M2 STIM
Optimisation
Examen de première session
Jeudi 8 janvier 2015

Durée : 2h
Documents de cours autorisés

Exercice 1 – Moindres carrés

On désire estimer la valeur des paramètres d'un système par analyse de sa réponse impulsionnelle en utilisant la méthode des moindres carrés simples puis récursifs. On suppose que la fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p+a}$$

Comme vous le savez sûrement, la forme théorique correspondante de réponse impulsionnelle est $h(t) = e^{-at}$

On a relevé les mesures suivantes de sortie en réponse à une impulsion.

t	1	2	3	4	5
$y(t)$	0.7	0.43	0.32	0.19	0.15

1. Le modèle temporel du système est il linéaire par rapport aux paramètres ? Si il ne l'est pas, proposer une méthode qui le rend linéaire.
2. Déterminer par moindre carrés la valeur optimale $\hat{a}$ et la valeur des critères correspondant (vrai critère quadratique $J(\hat{a})$, et critère modifié $J'(\hat{a})$) quadratique.
3. Donner les équations de calculs de moindre carrés récursifs. Calculer la valeur de $\hat{a}_5$ en utilisant ces moindres carrés récursifs, avec une initialisation du paramètre à 0 et de P_0 à $100I$. Donner la valeur correspondant de $J(\hat{a})$

Exercice 2 – Paramètres lentement variables

Dans le cas de paramètres lentement variables, nous avons vu que l'on pouvait intégrer dans le critère des moindres carrés un facteur d'oubli γ, tel que $J_{MC}(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma^i \left(y_{S\,N-i} - y_{m\,N-i}\right)^2$ avec $\gamma < 1$. Cette modification a évidemment un impact sur les formules de récurrences dans le cadre des moindres carrés récursifs. On vous demande dans cet exercice de démontrer, en développant, les formules suivantes :

$$\theta_n = \theta_{n-1} + k_n(Y_{Sn} - {x_n}^T \theta_{n-1})$$

$$k_n = P_{n-1} x_n \left(\gamma + {x_n}^T P_{n-1} x_n\right)^{-1}$$

$$P_n = (P_{n-1} - k_n * {x_n}^T P_{n-1})/\gamma$$

Exercice 3 – Perceptron

Soit R un réseau de type perceptron multi-couches à 2 entrées, une couche cachée avec deux neurones et trois sorties. On pose $X = (x, y, 1)'$, $W_k = (w_{kx}, w_{ky}, w_{k0})$. La sortie du réseau est calculée de la façon suivante :

$$s_k = \frac{e^{c_k}}{\sum_{j=1}^{3} e^{c_j}}$$

avec :
— $c_k = a_{1k}o_1 + a_{2k}o_2 + a_{0k}$
— $o_k = \sigma\left(W_k X\right)$
— $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
Pour un vecteur de sortie calculé s, lorsque le vecteur de sortie désiré est d, la fonction de coût est la suivante :

$$J = \sum_{k=1}^{3} \left(d_k - s_k\right)^2$$

1. Exprimer la dérivée de J par rapport à c_k
2. Calculer la dérivée de c_i par rapport aux a_{ij} et aux W_{ij}.
3. En déduire la valeur du gradient de J par rapport aux paramètres du réseau.
4. Donner l'algorithme de rétro-propagation permettant d'ajuster les paramètres du réseau.

Exercice 4 – Sélection de caractéristiques

On se propose, dans cet exercice, d'aborder le problème de la sélection de caractéristiques. Il s'agit, parmi un pool de N caractéristiques, d'en sélectionner un sous-ensemble qui optimise les performances en reconnaissance d'un classifieur de type KPPV. On vous demande d'imaginer une solution pour traiter ce problème à l'aide d'un algorithme génétique.

1. Proposer une solution pour le codage d'un individu de l'algorithme génétique
2. Décrire des opérateurs génétiques adaptés au codage choisi
3. Proposer le critère à utiliser. Vous décrirez en particulier comment évaluer ce critère avec une structuration des bases de données qui évite le phénomène de sur-apprentissage
4. On essaie maintenant d'optimiser également le nombre de caractéristiques utilisées. On utilise l'algorithme NSGA-II pour optimiser les deux critères. On travaille avec une population initiale de taille 6 individus. Après génération de la population Q_0, on obtient les valeurs suivantes pour chaque critère (ici les valeurs sont fictives). Quels seront les 6 individus sélectionnés pour former la génération suivante ?

Individu	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Nombre de caractéristiques	60	80	95	45	25	63	65	20	5	60	57	15
Taux de reconnaissance	0.9	0.95	0.92	0.7	0.5	0.55	0.4	0.65	0.1	0.5	0.45	0.8