EXERCICES

PERCEPTRON MULTICOUCHE

1. ***Fonctions de sortie de neurones***
La fonction de sortie sigmoïdale est en quelque sorte la pierre angulaire de l'algorithme de rétropropagation du gradient d'erreur. Cette fonction est à la fois suffisamment discriminante pour pouvoir afficher les classes de sortie et à la fois différentiable en tout point afin de pouvoir calculer une valeur de gradient. De plus, sa forme de type exponentielle permet de calculer facilement sa dérivée car l'exponentielle est la seule fonction dont la dérivée est également une exponentielle.
Évaluez la dérivée des fonctions de sortie suivantes :

1.1 ***sigmoïde unipolaire*** : $y = f(a) = \dfrac{1}{1 + e^{-a}}$

1.2 ***sigmoïde unipolaire à pente ajustable*** : $y = f(a) = \dfrac{1}{1 + e^{-\sigma a}}$

1.3 ***sigmoïde bipolaire*** : $y = f(a) = \tanh\left(\dfrac{a}{2}\right)$

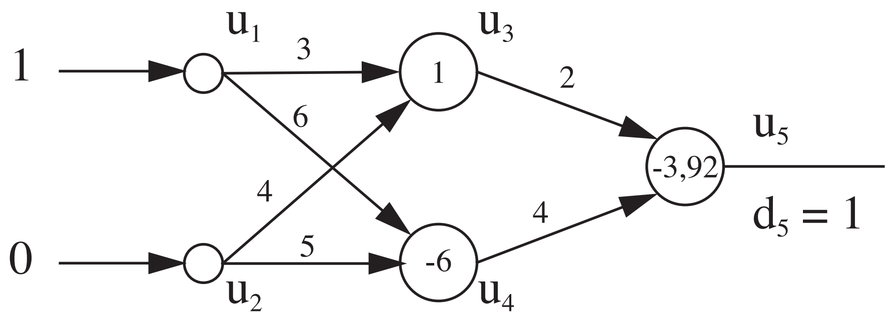
1.4 ***sigmoïde bipolaire à pente ajustable*** : $y = f(a) = \tanh\left(\dfrac{\sigma a}{2}\right)$

Pour résoudre des problèmes autres que de classification, par exemple pour l'approximation de fonction, une fonction de sortie linéaire sera préférée pour la couche de sortie. La fonction de sortie doit aussi être dérivable pour pouvoir évaluer le gradient.
Évaluez la dérivée de la fonction de sortie linéaire :

1.5 ***linéaire*** : $y = f(a) = \sigma a$

2. ***Perceptron à une couche cachée et deux entrées***

Soit le perceptron multicouche suivant :



La valeur des poids est indiquée directement au dessus de la connexion. La valeur de *polarisation* de chacque neurone est indiquée dans le cercle symbolisant le neurone.

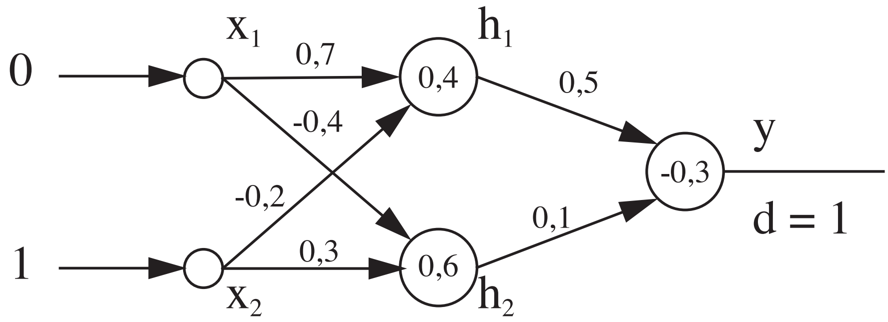
Les paramètres du réseau sont les suivants :

$$\eta = 0,1 \qquad f(net_i) = u_i = \frac{1}{1+e^{-net_i}}$$

Complétez le tableau ci-dessous pour une passe complète à travers le réseau, i.e. de la propagation directe du vecteur d'entrée $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ jusqu'au changement de poids des connexions.

i	**net**$_i$	**u**$_i$	$\boldsymbol{\delta}_i$	**j**	**u**$_j$	**w**$_{ij}$(t)	$\boldsymbol{\Delta}$**w**$_{ij}$	**w**$_{ij}$(t+1)
1	1	1						
2	0	0						
3								
4								
5								
5				3		2		
				4		4		
				0		-3,92		
4				2		5		
				1		6		
				0		-6		
3				2		4		
				1		3		
				0		1		

3. ***Perceptron 2-2-1***
   Soit le perceptron multicouche suivant :

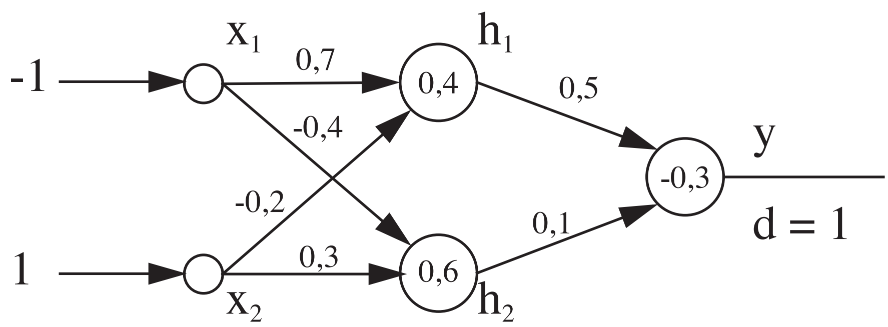


La valeur des poids est indiquée directement au dessus de la connexion. La valeur de *polarisation* de chacque neurone est indiquée dans le cercle symbolisant le neurone.
Les paramètres du réseau sont les suivants :

$$\eta = 0,25 \qquad f(net_i) = \frac{1}{1 + e^{-net_i}}$$

Calculez les nouvelles valeurs de poids et de polarisation après une passe complète de propagation directe - rétropropagation du gradient.

4. ***Perceptron bipolaire 2-2-1***
   Soit le même perceptron multicouche qu'au problème précédent, avec les différences que les entrées sont bipolaires et les fonctions de sortie également bipolaires.

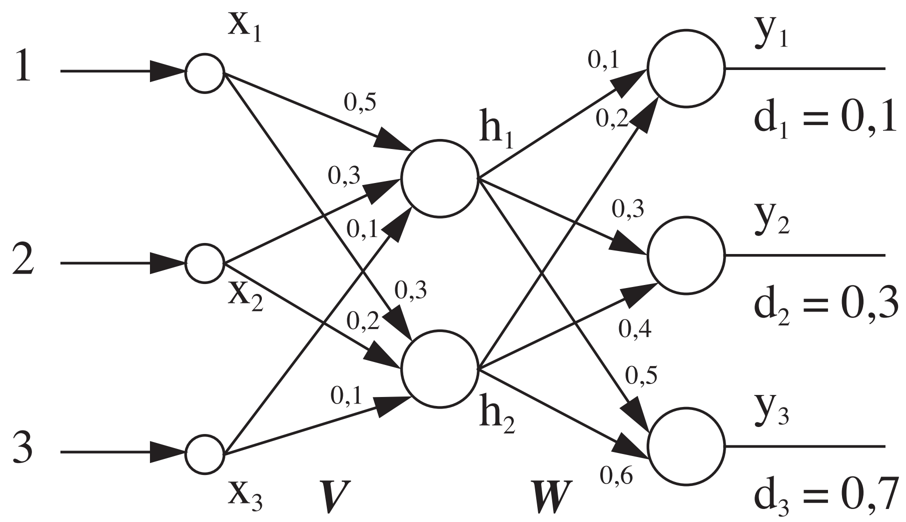


Les paramètres du réseau deviennent :

$$\eta = 0,25 \qquad f(net_i) = \tanh\left(\frac{net_i}{2}\right)$$

Calculez les nouvelles valeurs de poids et de polarisation après une passe complète de propagation directe - rétropropagation du gradient.

5. ***Perceptron 3-2-3***
Soit le perceptron multicouche suivant :



Dans l'unique but de simplifier les calculs, les neurones ne sont pas munis de l'habituel paramètre de polarisation. Les poids de connexion affichés directement sur la connexion sont résumés dans les deux matrices de connexion :

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Les paramètres du réseau sont :

$$\eta = 1 \qquad f(net) = \frac{1}{1 + e^{-net}}$$

Calculez les nouvelles valeurs de poids des matrices de connexion V et W après une passe complète de propagation directe - rétropropagation du gradient.

Réponse :

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0,4946 & 0,2892 & 0,0837 \\ 0,2896 & 0,1791 & 0,0687 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0,0096 & 0,1177 \\ 0,2383 & 0,3437 \\ 0,5003 & 0,6002 \end{bmatrix}$$