

## Математический анализ: темы, выносимые на экзамен

Напоминаю, что итоговую оценку за семестр вы зарабатываете в течение семестра. Как эта оценка выставляется, было объявлено в начале семестра, и описано в соответствующем документе на сайте. При этом

- Если вы получили 2, то обязаны прийти на экзамен, чтобы доказать, что достойны быть аттестованными за семестр. С собой требуется иметь объяснительную записку о причинах неудовлетворительной аттестации в семестре. Вы не можете получить больше, чем 3.
- Если вы получили 3 или 4, то можете согласиться с этой оценкой и экзамен не посещать. Я внесу оценку в экзаменационную ведомость в день экзамена, а в зачётку можем занести на лекции в следующем семестре. Если вы считаете, что способны на большее, то имеете право посетить экзамен — получаете оценку, которую заработали на экзамене.
- Если вы получили 5, убедительно прошу не приходить на основной экзамен, чтобы снизить нагрузку на преподавателей. Если вы хотите проверить свои знания, и улучшить мои, я буду рад побеседовать с вами на пересдаче экзамена.

### Порядок проведения экзамена

- Экзамен начинается в 9:00. При себе *нужно* иметь ручку и зачётную книжку, *можно* воду и закуску. Вспомогательные материалы, книги, конспекты не допускаются. Телефон должен быть выключен. Шпаргалки должны быть хорошо спрятаны.
- Вы получаете билет случайным образом, а также бумагу для ведения записей. Занимаете место в аудитории и готовите ответ на вопрос в письменном виде. Время для подготовки — полтора часа.
- Во время экзамена использование шпаргалок, соседей, телефона *в любых целях* приравнивается к оценке *неудовлетворительно* (2).
- Если во время экзамена вам требуется выйти, то по возвращении вы должны сразу начать сдачу экзамена.

## Структура билета

Каждый билет содержит два вопроса. Каждый вопрос охватывает одну тему курса: теорему и задачу к этой теореме.

- Теорема должна быть строго сформулирована. Вы должны уметь сформулировать все определения, входящие в формулировку теоремы.
- Доказательство можно (и даже поощряется) привести в схематичном виде. Однако, по просьбе преподавателя, нужно уметь детализировать каждый шаг доказательства. Если доказательство теоремы опирается на другие утверждения курса, эти утверждения нужно уметь сформулировать и объяснить, как они используются (т.е. какие буквы в утверждении каким объектам доказательства соответствуют).
- Решение задачи должно быть полным. Нужно уметь объяснить, как именно используется определение или теорема в решении задачи (какие буквы утверждения теоремы каким объектам в задаче соответствуют).

## Оценка ответа

Каждый вопрос билета оценивается по четырёхбалльной шкале (2–5). При этом

- Оценка «отлично» (5) означает, что вы владеете материалом курса на выдающемся уровне:
  - свободно владеете терминологией;
  - можете объяснить доказательство на идейном уровне;
  - можете объяснить, почему каждое условие в теореме важно, привести контрпримеры в случае, если какое-либо условие теоремы неверно;
  - можете объяснить, верна ли теорема в обратную сторону, если нет, то по каким причинам;
  - допускаете лишь незначительные ошибки, способны их тут же исправить после замечания преподавателя.
- Оценка «хорошо» (4) означает, что вы хорошо усвоили материал:

- знаете определения курса и формулировки теорем;
  - понимаете идею доказательства и его связь с другими разделами курса;
  - не допускаете грубых ошибок, после замечаний преподавателя способны самостоятельно исправить допущенные ошибки.
- Оценка «удовлетворительно» (3) означает, что вы удовлетворяете минимальным требованиям к положительной аттестации:
    - знаете определения курса и формулировки теорем;
    - способны с помощью преподавателя довести до конца доказательство теоремы и решение сопутствующей задачи.
  - В противном случае выставляется оценка «неудовлетворительно» (2).

Общая оценка определяется из этих двух как среднее с округлением вниз, т. е.:

$$\begin{array}{ll}
 (2, 2), (2, 3) & \Rightarrow 2, \\
 (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4) & \Rightarrow 3, \\
 (3, 5), (4, 4), (4, 5) & \Rightarrow 4, \\
 (5, 5) & \Rightarrow 5.
 \end{array}$$

## Вопросы

### 1. Границы числовых множеств.

Что такое граница числового множества? Что такое точная граница числового множества? Что такое ограниченное множество? Сформулируйте и докажите теорему о существовании точных границ числового множества.

Пример задачи: Пусть  $E \subseteq \mathbb{R}$  — ограниченное сверху числовое множество,  $\lambda > 0$ . Докажите, что

$$\sup(\lambda E) = \lambda \cdot \sup E.$$

### 2. Мощности числовых множеств

Что такое мощность множества? Какую мощность может иметь множество чисел? Что такое конечное множество? Что такое счётное множество? Сформулируйте и докажите теорему Кантора о несчётности отрезка.

Пример задачи: пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная непостоянная функция. Докажите, что множество значений, которые принимает функция, несчётно.

### 3. Конечный предел числовой последовательности

Что такое последовательность чисел? Как определяется конечный предел числовой последовательности? Какими свойствами обладает этот предел? Пусть  $x_n \rightarrow a \neq 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Докажите по определению предела, что последовательность  $\frac{1}{x_n}$  определена и имеет конечный предел при  $n \rightarrow \infty$ . Чему равен этот предел?

Пример задачи: вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1})$ .

### 4. Предел и неравенства

Как связаны неравенства между последовательностями и неравенства между их пределами? Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной последовательности.

Пример задачи: вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ .

### 5. Монотонные последовательности

Что такое монотонная последовательность? Что такое ограниченная последовательность? Всякая ли ограниченная последовательность сходится? Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса о монотонной последовательности. Какие есть приёмы вычисления предела монотонной последовательности?

Пример задачи: пусть  $x_1 = 8$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{8x_n - 15}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что последовательность  $x_n$  имеет предел и вычислите его.

### 6. Верхний и нижний пределы последовательности

Как определяются верхний и нижний пределы числовой последовательности? Докажите, что всякая ограниченная числовая последовательность имеет конечные верхний и нижний пределы. Как связаны верхний и нижний пределы последовательности с её пределом, с её частичными пределами?

Пример задачи: пусть  $x_n = \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}$ . Постройте последовательности верхних и нижних границ для последовательности  $x_n$ . Найдите верхний и нижний пределы последовательности  $x_n$ .

### 7. Критерий Коши сходимости последовательности

Дайте определение колебанию последовательности. Как ведёт себя последовательность колебаний? Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости последовательности. Как оценить разницу между членом последовательности и её пределом с помощью критерия Коши?

Пример задачи: Используя критерий Коши, докажите, что существует предел последовательности

$$x_n = \frac{\sin \sqrt{1}}{2} + \frac{\sin \sqrt{2}}{2^2} + \dots + \frac{\sin \sqrt{n}}{2^n}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Найдите номер  $N$ , начиная с которого, все члены последовательности отличаются от её предела менее, чем на 0,001.

### 8. Предел функции

Дайте топологическое определение предела функции. Как задаются окрестности конечной точки, точки  $+\infty$ , точки  $-\infty$ ? Дайте определения левого предела, правого предела, двустороннего предела функции в конечной точке. Как связаны односторонние пределы функции с её двусторонним пределом? Докажите это.

Пример задачи: Вычислите левый и правый пределы в нуле функции  $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ . Совпадают ли они? Какой тип особой точки имеет функция  $f$  в нуле?

### 9. Непрерывность

Сформулируйте определение непрерывной функции. Сформулируйте и докажите теорему о пределе композиции с непрерывной функцией. Что можно сказать о непрерывности монотонной функции? Что можно сказать о непрерывности выпуклой функции?

Пример задачи: Вычислите  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+2} - \sin \sqrt{x})$ .

### 10. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях

Сформулируйте и докажите теорему Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Что можно сказать о максимальном и минимальном значениях непрерывной функции?

Пример задачи: Докажите, что уравнение  $x + e^x = 10$  имеет решение.

11. *Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции*

Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса об экстремумах непрерывной функции. Что можно сказать о промежуточных значениях непрерывной функции?

Пример задачи: докажите, что непрерывная функция переводит отрезок в отрезок.

12. *Теорема о непрерывной обратной*

Сформулируйте и докажите теорему о непрерывной обратной функции. Всегда ли обратная к дифференцируемой функции дифференцируема?

Пример задачи: докажите, что функция  $x + e^{|x|} \operatorname{sgn} x$  обратима, и обратная к ней непрерывна.

13. *Равномерная непрерывность*

Сформулируйте понятия равномерно непрерывной функции и модуля непрерывности функции. Сформулируйте основные классы равномерно непрерывных функций. Сформулируйте и докажите теорему Кантора о непрерывной функции на отрезке.

Пример задачи: равномерно непрерывна ли  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  на промежутке  $(0, 1)$  и на луче  $[1, +\infty)$ ? В каждом случае, если функция равномерно непрерывна, найдите её модуль непрерывности.

14. *Производная*

Сформулируйте понятие производной функции. Сформулируйте и докажите формулу производной произведения. Сформулируйте остальные формулы дифференциального исчисления.

Пример задачи: в каких точках определена и чему равна производная функции

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0? \end{cases}$$

15. *Производная композиции*

Сформулируйте понятие производной функции. Сформулируйте и докажите формулу дифференцирования композиции функций. Может ли композиция недифференцируемых функций быть дифференцируемой?

Пример задачи: вычислите производную функции  $x^{x^x}$ .

16. *Производная обратной функции*

Сформулируйте понятие производной функции. Сформулируйте теорему о непрерывности обратной функции. Сформулируйте и докажите формулу дифференцирования обратной функции.

Пример задачи: докажите, что функция  $f(x) = 2x + \sin x$  обратима и обратная функция дифференцируема. Вычислите производную обратной функции.

17. *Локальные экстремумы функции*

Сформулируйте понятие локального экстремума функции. Сформулируйте и докажите необходимое условие локального экстремума функции. Сформулируйте и докажите теорему Ролля о среднем.

Пример задачи: найдите  $\inf_{x>0} x^2 \ln x$ .

18. *Теорема Лагранжа о среднем*

Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа о среднем. Сформулируйте и докажите теорему об оценке приращения дифференцируемой функции.

Пример задачи: докажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  липшицева, и оцените её постоянную Липшица.

19. *Вторая производная*

Сформулируйте понятие дважды дифференцируемой функции. Сформулируйте основные свойства дважды дифференцируемых функций. Докажите, что композиция дважды дифференцируемых функций дважды дифференцируема, выведите правило для второй производной композиции.

Пример задачи: докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

дважды дифференцируема в нуле. Чему равна  $f''(0)$ ? Непрерывна ли  $f''$  в нуле?

20. *Выпуклые функции*

Сформулируйте определения выпуклой функции и строго выпуклой функции. Сформулируйте определение точки перегиба функции. Сформулируйте и докажите дифференциальный признак выпуклости функции.

Пример задачи: докажите, что  $e^x$  строго выпукла на своей области определения. Используя это, докажите, что для всех  $x, y, \alpha, \beta > 0$  таких, что  $\alpha + \beta = 1$ , выполнено

$$x^\alpha y^\beta < \alpha x + \beta y.$$

## 21. Старшие производные

Сформулируйте определение  $n$  раз дифференцируемой функции и  $n$ -ой производной функции. Сформулируйте основные свойства  $n$  раз дифференцируемых функций. Сформулируйте и докажите формулу для  $n$ -ой производной произведения функций.

Пример задачи: сколько раз дифференцируема в нуле функция  $f(x) = x^3|x|$ ? Непрерывна ли её последняя производная?

## 22. Многочлен Тейлора

Дайте определение многочлена Тейлора функции. Сформулируйте основные свойства многочлена Тейлора. Сформулируйте и докажите формулу Тейлора асимптотического приближения функции многочленом (формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Пример задачи: постройте многочлены Тейлора второго порядка для функций  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = e^x - x$  относительно  $x_0 = 0$ . Используя полученный результат, вычислите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

## 23. Оценка разности между функцией и её многочленом Тейлора

Дайте определение многочлена Тейлора функции. Сформулируйте основные свойства многочлена Тейлора. Сформулируйте и докажите теорему о среднем для многочлена Тейлора (формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Сформулируйте и докажите оценку разницы между функцией и её многочленом Тейлора.

Пример задачи: постройте многочлен Тейлора третьего порядка  $P_3(x)$  функции  $f(x) = x^2 \ln x$  относительно точки  $x_0 = 1$ . Оцените разницу между  $f(x)$  и построенным  $P_3(x)$  на промежутке  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .