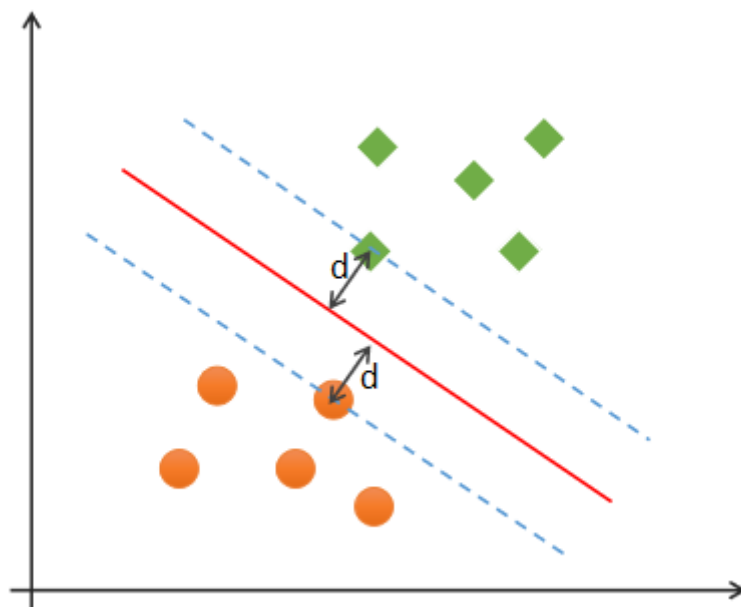


一、支持向量机

1. 基本概念

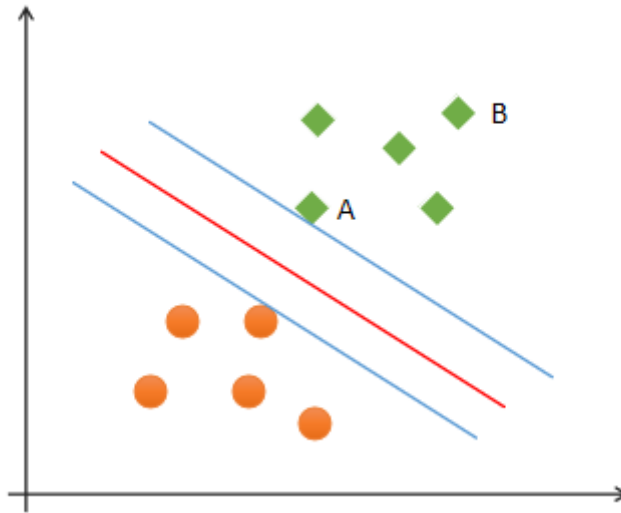
1) 什么是支持向量机

支持向量机 (Support Vector Machines) 是一种二分类模型，在机器学习、计算机视觉、数据挖掘中广泛应用，主要用于解决数据分类问题，它的目的是寻找一个超平面来对样本进行分割，分割的原则是间隔最大化（即数据集的边缘点到分界线的距离 d 最大，如下图），最终转化为一个凸二次规划问题来求解。通常SVM用于二元分类问题，对于多元分类可将其分解为多个二元分类问题，再进行分类。所谓“支持向量”，就是下图中虚线穿过的边缘点。支持向量机就对应着能将数据正确划分并且间隔最大的直线（下图中红色直线）。



2) 最优分类边界

什么才是最优分类边界？什么条件下的分类边界为最优边界呢？



如图中的A，B两个样本点，B点被预测为正类的确信度要大于A点，所以SVM的目标是寻找一个超平面，使得离超平面较近的异类点之间能有更大的间隔，即不必考虑所有样本点，只需让求得的超平面使得离它近的点间隔最大。超平面可以用如下线性方程来描述：

$$w^T x + b = 0 \quad (1)$$

其中， $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ ， $w = (w_1; w_2; \dots; w_n)$ ， b 为偏置项. 可以从数学上证明，支持向量到超平面距离为：

$$\gamma = \frac{1}{\|w\|} \quad (2)$$

为了使距离最大，只需最小化 $\|w\|$ 即可.

3) SVM最优边界要求

SVM寻找最优边界时，需满足以下几个要求：

- (1) 正确性：对大部分样本都可以正确划分类别；
- (2) 安全性：支持向量，即离分类边界最近的样本之间的距离最远；
- (3) 公平性：支持向量与分类边界的距离相等；
- (4) 简单性：采用线性方程（直线、平面）表示分类边界，也称分割超平面。如果在原始维度中无法做线性划分，那么就通过升维变换，在更高维度空间寻求线性分割超平面. 从低纬度空间到高纬度空间的变换通过核函数进行。

4) 线性可分与线性不可分

① 线性可分

如果一组样本能使用一个线性函数将样本正确分类，称这些数据样本是线性可分的。那么什么是线性函数呢？在二维空间中就是一条直线，在三维空间中就是一个平面，以此类推，如果不考虑空间维数，这样的线性函数统称为超平面。

② 线性不可分

如果一组样本，无法找到一个线性函数将样本正确分类，则称这些样本线性不可分。以下是一个一维线性不可分的示例：



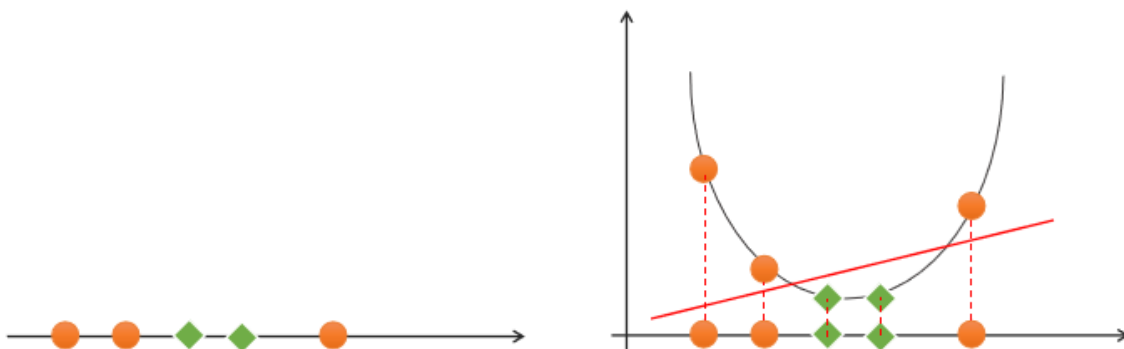
一维线性不可分

以下是一个二维不可分的示例：

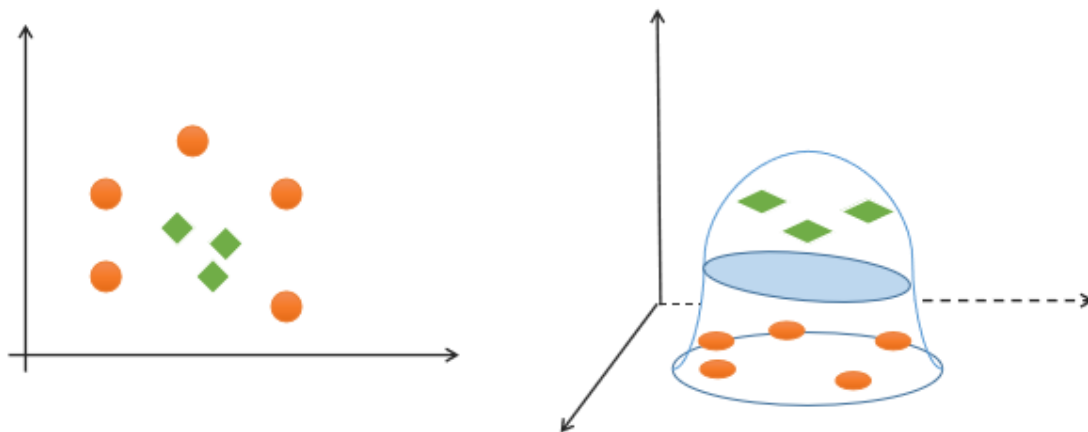


二维线性不可分

对于该类线性不可分问题，可以通过升维，将低纬度特征空间映射为高纬度特征空间，实现线性可分，如下图所示：



一维空间升至二维空间实现线性可分



二维空间升至三维空间实现线性可分

那么如何实现升维？这就需要用到核函数。

2. 核函数

通过名为核函数的特征变换，增加新的特征，使得低纬度线性不可分问题变维高纬度线性可分问题。如果低维空间存在 $K(x, y)$, $x, y \in X$, 使得 $K(x, y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, 则称 $K(x, y)$ 为核函数，其中 $\phi(x) \cdot \phi(y)$ 为 x, y 映射到特征空间上的内积， $\phi(x)$ 为 $X \rightarrow H$ 的映射函数。以下是几种常用的核函数。

1) 线性核函数

线性核函数 (Linear) 表示不通过核函数进行升维，仅在原始空间寻求线性分类边界，主要用于线性可分问题。

示例代码：

```
1 # 支持向量机示例
2 import numpy as np
3 import sklearn.model_selection as ms
4 import sklearn.svm as svm
5 import sklearn.metrics as sm
6 import matplotlib.pyplot as mp
7
8 x, y = [], []
9 with open("../data/multiple2.txt", "r") as f:
10     for line in f.readlines():
11         data = [float(substr) for substr in
12                 line.split(",")]
```

```

12         x.append(data[:-1]) # 输入
13         y.append(data[-1]) # 输出
14
15 # 列表转数组
16 x = np.array(x)
17 y = np.array(y, dtype=int)
18
19 # 线性核函数支持向量机分类器
20 model = svm.SVC(kernel="linear") # 线性核函数
21 # model = svm.SVC(kernel="poly", degree=3) # 多项式核函数
22 # print("gamma:", model.gamma)
23 # 径向基核函数支持向量机分类器
24 # model = svm.SVC(kernel="rbf",
25 #                  gamma=0.01, # 概率密度标准差
26 #                  C=200) # 概率强度
27 model.fit(x, y)
28
29 # 计算图形边界
30 l, r, h = x[:, 0].min() - 1, x[:, 0].max() + 1, 0.005
31 b, t, v = x[:, 1].min() - 1, x[:, 1].max() + 1, 0.005
32
33 # 生成网格矩阵
34 grid_x = np.meshgrid(np.arange(l, r, h), np.arange(b, t,
35 v))
36 flat_x = np.c_[grid_x[0].ravel(), grid_x[1].ravel()] # 合并
37 flat_y = model.predict(flat_x) # 根据网格矩阵预测分类
38 grid_y = flat_y.reshape(grid_x[0].shape) # 还原形状
39
40 mp.figure("SVM Classifier", facecolor="lightgray")
41 mp.title("SVM Classifier", fontsize=14)
42
43 mp.xlabel("x", fontsize=14)
44 mp.ylabel("y", fontsize=14)
45 mp.tick_params(labelsize=10)
46 mp.pcolormesh(grid_x[0], grid_x[1], grid_y, cmap="gray")
47
48 c0, c1 = (y == 0), (y == 1)

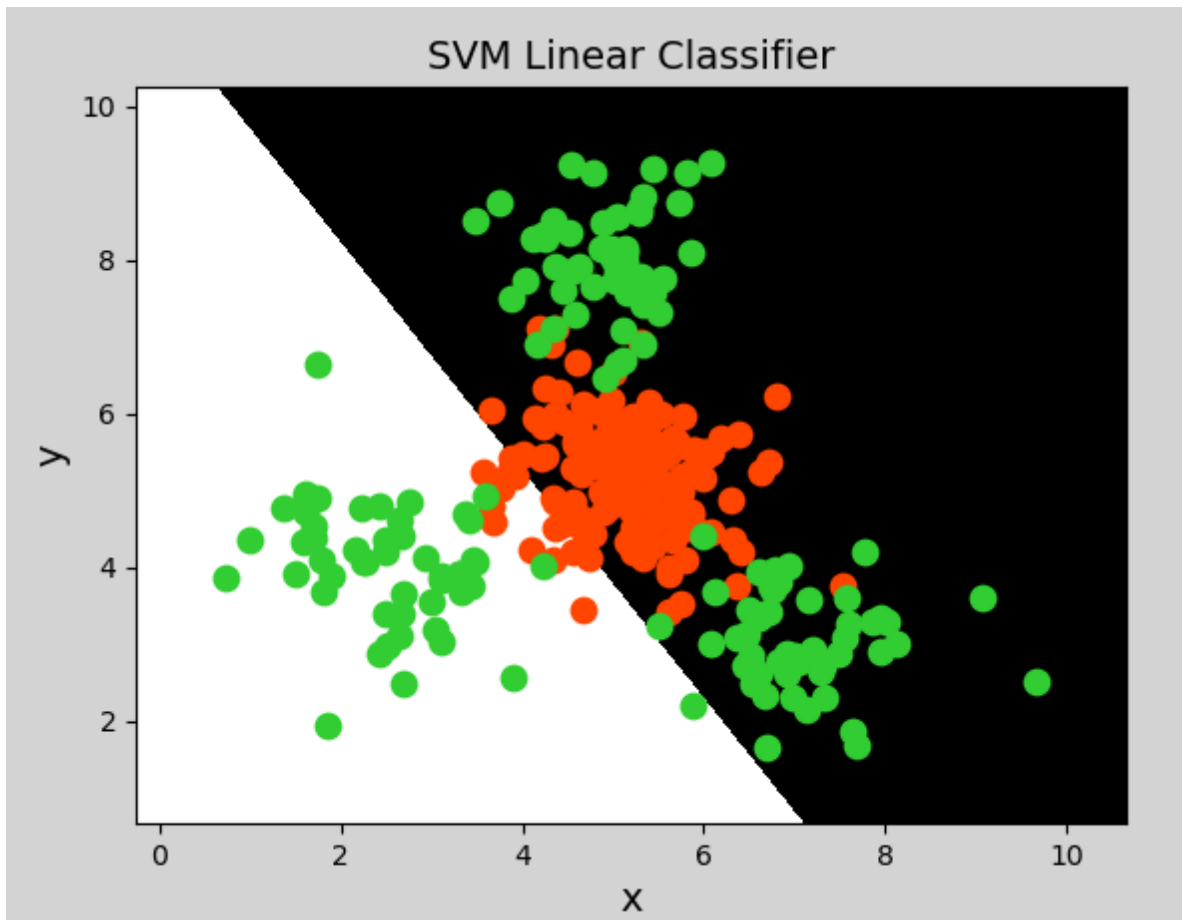
```

```

48 mp.scatter(x[C0][:, 0], x[C0][:, 1], c="orangered", s=80)
49 mp.scatter(x[C1][:, 0], x[C1][:, 1], c="limegreen", s=80)
50 mp.show()

```

绘制图形：



2) 多项式核函数

多项式核函数 (Polynomial Kernel) 用增加高次项特征的方法做升维变换，当多项式阶数高时复杂度会很高，其表达式为：

$$K(x, y) = (\alpha x^T \cdot y + c)^d \quad (3)$$

其中， α 表示调节参数， d 表示最高次项次数， c 为可选常数。

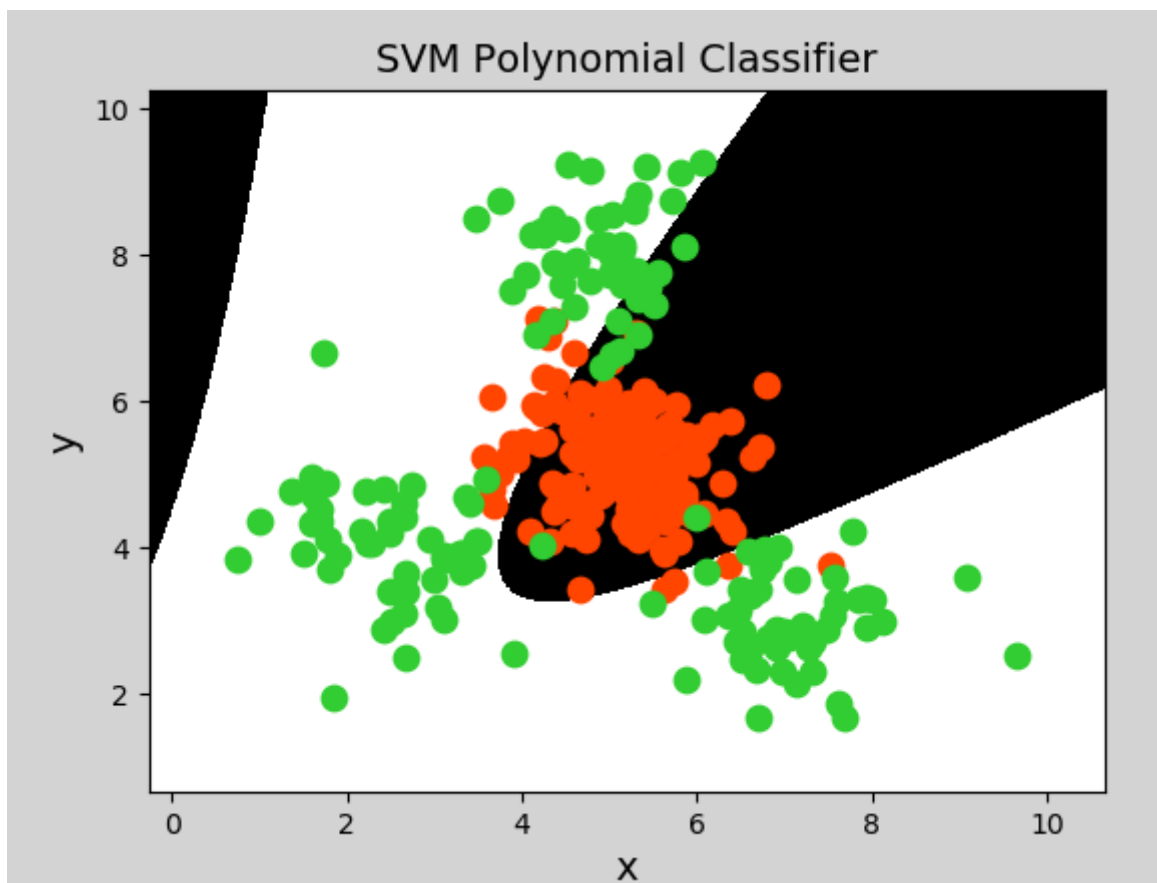
示例代码（将上一示例中创建支持向量机模型改为一下代码即可）：

```

1 | model = svm.SVC(kernel="poly", degree=3) # 多项式核函数

```

生成图像：



3) 径向基核函数

径向基核函数 (Radial Basis Function Kernel) 具有很强的灵活性，应用很广泛。与多项式核函数相比，它的参数少，因此大多数情况下，都有比较好的性能。在不确定用哪种核函数时，可优先验证高斯核函数。由于类似于高斯函数，所以也称其为高斯核函数。表达式如下：

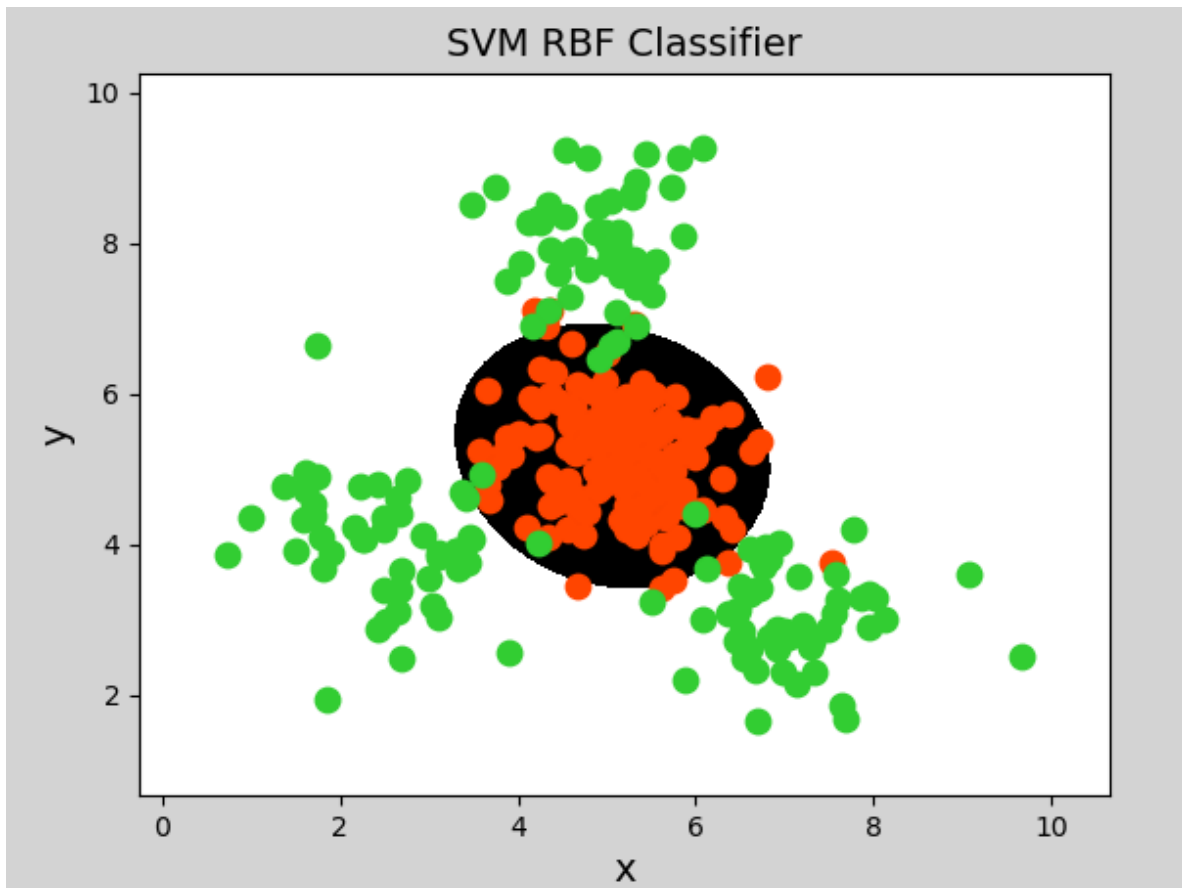
$$k(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2\alpha^2}\right)$$

其中， α^2 越大，高斯核函数变得越平滑，即得到一个随输入 x 变化较缓慢，模型的偏差和方差大，泛化能力差，容易过拟合。 α^2 越小，高斯核函数变化越剧烈，模型的偏差和方差越小，模型对噪声样本比较敏感。

示例代码（将上一示例中分类器模型改为如下代码即可）：

```
1 # 径向基核函数支持向量机分类器
2 model = svm.SVC(kernel="rbf",
3                 gamma=0.01, # 概率密度标准差
4                 c=600) # 概率强度，该值越大对错误分类的容忍度越
                        小，分类精度越高，但泛化能力越差；该值越小，对错误分类容忍度越大，但泛
                        化能力强
```

生成图像：



3. 总结

- (1) 支持向量机是二分类模型
- (2) 支持向量机通过寻找最优线性模型作为分类边界
- (3) 边界要求：正确性、公平性、安全性、简单性
- (4) 可以通过核函数将线性不可分转换为线性可分问题，核函数包括：线性核函数、多项式核函数、径向基核函数
- (5) 执行向量机适合少量样本的分类