Zusammenfassung Modellbildung und Systemidentifikation

Grundlagen

Modellarten

- ARX
- TODO

MkQ für Statische Systeme

Parameterlineare Modelle

Prinzip: Kostenfunktion $\epsilon^T \cdot \epsilon$ definieren und minimieren (Variante: Gewichtete Kostenfunktion)

mit $\epsilon = \text{Messwert} - \text{Modell}$

$y = \phi \cdot p$

Mit Ableitung ergibt sich Lösung :

$p = (\phi^T \cdot \phi)^- 1 \cdot \phi \cdot y = \phi^+ \cdot y$

Singulärwertzerlegung (SVD) kann für einfache Berechnung von ϕ^+ genutzt werden:

$\phi = U \cdot \Sigma \cdot V^T \rightarrow \phi^+ = V \cdot \Sigma^T \cdot U^T$

ParameterNICHTlineare Modelle

Ansatz wie bei parameterlinearen Modellen.

Problem: nichtlineare Gleichungen

Lösung: Linearisierung der Fehlergleichung

Verfahren:

- Gauß-Newton-Verfahren (gegf. mit Dämpfungsfaktor)
- Gradientenverfahren (line search)
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus

MkQ für Dynamische Systeme

Dynamisch zeitdiskrete Systeme

Dynamische Modelle = ARX (autoregressive) Modelle

Dynamisch zeitkontinuierliche Systeme

Ausgangspunkt: DGL

Problem: Ableitungen beschaffen

Lösung:

a) Finite Differenzen (Vorwärts/Rückwärtsdifferenz) Störanfällig, Messrauschen wird verstärkt

b) Filterung von Ein- und Ausgangssignalen

Idee: Ausnutzen von Eigenschaften des Faltungsoperators

$d/dt(x(t) * g(t)) = x(t) * d/dt(g(t))$ (g(t): Impulsantwort)

Zustandsvariablenfilter:

Ansatz:

$F(s) = \frac{f_0}{f_0 + f_1 s + \ldots + s^n}$

Adaptives Zustandsvariablenfilter:

z.B. Butterworth-Filter

Wann sind physikalische Parameter vollständig identifizierbar?

- $np = n + m + 1$
- Jacobi-Matrix $\delta f / \delta p$ ist regulär

Rekursive MkQ

Iterationsvorschrift -> siehe Skript

Bestimmung der Startwerte

Nutzung der nicht-rekursiven MkQ

Wahl von Standardwerten

Startwertwahl von a_0 = 0 $P_0 = 1/\alpha I$ (I: Einheitsmatrix). Dies führt für große Alpha zu $P_k \approx \phi_k^T \phi_k$

Rekursive MkQ mit exponentiell nachlassendem Gedächtnis

Rechentechnische Umsetzung der MkQ

TODO

Identifikation nicht-linearer Systeme

Hammerstein-Modell: nicht-linear statisches System + dynamisch lineares System

Einfacher Ansatz für nicht-Linearität: $\widetilde{u}[k] = r_0 + r_1 \cdot u[k] + ...r_p \cdot u[k]^p$

Ergibt lineares Modell mit mehreren Eingängen, darstellbar in der Form $y[k] = \phi a$

2.7 Modifikationen der MkQ

2.7.1 Totale MkQ (orthogonale Regression)

Minimierung des Fehlers der Ausgangsdaten F und des Fehlers der Eingangsdaten ϵ:

$y + \epsilon = (\Phi + F)a$

=> $[(\Phi y) + (F\epsilon)] \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$

=> Minimierung von $(F\epsilon)$ im Sinne der Frobeniusnorm.

Einschub: Singulärwertzerlegung

Mann kann Matrizen unter gewissen Vorraussetzungen folgendermaßen zerlegen:

$C = U\Sigma V^T$

TODO

2.7.2 Methode der Hilfsvariablen

Anwendung: bei verzerrten Schätzern (ARX-Modell nicht perfekt)

Prinzip: Multiplikation der Modellfehlergleichung mit sog. Hilfsvariablen: $W^T\epsilon = W^T y - W^T \Phi a$

W ist so wählen, dass Spalten unkorreliert mit ϵ sind.

=> Lösung der modifizierten Normalengleichung: $a = (W^T \Phi)^- 1 W^T y$

Wahl von W:

1. Schätzen von Parametervektor mit MkQ: $\hat{a} = \Phi^+ y$
2. Simulation des Models $\hat{y} = \Phi\hat{a}$
3. W = … (siehe Skript)
4. Schätzung mittels Hilfsvariablen

Iteratives Wiederholen von 2-4 beseitigt Bias von MkQ Schätzer

3. Subspace-based State-Space System Identification (4 SID)

3.1 Grundgleichungen, Zustandsraummodelle

Zustandsraummodell:

$x[k+1] = Ax[x] + Bu[k]$ - Folgezustand abhängig von aktuellem Zustand + Eingang

$y[k] = Cx[k] + Du[k]$ - Ausgang abhängig von Zustand ü Eingang

Problem: Weder Zustandsfolge x[k] noch Zustandsdimension n bekannt

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ ... \\ y[k-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ ... \\ CA^{k-1} \end{pmatrix} x[0] + \begin{pmatrix} D & 0 & ... & 0 \\ CB & D & ... & 0 \\ .... & ... & D & 0 \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[0] \\ u[1] \\ ... \\ u[k-1] \end{pmatrix}$$

Bezeichnungen: $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ ... \\ CA^{k-1} \end{pmatrix} := Q_{B,k} = Beobachtbarkeitsmatrix$

TODO …

Subspace-Gleichungen

$Y_p = Q_{B,k} X_p + H_K U_p$

$Y_f = Q_{B,k} X_f + H_K U_f$

$X_f = A^k x_p + Q_{S,k} U_p$

mit $Q_{S,k} = (A^{k-1}B\ A^{k-2}B\ AB\ B)$ (erweiterte Steuerbarkeitsmatrix)

Durch Umformen/Einsetzten ergibt sich:

$X_f = … $ (nur abhängig von Vergangenheit)

$Y_f = Q_{B-k} L_{P,k} (U_p\ y_p)^T + H_k U_f$

=> Für nächsten Ausgang Wissen der zukünftigen Eingabe erforderlich ###3.2 Grundlagen: Projektion TODO

…

Ablaufschema 4 SID

- Messdaten u[i], y[i] aufnehmen, in Hankelmatrizen U, Y anordnen
- Schiefen Prädiktor P berechnen
- SVD von P (Schätzung der Systemordnung (Länge Zustandsvektor); Schätzung für Beobachtbarkeitsmatrix $Q_{B,k}$)
- Berechnen von A, C
- Berechnen von B, D

Kalman-Filter

Modell:

x[k+1] = A x[k] + B u[k] + v[k]

y[k] = C x[k] + e[k]

Annahmen

- Systemmatrizen A,B,C,D bekannt
- Eingang u[k], Ausgang y[k] bekannt
- Ziel: Zustandsvektor x[k] schätzen
- Systemrauschen v[k] und Messrauschen e[k]: unkorrelierte, mittelwertfreie Rauschprozesse

Filterstruktur

$\hat{x}[k+1]$ = Prädiktionsterm + Korrekturterm = $(A\hat{x}[k] + Bu[k]) + (K[k](y[k] - \hat{x}[x]))$

K[k]: Kalman-Matrix, so gewählt, dass Kovarianz von Schätzfehler $\tilde{x}[k+1] = \hat{x}[k+1] - x[k+1]$ minimiert wird

=> K[k] = P[k] C^T (Y- C P[k] $C^{T)}${-1}

P[k] = A P[k] A^T + V - K[k] C P[k]

Ergebnis: erwartungstreuer Schätzer mit kleinster Varianz

Filteralgorithmus

- Init
- Prädiktion (Schätzung des Zustands auf Basis der Messwerte zum Zeitpunkt k)
- Korrektur (Berechnung der Kalman-Matrix, Korrektur der Zustandsschätzung anhand des neuen Messertes y[k+1]: a posteriori Schätzung)

5. Identifikation nichtparametrischer Modelle

5.1 Frequenzgang mit period. Anregung

Variante 1: Anregung mit harmon. Eingangssignal (Sinus)

- Nach Einschwingen: Amplitude + Phase messen
- Wiederholung für versch. Frequenzen

Problem: reine Sinusschwingungen schwierig zu erzeugen

Variante 2: Anregung mit Trapez- oder Rechtecksignal

- Beginn bei hohen Frequenzen
- Bei kleineren Anregungsfrequenzen: Berücksichtigung der höheren harmonischen notwendig
- Aus vorherigen Messungen ist Übertragungsverhalten für hohe Frequenzen bekannt -> Signalanteile können subtrahiert werden; somit wird Grundschwingung isoliert

Nachteil: zeitaufwendig, da warten auf Einschwingen

Ausweg: Signale mit mehreren Frequenzanteilen

Allgemeine Nachteile:

- nur stabile Systeme
- keine passive Messungen
- nur kleine Störsignale

5.2 Korrelationsanalyse

5.2.1 Schätzung der Korrelationsfunktion

Def. Kreuzkorrelationsfolge: $R_{uy}[j] = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} u[k-j]y[k]$

Def. Autokorrelationsfolge: $R_u[j] = R_{uu}[j] = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} u[k-j]u[k]$

Eigenschaften:

- $R_{uy}[j] = R_{yu}[-j]$
- $R_u[j] = R_u[-j]$

Problem: Messung nur über endlichen Zeithorizont => Schätzung

Schätzung der Autokorrelationsfolge: $\hat{R}_u[j] = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Bemerkung: Schätzung $\hat{R}_u[j]$ ist nicht erwartungstreu: $E\{\hat{R}_u[j]\} = (1-\frac{|j|}{N})R_u[j]$

Andere Möglichkeit: $\hat{R}'_u[j] = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N-|j|} \sum\limits_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Dieser Schätzer ist erwartungstreu, weist aber eine um den Faktor $N/(N-|j|)$ größere Varianz auf -> Praktisch wird ersterer verwendet

5.2.2 Schätzung der Gewichtsfolge

Für lineare zeitdiskrete Systeme sind Ein- und Ausgangssignal mittels Faltungssumme verknüpft:

$y[k] = g * u = \sum\limits_{l=0}^{\infty} g[k-l]u[l] = \sum\limits_{l=0}^{\infty} g[l]u[k-l]$

Für Kreuzkorrelationsfolge $R_{uy}[j]$ gilt:

$R_{uy}[j] = \ldots \text{(siehe Skript)} = g * R_u = \sum\limits_{l=0}^{\infty} g[l]R_u[j-l]$

Annahme: $R_{uy}[j]$ und $R_u[j]$ bekannt für j mit $-P \leq j \leq M$

=> Gleichungssystem aufstellen (siehe Skript)

Lösung mittels MkQ liefert:

$\hat{g} = \hat{R}_u^+ \hat{R}_{uy}$

Falls Eingangssignal weißes Rauschen mit Autokorrelationsfunktion

...

Dann folgt:

$\hat{R}_{uy} = \hat{\sigma}^2 g[i]$

=> Schätzung für Gewichtsfolge: $\hat{g}[i] = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \hat{R}_{uy}$