

Morphologie Mathématique

Caroline Petitjean

■ Définitions :

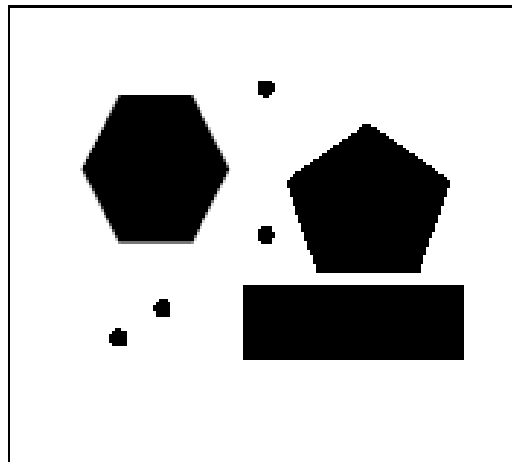
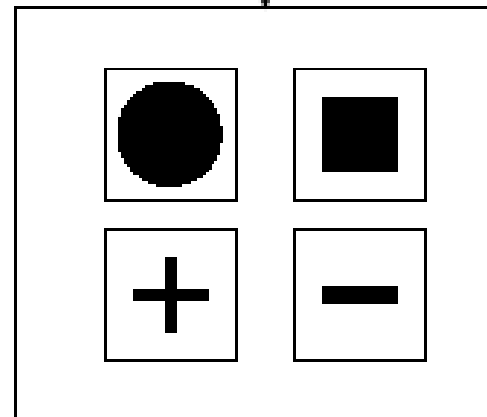


Image (X)



Exemples
d'Éléments
structurants (B)



Relations d'ensembles

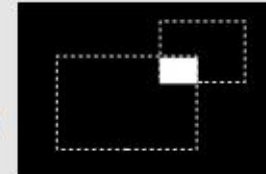
Utilisations principales

→ Images binaires (surtout) :

- ET logique : intersection logique
- OU logique : union logique
- OU exclusif : exclusion logique



$ET(I_1, I_2)$



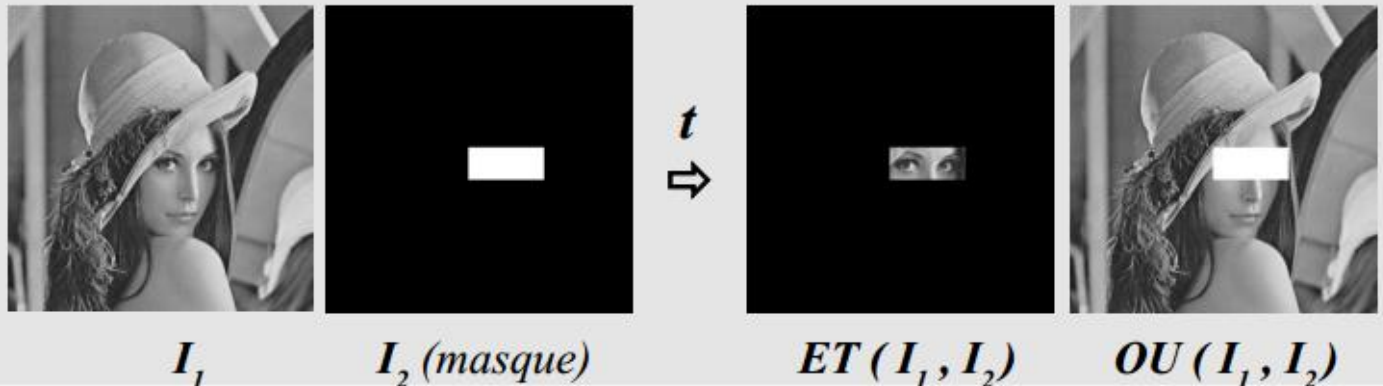
$OU(I_1, I_2)$



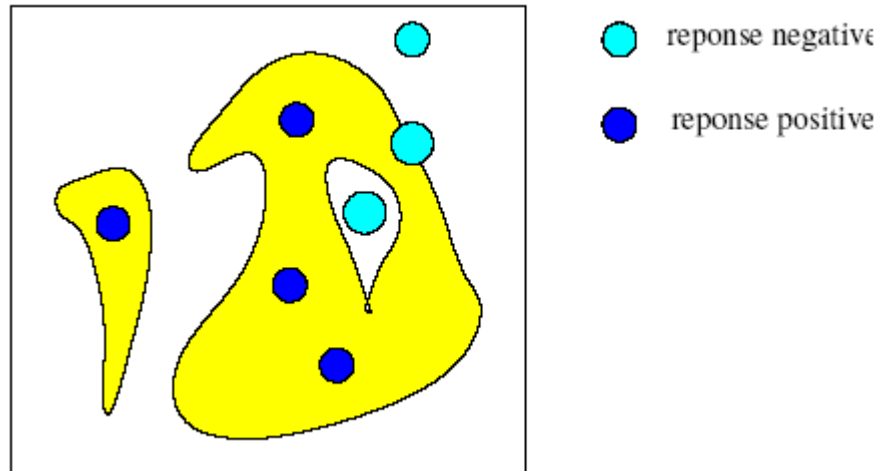
$XOR(I_1, I_2)$



→ Masquage



Erosion

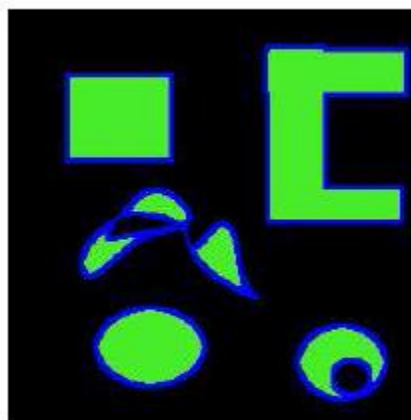


Mk

$B = \blacksquare$ (rayon 3)



X



$X(\blacksquare+\blacksquare)$ et $\mathcal{E}_B(X)(\blacksquare)$

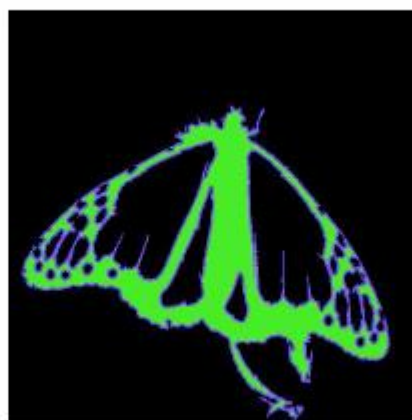


$\mathcal{E}_B(X)$

$B = \bullet$ (rayon 5)



X



$X(\blacksquare+\blacksquare)$ et $\mathcal{E}_B(X)(\blacksquare)$



$\mathcal{E}_B(X)$

Erosion

- Taille croissante de l'élément structurant



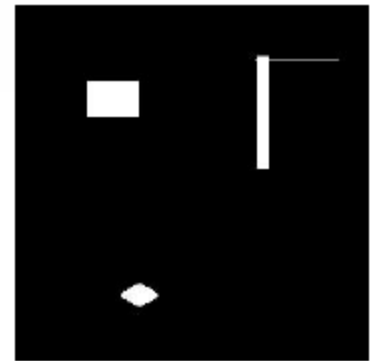
X



$\mathcal{E}_{5B}(X)$

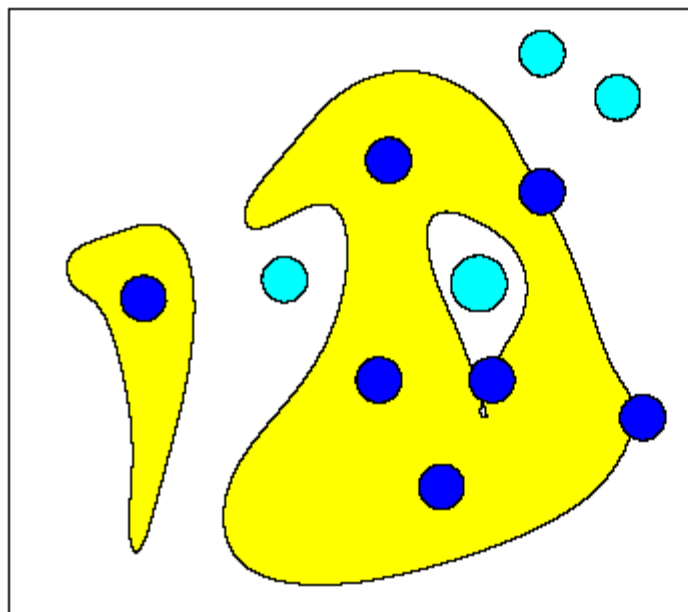


$\mathcal{E}_{10B}(X)$



$\mathcal{E}_{15B}(X)$

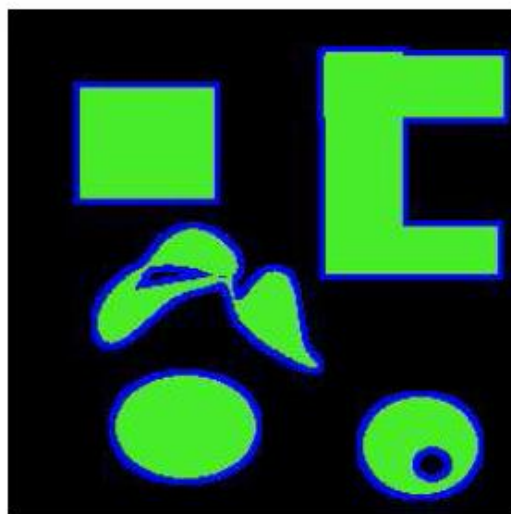
Dilatation



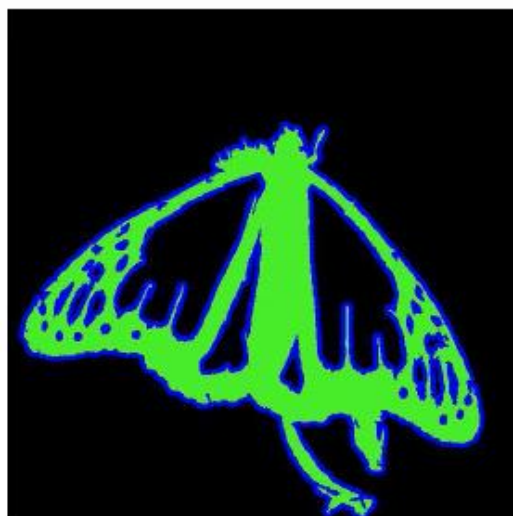
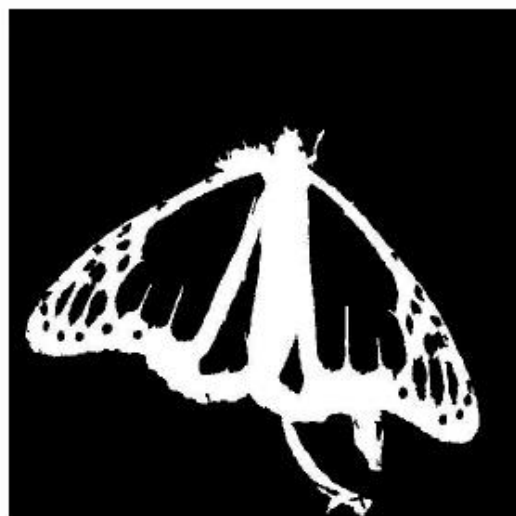
● reponse negative

● reponse positive

$B = \blacksquare$ (rayon 3)



$B = \bullet$ (rayon 5)



X

$\delta_B(X)(\blacksquare + \blacksquare) \text{ et } X(\blacksquare)$

$\delta_B(X)$

Dilatation

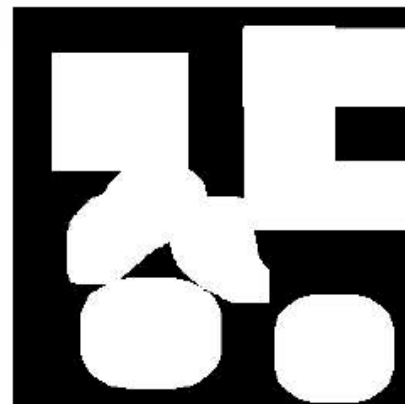
■ $B =$ ■



X



$\delta_{5B}(X)$



$\delta_{10B}(X)$



$\delta_{15B}(X)$

Dualité



X



$\delta_{5B}(X)$



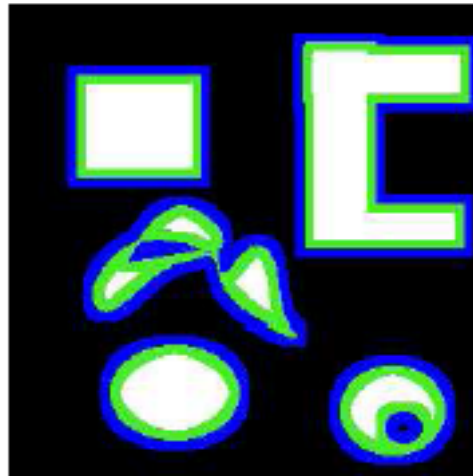
$\mathcal{E}_{5B}(\mathcal{C}_E(X))_{\text{Morril}}$

Extensivité

■ $\mathcal{E}_B(X) = \square$

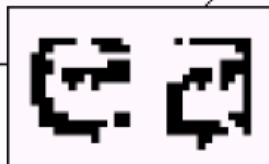
■ $X = \square + \blacksquare$

■ $\delta_B(X) = \square + \blacksquare + \blacksquare$



Application

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

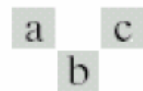
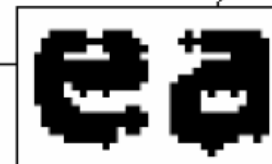
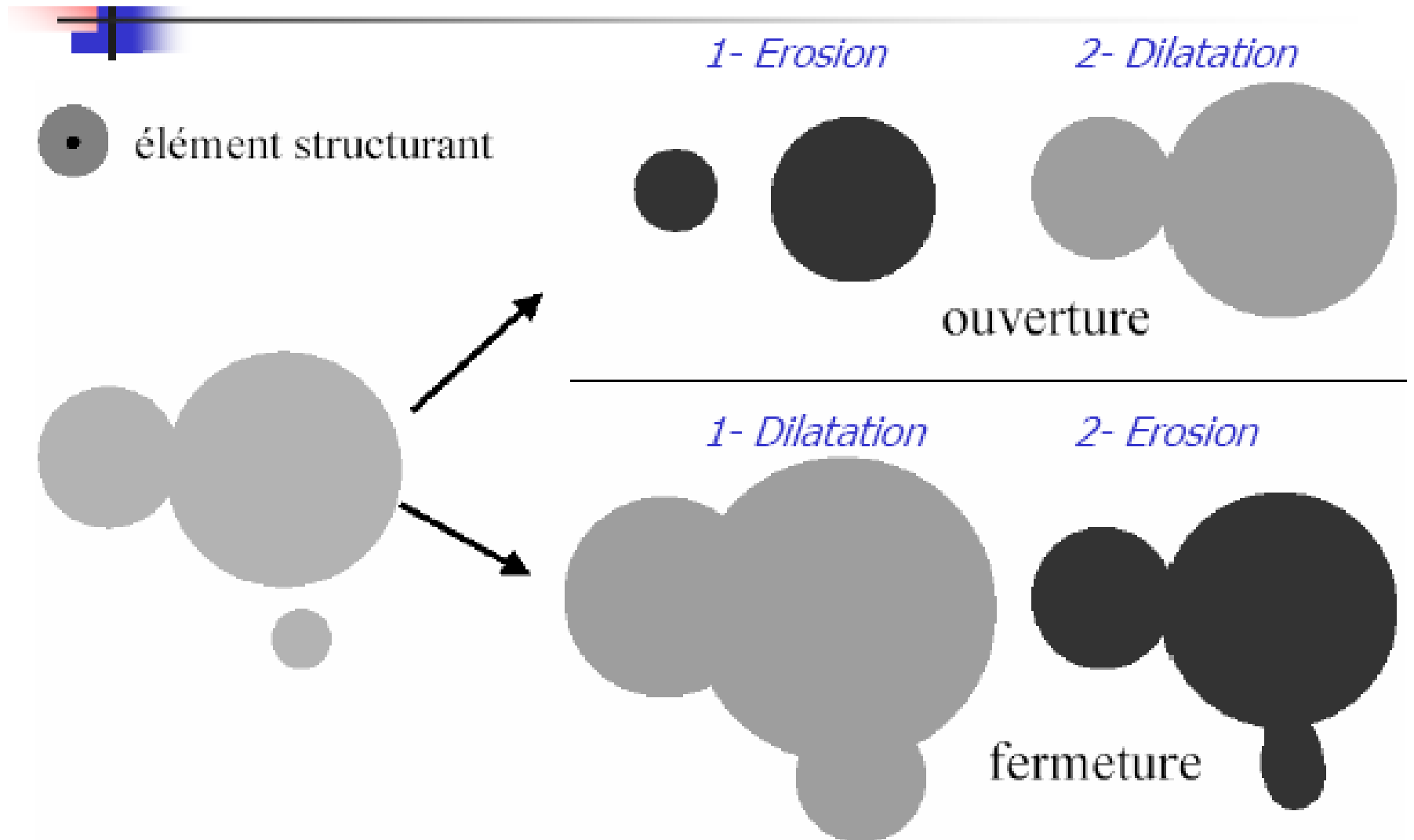
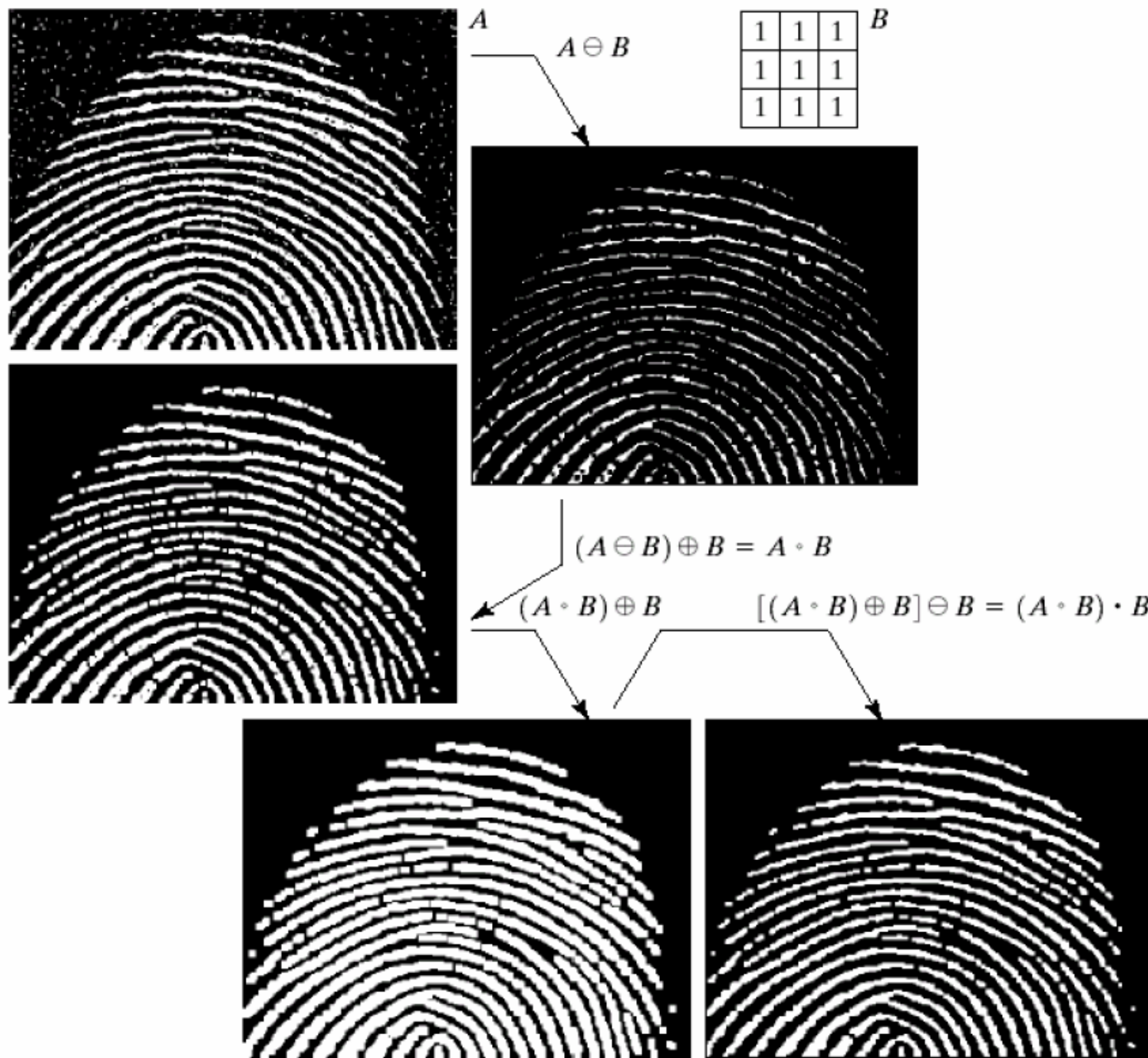


FIGURE 9.5
(a) Sample text of poor resolution with broken characters (magnified view).
(b) Structuring element.
(c) Dilation of (a) by (b). Broken segments were joined.

Ouverture/Fermeture





a b
d c
e f

FIGURE 9.11
 (a) Noisy image.
 (c) Eroded image.
 (d) Opening of A .
 (e) Dilation of the opening.
 (f) Closing of the opening. (Original image for this example courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

Élément structurant étendu

Élément standard

voisinage comportant des **1** pour les pixels **appartenant** à l'élément structurant, les autres pixels étant **indifférents**.
les pixels indifférents sont **parfois** indiqués par des **0** ou des **X**.

Élément étendu

voisinage comportant de **1** et des **0** pour les pixels **définissant** l'élément structurant, les autres pixels sont soit marqués par un **X**, soit laissés **vides**.

	1	
1	1	1
	1	

0	1	0
1	1	1
0	1	0

X	1	X
1	1	1
X	1	X

éléments standards équivalents

	1	
0	0	1
	1	

X	1	X
0	0	1
X	1	X

éléments étendus équivalents

Transformation hit-or-miss

Opération «Hit or Miss»

l'élément structurant étendu est **centré** sur chaque pixel de l'image comme pour les opérations ensemblistes.

la question posée est: est-ce que le contenu de l'image est **identique** au contenu de l'élément structurant, **sauf** pour les positions marquées comme indifférentes?

si la réponse est **oui**, le pixel résultant vaut 1, sinon il vaut 0.

Utilisation

permet de **détecter** des configurations locales **particulières** dans une image.

plusieurs masques peuvent être utilisés **indépendamment**, les images résultat étant ensuite combinées par une opération **OU**.

Exemple : détection de coins

4 masques utilisés

0	0	
0	1	1
	1	

haut gauche

	0	0
1	1	0
	1	

haut droit

	1	
0	1	1
0	0	

bas gauche

	1	
1	1	0
	0	0

bas droit

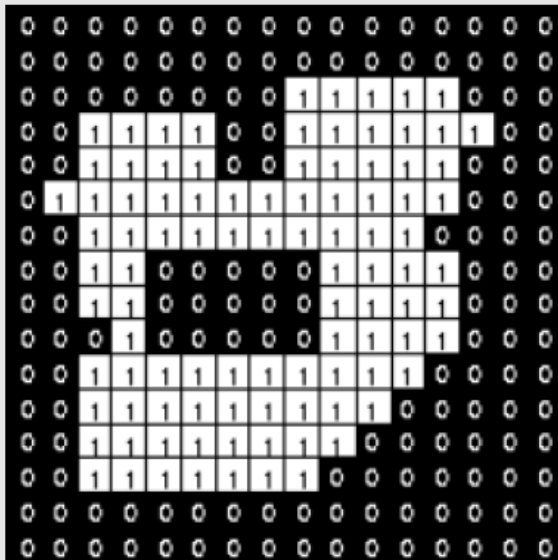
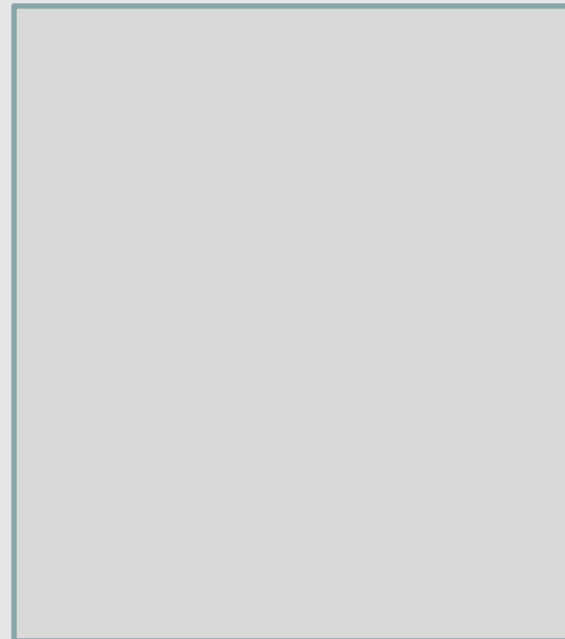


image originale



Exemple : détection de coins

4 masques utilisés

0	0	
0	1	1
	1	

haut gauche

	0	0
1	1	0
	1	

haut droit

	1	
0	1	1
0	0	

bas gauche

	1	
1	1	0
	0	0

bas droit

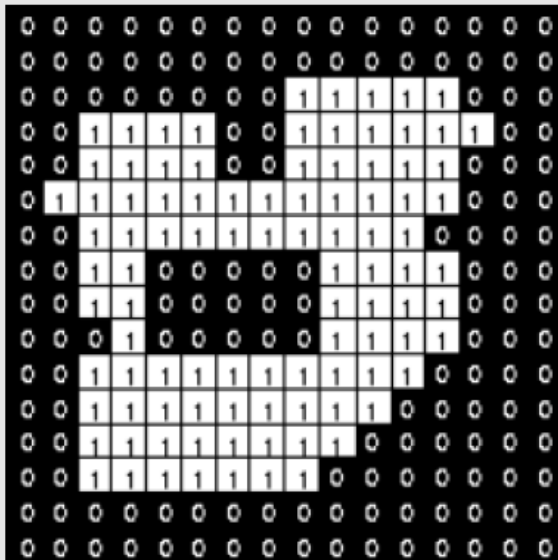
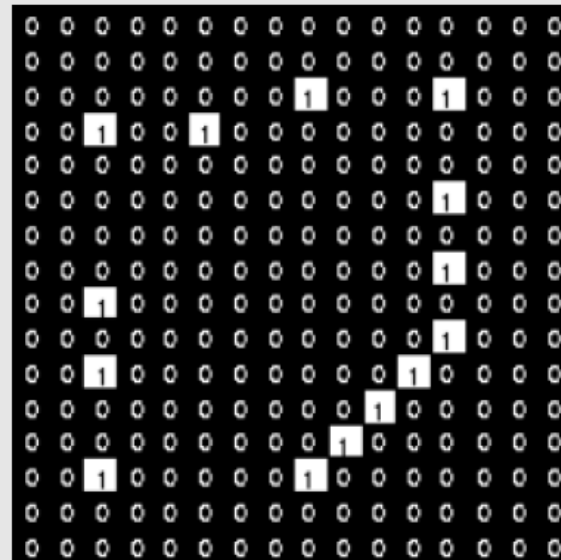


image originale



coins détectés

Transformation dérivée du hit or miss

Amincissement

consiste à **soustraire** l'image résultat d'un hit or miss de l'image initiale.

l'amincissement est une transformation **anti-extensive**.

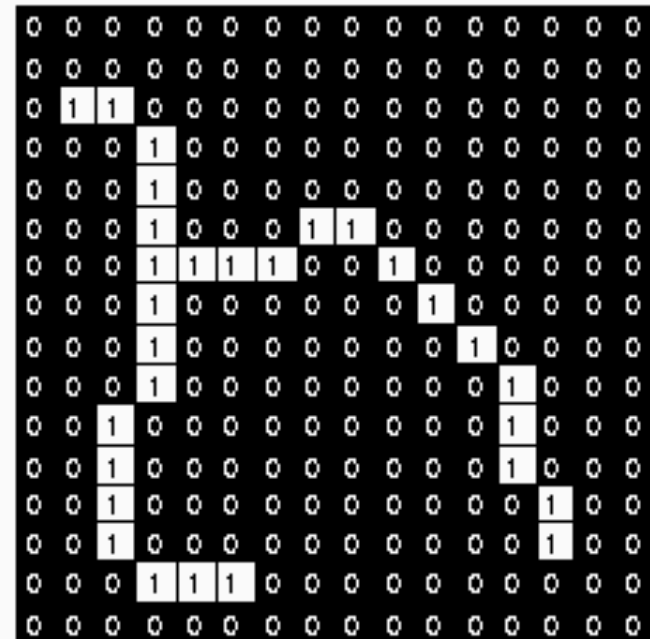
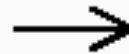
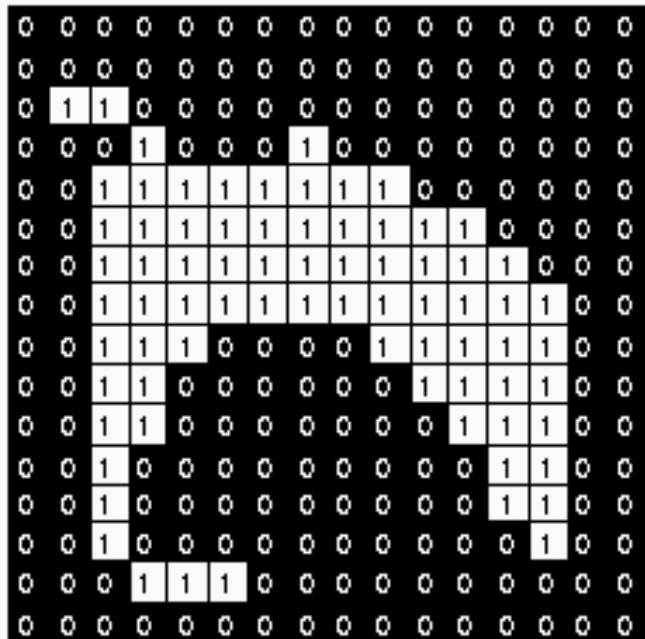
$$\text{thin}(A) = A / (A \otimes B)$$

ce qui correspond grossièrement à une érosion qui conserve les structures des formes et connexions entre formes. En effet, des érosions successives de A par B conduisent à la disparition complète de A tandis que des amincissements successifs de A par B conduisent au squelette.

Amincissement

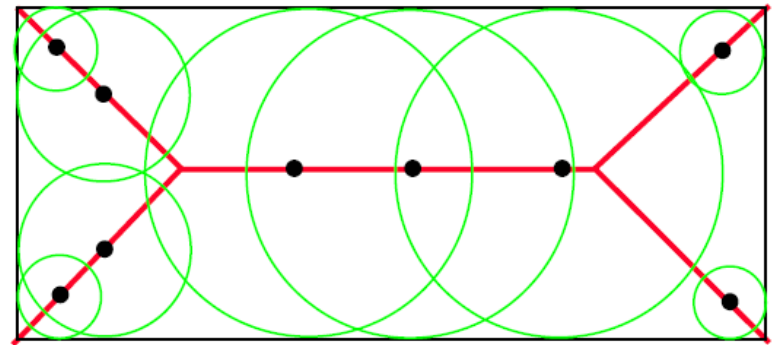
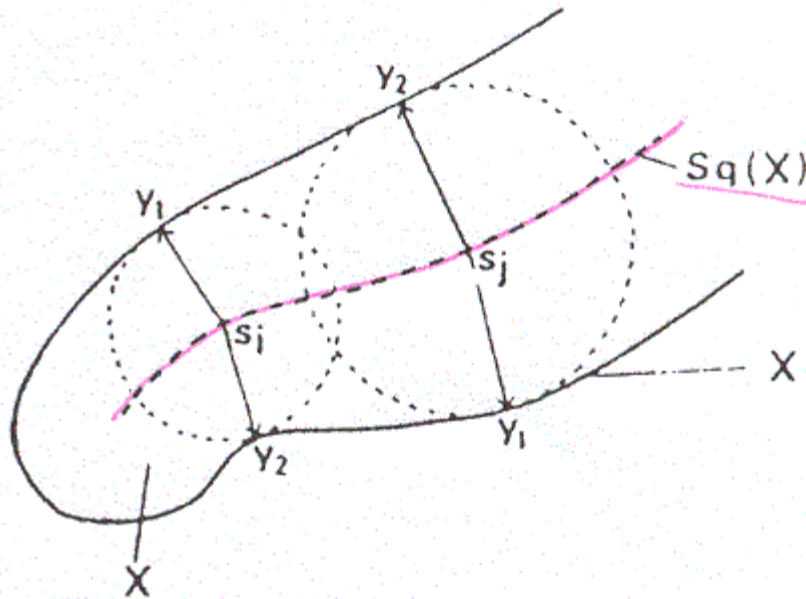
0	0	0
	1	
1	1	1

	0	0
1	1	0
	1	

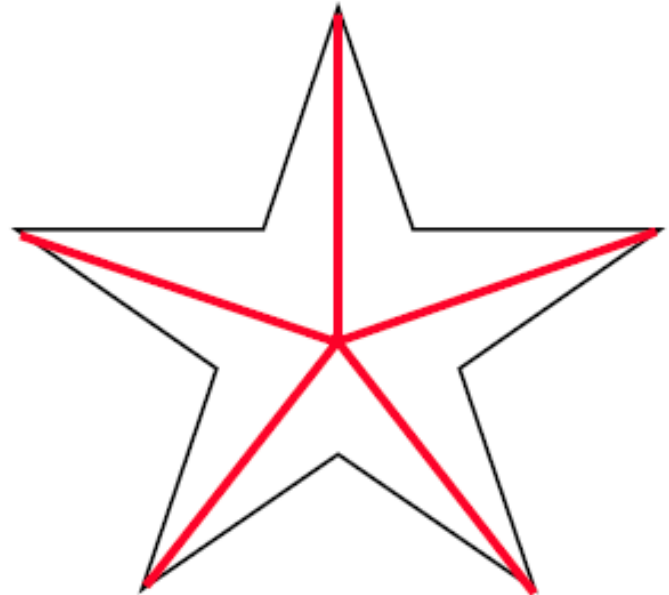
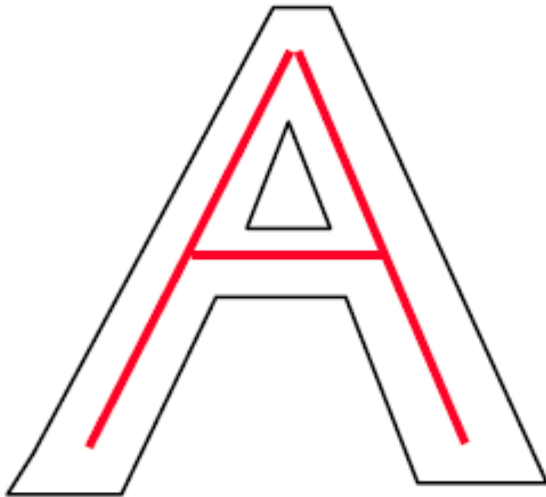
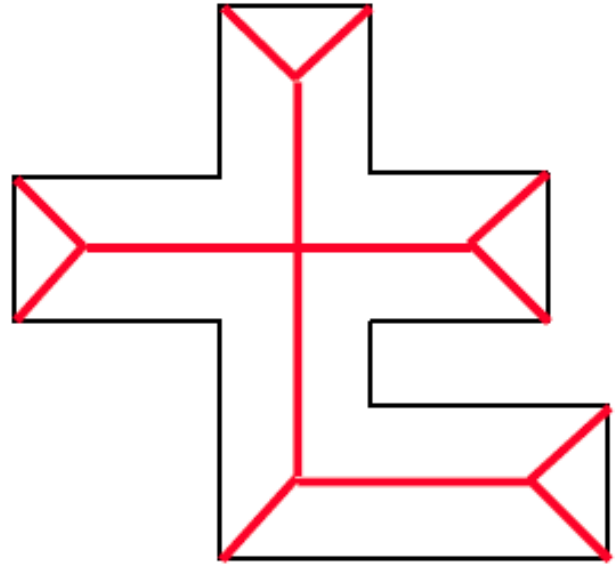
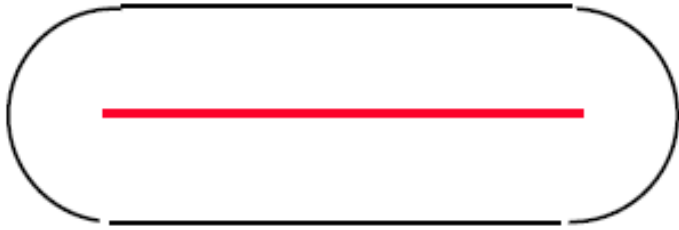


Squeletisation

- Définition formelle : réduire une forme en un ensemble de courbes, appelées **squelettes**, centrées dans la forme d'origine.



Le squelette est un descripteur de forme



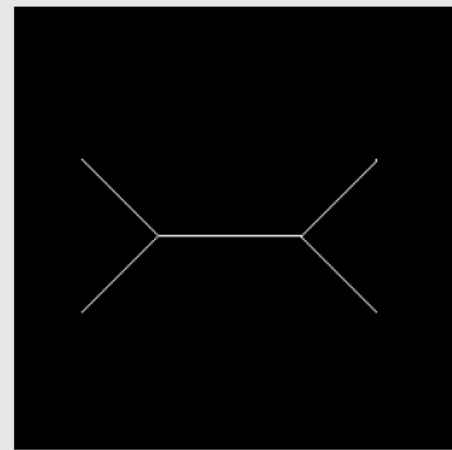
Squelettes

A partir d'une définition intuitive, plusieurs implémentations possibles

- Amincissements successifs
- Distance locale max
- Feu de paille



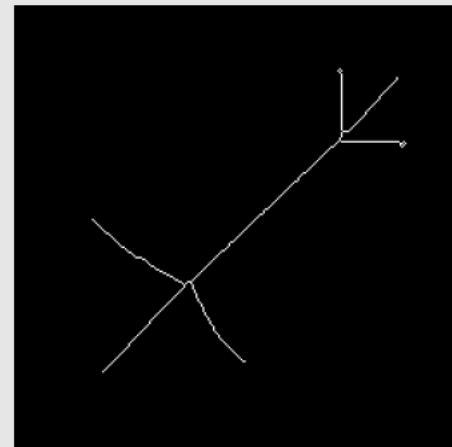
image initiale



squelette



image initiale



squelette

Squeletisation par amincissements successifs

Principe

à chaque **itération**, on enlève des points par une transformation **homotopique** adaptée.

on **arrête** le processus itératif lorsque l'image reste constante.

Points retirés

cette opération est appelée **érosion conditionnelle**.

elle ne doit, ni modifier la **connexité**, ni retirer des **extrémités** de lignes, ni retirer des **points isolés**.

0	0	0		0	0	1		0	1	1		1	1	1		1	1	1	0		1	0	0		0	0	
	1		1	1	0	1	1	0	1	1	0		1		0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1		1		0			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	1		1	1

exemple d'éléments structurants: famille Mskel

Squeletisation par amincissements successifs

Hit-and-miss algorithm can be used to thin and skeletonize a shape in a binary image. This is an iterative process containing repeated steps to thin the shape by hit-and-miss method. In each iteration, some different structuring elements are used to identify the edge pixels to be removed, followed by the actual removal of them:

$$I'_k = O_i(I_k), \quad I_{k+1} = I_k - I'_k, \quad k = k + 1$$

where I_k is the image after k iterations, $O_i(I_k)$ is the application of a structuring element O_i to I_k , and $I_k - I'_k$ is a set subtraction $A - B = A \cap \bar{B}$. After each such iteration, the elements are rotated to identify and remove other edge pixels in different orientations. The process continues until no further edge pixels can be identified, and the shape has been thinned to a skeleton.

Squeletisation par amincissements successifs

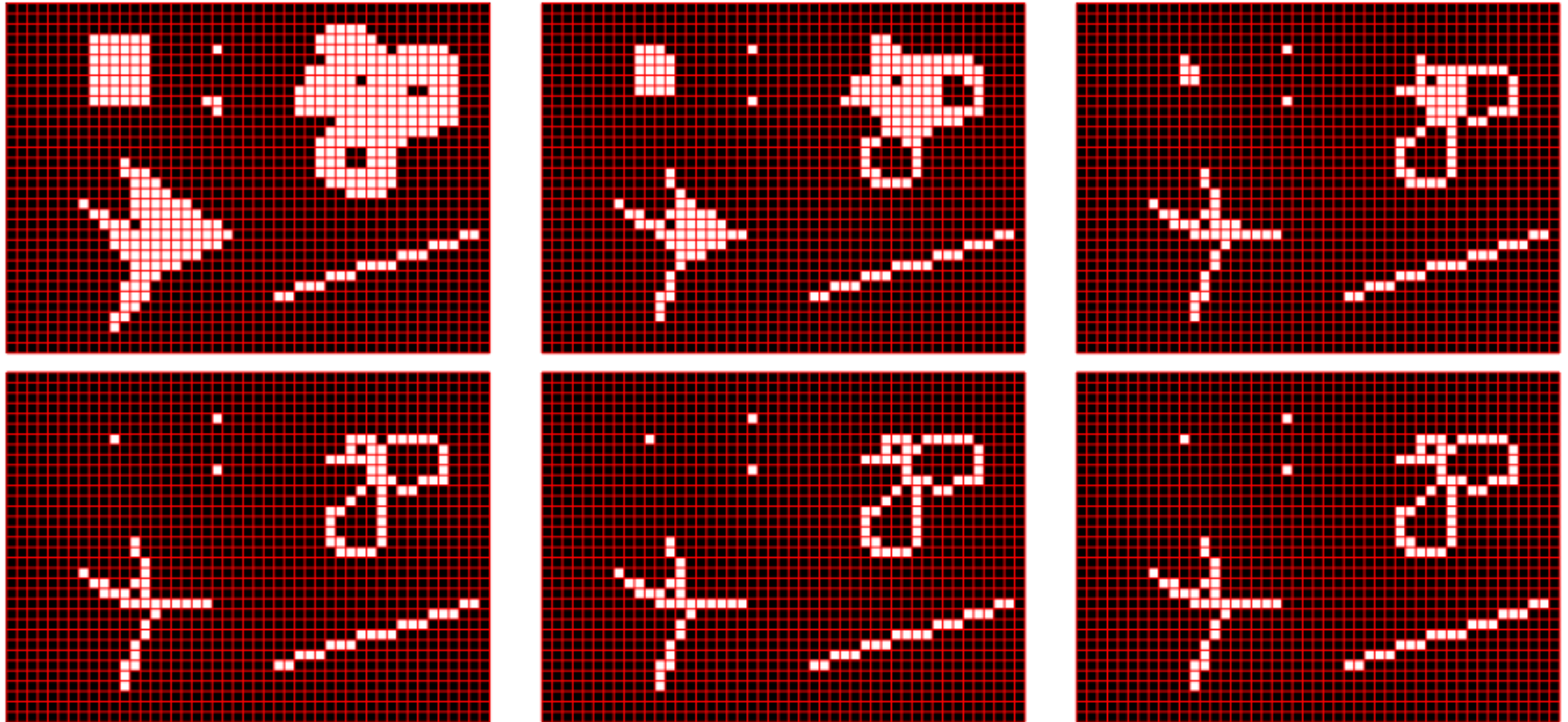


FIG. 7.9 – Amincissements successifs pour l'obtention d'un squelette (de haut en bas puis de gauche à droite).

Autres méthodes de squeletisation

- **Carte de distance** : chaque pixel est remplacé par sa distance au contour.
- Pour tout pt $\mathbf{x} \in [1, N] \times [1, M]$
- $D(\mathbf{x}) = \min_{c_i \in C} d(\mathbf{x}, c_i)$

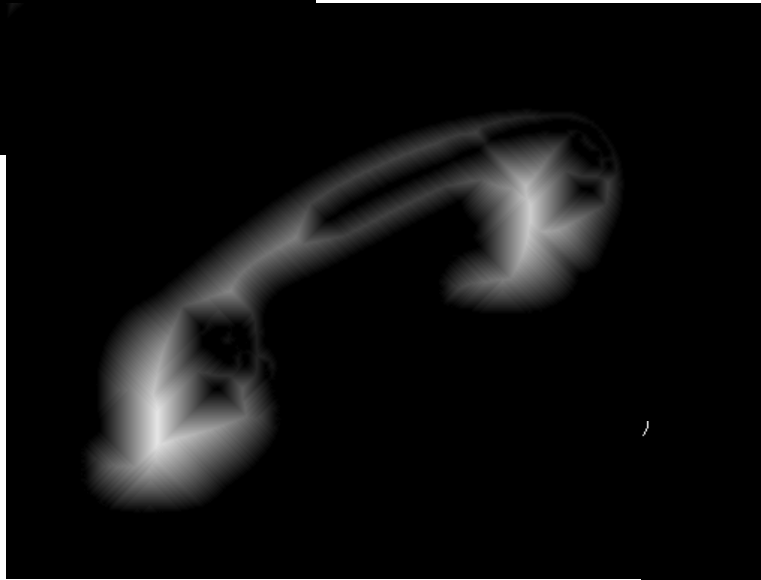
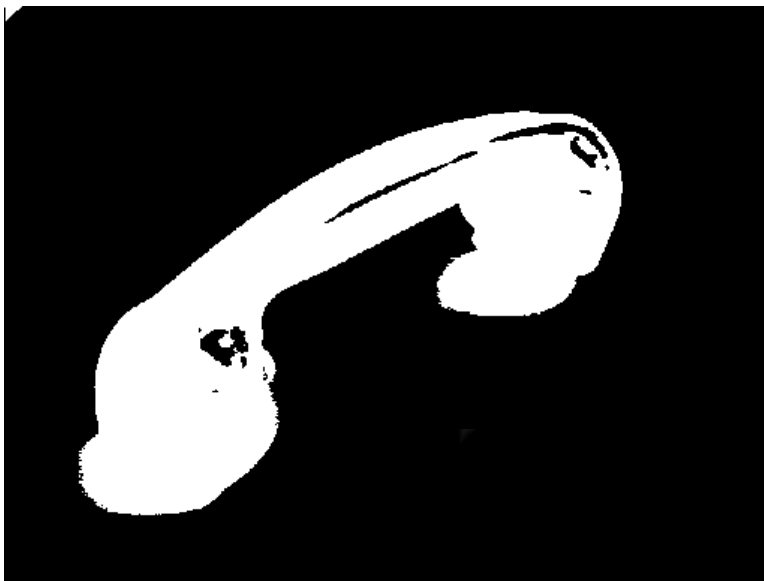
- Ex : matrice 7x7
- Faire sa carte de distance euclidienne

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

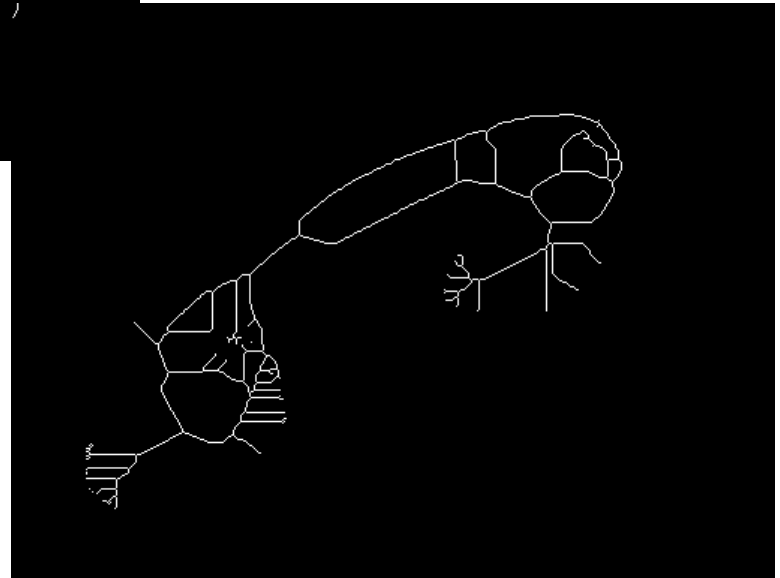
Autres méthodes de squeletisation

- Carte de distance
- Les **maxima locaux** de la carte de distance correspondent au squelette.



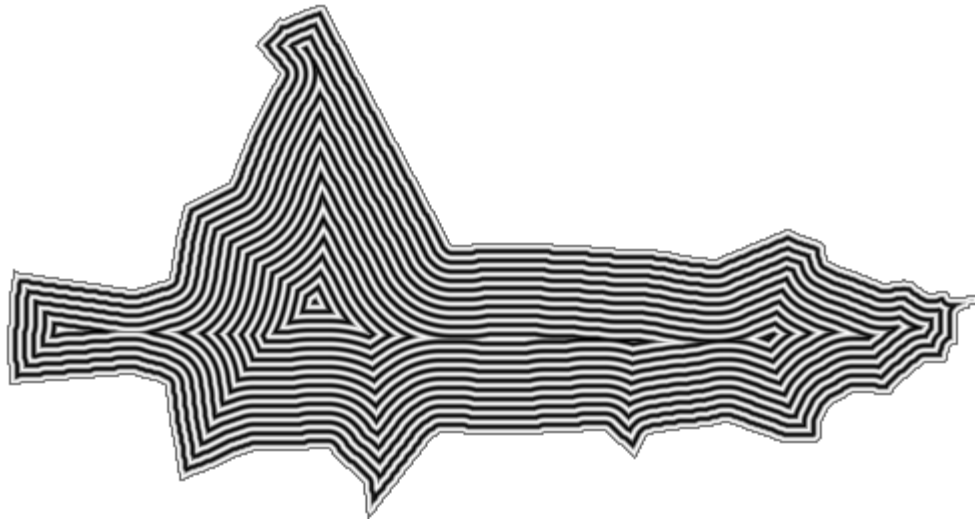


<http://www.nicoptere.net/blog/index.php/2008/08/12/47-squelettiser-une-image-en-as3-morpho-mathematiques-flash-actionscript>

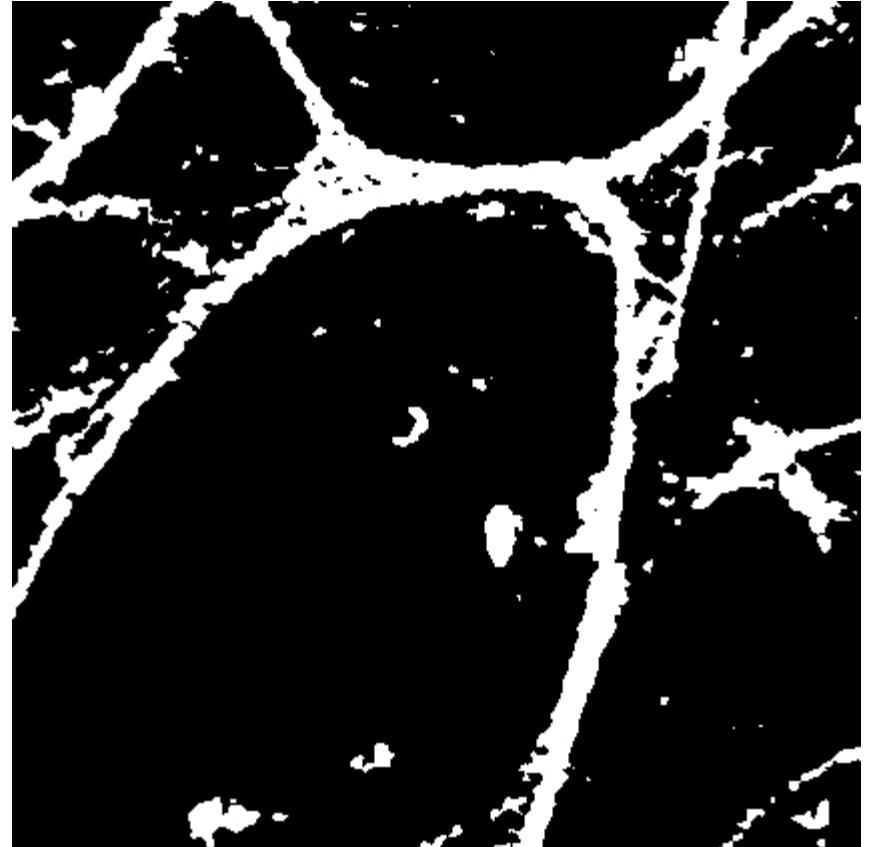
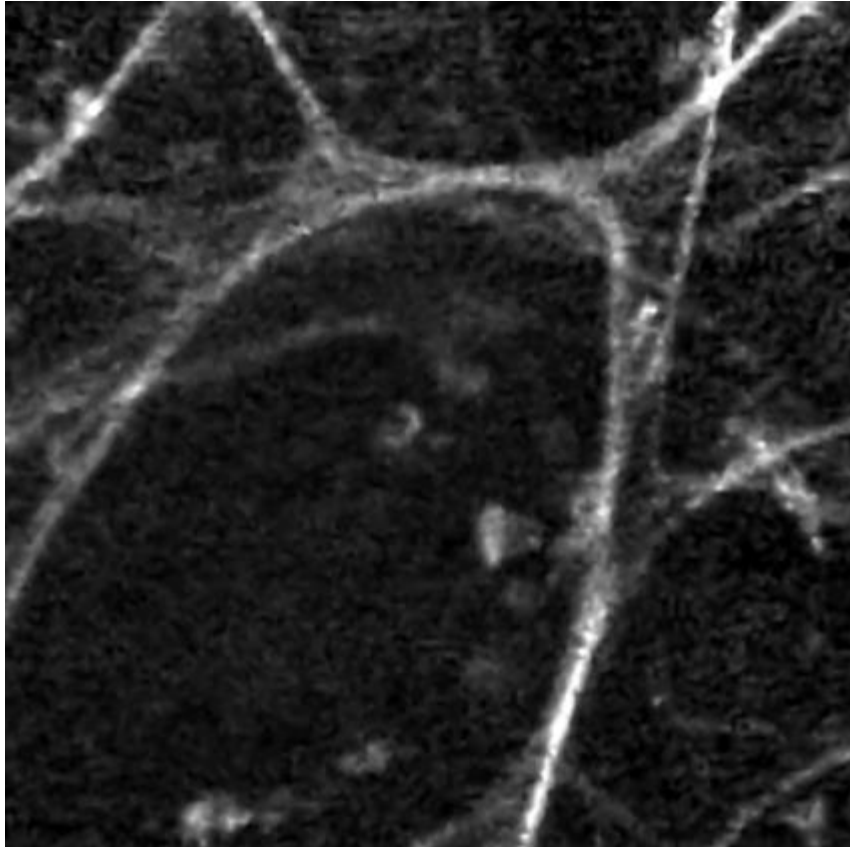


Autres méthodes de squelettisation

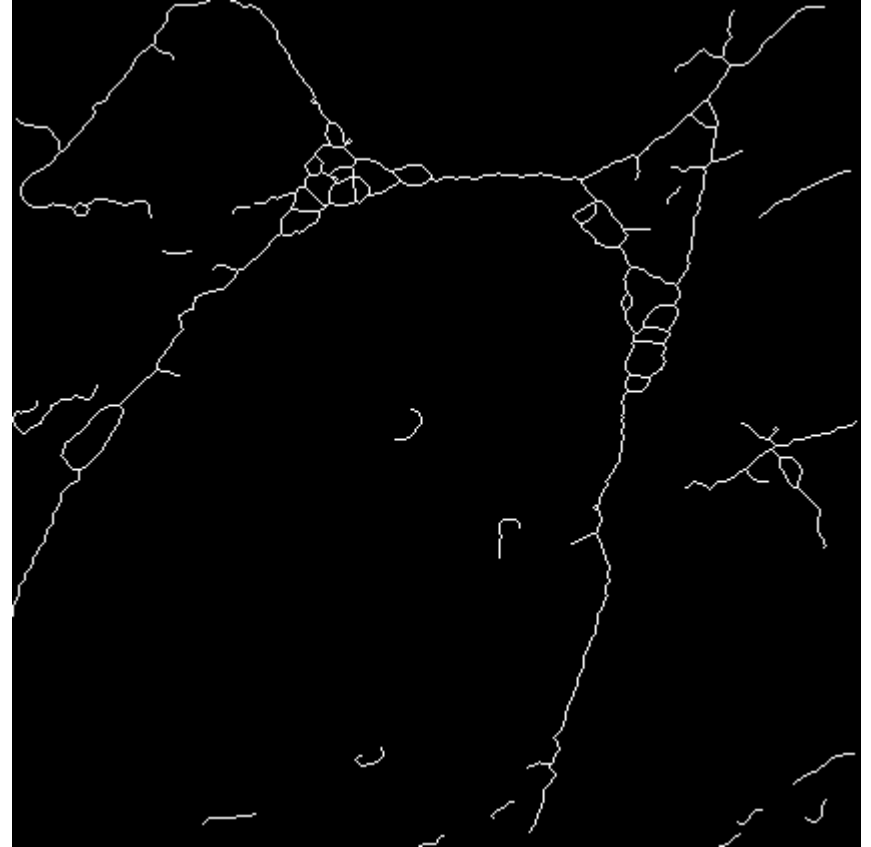
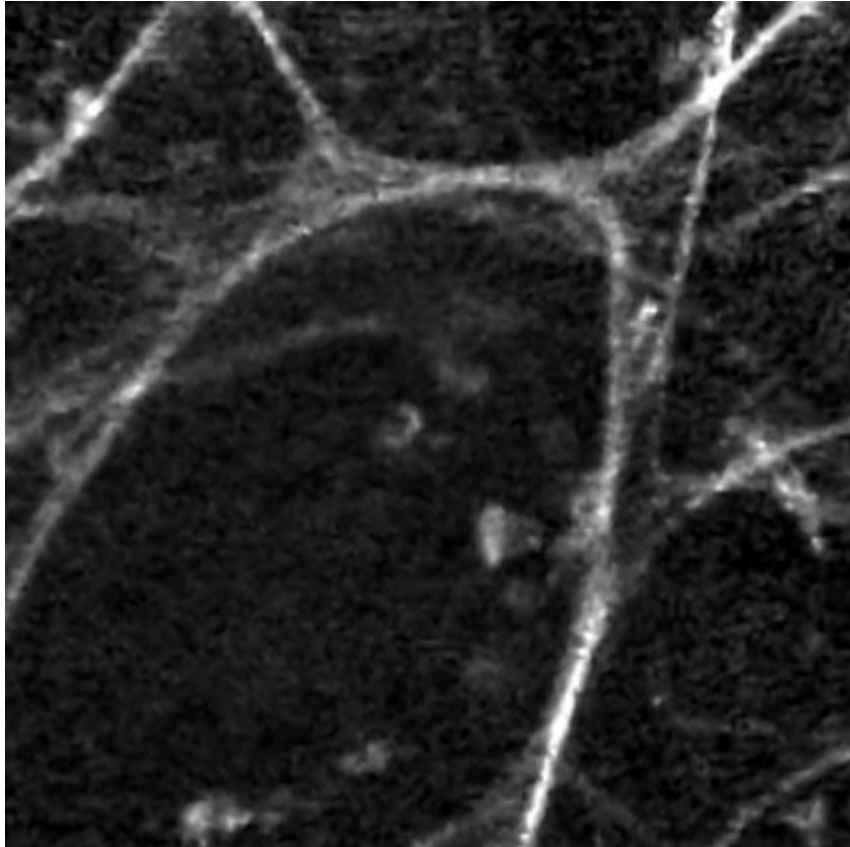
- **Feu de prairie** : la forme est une prairie dont on enflamme les bords.
- Les points de rencontre des différents fronts enflammés constituent le squelette.



Application

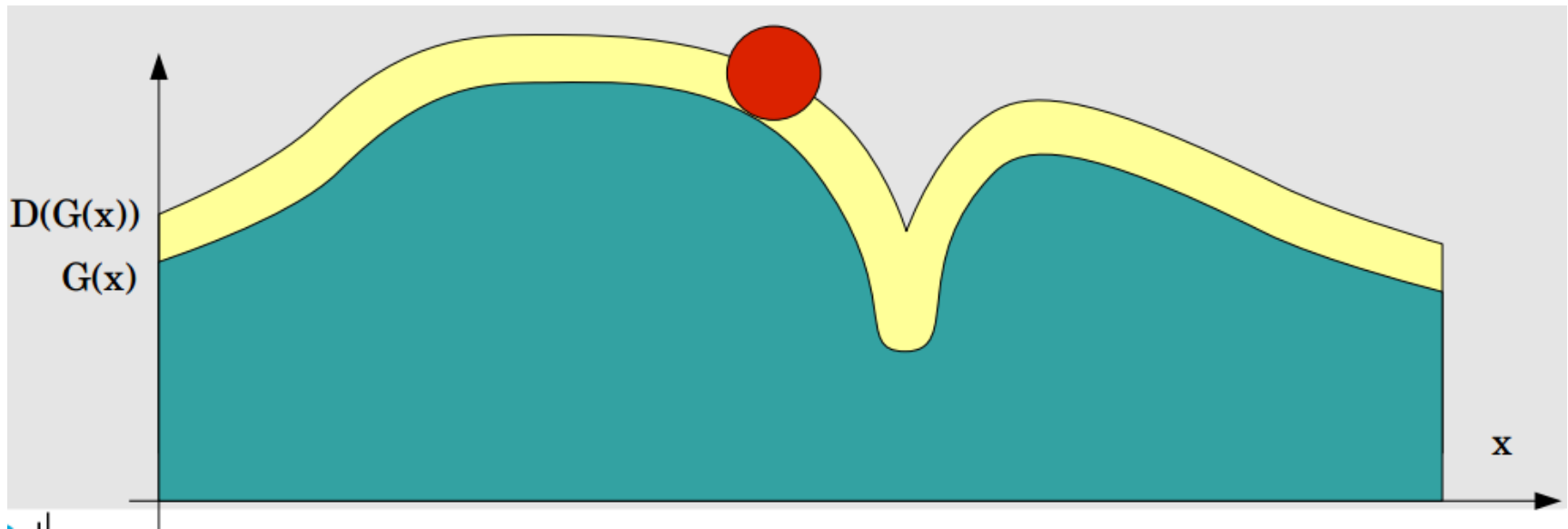


Squeletisation



MorphoMaths en NdG

- Définition dans un voisinage
- Ex : dilatation



Dilatation en NdG

- Dilatation avec un élément structurant plat, circulaire.



Original



$\delta_{2B}(I)$



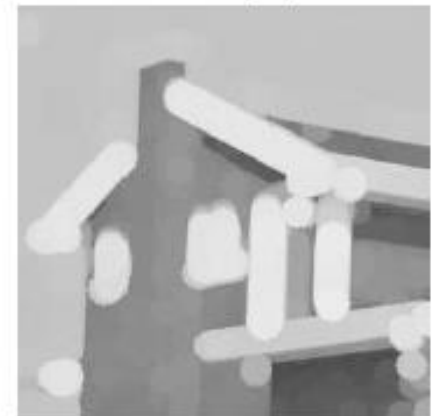
$\delta_{3B}(I)$



$\delta_{5B}(I)$



$\delta_{7B}(I)$



$\delta_{9B}(I)$



Erosion en NdG

Erosion avec un élément structurant plat de support circulaire.



Original



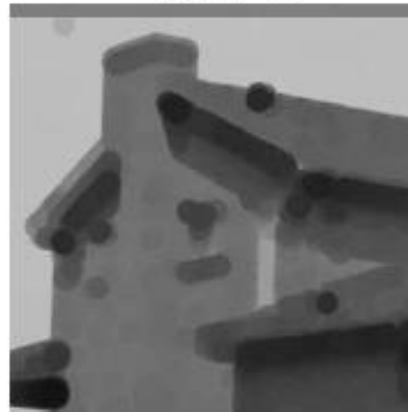
$\mathcal{E}_{2B}(I)$



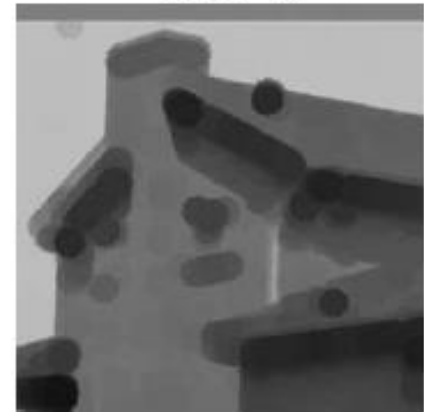
$\mathcal{E}_{3B}(I)$



$\mathcal{E}_{5B}(I)$



$\mathcal{E}_{7B}(I)$



$\mathcal{E}_{9B}(I)$

Erosion/dilatation NdG



I



$\delta_B(I)$



$\mathcal{E}_B(I)$

- Utilisation de la dilatée et érodée de I pour avoir l'image des contours ?

Gradient morphologique



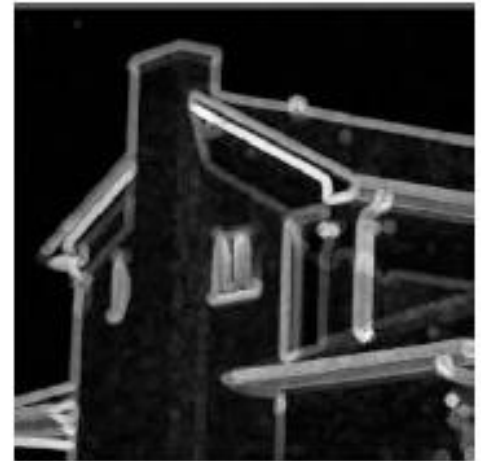
I



$\delta_B(I)$



$\mathcal{E}_B(I)$



$\nabla_{\bar{B}}(I)$

- $\text{Gradient}(I) = D(I) - E(I)$

Ouverture/fermeture NdG



Original

Ouverture

Fermeture



Résumé des transfo NdG



image initiale



érosion



dilatation



ouverture



fermeture

Sources

- Cours Traitement d'images, **Christophe Cudel**, Bruno Colicchio, Alain Dieterlen, Univ. Haute-Alsace
- Cours Traitement d'images, Alain Boucher, IFI
- Cours Traitement d'images, Diane Lingrand, I3S, ESSI, Nice
- Master AG2I – Option SID – Traitement d'Images – F. Cabestaing