

Zusammenfassung Modellbildung und Systemidentifikation

Grundlagen

Modellarten

- ARX
- TODO

MkQ für Statische Systeme

Parameterlineare Modelle

Prinzip: Kostenfunktion $\epsilon^T \cdot \epsilon$ definieren und minimieren (Variante: Gewichtete Kostenfunktion)

mit $\epsilon = \text{Messwert} - \text{Modell}$

$$y = \phi \cdot p$$

Mit Ableitung ergibt sich Lösung :

$$p = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi \cdot y = \phi^+ \cdot y$$

Singulärwertzerlegung (SVD) kann für einfache Berechnung von ϕ^+ genutzt werden:

$$\phi = U \cdot \Sigma \cdot V^T \rightarrow \phi^+ = V \cdot \Sigma^T \cdot U^T$$

ParameterNICHTlineare Modelle

Ansatz wie bei parameterlinearen Modellen.

Problem: nichtlineare Gleichungen

Lösung: Linearisierung der Fehlergleichung

Verfahren:

- Gauß-Newton-Verfahren (geg. mit Dämpfungsfaktor)
- Gradientenverfahren (line search)
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus

MkQ für Dynamische Systeme

Dynamisch zeitdiskrete Systeme

Dynamische Modelle = ARX (autoregressive) Modelle

Dynamisch zeitkontinuierliche Systeme

Ausgangspunkt: DGL

Problem: Ableitungen beschaffen

Lösung:

- a) Finite Differenzen (Vorwärts/Rückwärtsdifferenz) Störanfällig, Messrauschen wird verstärkt
- b) Filterung von Ein- und Ausgangssignalen

Idee: Ausnutzen von Eigenschaften des Faltungsoperators

$$d/dt(x(t) * g(t)) = x(t) * d/dt(g(t)) \quad (g(t): \text{Impulsantwort})$$

Zustandsvariablenfilter:

Ansatz:

$$F(s) = \frac{f_0}{f_0 + f_1 s + \dots + s^n}$$

Adaptives Zustandsvariablenfilter:

z.B. Butterworth-Filter

Wann sind physikalische Parameter vollständig identifizierbar?

- $np = n + m + 1$
- Jacobi-Matrix $\delta f / \delta p$ ist regulär

Rekursive MkQ

Iterationsvorschrift -> siehe Skript

Bestimmung der Startwerte

Nutzung der nicht-rekursiven MkQ

Wahl von Standardwerten

Startwertwahl von $a_0 = 0$ $P_0 = 1/\alpha I$ (I : Einheitsmatrix). Dies führt für große Alpha zu $P_k \approx \phi_k^T \phi_k$

Rekursive MkQ mit exponentiell nachlassendem Gedächtnis

Rechentechnische Umsetzung der MkQ

TODO

Identifikation nicht-linearer Systeme

Hammerstein-Modell: nicht-linear statisches System + dynamisch lineares System

Einfacher Ansatz für nicht-Linearität: $\tilde{u}[k] = r_0 + r_1 \cdot u[k] + \dots r_p \cdot u[k]^p$

Ergibt lineares Modell mit mehreren Eingängen, darstellbar in der Form $y[k] = \phi a$

2.7 Modifikationen der MkQ

2.7.1 Totale MkQ (orthogonale Regression)

Minimierung des Fehlers der Ausgangsdaten F und des Fehlers der Eingangsdaten ϵ :

$$y + \epsilon = (\Phi + F)a$$

$$\Rightarrow [(\Phi y) + (F\epsilon)] \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Minimierung von $(F\epsilon)$ im Sinne der Frobeniusnorm.

Einschub: Singulärwertzerlegung

Mann kann Matrizen unter gewissen Voraussetzungen folgendermaßen zerlegen:

$$C = U\Sigma V^T$$

TODO

2.7.2 Methode der Hilfsvariablen

Anwendung: bei verzerrten Schätzern (ARX-Modell nicht perfekt)

Prinzip: Multiplikation der Modellfehlergleichung mit sog. Hilfsvariablen:
 $W^T \epsilon = W^T y - W^T \Phi a$

W ist so wählen, dass Spalten unkorreliert mit ϵ sind.

=> Lösung der modifizierten Normalgleichung: $a = (W^T \Phi)^{-1} W^T y$

Wahl von W:

1. Schätzen von Parametervektor mit MkQ: $\hat{a} = \Phi^+ y$
2. Simulation des Models $\hat{y} = \Phi \hat{a}$
3. $W = \dots$ (siehe Skript)
4. Schätzung mittels Hilfsvariablen

Iteratives Wiederholen von 2-4 beseitigt Bias von MkQ Schätzer

3. Subspace-based State-Space System Identification (4 SID)

3.1 Grundgleichungen, Zustandsraummodelle

Zustandsraummodell:

$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$ - Folgezustand abhängig von aktuellem Zustand + Eingang

$y[k] = Cx[k] + Du[k]$ - Ausgang abhängig von Zustand ü Eingang

Bekannt: N Messdatenpaare $u[k], y[k]$

Problem: Weder Zustandsfolge $x[k]$ noch Zustandsdimension n bekannt

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \dots \\ y[k-1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix}}_{\substack{Q_{B,k} \\ \text{Beobachtbarkeitsmatrix}}} x[0] + \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & D & 0 \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & CB & D \end{pmatrix}}_{H_k} \begin{pmatrix} u[0] \\ u[1] \\ \dots \\ u[k-1] \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung in Blockmatrizen:

$$Y = \begin{pmatrix} y[0] & \dots & y[N-2k] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y[k-1] & \dots & y[N-k-1] \\ \hline y[k] & \dots & y[N-k] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y[2k-1] & \dots & y[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_f \\ Y_p \end{pmatrix}$$

Analog für: $U = \begin{pmatrix} U_f \\ U_p \end{pmatrix}$

Subspace-Gleichungen

$$Y_p = Q_{B,k} X_p + H_K U_p$$

$$Y_f = Q_{B,k} X_f + H_K U_f$$

$$X_f = A^k x_p + Q_{S,k} U_p$$

mit $Q_{S,k} = (A^{k-1}B \ A^{k-2}B \ \dots \ AB \ B)$ (erweiterte Steuerbarkeitsmatrix)

Durch Umformen/Einsetzen ergibt sich:

$X_f = \dots$ (nur abhängig von Vergangenheit)

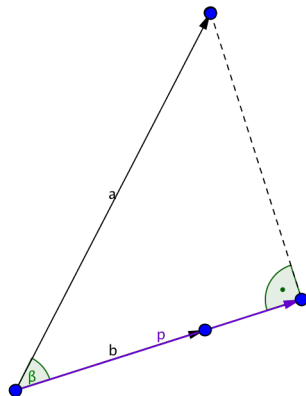
$$Y_f = Q_{B-k} L_{P,k} (U_p \ y_p)^T + H_k U_f$$

=> Für nächsten Ausgang Wissen der zukünftigen Eingabe erforderlich

3.2 Grundlagen: Projektion

3.2.1 Orthogonale Projektion

(0.5, 4.75)

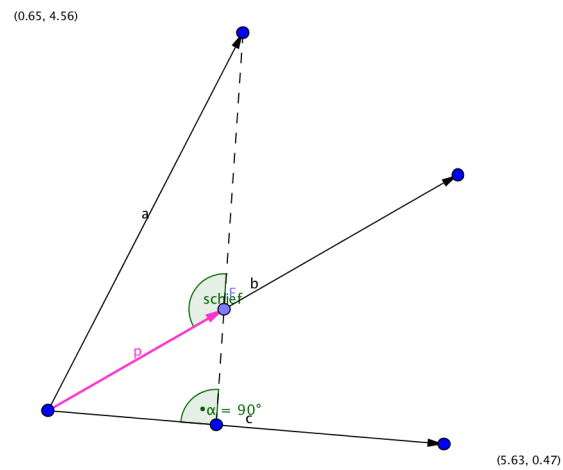


(5.58, 0.58)

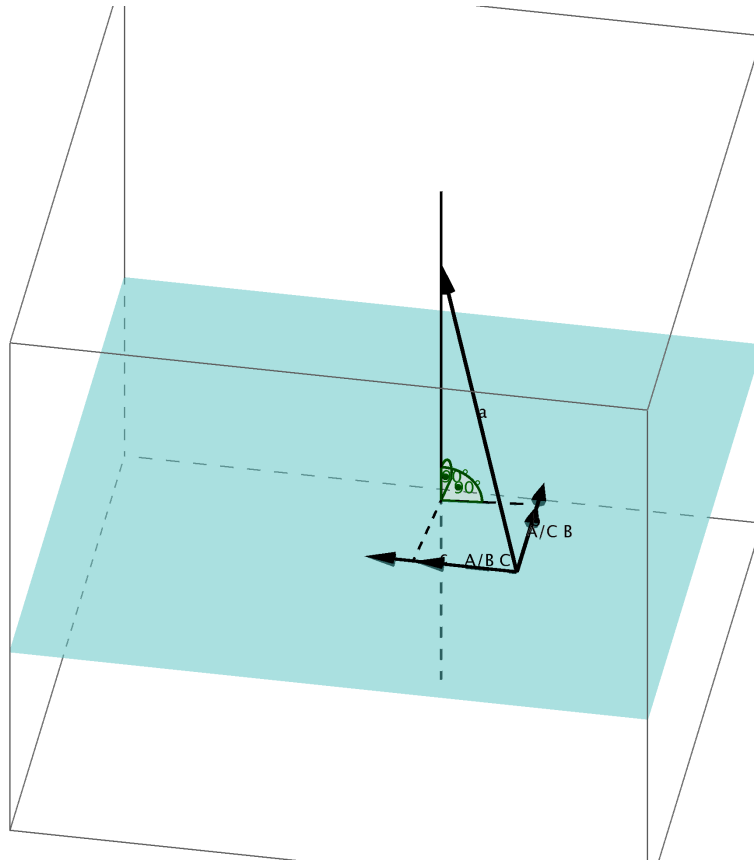
Im zweidimensionalen lässt sich der Projektor p folgendermaßen bestimmen:

$$p = a \cos \alpha \frac{|a|}{|b|} = a \frac{b^T b}{b b^T}$$

3.2.2 Schiefe Projektion



Allgemeine schiefe Projektion



Vorgehen:

- Senkrechte Projektion in die von B und C aufgespannte Ebene
- Schiefe Projektion der Ebene

Definition: Allgemeine schiefe Projektion entlang des Orthogonalkomplements von C auf B:

$$A/_CB := A \cdot \Pi$$

mit:

$$\Pi = (B^T \quad C^T) \begin{pmatrix} BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ablaufschema 4 SID

- Messdaten $u[i]$, $y[i]$ aufnehmen, in Hankelmatrizen U, Y anordnen

- Schiefen Prädiktor P berechnen
- SVD von P (Schätzung der Systemordnung (Länge Zustandsvektor); Schätzung für Beobachtbarkeitsmatrix $Q_{B,k}$)
- Berechnen von A, C
- Berechnen von B, D

Kalman-Filter

Ausgangspunkt: System mit Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + v[k] \\ y[k] &= Cx[k] + e[k]\end{aligned}$$

Annahmen

- Systemmatrizen A,B,C bekannt
- Eingang u[k], Ausgang y[k] bekannt
- Systemrauschen v[k] und Messrauschen e[k]: unkorrelierte, mittelwertfreie Rauschprozesse

Ziel

Schätzung $\hat{x}[k]$ des Zustandsvektors $x[k]$

Ansatz: Filterstruktur

$$\hat{x}[k+1] = \underbrace{A\hat{x}[k] + Bu[k]}_{\substack{\text{Prädiktionsterm} \\ \text{"a priori Schätzung"}}} + \underbrace{K[k]}_{\substack{\text{Kalman-Matrix} \\ \text{"Korrekturmatrix"}}} \underbrace{(y[k] - \hat{x}[k])}_{\text{Korrekturterm}}$$

- Dieser Schätzer ist besonders gut, da erwartungstreu
- Kalman-Matrix so wählen, dass Kovarianz $P[k]$ von Schätzfehler $\hat{x}[k+1] - x[k+1]$ minimiert wird

$$\begin{aligned}K[k] &= P[k]C^T(Y + CP[k]C^T)^{-1} \\ P[k+1] &= AP[k]A^T + V - K[k]CP[k]\end{aligned}$$

- V: Kovarianz des Systemrauschens
- Y: Kovarianz des Messrauschens (frei wählbar)

Ergebnis: erwartungstreuer Schätzer mit kleinster Varianz

Filteralgorithmus

1. Init: $\hat{x}[0]$ & $P[0]$ (Anfangszustand aus phys. Vorwissen wählen oder 0 setzen)
2. Prädiktion/Zeitupdate: Schätzung des Zustands auf Basis der Messwerte bis Zeitpunkt k

$$\hat{x}^-[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k]$$

3. Korrektur/Messupdate: Berechnung der neuen Kalman-Matrix, Korrektur der Zustandsschätzung anhand des neuen Messwertes $y[k+1] \rightarrow$ a posteriori Schätzung
- Schritte 2. und 3. iterativ für alle Messwerte wiederholen bis Schätzung des internen Zustands konvergiert

Kalman-Filter als Parameterschätzer

5. Identifikation nichtparametrischer Modelle

5.1 Frequenzgang mit period. Anregung

Variante 1: Anregung mit harmon. Eingangssignal (Sinus)

- Nach Einschwingen: Amplitude + Phase messen
- Wiederholung für versch. Frequenzen

Problem: reine Sinusschwingungen schwierig zu erzeugen

Variante 2: Anregung mit Trapez- oder Rechtecksignal

- Beginn bei hohen Frequenzen
- Bei kleineren Anregungsfrequenzen: Berücksichtigung der höheren harmonischen notwendig
- Aus vorherigen Messungen ist Übertragungsverhalten für hohe Frequenzen bekannt \rightarrow Signalanteile können subtrahiert werden; somit wird Grundschwingung isoliert

Nachteil: zeitaufwendig, da warten auf Einschwingen

Ausweg: Signale mit mehreren Frequenzanteilen

Allgemeine Nachteile:

- nur stabile Systeme
- keine passive Messungen

- nur kleine Störsignale

5.2 Korrelationsanalyse

5.2.1 Schätzung der Korrelationsfunktion

Def. Kreuzkorrelationsfolge: $R_{uy}[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k-j]y[k]$

Def. Autokorrelationsfolge: $R_u[j] = R_{uu}[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k-j]u[k]$

Eigenschaften:

- $R_{uy}[j] = R_{yu}[-j]$
- $R_u[j] = R_u[-j]$

Problem: Messung nur über endlichen Zeithorizont => Schätzung

Schätzung der Autokorrelationsfolge: $\hat{R}_u[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Bemerkung: Schätzung $\hat{R}_u[j]$ ist nicht erwartungstreu: $E\{\hat{R}_u[j]\} = (1 - \frac{|j|}{N})R_u[j]$

Andere Möglichkeit: $\hat{R}'_u[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-|j|} \sum_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Dieser Schätzer ist erwartungstreu, weist aber eine um den Faktor $N/(N-|j|)$ größere Varianz auf -> Praktisch wird ersterer verwendet

5.2.2 Schätzung der Gewichtsfolge

Für lineare zeitdiskrete Systeme sind Ein- und Ausgangssignal mittels Faltungssumme verknüpft:

$$y[k] = g * u = \sum_{l=0}^{\infty} g[k-l]u[l] = \sum_{l=0}^{\infty} g[l]u[k-l]$$

Für Kreuzkorrelationsfolge $R_{uy}[j]$ gilt:

$$R_{uy}[j] = \dots (\text{siehe Skript}) = g * R_u = \sum_{l=0}^{\infty} g[l]R_u[j-l]$$

Annahme: $R_{uy}[j]$ und $R_u[j]$ bekannt für j mit $-P \leq j \leq M$

=> Gleichungssystem aufstellen (siehe Skript)

Lösung mittels MkQ liefert:

$$\hat{g} = \hat{R}_u^+ \hat{R}_{uy}$$

Falls Eingangssignal weißes Rauschen mit Autokorrelationsfunktion

...

Dann folgt:

$$\hat{R}_{uy} = \hat{\sigma}^2 g[i]$$

=> Schätzung für Gewichtsfolge: $\hat{g}[i] = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \hat{R}_{uy}$

Parameterschätzung für Differenzengleichungen