一、逻辑回归

1. 概述

1）什么是逻辑回归

逻辑回归（Logistic Regression）虽然被称为回归，但其实际上是分类模型，常用于二分类。逻辑回归因其简单、可并行化、可解释强而受到广泛应用。二分类（也称为逻辑分类）是常见的分类方法，是将一批样本或数据划分到两个类别，例如一次考试，根据成绩可以分为及格、不及格两个类别，如下表所示：

姓名	成绩	分类
Jerry	86	1
Tom	98	1
Lily	58	0
……	……	……

这就是逻辑分类，将连续值映射到两个类别中。

2）逻辑函数

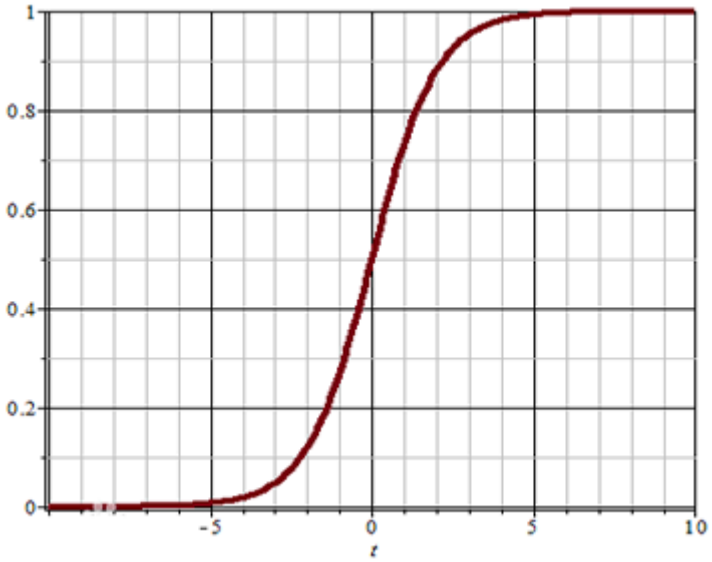
逻辑回归是一种广义的线性回归，其原理是利用线性模型根据输入计算输出（线性模型输出值为连续），并在逻辑函数作用下，将连续值转换为两个离散值（0或1），其表达式如下：

$$y = h(w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots + w_n x_n + b) \tag{1}$$

其中，括号中的部分为线性模型，计算结果在函数$h()$的作用下，做二值化转换，函数$h()$的定义为：

$$h = \frac{1}{1 + e^{-t}} \tag{2}$$

该函数称为Sigmoid函数（又称逻辑函数），能将$(-\infty, +\infty)$的值映射到$(-1, 1)$之间，其图像为：



可以设定一个阈值（例如0.5），当函数的值大于阈值时，分类结果为1；当函数值小于阈值时，分类结果为0. 也可以根据实际情况调整这个阈值.

3）分类问题的损失函数

对于回归问题，可以使用均方差作为损失函数，对于分类问题，如何度量预测值与真实值之间的差异？分类问题采用交叉熵作为损失函数，当只有两个类别时，交叉熵表达式为：

$$E(y,\hat{y}) = -[y\,log(\hat{y}) + (1-y)log(1-\hat{y})] \tag{3}$$

其中，y为真实值，$\hat{y}$为预测值.

- 当$y=1$时，预测值$\hat{y}$越接近于1，$log(\hat{y})$越接近于0，损失函数值越小，表示误差越小，预测的越准确；当预测时$\hat{y}$接近于0时，$log(\hat{y})$接近于负无穷大，加上符号后误差越大，表示越不准确；
- 当$y=0$时，预测值$\hat{y}$越接近于0，$log(1-\hat{y})$越接近于0，损失函数值越小，表示误差越小，预测越准确；当预测值$\hat{y}$接近于1时，$log(1-\hat{y})$接近于负无穷大，加上符号后误差越大，表示越不准确.

2. 逻辑回归实现

sklearn中，逻辑回归相关API如下：

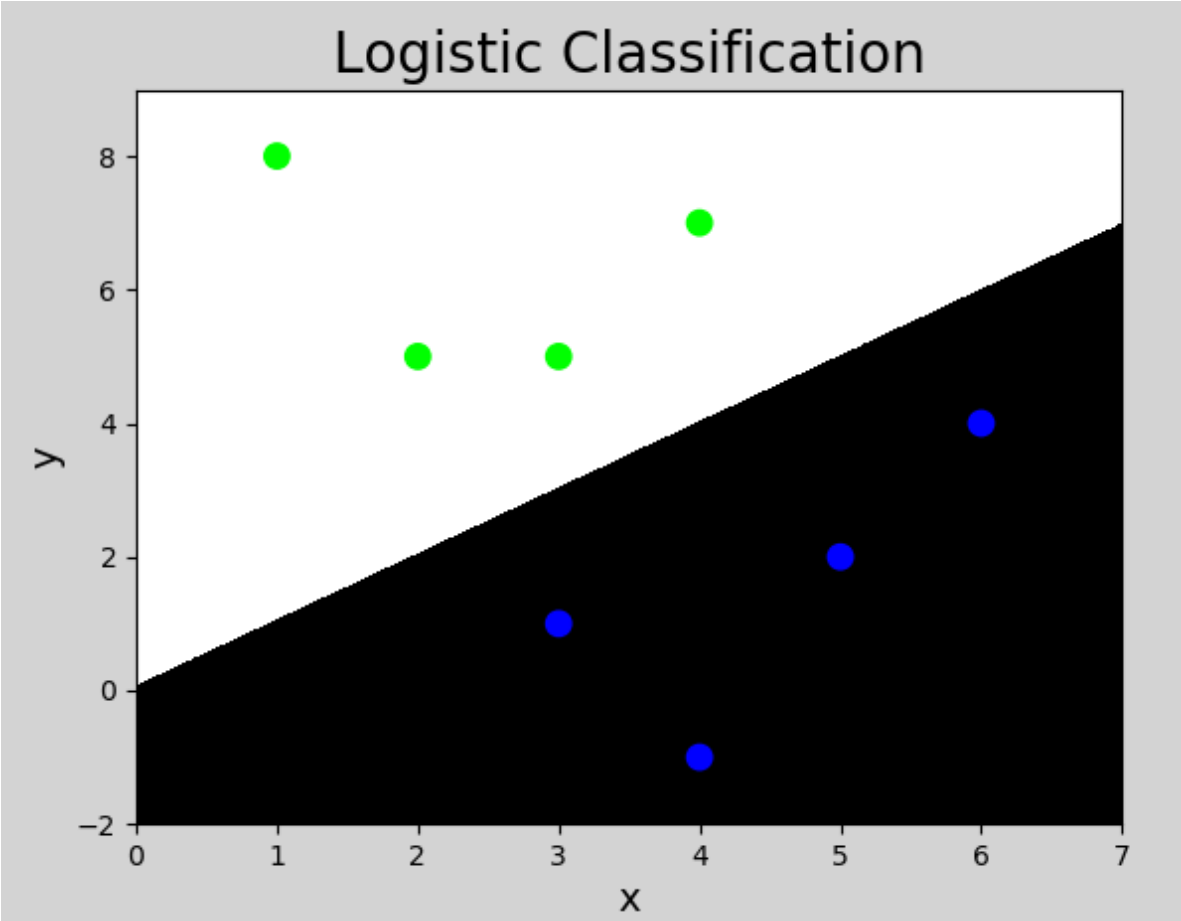
```
# 创建模型
# solver参数：逻辑函数中指数的函数关系（liblinear表示线性关系）
# C参数：正则强度，越大拟合效果越小，通过调整该参数防止过拟合
model = lm.LogisticRegression(solver='liblinear', C=1)

# 训练
model.fit(x, y)

# 预测
pred_y = model.predict(x)
```

以下是使用sklearn库提供的逻辑分类器（LogisticRegression）实现的代码：

```
# 逻辑分类器示例
import numpy as np
import sklearn.linear_model as lm
import matplotlib.pyplot as mp

x = np.array([[3, 1], [2, 5], [1, 8], [6, 4],
              [5, 2], [3, 5], [4, 7], [4, -1]])
y = np.array([0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0])

# 创建逻辑分类器对象
model = lm.LogisticRegression()
model.fit(x, y)  # 训练

# 预测
test_x = np.array([[3, 9], [6, 1]])
test_y = model.predict(test_x)  # 预测
print(test_y)

# 计算显示坐标的边界
left = x[:, 0].min() - 1
right = x[:, 0].max() + 1
h = 0.005
buttom = x[:, 1].min() - 1
top = x[:, 1].max() + 1
```

```
v = 0.005

# 产生网格化矩阵
grid_x, grid_y = np.meshgrid(np.arange(left, right, h),
                             np.arange(buttom, top, v))

print("grid_x.shape:", grid_x.shape)
print("grid_y.shape:", grid_y.shape)

# 将x,y坐标合并成两列
mesh_x = np.column_stack((grid_x.ravel(), grid_y.ravel()))
print("mesh_x.shape:", mesh_x.shape)

# 根据每个点的xy坐标进行预测，并还原成二维形状
mesh_z = model.predict(mesh_x)
mesh_z = mesh_z.reshape(grid_x.shape)

mp.figure('Logistic Classification',
facecolor='lightgray')
mp.title('Logistic Classification', fontsize=20)
mp.xlabel('x', fontsize=14)
mp.ylabel('y', fontsize=14)
mp.tick_params(labelsize=10)
mp.pcolormesh(grid_x, grid_y, mesh_z, cmap='gray')
mp.scatter(x[:, 0],  # 样本x坐标
           x[:, 1],  # 样本y坐标
           c=y, cmap='brg', s=80)
mp.show()
```

执行结果：



3. 多分类实现

逻辑回归产生两个分类结果，可以通过多个二元分类器实现多元分类（一个多元分类问题转换为多个二元分类问题）. 如有以下样本数据：

特征1	特征2	特征3	实际类别
x_1	x_2	x_3	A
x_1	x_2	x_3	B
x_1	x_2	x_3	C

进行以下多次分类，得到结果：

第一次：分为A类（值为1）和非A类（值为0）

第二次：分为B类（值为1）和非B类（值为0）

第三次：分为C类（值为1）和非C类（值为0）

……

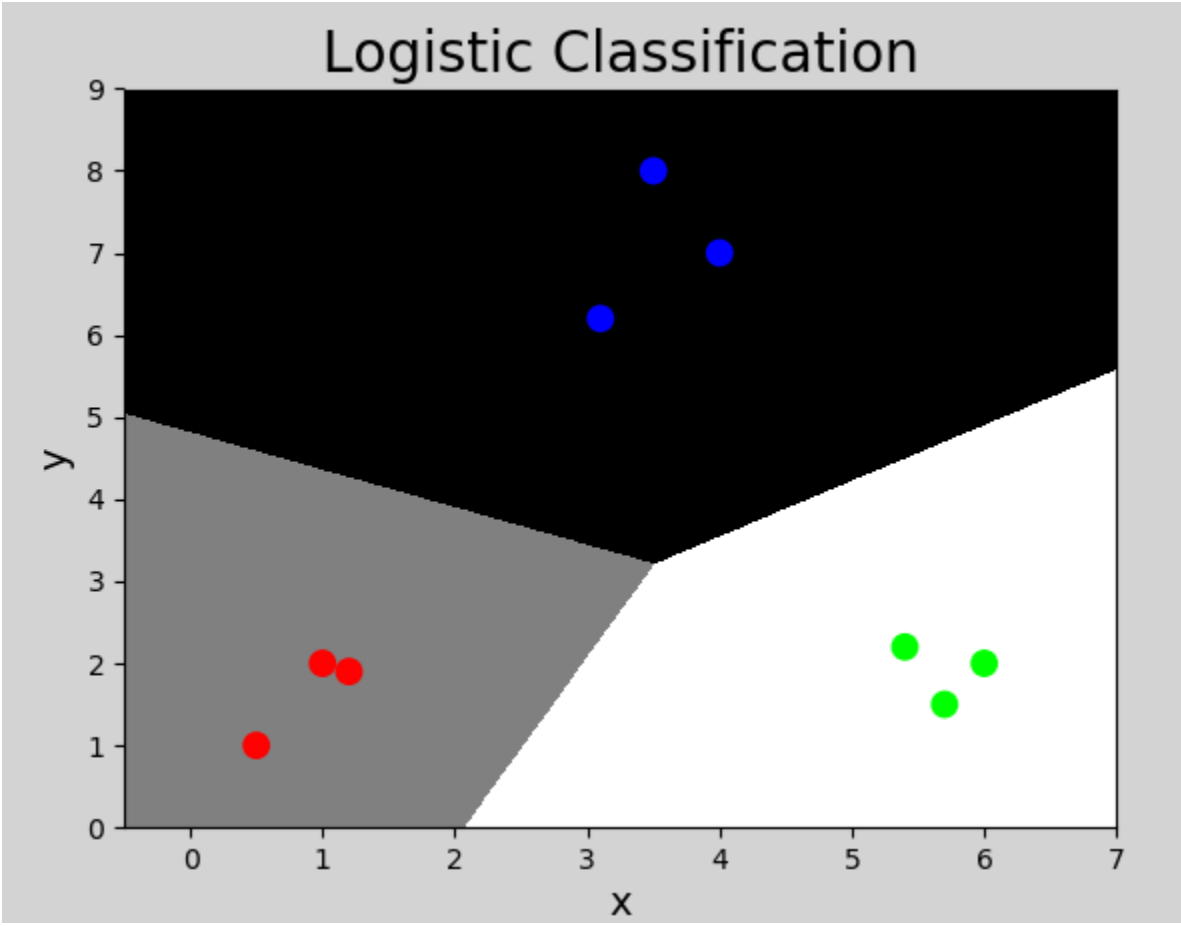
以此类推.

利用逻辑分类器实现多元分类示例代码如下：

```
# 多元分类器示例
import numpy as np
import sklearn.linear_model as lm
import matplotlib.pyplot as mp

# 输入
x = np.array([[4, 7],
              [3.5, 8],
              [3.1, 6.2],
              [0.5, 1],
              [1, 2],
              [1.2, 1.9],
              [6, 2],
              [5.7, 1.5],
              [5.4, 2.2]])
# 输出（多个类别）
y = np.array([0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2])

# 创建逻辑分类器对象
model = lm.LogisticRegression(C=200) # 调整该值为1看效果
model.fit(x, y)  # 训练

# 坐标轴范围
left = x[:, 0].min() - 1
right = x[:, 0].max() + 1
h = 0.005

buttom = x[:, 1].min() - 1
top = x[:, 1].max() + 1
v = 0.005

grid_x, grid_y = np.meshgrid(np.arange(left, right, h),
                             np.arange(buttom, top, v))
```

```
34
35 mesh_x = np.column_stack((grid_x.ravel(), grid_y.ravel()))
36 mesh_z = model.predict(mesh_x)
37 mesh_z = mesh_z.reshape(grid_x.shape)
38
39 # 可视化
40 mp.figure('Logistic Classification',
   facecolor='lightgray')
41 mp.title('Logistic Classification', fontsize=20)
42 mp.xlabel('x', fontsize=14)
43 mp.ylabel('y', fontsize=14)
44 mp.tick_params(labelsize=10)
45 mp.pcolormesh(grid_x, grid_y, mesh_z, cmap='gray')
46 mp.scatter(x[:, 0], x[:, 1], c=y, cmap='brg', s=80)
47 mp.show()
```

执行结果：



4. 总结

1）逻辑回归是分类问题，用于实现二分类问题

2) 实现方式：利用线性模型计算，在逻辑函数作用下产生分类

3) 多分类实现：可以将多分类问题转化为二分类问题实现

4) 用途：广泛用于各种分类问题