

Zusammenfassung Modellbildung und Systemidentifikation

1. Grundlagen

1.1 Norm

Motivation: Maß für Fehler ist notwendig

Eigenschaften:

- Abbildung von Vektor auf reelle Zahl
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beispiele:

Euklidische Norm (2-Norm): $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Summennorm (Betragsnorm): $\|x\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|}$

Maximumsnorm : $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Matrixnormen

Matrixnorm heißt verträglich mit Vektornorm wenn:

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

(A: Matrix, V: Vektor)

Durch Vektornorm induzierte Matrixnorm:

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}$$

(A: Matrix, V: Vektor)

Bsp: Spektralnorm (induziert durch 2-Norm):

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\| = \sqrt{\{\lambda(A^T \cdot A)\}}$$

wobei λ die Singulärwerte der Matrix A sind.

Bsp für nicht induzierte Norm: Frobenius-Norm:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^T \cdot A)}$$

1.2 Dynamische Systeme

- mind 1 Eingang, mind 1 Ausgang, enthält “Gedächtnis” (=Energiespeicher)
- **linear**, wenn Superpositionsprinzip gilt:

$$G(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \cdot G \circ u_1 + \alpha_2 \cdot G \circ u_2 \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

- **zeitinvariant**, wenn beliebige zeitl. Verschiebung von Eingangssignal entsprechende zeitl. Verschiebung am Ausgang bewirkt
- nicht-parametrische Modellierung: Sprungantwort, Impulsantwort, Frequenzgang

1.2.1 Parametrische Modelle

Zustandsraumdarstellung aus physikalischem Modell

physikalische Modellierung \rightarrow DGL (evtl. Linearisierung um Ruhelage)

\rightarrow Laplace-Transformation

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots}$$

\rightarrow Zustandsraummodell mit Systemmatrizen $A_c \ B_c \ C_c$

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_c = (b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

Abtastung liefert diskretes Modell:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k] \end{aligned}$$

Diskretisierung des zeitkontinuierlichen Modells über Berechnung der Systemmatrizen:

Annahmen:

- Abtastung zu Zeitpunkten $t = k * \Delta t$

- Stückweise konstantes Eingangssignal

$$A_d = e^{A_e \cdot \Delta t}$$

$$B_d = B_c \cdot \int_{\tau}^{\Delta t} e^{A_e \cdot \tau} d\tau$$

$$C_d = C_c$$

1.3 Modellarten

$u(z)$: Systemeingang, $v(z)$: Fehler

Klassifikation nach Störung

AR (autoregressives System)

$$y = \frac{1}{C(z)} \cdot v$$

MA (Moving Average)

$$y = D(z) \cdot v$$

ARMA (autoregressiv + moving average)

$$y = \frac{D(z)}{C(z)} \cdot v$$

ARX (autoregressive with external input)

$$y = \frac{B(z)}{A(z)} u + \frac{1}{A(z)} v$$

AR MAX (autoregressive with external input)

$$y = \frac{B(z)}{A(z)} u + \frac{D(z)}{A(z)} v$$

Klassifikation nach determ. Eingang (Ausgangsfehler-Modell):

FIR

$$y = B(z)u + v$$

OE (output error)

$$y = \frac{B(z)}{A(z)}u + v$$

BJ (Box-Jenkins)

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot u + \frac{D(z)}{C(z)} \cdot v$$

2. Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Gegeben: Messdatenpaare, Modell $y = f(u, a)$

Ziel: Finde Parameter a , so dass $y_i \approx f(u_i, a)$ für Daten möglichst gut erfüllt wird

→ Überbestimmtes Problem → Minimierung von Modellfehler

$$\epsilon_i = y_i - f(u_i, a)$$

Gütekriterium: quadratischer Fehler

$$L(a) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \epsilon^T \cdot \epsilon$$

2.1 MkQ für Statische Systeme

Parameterlineare Modelle

Prinzip: Kostenfunktion $\epsilon^T \cdot \epsilon$ definieren und minimieren (Variante: Gewichtete Kostenfunktion)

mit $\epsilon = \text{Messwert} - \text{Modell}$

Gleichungssystem in Matrix-Form mit n Messwerten:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^T(u_1) \\ \dots \\ \varphi^T(u_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$y = \phi \cdot a$$

$$\text{Fehlerfunktion: } L(a) = \epsilon^T \epsilon = (y - \Phi a)^T (y - \Phi a) = y^T y - 2y^T \Phi a + (\Phi a)^T \Phi a$$

$$\text{Partielle Ableitung nach } a: L'(a) = -2y^T \Phi + 2a^T \Phi^T \Phi \stackrel{!}{=} 0$$

$$y^T \Phi = a^T \Phi^T \Phi$$

$$\Phi^T y = \Phi^T \Phi a$$

Gleichung umstellen ergibt Lösung :

$$a = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi \cdot y = \phi^+ \cdot y$$

Singulärwertzerlegung (SVD) kann für einfache Berechnung von ϕ^+ genutzt werden:

$$\phi = U \cdot \Sigma \cdot V^T \rightarrow \phi^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$$

$$\text{mit } \Sigma^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0\right)$$

ParameterNICHtlineare Modelle

Ansatz wie bei parameterlinearen Modellen.

Problem: nichtlineare Gleichungen, Minimum nicht so einfach bestimmbar

Lösung: Linearisierung der Fehlergleichung (in jedem Iterationsschritt)

Statt ϵ wird $\epsilon + \Delta\epsilon$ minimiert:

$$\epsilon + \Delta\epsilon = \underbrace{y - f(u, a)}_{\epsilon} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial a}(u, a \cdot \Delta a)}_{\Delta\epsilon}$$

Gauß-Newton-Verfahren (ggf. mit Dämpfungsfaktor)

- Iterationsvorschrift: $a_{i+1} = a_i + \Delta a_i = a_i + J_i^T(y - f(u, a_i))$
- keine gesicherte Konvergenz
- \rightarrow mit Dämpfungsfaktor α : $a_{i+1} = a_i + \alpha J_i^T(y - f(u, a_i))$

Gradientenverfahren (line search)

- Iterationsvorschrift: $a_{i+1} = a_i + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial a}(u, a_i) \right)^T \epsilon$
- α so wählen, dass L minimal wird

Levenberg-Marquardt-Algorithmus

- robuster als Gauß-Newton-Verfahren \rightarrow Formel siehe Skript

2.2 MkQ für Dynamische Systeme

Dynamisch zeitdiskrete Systeme

- Dynamische Modelle = ARX (autoregressive) Modelle
- Differenzengleichung der Form:

$$y[k] = b_m u[k-m] + b_{m-1} u[k-m+1] + \dots + b_0 u[k] + \epsilon[k] - (a_n y[k-n] + \dots + a_1 y[k-1])$$

- (Sonderfall: FIR mit $y[k] = b_m u[k-m] + b_{m-1} u[k-m+1] + \dots + b_0 u[k]$; Spezialfall Output-Error Modell)
- Gleichungssystem in Matrix-Form:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y[l] \\ y[l+1] \\ \dots \\ y[N-1] \end{pmatrix}}_{Y_{N-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -y[l-1] & \dots & -y[l-n] & u[l] & \dots & u[l-m] \\ -y[k] & \dots & -y[l-n+1] & u[l+1] & \dots & u[l-m+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y[N-2] & \dots & -y[N-1-m] & u[N-1] & \dots & u[N-1-m] \end{pmatrix}}_{\Phi_{N-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{a_{N-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e[l] \\ \dots \\ e[N-1] \end{pmatrix}}_{\epsilon_{N-1}}$$

$$Y_{N-1} = \Phi_{N-1} a_{N-1} + \epsilon_{N-1}$$

- Lösung (Minimierung von ϵ_{N-1}):

$$a_{N-1} = \Phi_{N-1}^+ Y_{N-1}$$

2.3 Dynamisch zeitkontinuierliche Systeme

Ausgangspunkt DGL:

$$y(kT) = (-y'(kT) \quad \dots \quad -y^{(n)}(kT) \quad u(kT) \quad \dots \quad u^{(m)}(kT)) \begin{pmatrix} a_1^c \\ \dots \\ a_n^c \\ b_0^c \\ \dots \\ b_m^c \end{pmatrix}$$

Problem: Ableitungen beschaffen

Beschaffung von Zeitableitungen:

- Finite Differenzen (Vorwärts/Rückwärtsdifferenzenquotient)
 - $y'(kT) \approx \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T}$

- $y'(kT) \approx \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T}$

Nachteil: Störanfällig, Messrauschen wird verstärkt, schlecht geeignet für höhere Ableitungen

b) Filterung von Ein- und Ausgangssignalen

Idee: Ausnutzen von Eigenschaften des Faltungsoperators

$$d/dt(x(t) * g(t)) = x(t) * d/dt(g(t)) \quad (g(t): \text{Impulsantwort})$$

Zustandsvariablenfilter mit Ansatz:

$$F(s) = \frac{f_0}{f_0 + f_1 s + \dots + s^n}$$

Adaptives Zustandsvariablenfilter

Iterationsvorschrift:

- Schätzung Nennerpolynom \hat{a}
- Anpassung der Filterkoeffizienten

z.B. Butterworth-Filter

Wann sind physikalische Parameter vollständig identifizierbar?

- Anzahl physikalischer Parameter $n_p = n + m + 1$ (Anzahl Modellparameter)
- Jacobi-Matrix $\partial f / \partial p$ ist regulär

2.4 Rekursive MkQ

- Herleitungsansatz: Ausgehend von a_n ergibt sich mit der nächsten Messung a_{n+1} und damit $\Phi_{n+1} = \begin{pmatrix} \Phi_N \\ \varphi_{N+1}^T \end{pmatrix}$ -> 2 Seiten Herleitung ergibt Iterationsvorschrift:

$$a_{N+1} = \underbrace{a_n}_{\text{vorheriger Parametervektor}} + \gamma_N \left(\underbrace{y[N+1]}_{\text{neuer Messwert}} - \underbrace{\Phi_{N+1}^T a_N}_{\text{vorhergesagter Ausgang}} \right)$$

Wahl der Startwerte:

- Nicht-rekursive MkQ
- Wahl von Standardwerten $a_0 = 0$ und $P_0^{-1} = \alpha I$

-> siehe Skript

Vorteile:

- Matrix-Inversion gespart
- Rechenaufwand konstant, unabhängig von Menge der Daten
- Rechenaufwand geringer
- online implementierbar
- deutlich weniger Speicherbedarf (vorheriger Parametervektor, aktuelles Messwert)

Rekursive MkQ mit exponentiell nachlassendem Gedächtnis

- mit Wichtungsmatrix

$$W_N = \begin{pmatrix} \lambda^{N-1} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- ältere Messwerte beeinflussen aktuelle Schätzung immer weniger (werden 'vergessen')
- Ausgleich von Arbeitspunktwechsel oder Störungen

2.5 Rechentechnische Umsetzung der MkQ

- Cholesky-Zerlegung (in Dreiecksmatrizen) vereinfacht Lösung von $Ax = b$; nur ca. 50% Rechenaufwand im Vgl. zu Gauss

- Orthogonalisierungsverfahren, Konditionierung, QR-Zerlegung -> siehe Skript

2.6 Identifikation nicht-linearer Systeme

Wiener-Modell: dynamisch lineares System + nicht-linear statisches System

Hammerstein-Modell

- nicht-linear statisches System + dynamisch lineares System

Einfacher Ansatz für nicht-Linearität: $\tilde{u}[k] = r_0 + r_1 \cdot u[k] + \dots r_p \cdot u[k]^p$

Ergibt lineares Modell mit mehreren Eingängen, darstellbar in der Form $y[k] = \phi a$:

```

      -----
u^0 -> r_0 -> |B(z^-1)|
u^1 -> r_1 -> |-----| -> Y
u^2 -> r_2 -> |A(z^-1)|
u^p -> r_p -> |-----|
(nicht die schönste ASCII-Art ...)
```

2.7 Modifikationen der MkQ

2.7.1 Totale MkQ (orthogonale Regression)

Minimierung des Fehlers der Ausgangsdaten F und des Fehlers der Eingangsdaten ϵ :

$$y + \epsilon = (\Phi + F)a$$

$$\Rightarrow [(\Phi y) + (F\epsilon)] \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Minimierung von $(F\epsilon)$ im Sinne der Frobeniusnorm.

Einschub: Singulärwertzerlegung

Mann kann Matrizen unter gewissen Voraussetzungen folgendermaßen zerlegen:

$$C = U\Sigma V^T$$

TODO

2.7.2 Methode der Hilfsvariablen

Anwendung: bei verzerrten Schätzern (ARX-Modell nicht perfekt)

Prinzip: Multiplikation der Modellfehlergleichung mit sog. Hilfsvariablen:
 $W^T \epsilon = W^T y - W^T \Phi a$

W ist so wählen, dass Spalten unkorreliert mit ϵ sind.

=> Lösung der modifizierten Normalengleichung: $a = (W^T \Phi)^{-1} W^T y$

Wahl von W:

1. Schätzen von Parametervektor mit MkQ: $\hat{a} = \Phi^+ y$
2. Simulation des Models $\hat{y} = \Phi \hat{a}$
3. $W = \dots$ (siehe Skript)
4. Schätzung mittels Hilfsvariablen

Iteratives Wiederholen von 2-4 beseitigt Bias von MkQ Schätzer

3. Subspace-based State-Space System Identification (4 SID)

Bisher:

- Identifikation von Differenzengleichungen/Übertragungsfunktionen
- aber: viele Methoden benötigen Zustandsraummodelle
- Problem: keine Infos über Zustand
- Vorteil: Schätzung von Zustandsdimension möglich

3.1 Grundgleichungen, Zustandsraummodelle

Zustandsraummodell:

$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$ - Folgezustand abhängig von aktuellem Zustand + Eingang

$y[k] = Cx[k] + Du[k]$ - Ausgang abhängig von Zustand ü Eingang

Bekannt: N Messdatenpaare $u[k], y[k]$

Problem: Weder Zustandsfolge $x[k]$ noch Zustandsdimension n bekannt

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[k-1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix}}_{\substack{Q_{B,k} \\ \text{Beobachtbarkeitsmatrix}}} x[0] + \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & D & 0 \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & CB & D \end{pmatrix}}_{H_k} \begin{pmatrix} u[0] \\ u[1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung in Blockmatrizen:

$$Y = \begin{pmatrix} y[0] & \dots & y[N-2k] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y[k-1] & \dots & y[N-k-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y[k] & \dots & y[N-k] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y[2k-1] & \dots & y[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_f \\ Y_p \end{pmatrix}$$

Analog für: $U = \begin{pmatrix} U_f \\ U_p \end{pmatrix}$

Subspace-Gleichungen

$$Y_p = Q_{B,k} X_p + H_K U_p$$

$$Y_f = Q_{B,k} X_f + H_K U_f$$

$$X_f = A^k x_p + Q_{S,k} U_p$$

mit $Q_{S,k} = \begin{pmatrix} A^{k-1}B & A^{k-2}B & AB & B \end{pmatrix}$ (erweiterte Steuerbarkeitsmatrix)

Durch Umformen/Einsetzen ergibt sich:

$X_f = \dots$ (nur abhängig von Vergangenheit)

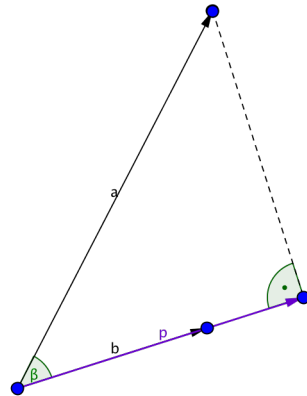
$$Y_f = Q_{B-k} L_{P,k} \begin{pmatrix} U_p \\ y_p \end{pmatrix} + H_k U_f$$

=> Für nächsten Ausgang Wissen der zukünftigen Eingabe erforderlich

3.2 Grundlagen: Projektion

3.2.1 Orthogonale Projektion

(0.5, 4.75)

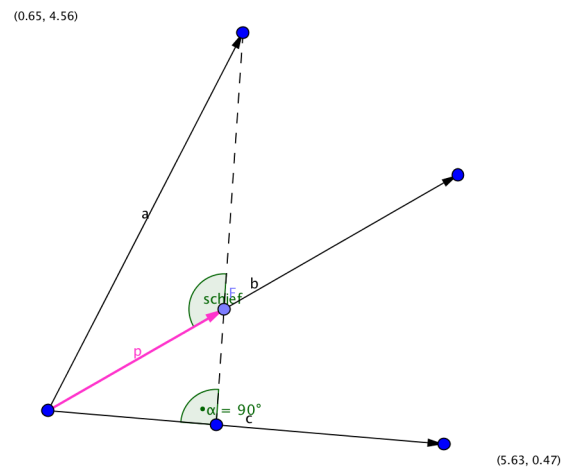


(5.58, 0.58)

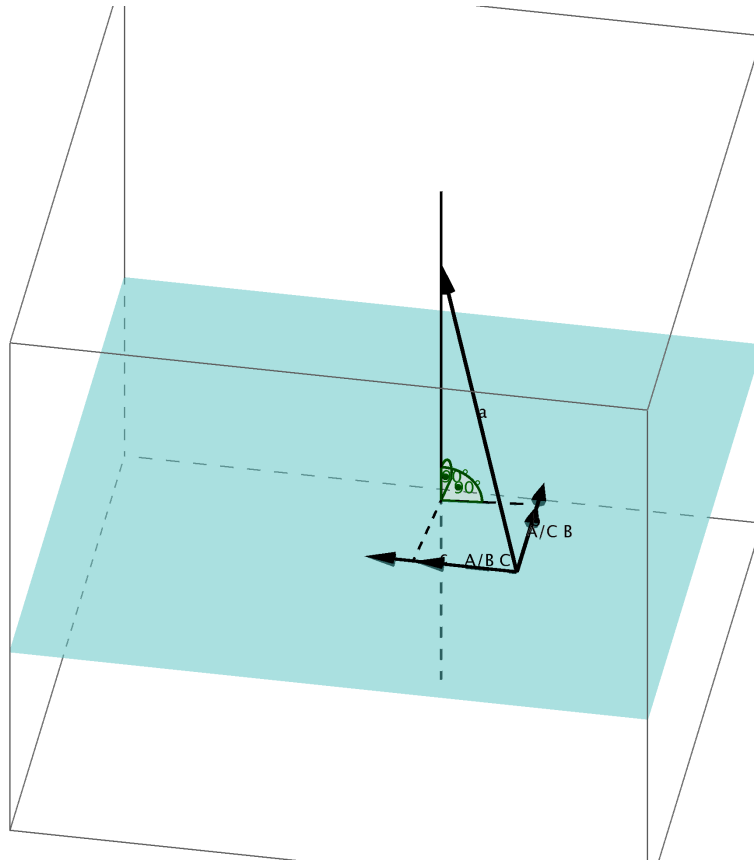
Im zweidimensionalen lässt sich der Projektor p folgendermaßen bestimmen:

$$p = a \cos \alpha \frac{|a|}{|b|} = a \frac{b^T b}{b b^T}$$

3.2.2 Schiefe Projektion



Allgemeine schiefe Projektion



Vorgehen:

- Senkrechte Projektion in die von B und C aufgespannte Ebene
- Schiefe Projektion der Ebene

Definition: Allgemeine schiefe Projektion entlang des Orthogonalkomplements von C auf B:

$$A/_CB := A \cdot \Pi$$

mit:

$$\Pi = \begin{pmatrix} B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ablaufschema 4 SID

- Messdaten $u[i]$, $y[i]$ aufnehmen, in Hankelmatrizen U , Y anordnen
- Schiefen Prädiktor P berechnen
- SVD von P (Schätzung der Systemordnung (Länge Zustandsvektor); Schätzung für Beobachtbarkeitsmatrix $Q_{B,k}$)
- Berechnen von A , C
- Berechnen von B , D

4. Kalman-Filter

Ausgangspunkt: System mit Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + v[k] \\ y[k] &= Cx[k] + e[k]\end{aligned}$$

4.1 Grundannahmen

- Systemmatrizen A,B,C bekannt
- Eingang $u[k]$, Ausgang $y[k]$ bekannt
- Systemrauschen $v[k]$ und Messrauschen $e[k]$: unkorrelierte, mittelwertfreie Rauschprozesse

Ziel

Schätzung $\hat{x}[k]$ des Zustandsvektors $x[k]$

4.2 Ansatz: Filterstruktur

$$\hat{x}[k+1] = \underbrace{A\hat{x}[k] + Bu[k]}_{\substack{\text{Prädiktionsterm} \\ \text{"a priori Schätzung"}}} + \underbrace{K[k]}_{\substack{\text{Kalman-Matrix} \\ \text{"Korrekturmatrix"}}} \underbrace{(y[k] - \hat{x}[k])}_{\text{Korrekturterm}}$$

- Dieser Schätzer ist besonders gut, da erwartungstreu
- Kalman-Matrix so wählen, dass Kovarianz $P[k]$ von Schätzfehler $\tilde{x}[k+1] = \hat{x}[k+1] - x[k+1]$ minimiert wird

$$\begin{aligned}K[k] &= P[k]C^T(Y + CP[k]C^T)^{-1} \\ P[k+1] &= AP[k]A^T + V - K[k]CP[k]\end{aligned}$$

- V: Kovarianz des Systemrauschens
- Y: Kovarianz des Messrauschens (frei wählbar)

Ergebnis: erwartungstreuer Schätzer mit kleinster Varianz

Filteralgorithmus

1. Init: $\hat{x}[0]$ & $P[0]$ (Anfangszustand aus phys. Vorwissen wählen oder 0 setzen)
2. Prädiktion/Zeitupdate: Schätzung des Zustands auf Basis der Messwerte bis Zeitpunkt k

$$\hat{x}^{-}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k]$$

3. Korrektur/Messupdate: Berechnung der neuen Kalman-Matrix, Korrektur der Zustandsschätzung anhand des neuen Messwertes $y[k+1] \rightarrow$ a posteriori Schätzung
- Schritte 2. und 3. iterativ für alle Messwerte wiederholen bis Schätzung des internen Zustands konvergiert

4.3 Kalman-Filter als Parameterschätzer

Ausgangspunkt: statisches, parameterlineares Modell

$$y[k] = \varphi^T[k]a = +e[k]$$

Modell als lineares Zustandsraummodell:

$$a[k+1] = a[k]$$

-> interner Zustand = Parameter = konstant

$$y[k] = \varphi^T[k]a[k] = +e[k]$$

Kalman-Filter entspricht in dieser Form der rekursiven MkQ

4.4 Extended Kalman-Filter

$$x[k+1] = \underbrace{f(x[k], u[k])}_{\text{nicht lin. Fkt.}} + v[k]$$

$$y[k] = \underbrace{h(x[k])}_{\text{nicht lin. Fkt.}} = +e[k]$$

- Linearisieren der Systemmatrizen $A[k]$, $B[k]$ und $C[k]$ um geschätzten Zustand
- a posteriori Schätzung: $\hat{x}^{-}[k+1] = f(\hat{x}[k], u[k])$
- sonst wie bei linear

5. Identifikation nichtparametrischer Modelle

5.1 Frequenzgang mit period. Anregung

Variante 1: Anregung mit harmon. Eingangssignal (Sinus)

- Nach Einschwingen: Amplitude + Phase messen
- Wiederholung für versch. Frequenzen

Problem: reine Sinusschwingungen schwierig zu erzeugen

Variante 2: Anregung mit Trapez- oder Rechtecksignal

- Beginn bei hohen Frequenzen
- Bei kleineren Anregungsfrequenzen: Berücksichtigung der höheren harmonischen notwendig
- Aus vorherigen Messungen ist Übertragungsverhalten für hohe Frequenzen bekannt -> Signalanteile können subtrahiert werden; somit wird Grundschwingung isoliert

Nachteil: zeitaufwendig, da Warten auf Einschwingen

Ausweg: Signale mit mehreren Frequenzanteilen

Allgemeine Nachteile:

- nur stabile Systeme
- keine passive Messungen
- nur kleine Störsignale

5.2 Korrelationsanalyse

5.2.1 Schätzung der Korrelationsfunktion

Def. Kreuzkorrelationsfolge: $R_{uy}[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k-j]y[k]$

Def. Autokorrelationsfolge: $R_u[j] = R_{uu}[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k-j]u[k]$

Eigenschaften:

- $R_{uy}[j] = R_{yu}[-j]$
- $R_u[j] = R_u[-j]$

Problem: Messung nur über endlichen Zeithorizont => Schätzung

Schätzung der Autokorrelationsfolge: $\hat{R}_u[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Bemerkung: Schätzung $\hat{R}_u[j]$ ist nicht erwartungstreu: $E\{\hat{R}_u[j]\} = (1 - \frac{|j|}{N})R_u[j]$

Andere Möglichkeit: $\hat{R}'_u[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-|j|} \sum_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Dieser Schätzer ist erwartungstreu, weist aber eine um den Faktor $N/(N-|j|)$ größere Varianz auf -> Praktisch wird ersterer verwendet

5.2.2 Schätzung der Gewichtsfolge

Für lineare zeitdiskrete Systeme sind Ein- und Ausgangssignal mittels Faltungssumme verknüpft:

$$y[k] = g * u = \sum_{l=0}^{\infty} g[k-l]u[l] = \sum_{l=0}^{\infty} g[l]u[k-l]$$

Für Kreuzkorrelationsfolge $R_{uy}[j]$ gilt:

$$R_{uy}[j] = \dots (\text{siehe Skript}) = g * R_u = \sum_{l=0}^{\infty} g[l]R_u[j-l]$$

Annahme: $R_{uy}[j]$ und $R_u[j]$ bekannt für j mit $-P \leq j \leq M$

=> Gleichungssystem aufstellen (siehe Skript)

Lösung mittels MkQ liefert:

$$\hat{g} = \hat{R}_u^+ \hat{R}_{uy}$$

Falls Eingangssignal weißes Rauschen mit Autokorrelationsfunktion

...

Dann folgt:

$$\hat{R}_{uy} = \hat{\sigma}^2 g[i]$$

=> Schätzung für Gewichtsfolge: $\hat{g}[i] = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \hat{R}_{uy}$

5.2.3 Parameterschätzung für Differenzengleichungen

Ausgangspunkt Differenzengleichung:

$$a_n y[k-n] + a_{n-1} y[k-(n-1)] + \dots + y[k] = b_m u[k-m] + \dots b_0 u[k]$$

...

Umformung ergibt zusammengefasst:

$$\hat{R}_{u,y}[j] = \begin{pmatrix} -\hat{R}_{u,y}[j-1] & \dots & -\hat{R}_{u,y}[j-n] & \hat{R}_u[j] & \dots & \hat{R}_u[j-m] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Für $j = n, n+1, \dots$: überbestimmtes GLS => MkQ

5.3 Parameterschätzung aus nicht parametrischen Modellen

Momentenmethode

Entwicklung von $G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$ in Taylor-Reihe:

$$G(s) = \dots = \underbrace{\int_0^\infty g(t)dt}_{M_0} - s \underbrace{\int_0^\infty g(t) \cdot t dt}_{M_1} + \frac{s^2}{2} \underbrace{\int_0^\infty g(t) \cdot t^2 dt}_{M_2} + \dots$$

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!} M_k s^k$$

M_k sind experimentell oder numerisch zu bestimmen.

=> Gleichsetzen von Taylor-Reihe mit $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ ermöglicht Koeffizientenvergleich

5.4 Testsignale

5.4.1 Pseudo-Rausch-Binär-Signale

Beim Erzeugen von Testsignalen sind binäre Signale zu bevorzugen.

Diskretes binäres Rauschsignal (DRBs): regelloser Wechsel zwischen Werten +a und -a zu diskreten Zeitpunkten kT

Zeitdiskrete Autokorrelationsfolge

$$R_u[k] = \begin{cases} a^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(gleiche AKF wie diskretes weißes Rauschen mit beliebiger Amplitude)

Für endl. Meßzeit ändert sich die AKF, d.h. sie muss im Einzelfall ermittelt werden

-> Übergang zu periodischen Signalen (also deterministisch), die eine ähnliche AKF besitzen (**Pseudo-Rausch-Binär-Signal PRBS**)

- Erzeugung durch (mit XORs) rückgekoppelte Schieberegister
- für Rückkopplung bestimmter Stufen erfolgt Durchlaufen aller $2^n - 1$ Belegungen des Registers bevor sich eine Belegung wiederholt
- Periodenlänge: $(2^n - 1) \cdot n$
- Mittelwert: $\frac{N+1}{2} \cdot a - \frac{N-1}{2} \cdot a = \frac{a}{N}$
- Autokorrelationsfolge: $R_u[k] = \begin{cases} a^2 & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ \frac{a^2}{N} & \text{sonst} \end{cases}$

6. Statistische Parameteridentifikation

6.1 Maximum-Likelihood-Methode

6.1.1 Grundgedanke

bisher: keine Annahme für Verteilungsfunktion der betrachteten Fehlersignale

jetzt: stochastische (meist normalverteilte) Fehlersignale mit bekannter Verteilung

Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, a)$ abhängig von Parameter a . Wahrscheinlichkeit für Auftreten der Stichprobe x_1, \dots, x_N :

$$L(a) = P(x_1, a) \cdot P(x_2, a) \cdot \dots \cdot P(x_N, a)$$

Diese Funktion wird als **Likelihood-Funktion** bezeichnet.

Maximum-Likelihood-Schätzung: $\hat{a} = \underset{a}{\operatorname{argmax}} L$

Einfacher zu analysieren: **Log-Likelihood-Funktion**

$$\ln(L(a)) = \ln(P(x_1, a)) + \ln(P(x_2, a)) + \dots + \ln(P(x_N, a))$$

Ableitung liefert notwendige Bedingung für Maximum:

$$\frac{\partial(L)}{\partial a} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \ln p(x_i, a)}{\partial a} \stackrel{!}{=} 0$$

6.1.2 Maximum-Likelihood-Schätzer für statische Systeme

- statischer Prozess mit Eingang u , Ausgang y
- Likelihood-Funktion als bedingte Wahrscheinlichkeit $p(y|u, a)$

Für parameterlineare Systeme der Form $y_i = \Phi(u_i) \cdot a + \epsilon_i$ mit normalverteiltem, mittelwertfreiem Fehler ϵ_i mit Standardabweichung σ_ϵ berechnet sich die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Folge $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ zu:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\epsilon^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon^T \epsilon}{2\sigma_\epsilon^2}\right)$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Abweichung $\epsilon = y - \Phi u$ maximiert.

Log-Likelihood-Funktion:

$$\ln L = \ln \left[\frac{1}{(2\pi\sigma_\epsilon^2)^{N/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(y - \Phi a)^T (y - \Phi a)}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \right]$$

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma_\epsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} (y - \Phi a)^T (y - \Phi a)$$

Ableiten liefert:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} (y - \Phi a)^T \Phi \stackrel{!}{=} 0$$

Gleichung auflösen:

$$y^T \Phi = a^T \Phi^T \Phi$$

$$\Phi^T y = \Phi^T \Phi a$$

$$\hat{a} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

MLE liefert also für normalverteilte Fehler den gleichen Schätzer wie MkQ!

6.1.3 Maximum-Likelihood-Schätzer für dynamische Systeme

- MkQ: ARX-Modell
- ML: ARX-MAX-Modell? (Allgemeiner)

6.2 Bayes-Methode

-> auch Prozessparameter a als stoch. Größe modelliert

Bayes-Methode <-> MLE <-> MkQ

<———— Allgemeiner

————> weniger Rechenaufwand

Zusammenfassende Fragen

- Ansatz Herleitung der MkQ; Was wird Minimiert?
- Gegeben: Messdaten Eingang + Ausgang
 - Welches Vorgehen?
 - Welcher Ansatz setzt was voraus?
 - linear \leftrightarrow nicht-linear unterscheiden
 - parameterlinear \leftrightarrow nicht-parameterlinear unterscheiden
- statisch \leftrightarrow dynamische Systeme
- Umrechnung kontinuierliche \leftrightarrow diskrete Systeme
 - Warum notwendig?
 - Wie zurück rechnen?
- 4SID nur knapp
 - Zustandsraum
 - Vorteile (Mehrgrößen und Dimension)
 - Nachteil (Verzerrter Schätzer wie MkQ; Zusammenhang physikalische Systeme, schlechte Abbildung)
- Kalman-Filter (Struktur, nicht unbedingt Details)
- Rekursive MkQ
 - keine Herleitung
 - Was bringt diese Methode?
 - Matrix-Inversion gespart
 - Rechenaufwand gering
 - online implementierbar
 - Wieviele/ welche Daten müssen gespeichert werden? Vergleich mit MkQ
- Nicht-lineare Systeme (Hammerstein-Modell)
- Frequenzgang-Messung (aufwendig, zeitintensiv, nicht-parametrisches Modell nicht besonders nützlich)
- Erzeugung Pseudo-Rausch-Binär-Signal
- Identifikation physikalischer Parameter

Weniger relevant

- Matrixzerlegung
- Projektion
- Methode der Hilfsvariablen; totale MkQ (jeweils nur Grundkonzept wissen)