริมาณว่ามีอ็อบเจ็กต์นั้นอย่างน้อย 1 สิ่ง เช่นต้องการบอกว่า King John มีมงกุฎอยู่บนศีรษะ สามารถเขียนว่า $\exists x$ Crown(x) $\wedge$ OnHead(x, John)

$\exists x$ อ่านว่า "There exists an x such that . . ." หรือ "For some x ... " หรือ "มี x บางตัวซึ่ง . . ."

ประโยค $\exists x$ P เป็นจริง สำหรับ x อย่างน้อย 1 สิ่ง ดังนั้นการแปลประโยค $\exists x$ Crown(x) $\wedge$ OnHead(x, John) อาจจะแปลความหมายว่า หนึ่งในประโยคเหล่านี้เป็นจริง

Richard the Lionheart is a crown $\wedge$ Richard the Lionheart is on John's head;

King John is a crown $\wedge$ King John is on John's head;

Richard's left leg is a crown $\wedge$ Richard's left leg is on John's head;

John's left leg is a crown $\wedge$ John's left leg is on John's head;

The crown is a crown $\wedge$ the crown is on John's head;

ในที่นี้ประโยคที่ 5 เป็นความจริงในโมเดล ทำให้ประโยคที่เขียนด้วยตัวบ่งปริมาณ $\exists$ เป็นจริง

ในประโยคที่ใช้ $\exists$ ตัวเชื่อมทางตรรกะที่ใช้ร่วมด้วยคือ $\wedge$ (And) และเป็นตัวเชื่อมที่ทำให้เกิดความสมเหตุสมผลตามความหมายของประโยคในโมเดล

ข้อผิดพลาดที่มักเกิดขึ้นในการแทนค่าคือการนำ $\Rightarrow$ มาใช้แทน $\wedge$ ตัวอย่างเช่น ประโยค $\exists x$ Crown(x) $\Rightarrow$ OnHead(x, John) ถ้าดูผิวเผินประโยคนี้เหมือนกับจะมีเหตุผล แต่ถ้าดูจากความหมายแล้ว ประโยคต้องการบอกว่าคำกล่าวเหล่านี้มีอย่างน้อยหนึ่งประโยคที่เป็นจริง ได้แก่

Richard the Lionheart is a crown $\Rightarrow$ Richard the Lionheart is on John's head;

King John is a crown $\Rightarrow$ King John is on John's head;

Richard's left leg is a crown $\Rightarrow$ Richard's left leg is on John's head;

. . .

เนื่องจากประโยค Implication จะเป็นจริงเมื่อ Premise และผลสรุปต่างก็เป็นจริงทั้งคู่ (T$\Rightarrow$ T) หรือเมื่อ Premise เป็นเท็จ (F$\Rightarrow$ T, F $\Rightarrow$ F) จากประโยคแรก ถ้าริชาร์ดไม่ใช่มงกุฎ ประโยคนี้จะเป็นจริง และการใช้ $\exists$ ประกอบประโยคจะเป็นจริงตามหลักความหมาย ดังนั้น การใช้ $\Rightarrow$ กับประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ $\exists$ จึงทำให้ทุกประโยคเป็นจริง ซึ่งไม่ถูกต้อง

3. ตัวบ่งปริมาณซ้อน (Nested quantifiers)

บางครั้งประโยคที่ซับซ้อนต้องอาศัยตัวบ่งปริมาณมากกว่าหนึ่งตัวขึ้นไป ตัวบ่งปริมาณที่ใช้อาจจะเป็นแบบเดียวกัน เช่นบอกว่า "Brothers are siblings" เขียนได้ว่า

$\forall x\ \forall y$ Brother(x, y) $\Rightarrow$ Sibling(x, y)

กรณีที่ตัวบ่งปริมาณเป็นประเภทเดียวกัน สามารถเขียนให้สั้นลงได้โดยใช้ตัวบ่งปริมาณเพียงตัวเดียว เช่นต้องการบอกว่าความเป็นพี่น้องมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรซึ่งกันและกัน เขียนว่า $\forall x, y \ \ Sibling(x, y) \Rightarrow Sibling(y, x)$

บางครั้งตัวบ่งปริมาณอาจจะเป็นคนละตัวกันเช่น "Everybody loves somebody" หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า "สำหรับแต่ละคนแล้ว จะมีคน ๆ หนึ่งที่เขารัก" เขียนได้ว่า $\forall x \, \exists y \ \ Loves(x, y)$

4. ความเกี่ยวพันระหว่าง $\forall$ และ $\exists$

ตัวบ่งปริมาณ $\forall$ และ $\exists$ เกี่ยวข้องกันโดยเป็นนิเสธของกันและกัน ตัวอย่างเช่น "Everyone dislikes skunks" มีความหมายเช่นเดียวกับประโยค "There does not exist someone who likes skunks" หรือเขียนได้ว่า

$\forall x \ \neg Likes(x, Skunks)$ สมมูลกับ $\neg\exists x \ \ Likes(x, Skunks)$

ตัวอย่างประโยค "Everyone likes ice cream" มีความหมายตรงกับประโยคว่า "There is no one who does not like ice cream" เขียนได้ว่า

$\forall x \ \ Likes(x, IceCream)$ สมมูลกับ $\neg\exists x \ \neg Likes(x, IceCream)$

กฎของ de Morgan สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับตัวบ่งปริมาณทั้ง 2 ได้ดังนี้

$\forall x \ \neg P \equiv \neg\exists x \ P$	$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg (P \vee Q)$
$\neg\forall x \ P \equiv \exists x \ \neg P$	$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
$\forall x \ P \equiv \neg\exists x \ \neg P$	$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
$\exists x \ P \equiv \neg\forall x \ \neg P$	$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

5. การเท่ากัน (Equality)

การแสดงให้เห็นว่าเทอม 2 เทอมกำลังอ้างถึง หรือเป็นตัวแทนของอ็อบเจ็กต์เดียวกัน จะใช้เครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์แทน เช่น

$$Father(John) = Henry$$

บอกให้รู้ว่า พ่อของจอห์น ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ฟังก์ชัน Father(John) ก็คือ Henry (ซึ่งเป็นสัญลักษณ์ค่าคงที่)

การใช้เครื่องหมายเท่ากับเพื่อปฏิเสธว่าอ็อบเจ็กต์ 2 สิ่ง ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน ทำได้ดังนี้

"Richard has at least two brothers"

$$\exists x, y \ \ Brother(x, Richard) \wedge Brother(y, Richard) \wedge \neg (x=y)$$

จากประโยคตัวอย่างจะเห็นว่า Richard มีพี่น้องอีก 2 คนขึ้นไป เพราะ x กับ y ไม่ใช่คนเดียวกัน แต่ถ้าเขียนว่า

$$\exists x, y \quad Brother(x, Richard) \land Brother(y, Richard)$$

ประโยคนี้ไม่สื่อความหมายตามที่ต้องการ เพราะถ้า x เป็นคนเดียวกันกับ y แล้ว Richard จะมีพี่น้องเพียงคนเดียวเท่านั้น

6.3 การใช้ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง

โลกที่เอเยนต์เกี่ยวข้องอยู่สามารถใช้ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งเขียนแทนความเป็นไปต่าง ๆ ได้ โดยอาศัยหลักไวยากรณ์ที่กล่าวมาแล้ว และสามารถค้นหาหรือสรุปเรื่องราวต่าง ๆ จากฐานความรู้ที่เก็บไว้ เพื่อให้เห็นได้ชัดเจน จะยกตัวอย่างเป็นกรณีศึกษาของความสัมพันธ์เครือญาติ (The kinship domain) และ Wumpus world

6.3.1 ตัวอย่างความสัมพันธ์เครือญาติ

ความสัมพันธ์ของเครือญาติมีทั้งข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่บอกเรื่องราวของครอบครัวว่าใครเป็นใครในตระกูลนี้ เช่น “นางทองประศรีเป็นแม่ของขุนแผน” และ “ขุนแผนเป็นพ่อของพลายงาม” และมีกฎที่สำคัญ เช่น “ย่าคือแม่ของพ่อ” เป็นต้น ในที่นี้ตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไปจะใช้ภาษาอังกฤษเป็นตัวแทน เนื่องจากเข้ากับตรรกศาสตร์ได้สอดคล้องกลมกลืน และไม่มีศัพท์แจกแจงละเอียดเหมือนศัพท์ภาษาไทย ซึ่งมีคำเรียกญาติเป็นจำนวนมาก ทำให้มีกฎเกณฑ์ปลีกย่อยซับซ้อนเกินไป

อ็อบเจ็กต์ของตัวอย่างเครือญาติ ได้แก่ บุคคล ส่วนเพรดิเคตที่ใช้ในตัวอย่างนี้แบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

1. Unary predicate (มี Argument เดียว) ได้แก่ Male, Female
2. Binary predicate (มี Argument 2 ตัว) ได้แก่ Parent, Sibling, Brother, Sister, Child, Daughter, Son, Spouse, Wife, Husband, Grandparent, Grandchild, Cousin, Aunt, Uncle

ฟังก์ชันสามารถใช้ได้ในกรณีของพ่อ และแม่ เพราะทุกคนมีพ่อกับแม่คนเดียวเท่านั้น

การเขียนตรรกะแทนกฎ จะยกตัวอย่างพอสังเขปดังนี้

1. One's mother is one's female parent.

   $\forall m, c \quad Mother(c) = m \quad \Leftrightarrow \quad Female(m) \wedge Parent(m, c)$

2. One's husband is one's male spouse.

   $\forall w, h \quad Husband(h, w) \quad \Leftrightarrow \quad Male(h) \wedge Spouse(h, w)$

3. Male and female are disjoint categories.

   $\forall x \quad Male(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Female(x)$

4. Parent and child are inverse relations.

   $\forall p, c \quad Parent(p, c) \quad \Leftrightarrow \quad Child(c, p)$

5. A grandparent is a parent of one's parent.

   $\forall g, c \quad Grandparent(g, c) \quad \Leftrightarrow \exists p \quad Parent(g, p) \wedge Parent(p, c)$

6. A sibling is another child of one's parent.

   $\forall x, y \quad Sibling(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \neg (x=y) \wedge \exists p \;\; Parent(p, x) \wedge Parent(p, y)$

ประโยคทั้ง 6 ประโยคนี้เป็นสัจพจน์ (Axiom) ของเรื่องราวความสัมพันธ์เครือญาติ ประโยคใดที่เป็นสัจพจน์ จะต้องมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรื่องความสัมพันธ์เครือญาติอาจกล่าวได้ว่าสัจพจน์เหล่านี้ใช้แทนคำนิยาม (Definition) สัจพจน์จากประโยคตัวอย่างได้ให้คำนิยามของ Mother, Husband, Male, Parent, Grandparent และ Sibling ในเทอมของเพรดิเคตอื่น ๆ

ประโยคบางประโยคจำเป็นต้องใส่ไว้ในฐานความรู้ นอกเหนือไปจากการให้นิยาม เช่นการบอกลักษณะสมมาตรของ Sibling ดังนี้

$$\forall x, y \quad Sibling(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad Sibling(y, x)$$

สัจพจน์บางครั้งก็ไม่ใช่คำนิยามเสมอไป บางประโยคเพียงแค่บอกข้อมูลกว้าง ๆ เกี่ยวกับเพรดิเคต นอกจากนี้บางเพรดิเคตก็ไม่สามารถให้นิยามได้ เพราะยังไม่มีความรู้มากพอที่จะให้นิยามของสิ่งนั้น เช่นคำนิยามของ Person(x) ยังไม่มีคำไหนที่จะนำมาใช้บรรยายบอกเล่าคำนิยามของบุคคลให้เหมาะสม ทำให้ไม่สามารถเขียนประโยคต่อไปนี้ให้สมบูรณ์ได้

$$\forall x \quad Person(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$$

แต่การใช้ตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งสามารถบรรยายเรื่องราวหรือคุณสมบัติอื่น ๆ ของเพรดิเคต Person ได้ โดยกล่าวถึงคุณสมบัติที่ทำให้เป็น Person ได้ตามต้องการ ดังรูปแบบนี้

$$\forall x \quad Person(x) \quad \Rightarrow \quad \ldots$$

หรือ $\forall x \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad Person(x)$

เช่น $\forall x \quad Person(x) \Rightarrow Man(x)$ หมายความว่า x เป็นบุคคล (Person) แล้ว x จะเป็นคน (Man) การตั้งกฎเช่นนี้มักจะใช้ในกรณีที่ภาษาอังกฤษใช้คำพ้องความหมายในการแทน อ็อบเจ็กต์ ในภาษาธรรมชาติที่ใช้สนทนากันตามปกติ ผู้สนทนาจะเข้าใจความหมายโดยไม่ต้องอธิบาย แต่เอเยนต์อื่นต้องมีกฎที่ชัดเจน เพื่อให้สามารถสรุปความที่ถูกต้องได้

6.3.2 เลขจำนวน เซต และลิสต์ (Numbers, set, and lists)

การสร้างเลขจำนวนจากตรรกะทำได้จากการเริ่มต้นกำหนดสัจพจน์ขึ้นก่อน แล้วจึงปรับขยายมาเพื่อให้บรรยายตัวเลขได้อย่างกว้างขวาง เปรียบได้กับการตั้งทฤษฎีขึ้นตามหลังสัจพจน์นั่นเอง

ทฤษฎีของจำนวนธรรมชาติ (Natural number) หรือเลขจำนวนเต็มแบบไม่ติดลบ (Nonnegative integer) เริ่มจากกำหนดเพรดิเคตดังนี้

ให้ NatNum(n) เป็นสัญลักษณ์เพรดิเคตที่ให้ค่าความจริงเป็นจริง (True) สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ

ให้ S(n) เป็นสัญลักษณ์ฟังก์ชัน ซึ่งให้ค่าเป็นเลขจำนวนธรรมชาติตัวต่อจาก n นั่นคือ n+1 ฟังก์ชันนี้ก็คือฟังก์ชันตัวตาม (Successor function) นั่นเอง

สัจพจน์ที่ให้คำนิยามเริ่มต้นของจำนวนธรรมชาติเรียกว่า Peano axiom เขียนเป็นตรรกะได้ดังนี้

$NatNum(0)$

$\forall n \quad NatNum(n) \Rightarrow NatNum(S(n))$

ประโยคแรกกำหนดให้ 0 เป็นจำนวนธรรมชาติก่อน ส่วนประโยคที่สองกล่าวว่า สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติแล้ว S(n) จะเป็นจำนวนธรรมชาติด้วย จากนิยามเช่นนี้ ทำให้ได้จำนวนธรรมชาติคือ 0, S(0), S(S(0)), . . . ตามลำดับ จึงต้องมีการให้สัจพจน์สำหรับข้อกำหนดของฟังก์ชัน S ต่อไป และเนื่องจากต้องการให้อ่านง่ายขึ้น จึงใช้เครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ $\neq$ แทนเครื่องหมาย not ทางตรรกะ

$\forall n \quad 0 \neq S(n)$

$\forall m, n \quad m \neq n \Rightarrow S(m) \neq S(n)$

ต่อไปเป็นการนิยามการบวกในเทอมของฟังก์ชันตัวตาม

$\forall m \quad NatNum(m) \Rightarrow +(m, 0) = m$

$\forall m, n \quad NatNum(m) \wedge NatNum(n) \Rightarrow +(S(m), n) = S(+(m, n))$

ประโยคแรกกล่าวว่า การบวก 0 เข้ากับจำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ จะได้ค่าเท่ากับ m สัญลักษณ์ฟังก์ชัน + ที่ใช้ในประโยคนี้เป็นฟังก์ชันแบบ 2 Argument เขียนในรูป Prefix

+(m, 0) มีความหมายเช่นเดียวกับ m + 0 ซึ่งเป็นการเขียนแบบ Infix ที่คุ้นเคยกันมากกว่าในทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเพื่อให้อ่านง่ายขึ้น จะนำวิธีเขียนทางคณิตศาสตร์มาใช้แทน และใช้เทอม n+1 แทนที่จะใช้ S(n) ทำให้เขียนนิยามใหม่ได้ดังนี้

$\forall$m, n NatNum(m) $\wedge$ NatNum(n) $\Rightarrow$ (m+1)+n = (m+n)+1

สัจพจน์ที่เขียนใหม่นี้สามารถนำมาใช้ซ้ำ ๆ กันเพื่อหาค่าฟังก์ชันตัวตามโดยทั่วไป หลังจากที่นิยามการบวกแล้ว ต่อไปก็นิยามการคูณในเทอมของการบวกซ้ำกัน นิยามการยกกำลังในเทอมของการคูณซ้ำกัน นิยามการหารและหาเศษเหลือ ตลอดจนนิยามจำนวนเฉพาะ (Prime number) และอื่น ๆ จะเห็นว่าทฤษฎีจำนวน (Number theory) สามารถสร้างขึ้นได้จากค่าคงที่ 1 ตัว, ฟังก์ชันจำนวน 1 ฟังก์ชัน เพรดิเคตจำนวน 1 เพรดิเคต และสัจพจน์ 4 ประโยค

เซตเป็นเรื่องพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ในทางตรรกะก็สามารถสร้างเซตขึ้นได้เช่นกัน ตรรกะสามารถแทนเซตใด ๆ รวมถึงเซตว่างได้ และต้องหาวิธีการเพิ่มเติมสมาชิกลงในเซต หรือทำยูเนียน (Union) และอินเตอร์เซคชัน (Intersection) กับเซต 2 เซต หาวิธีดูว่าสิ่ง ๆ นั้นเป็นสมาชิกในเซตหรือไม่ และยังต้องแยกแยะให้ออกว่าสิ่งใดเป็นเซต สิ่งใดไม่ใช่เซต

ในที่นี้จะใช้วิธีเขียนและศัพท์ต่าง ๆ ในทำนองเดียวกันกับเรื่องเซตดังนี้

{ } แทนเซตว่าง

เพรดิเคต Set แสดงค่าความจริงว่าเป็นเซต

เพรดิเคต $\in$ แสดงความเป็นสมาชิกในเซต เช่น

$x \in s$ หมายถึง x เป็นสมาชิกของเซต s

เพรดิเคต $\subseteq$ แสดงความเป็นสับเซต (Subset) เช่น

$s_1 \subseteq s_2$ หมายถึง s_1 เป็นสับเซตของ s_2

เพรดิเคต $\cap$ แสดงอินเตอร์เซ็คชันของ 2 เซต เช่น

$s_1 \cap s_2$

เพรดิเคต $\cup$ แสดงยูเนียนของ 2 เซต เช่น

$s_1 \cup s_2$

เพรดิเคต { x | s } แสดงเซตที่เกิดจากการนำสมาชิก x เติมเข้าไปในเซต s

สัจพจน์ในเรื่องของเซตได้แก่

1. เซต ได้แก่เซตว่าง หรือเซตใด ๆ ที่เกิดจากการนำสมาชิกเข้าไปไว้ในเซต

$\forall s \ \ Set(s) \ \Leftrightarrow \ (s = \{ \}) \vee \ \exists x, s_2 \ Set(s_2) \wedge s = \{ x \mid s_2 \}$

2. เซตว่าง คือเซตที่ไม่มีสมาชิกใด ๆ อยู่เลย หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ไม่มีวิธีที่จะลดขนาดของเซตว่างให้กลายเป็นเซตที่เล็กลงไปกว่านั้นได้

$\neg \exists x, s \quad \{ x \mid s \} = \{ \}$

3. การเติมสมาชิกที่มีอยู่แล้วลงไปในเซตไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงใด ๆ

$\forall x, s \quad x \in s \ \Leftrightarrow \ s = \{ x \mid s \}$

4. สมาชิกในเซตคือสิ่งที่ถูกเติมลงไปในเซต วิธีแสดงข้อนี้ต้องวนซ้ำ (Recursive) โดยบอกว่า x เป็นสมาชิกในเซต s ก็ต่อเมื่อ เซต s เท่ากับเซต s_2 ที่นำสมาชิก y มาเติมเข้าไป โดย y เป็นตัวเดียวกันกับ x หรือ x เป็นสมาชิกในเซต s_2 อยู่แล้ว

$\forall x, s \ \ x \in s \ \Leftrightarrow \ [\exists y, s_2 \ \ (s = \{ y \mid s_2 \} \wedge (x = y \vee x \in s_2))]$

5. เซตเป็นสับเซตของอีกเซตหนึ่ง ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซตแรก เป็นสมาชิกของเซตที่ 2

$\forall s_1, s_2 \quad s_1 \subseteq s_2 \ \Leftrightarrow \ (\forall x \quad x \in s_1 \Rightarrow x \in s_2)$

6. เซต 2 เซตเท่ากัน ก็ต่อเมื่อแต่ละเซตเป็นสับเซตของอีกเซตหนึ่ง

$\forall s_1, s_2 \quad (s_1 = s_2) \Leftrightarrow (s_1 \subseteq s_2 \wedge s_2 \subseteq s_1)$

7. ของสิ่งหนึ่งจะอยู่ในอินเตอร์เซ็คชันของเซต 2 เซต ก็ต่อเมื่อของนั้นเป็นสมาชิกของทั้ง 2 เซต

$\forall x, s_1, s_2 \quad x \in (s_1 \cap s_2) \ \Leftrightarrow (x \in s_1 \wedge \ x \in s_2)$

8. ของสิ่งหนึ่งจะอยู่ในอินเตอร์เซ็คชันของเซต 2 เซต ก็ต่อเมื่อของนั้นเป็นสมาชิกของเซตใดเซตหนึ่ง

$\forall x, s_1, s_2 \quad x \in (s_1 \cup s_2) \ \Leftrightarrow (x \in s_1 \vee \ x \in s_2)$

ลิสต์ (List) มีลักษณะคล้ายกับเซต แตกต่างกันที่ลิสต์มีการเรียงลำดับสมาชิก และสมาชิกบางตัวในลิสต์สามารถปรากฏอยู่ในลิสต์ได้หลายครั้ง การบรรยายถึงลิสต์สามารถนำศัพท์ของภาษาลิสป์ (Lisp) มาใช้เพื่อให้ง่ายดังนี้

Nil เป็นค่าคงที่ หมายถึงลิสต์ว่าง หรืออาจเขียนแทนด้วย [ ]

เพรดิเคตได้แก่

1. List? มีค่าเป็นจริงสำหรับลิสต์

2. Find ใช้หาว่ามีสมาชิกอะไรอยู่ในลิสต์บ้าง

3. Cons(x, y) เมื่อ y เป็นลิสต์ที่มีสมาชิก เขียนว่า [x | y]

Cons(x, Nil) คือลิสต์ที่มีแต่สมาชิก x อาจเขียนว่า [x]

ลิสต์ที่มีสมาชิกจำนวนมาก เช่น [A, B, C] เขียนเป็นเทอมซ้อนได้ว่า

Cons(A, Cons(B, Cons(C, Nil)))

6.3.3 ตัวอย่าง Wumpus world

ในบทที่แล้วแทนความเป็นไปใน Wumpus world ด้วยตรรกศาสตร์ประพจน์ แต่การแทนด้วยตรรกศาสตร์อันดับหนึ่งมีความชัดเจนมากกว่า และเป็นวิธีที่เป็นธรรมชาติมากกว่าในการแทนสิ่งต่าง ๆ ที่ต้องการกล่าวถึง

ใน Wumpus world เอเยนต์รับเพอร์เซ็พเป็นเวคเตอร์ที่มี 5 สมาชิก นอกจากนี้ ยังต้องระบุเวลาที่เกิดเหตุการณ์รับเพอร์เซ็พเพื่อไม่ให้สับสนว่ารับเพอร์เซ็พใดในเวลาใด เวลาอาจแทนด้วยตัวเลขจำนวนเต็มบอกขั้นตอนเวลา (time step) ประโยคการรับเพอร์เซ็พทั่วไปได้แก่

Percept([Stench, Breeze, Glitter, None, None], 5)

ในที่นี้ Percept เป็นเพรดิเคตที่มี 2 Argument คำว่า Stench, Breeze และอื่น ๆ ที่อยู่ในเครื่องหมาย [ ] เป็นสัญลักษณ์ค่าคงที่ที่อยู่ในลิสต์ของ Percept จำนวนเต็ม 5 คือขั้นตอนเวลาที่ 5 ส่วนแอคชันที่เอเยนต์เลือกกระทำได้แก่

Turn(Right), Turn(Left), Forward, Shoot, Grab, Release, Climb

การตัดสินเลือกแอคชันที่ดีที่สุด ทำได้โดยสร้างคำถาม (query) ดังนี้

$\exists a$ BestAction(a, 5)

เป็นคำถามว่าในการรับ Percept ช่วงเวลาที่ 5 ควรทำแอคชันใดดีที่สุด

การถามคำถามนี้อาจได้รับคำตอบว่า { a | Grab } โปรแกรมจะคืนค่า Grab เป็นแอคชันที่ให้เลือกกระทำ แต่การที่ได้รับคำตอบนี้มาขึ้นอยู่กับความรู้และกฎต่าง ๆ ที่อยู่ในฐานความรู้

ข้อมูลเกี่ยวกับ Percept นำไปใช้ประมวลเพื่อบอกให้รู้สถานะของโลกขณะนั้น ตัวอย่างเช่น กฎสามารถนำไปสู่ข้อสรุปต่าง ๆ ดังนี้

$\forall$t, s, g, m, c Percept([s, Breeze, g, m, c], t) $\Rightarrow$ Breeze(t)

$\forall$t, s, b, m, c Percept([s, b, Glitter, m, c], t) $\Rightarrow$ Glitter(t)

จากประโยคแรก ณ เวลา t ใด ๆ เราไม่สนใจว่าจะมีเพอร์เซ็พอื่นหรือไม่ แต่ถ้าทราบว่ามี Breeze เป็นเพอร์เซ็พหนึ่งที่ได้รับมา ก็สามารถนำไปสู่ข้อสรุปว่า ณ เวลานั้น มีลมพัด แทน

ด้วยคำว่า Breeze ในประโยคที่ 2 ก็เช่นเดียวกัน แต่เปลี่ยนเป็นรับเพอร์เซ็พเป็น Glitter แทน เมื่อมีกฎเช่นนี้จำนวนหนึ่งให้ครบถ้วนสำหรับเพอร์เซ็พทุกเรื่อง กฎเหล่านี้เป็นส่วนของกระบวนการใช้เหตุผล เรียกส่วนนี้ว่า perception เพราะเป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับเรื่องของเพอร์เซ็พโดยเฉพาะ

การเลือกแอคชันแบบง่ายที่สุดทำได้โดยใช้ประโยค Implication เช่น เมื่อมีกฎอยู่ในฐานความรู้ว่า

$$\forall t \quad Glitter(t) \Rightarrow BestAction(Grab, t)$$

บอกให้ทราบว่า ถ้าเห็นประกายทอง ณ เวลา t แล้ว แอคชันที่ดีที่สุดที่ควรกระทำคือเก็บทองขึ้นมานั่นเอง ตามที่เคยสร้างคำถามไว้แล้วว่า ณ ช่วงเวลาที่ 5 ควรเลือกทำอะไร จะได้คำตอบว่า

BestAction(Grab, 5)

การแทนความรู้เกี่ยวกับสภาพแวดล้อม (Environment) ของ Wumpus world สิ่งที่เกี่ยวข้องกับสภาพแวดล้อมได้แก่ ช่อง (Square), หลุม (Pit), Wumpus

การตั้งชื่อ Square อาจจะใช้ตัวเลขประจำช่องกำกับไว้ เช่น $Square_{1,2}$ หรือ $Square_{3,4}$ แต่ความสัมพันธ์ระหว่างช่องที่อยู่ติดกันในแนวนอนและแนวตั้งมีความสำคัญต่อเหตุการณ์ในกรณีศึกษานี้เป็นอย่างมาก เช่น $Square_{1,2}$ กับ $Square_{1,3}$ เป็นช่องติดกัน (adjacent square) การทราบข้อมูลว่าช่องใดบ้างที่อยู่ติดกัน เพื่อจะได้ทราบผลกระทบของสถานะในแต่ละช่องเป็นเรื่องจำเป็น จึงต้องออกแบบเทอมที่ซับซ้อนขึ้น ใช้เป็นลิสต์ที่บอกตำแหน่งของแถวทั้งแนวนอนและแนวตั้ง ตัวอย่างเช่น ลิสต์ [1,2] มีเลขชี้บอกตำแหน่งของแถวแนวนอนแนวตั้งได้ ส่วนช่องที่อยู่ข้างกัน ใช้กฎกำหนดเป็นนิยามขึ้นมาดังนี้

$$\forall x, y, a, b \; Adjacent([x, y], [a, b]) \Leftrightarrow [a, b] \in \{ [x+1, y], [x-1, y], [x, y+1], [x, y-1] \}$$

จากนิยาม เมื่อกำหนดช่อง Square[x, y] ให้ สามารถหาช่องที่อยู่ติดกันในแนวนอนและแนวตั้งได้เป็นช่อง [a, b] ที่เกิดจากการคำนวณค่า x, y 4 แบบ

สำหรับหลุมใน Wumpus world อาจมีอยู่หลายที่ แต่ไม่จำเป็นต้องกำหนดหมายเลขให้หลุมแต่ละแห่ง เพราะหลุมไม่มีความแตกต่างกันในด้านคุณสมบัติ จึงใช้เพรดิเคต Pit บอกค่าความจริงว่ามีหลุมอยู่หรือไม่

Wumpus มีอยู่ตัวเดียวเท่านั้น และอยู่ในช่องใดช่องหนึ่งเพียงช่องเดียว จึงใช้สัญลักษณ์ฟังก์ชันแทนช่องนั้นได้ว่า Home(Wumpus)

ตำแหน่งที่อยู่ของเอเยนต์มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา แทนได้ด้วยเพรดิเคต At(Agent, s, t) หมายถึงเอเยนต์อยู่ที่ช่อง s ณ เวลา t เมื่อรู้ว่าเอเยนต์อยู่ที่ใด เอเยนต์จะ

รับทราบสถานการณ์ของช่องที่ตนอยู่ได้จากคุณสมบัติของเพอร์เซ็พที่เอเยนต์รับได้จากช่องนั้น เช่น

$$\forall\ s, t \quad At(Agent, s, t) \wedge Breeze(t) \Rightarrow Breezy(s)$$

หมายความว่าเมื่อเอเยนต์อยู่ที่ช่อง s ใด ๆ แล้วรับเพอร์เซ็พเป็นลมพัด (Breeze) เมื่อเวลา t แล้วจะรู้ว่าช่อง s นั้นเป็นช่องที่มีลม (Breezy) ผลที่ตามมาจากประโยคนี้คือเมื่อเอเยนต์รู้ว่าช่องใด Breezy ก็จะรู้ว่ามีหลุมอยู่ในช่องใกล้เคียง เพรดิเคต Breezy ไม่จำเป็นต้องระบุเวลา แต่ระบุตำแหน่งช่อง เพราะบอกสภาพเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องเท่านั้น เช่นเดียวกับกลิ่น เมื่อรู้ว่าช่องนั้นมีกลิ่น (Smelly) หรือไม่มีกลิ่นก็ตาม สามารถบอกสภาพแวดล้อมในช่องนั้น และช่องข้างเคียงได้ และนำไปสู่ข้อสรุปว่ามี Wumpus อยู่ที่ใด

กฎที่ใช้ในการวินิจฉัยหาว่ามีหลุมอยู่ที่ใด ใช้หลักการว่า ถ้าช่องใดมีลมพัด (Breezy) ช่องที่อยู่ข้างเคียงจะมีหลุม เขียนได้ดังนี้

$$\forall\ s \quad Breezy(s) \Rightarrow \exists\ r \quad Adjacent(r, s) \wedge Pit(r)$$

และถ้าช่องนั้นไม่มีลม ช่องข้างเคียงก็ไม่มีหลุม เขียนได้ดังนี้

$$\forall\ s \quad \neg Breezy(s) \Rightarrow \neg\exists\ r \quad Adjacent(r, s) \wedge Pit(r)$$

ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับช่องที่ไม่มีลม อาจจะดูเหมือนไม่จำเป็นต้องเขียนลงไปในฐานความรู้ ในสามัญสำนึกของมนุษย์อาจรู้ข้อนี้ได้เองอัตโนมัติ เหมือนกับการพูดว่า “มีขนม 3 ถ้วย” โดยไม่จำเป็นต้องพูดต่อว่า “ไม่ได้มี 4 ถ้วย หรือไม่มีเกินกว่านั้น” แต่สำหรับเอเยนต์ที่ไม่ใช่มนุษย์ เมื่อนับขนมจนครบ 3 ถ้วยแล้ว ก็บอกว่าประโยค “มีขนม 3 ถ้วย” เป็นจริง ทั้งที่ความจริงแล้วบนโต๊ะมีขนมอยู่ 4 ถ้วย ดังนั้น กฎในกรณีที่ไม่มีลมพัด กับมีลมพัด จึงเป็นเรื่องที่ควรเก็บในฐานความรู้ให้ครบถ้วน

กฎบางข้อสร้างไว้เพื่อแสดงเหตุของการเกิดสิ่งต่าง ๆ หรือการรับรู้เพอร์เซ็พต่าง ๆ ในโลก กฎประเภทนี้เรียกว่า Causal rule มักใช้บอกให้รู้ว่าสิ่งนี้เป็นสาเหตุให้เกิดสิ่งนั้น เช่น หลุมเป็นเหตุให้เกิดลมพัดในช่องข้างเคียง เขียนว่า

$$\forall\ r \quad Pit(r) \Rightarrow [\forall s \quad Adjacent(r, s) \Rightarrow Breezy(s)]$$

และถ้าในช่องข้างเคียงทุกช่องของช่องหนึ่งไม่มีมีหลุม ช่อง ๆ นั้นจะไม่มีลม

$$\forall s \quad [\forall\ r \quad Adjacent(r, s) \Rightarrow \neg Pit(r)] \Rightarrow \neg Breezy(s)$$

ประโยคเช่นนี้เป็นประโยคบอกสาเหตุ เพราะบอกให้รู้ว่าค่าความจริงของ Breezy เกิดขึ้นได้อย่างไร หรือเกิดมาจากสาเหตุใด เป็นการบอกสถานะของโลกที่สรุปมาจากคุณสมบัติของโลก ทำให้เอเยนต์มีความรู้เกี่ยวกับโลกเพิ่มขึ้นจากเดิม

ระบบที่มีการใช้เหตุผลโดยอาศัยกฎของสาเหตุเรียกว่า Model-based reasoning system เนื่องจากกฎของสาเหตุทำให้เกิดตัวแบบของวิธีการทำงานของสภาพแวดล้อมขึ้น

ไม่ว่าเอเยนต์จะใช้กฎประเภทใดก็ตาม ถ้าสัจพจน์ที่ใช้สามารถบอกเล่า และบรรยายวิธีการทำงานของโลก รวมถึงวิธีการเกิดเพอร์เซ็พต่าง ๆ ได้ถูกต้องตรงตามความเป็นจริง และครบถ้วนสมบูรณ์แล้ว กระบวนการสรุปความทางตรรกะก็จะสามารถสรุปความเป็นไปของสถานะของโลกได้ถูกต้องสมบูรณ์เช่นกัน เมื่อมีตรรกะที่มีประโยชน์เช่นนี้เป็นเครื่องมือ ผู้ออกแบบเอเยนต์จึงมุ่งเน้นที่การจัดการกับความรู้ โดยหาวิธีให้ได้ความรู้ที่ดีมีประโยชน์ และถูกต้อง เพื่อนำมาผ่านกระบวนการทางตรรกะ ซึ่งจะทำการสรุปหาผลลัพธ์ที่เหมาะสมให้ต่อไป

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงแทนประโยค / วลีต่อไปนี้ในรูปประโยคเดี่ยวของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง
   - 1.1 Snoopy is a dog.
   - 1.2 Dumbledore, the wizard.
   - 1.3 The cat named Garfield.
   - 1.4 Saruman is Gandalf's enemy.
   - 1.5 Arwen, a daughter of Elrond.
2. การกล่าวว่า "John is a king." กับ "Aragorn is the king of Gondor" ทั้งสองประโยคต่างก็กล่าวถึงคุณสมบัติ (Property) กษัตริย์ การแทนค่าด้วยเพรดิเคตในสองประโยคนี้ มีอะไรที่แตกต่างกัน เพราะเหตุใด
3. จงแทนประโยคต่อไปนี้ด้วยตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง กำหนดชื่อเพรดิเคตต่าง ๆ และใช้ตัวบ่งปริมาณให้เหมาะสม มีความหมาย และมีความเป็นทั่วไปที่จะนำไปใช้ในข้ออื่นที่เป็นเรื่องราวเดียวกันได้โดยไม่ต้องตั้งชื่อใหม่ (เช่นข้อ 3.1-3.2 เป็นเนื้อหาประเภทเดียวกัน)
   - 3.1 Some students took French in Spring 2008.
   - 3.2 Every student who takes French passes it.
   - 3.3 Every Air Cadet is smart.
   - 3.4 There is a laundry girl who does the laundry for all Air Cadets who do not do the laundry themselves.
   - 3.5 All men are mortal.
   - 3.6 There are some dwarves who are friends with some elves.
   - 3.7 Whoever goes to Minas Tirith means he goes to Gondor.
   - 3.8 A person born in the UK, each of whose parents is a UK citizen or a UK resident, is a UK citizen by birth.
   - 3.9 A person born outside the UK, one of whose parents is a UK citizen by birth, is a UK citizen by descent.
4. จงแทนประโยค "All Germans speak the same language." เป็นตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง ให้ใช้เพรดิเคต Speaks(x, l) หมายถึง x (บุคคล) พูดภาษา l

5. ถ้ากำหนดให้ข้อเท็จจริง 2 ข้อ คือ

   Male(Brad). และ

   Spouse(Brad, Angelina).

   จะต้องหาสัจพจน์ใดเพิ่มเติมเพื่อช่วยให้เกิดการสรุปความว่า Female(Angelina).

6. จากตัวอย่างความสัมพันธ์เครือญาติ จงเขียนสัจพจน์เพื่อเป็นนิยามของคำต่อไปนี้

Brother	Sister
Son	Daughter
Aunt	Uncle
GrandChild	SisterInLaw