Identification de paramètres et optimisation
Cours de Master 2 STIM
2014-2015

Sébastien Adam

10 décembre 2015

Plan du Cours

Plan du Cours

Plan du Cours

Moindres carrés

Inversion

L'estimée θ_{MC} est donc la valeur de θ solution de l'équation :

$$X^T Y_S = X^T X \theta_{MC}$$

Deux cas de figure :

- $X^T X$ est inversible. On a alors $\theta_{MC} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y_S$
- $X^T X$ n'est pas inversible. θ_{MC} n'est pas unique.

Cas pratiques de non inversibilité :

- Moins d'observations N que de paramètres K : rang$(X^T X) \leq N < K$ (rang(AB)$\leq$ rang(A) $\leq$ min(dim(A))).
- Dépendance linéaire entre les colonnes de X : on ne peut pas résoudre le système

Dans le cas pondéré, on aura : $\theta_{MC} = \left(X^T W X\right)^{-1} X^T W Y_S$

Moindres carrés

Propriétés de l'estimateur

- Modèle : $Y_M = X\theta$
- Minimum du critère $J_{MC}(\theta)$ atteint pour $\theta_{MC} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y_S$
- On a alors $(Y_M)_{MC} = X\left(X^T X\right)^{-1} X^T Y_S = QY_S$
- L'erreur d'estimation vaut : $Y_S - Y_{M\,MC} = (1 - Q)Y_S$
- Démontrons quelques propriétés de Q :
  - Q est symétrique
  - $Q^2 = Q$
  - $\left(Y_S - QY_S\right)^T QY_S = 0$: $Y_S - (Y_M)_{MC}$ est orthogonal à $(Y_M)_{MC}$
- Retour sur l'interprétation géométrique

Moindres carrés

Interprétation stochastique

- On suppose :
  - $Y_S = Y_M(\theta_S) + b = X\theta_S + b$ où θ_S représente la vraie valeur (inconnue) des paramètres du système.
  - b est un bruit blanc (Gaussien, de moyenne nulle et de variance σ^2) indépendant des x_i
- On appelle erreur d'estimation le vecteur $e_\theta = \theta_{MC} - \theta_S$
- On a $e_\theta = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \left(Y_S - X\theta_S\right) = \left(X^T X\right)^{-1} X^T b$
- Donc : $E[e_\theta] = \left(X^T X\right)^{-1} X^T E[b] = 0$
- Et $\mathrm{var}(e_\theta) = E[e_\theta e_\theta^T] = \left(X^T X\right)^{-1} X^T E[bb^T] X \left(X^T X\right)^{-1} = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}$

Moindres carrés

Bilan moindre carrés

- Modèle linéaire par rapport aux paramètres : $Y_M(\theta) = X\theta$
- Critère erreur quadratique : $J_{MC}(\theta) = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_{S\,i} - y_{m\,i}\right)^2$
- Si $X^T X$ est inversible : $\theta_{MC} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y_S$
- Remarque : en pratique $\left(X^T X\right)$ sera calculé par des méthodes QR
- Estimateur non biaisé le moins dispersé (Gauss-Markov) si la contrainte de linéarité est respectée.
- Modèle généralisable :
  - Si les θ apparaissent dans des expressions telles que $\cos(\theta_1)$, θ_1^2 ... : on change de paramètres.
  - Pour certains cas où Y_M n'est pas linéaire par rapport aux paramètres. Exemple : $Y_M = \theta_1^{\alpha_1}\theta_2^{\alpha_2} \rightarrow ln(Y_M) = \alpha_1 ln(\theta_1) + \alpha_2 ln(\theta_2)$: on change de paramètres et de critère.
- Comment mettre à jour une estimation ?

Plan du Cours

Moindres carrés récursifs (1)

Principes

- Objectif : calculer l'estimée $\theta_{MC,n}$ obtenue avec n observations à partir $\theta_{MC,n-1}$ obtenue avec $n-1$ observations
- On connait $\theta_{MC,n-1}$, x_n et $y_{s\,n}$. Que vaut $\theta_{MC,n}$?

Méthodologie

- On a par définition $\theta_{MC,n} = \left(X_n^T X_n\right)^{-1} X_n^T Y_{S\,n}$
- On pose :
  - $P_n = \left(X_n^T X_n\right)^{-1}$
  - $Q_n = X_n^T Y_{S\,n}$
  - D'où $\theta_{MC,n} = P_n Q_n$
- Objectif pour mettre à jour une estimation : exprimer P_n et Q_n en fonction de P_{n-1}, Q_{n-1}, x_n et $y_{s\,n}$

Moindres carrés récursifs (2)

Vision par bloc des matrices

$$X_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \qquad X_n^T = (\ldots X_{n-1} \ldots, x_n) \qquad Y_{S\,n} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{S\,n} \end{pmatrix}$$

Conséquences

- $Q_n = X_n^T Y_{S\,n} =$

Moindres carrés récursifs (2)

Vision par bloc des matrices

$$X_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \qquad X_n^T = (\ldots X_{n-1} \ldots, x_n) \qquad Y_{S\,n} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{S\,n} \end{pmatrix}$$

Conséquences

- $Q_n = X_n^T Y_{S\,n} = X_{n-1}^T Y_{S\,n-1} + x_n y_{S\,n} = Q_{n-1} + x_n y_{S\,n}$

Moindres carrés récursifs (2)

Vision par bloc des matrices

$$X_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \qquad X_n^T = (\ldots X_{n-1} \ldots, x_n) \qquad Y_{S\,n} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{S\,n} \end{pmatrix}$$

Conséquences

- $Q_n = X_n^T Y_{S\,n} = X_{n-1}^T Y_{S\,n-1} + x_n y_{S\,n} = Q_{n-1} + x_n y_{S\,n}$
- ${P_n}^{-1} =$

Moindres carrés récursifs (2)

Vision par bloc des matrices

$$X_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \qquad X_n^T = (\ldots X_{n-1} \ldots, x_n) \qquad Y_{S\,n} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{S\,n} \end{pmatrix}$$

Conséquences

- $Q_n = X_n^T Y_{S\,n} = X_{n-1}^T Y_{S\,n-1} + x_n y_{S\,n} = Q_{n-1} + x_n y_{S\,n}$
- ${P_n}^{-1} = X_n^T X_n = X_{n-1}^T X_{n-1} + x_n {x_n}^T = {P_{n-1}}^{-1} + x_n {x_n}^T \rightarrow P_n ?$

Problème

- Comment calculer P_n avec : ${P_n}^{-1} = {P_{n-1}}^{-1} + x_n {x_n}^T$

Moindres carrés récursifs (3)

Problème : inversion difficile

- $P_n = \left(P_n{}^{-1}\right)^{-1}$ avec : $P_n{}^{-1} = P_{n-1}{}^{-1} + x_n x_n{}^T$

Moindres carrés récursifs (3)

Problème : inversion difficile

- $P_n = \left(P_n{}^{-1}\right)^{-1}$ avec : $P_n{}^{-1} = P_{n-1}{}^{-1} + x_n x_n{}^T$

Solution : Lemme de Sherman-Morrison-Woodburg

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left[C^{-1} + DA^{-1}B\right]^{-1} DA^{-1}$$

Conséquences du lemme

$$P_n = P_{n-1} - k_n * x_n{}^T P_{n-1}$$

Avec

$$k_n = P_{n-1}x_n \left(1 + x_n{}^T P_{n-1} x_n\right)^{-1}$$

Moindres carrés récursifs (4)

Conséquences du lemme (2)

- On a obtenu :
  - $P_n = P_{n-1} - k_n * {x_n}^T P_{n-1}$
  - $k_n = P_{n-1} x_n \left(1 + {x_n}^T P_{n-1} x_n\right)^{-1} (**)$
  - $Q_n = Q_{n-1} + x_n {y_S}_n$
- On cherche $\theta_n = P_n Q_n$
  $\theta_n = P_{n-1} Q_n - k_n * {x_n}^T P_{n-1} Q_n$
- Après quelques simplifications : on obtient :
  $\theta_n = \theta_{n-1} + k_n({y_S}_n - {x_n}^T \theta_{n-1})$

Moindres carrés récursifs (5)

Bilan : 3 équations

$$\theta_n = \theta_{n-1} + k_n({Y_S}_n - {x_n}^T\theta_{n-1})$$

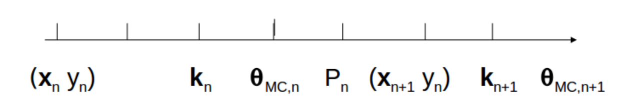
$$k_n = P_{n-1}x_n\left(1 + {x_n}^T P_{n-1}x_n\right)^{-1}$$

$$P_n = P_{n-1} - k_n * {x_n}^T P_{n-1}$$

Remarques

- L'estimée θ_n est une correction de θ_{n-1} de k_n fois la différence entre l'observation ${Y_S}_n$ et la prédiction ${Y_M}_n$ faite avec θ_{n-1}.

Ordre des calculs



Plan du Cours

Plan du Cours

Plan du Cours

Plan du Cours