恰当方程（全微分方程）

本篇笔记是对柳斌《常微分方程》*2.1*节的一点梳理和补充。

对于一个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

其对称形式为：

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

方程(1)称为恰当方程（全微分方程）当且仅当存在连续可微函数$\Phi(x, y)$，使得

$$\mathrm{d}\Phi(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

当然，此处$\mathrm{d}\Phi(x, y) = 0$，故

$$\Phi(x, y) = c$$

该式称为方程(1)的通积分. 取定其中的常数c后，得到的隐函数$y = u(x)$或$x = v(y)$为方程的解（推导略）.
下面讨论方程是否恰当的判断以及恰当方程的通积分求解.

> 在单连通区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上，$P(x, y), Q(x, y)$ 连续，且有连续的 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$，则该方程为恰当方程的充要条件是，在$D$内 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

证明：

充分性：

由于方程是恰当方程，由定义知存在 $\Phi(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}\Phi(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$. 即：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y), \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y) \\ \Rightarrow \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}\end{aligned}$$

已知 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续，亦即 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$ 连续，由 Schwarz Theorom 可知 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$，即 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

必要性：

区域D上应用格林公式：

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 时，该等式恒等于 0，即 $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ 是保守场，曲线积分的结果不受积分路径的影响，即 $\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = c$. ($c$的取值由$x_0, y_0$决定) $\square$

由此，我们可以得到通积分的形式. 根据定义，有 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y)$ ，故

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\mathrm{d}t + \phi(y)$$

又由 $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$ ，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，得到：

$$\begin{aligned}Q(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(t,y)\mathrm{d}t + \phi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\mathrm{d}t + \phi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(t,y)\mathrm{d}t + \phi'(y) \\ &= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \phi'(y)\end{aligned}$$

即 $\phi'(y) = Q(x_0,y)$，进而有 $\phi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\mathrm{d}s$.

由此得到通积分的形式：

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\mathrm{d}s$$

实际计算时，x_0, y_0 以方便计算为原则随意选取，因为在通解形式当中，这一步的差异会被 c 吸收.
（略去对庞加莱引理的介绍，因为我还没看过拓扑的书）