

Zusammenfassung Modellbildung und Systemidentifikation

1. Grundlagen

Norm

Motivation: Maß für Fehler ist notwendig

Eigenschaften:

- Abbildung von Vektor auf reelle Zahl
- $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beispiele:

Euklidische Norm (2-Norm): $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Summennorm (Betragsnorm): $\|x\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|}$

Maximumsnorm : $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Matrixnormen

Matrixnorm heißt verträglich mit Vektornorm wenn:

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

(A: Matrix, V: Vektor)

Durch Vektornorm induzierte Matrixnorm:

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}$$

(A: Matrix, V: Vektor)

Bsp: Spektralnorm (induziert durch 2-Norm):

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\| = \sqrt{\lambda(A^T \cdot A)}$$

wobei λ die Singulärwerte der Matrix A sind.

Bsp für nicht induzierte Norm: Frobenius-Norm:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^T \cdot A)}$$

Dynamische Systeme

- mind 1 Eingang, mind 1 Ausgang, enthält “Gedächtnis” (=Energiespeicher)
- **linear**, wenn Superpositionsprinzip gilt:

$$G(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \cdot G \circ u_1 + \alpha_2 \cdot G \circ u_2 \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

- **zeitinvariant**, wenn beliebige zeitl. Verschiebung von Eingangssignal entsprechende zeitl. Verschiebung am Ausgang bewirkt
- nicht-parametrische Modellierung: Sprungantwort, Impulsantwort, Frequenzgang

Parametrische Modelle

physikalische Modellierung => DGL => Laplace-Transformation => Zustandsraummodell mit Systemmatrizen

Abtastung liefert diskretes Modell:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] \end{aligned}$$

Berechnung der Systemmatrizen aus zeitkontinuierlichen Modell:

$$\begin{aligned} A_D &= e^{A^C \cdot \Delta t} \\ B_D &= B^C \cdot \int_{\tau}^{\Delta t} e^{A^C \cdot \tau} d\tau \\ C_D &= C^C \end{aligned}$$

Modellarten

$u(z)$: Systemeingang, $v(z)$: Fehler

Klassifikation nach Störung

AR (autoregressives System)

$$y = \frac{1}{C(z)} \cdot v$$

MA (Moving Average)

$$y = D(z) \cdot v$$

ARMA

$$y = \frac{D(z)}{C(z)} \cdot v$$

ARX (autoregressive with external input)

$$y = \frac{B(z)}{A(z)}u + \frac{1}{A(z)}v$$

AR MAX (autoregressive with external input)

$$y = \frac{B(z)}{A(z)}u + \frac{D(z)}{A(z)}v$$

Klassifikation nach determ. Eingang (Ausgangsfehler-Modell):

Fir

$$y = B(z)u + v$$

OE (output error)

$$y = \frac{B(z)}{A(z)}u + v$$

BJ (Box-Jenkins)

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot u + \frac{D(z)}{C(z)} \cdot v$$

2. Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Gegeben: Messdatenpaare, Modell $y = f(u, a)$

Ziel: finde Parameter a , so dass $y_i \approx f(u_i, a)$ für Daten möglichst gut erfüllt wird

-> Überbestimmtes Problem -> Minimierung von Modellfehler

$$\epsilon_i = y_i - f(u_i, a)$$

Gütekriterium:

$$L(a) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \epsilon^T \cdot \epsilon$$

MkQ für Statische Systeme

Parameterlineare Modelle

Prinzip: Kostenfunktion $\epsilon^T \cdot \epsilon$ definieren und minimieren (Variante: Gewichtete Kostenfunktion)

mit $\epsilon = \text{Messwert} - \text{Modell}$

Gleichungssystem in Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^T(u_1) \\ \dots \\ \phi^T(u_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$y = \phi \cdot a$$

$$\text{Fehlerfunktion: } L(a) = \epsilon^T \epsilon = (y - \Phi a)^T (y - \Phi a) = y^T y - 2y^T \Phi a + (\Phi a)^T \Phi a$$

$$\text{Partielle Ableitung nach } a: L'(a) = -2y^T \Phi + 2a^T \Phi^T \Phi \stackrel{!}{=} 0$$

$$y^T \Phi = a^T \Phi^T \Phi$$

$$\Phi^T y = \Phi^T \Phi a$$

Gleichung umstellen ergibt Lösung :

$$a = (\phi^T \cdot \phi)^{-1} \cdot \phi \cdot y = \phi^+ \cdot y$$

Singulärwertzerlegung (SVD) kann für einfache Berechnung von ϕ^+ genutzt werden:

$$\phi = U \cdot \Sigma \cdot V^T \rightarrow \phi^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$$

$$\text{mit: } \Sigma^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0\right)$$

ParameterNICHTlineare Modelle

Ansatz wie bei parameterlinearen Modellen.

Problem: nichtlineare Gleichungen, Minimum nicht so einfach bestimmbar

Lösung: Linearisierung der Fehlergleichung (in jedem Iterationsschritt)

Statt ϵ wird $\epsilon + \Delta\epsilon$ minimiert:

$$\epsilon + \Delta\epsilon = \underbrace{y - f(u, a(u))}_{\epsilon} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial a}(u, a(u)) \cdot \Delta a(u)}_{\Delta\epsilon}$$

Gauß-Newton-Verfahren (geg. mit Dämpfungsfaktor)

- Iterationsvorschrift: $a_{i+1} = a_i + \Delta a_i = a_i + J_i^T(y - f(u, a_i))$
- keine gesicherte Konvergenz
- => Dämpfungsfaktor: $a_{i+1} = a_i + \alpha J_i^T(y - f(u, a_i))$

Gradientenverfahren (line search)

- Iterationsvorschrift: $a_{i+1} = a_i + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial a}(u, a_i)\right)^T$
- α so wählen, dass L minimal wird

Levenberg-Marquardt-Algorithmus

- robuster als Gauß-Newton-Verfahren -> Formel siehe Skript

MkQ für Dynamische Systeme

2.2 Dynamisch zeitdiskrete Systeme

Dynamische Modelle = ARX (autoregressive) Modelle

Dynamisch zeitkontinuierliche Systeme

Ausgangspunkt: DGL

Problem: Ableitungen beschaffen

Lösung:

- a) Finite Differenzen (Vorwärts/Rückwärtsdifferenz) Störanfällig, Messrauschen wird verstärkt
- b) Filterung von Ein- und Ausgangssignalen

Idee: Ausnutzen von Eigenschaften des Faltungsoperators

$$d/dt(x(t) * g(t)) = x(t) * d/dt(g(t)) \quad (g(t): \text{Impulsantwort})$$

Zustandsvariablenfilter:

Ansatz:

$$F(s) = \frac{f_0}{f_0 + f_1 s + \dots + s^n}$$

Adaptives Zustandsvariablenfilter:

z.B. Butterworth-Filter

Wann sind physikalische Parameter vollständig identifizierbar?

- $np = n + m + 1$
- Jacobi-Matrix $\delta f / \delta p$ ist regulär

Rekursive MkQ

Iterationsvorschrift -> siehe Skript

Bestimmung der Startwerte

Nutzung der nicht-rekursiven MkQ

Wahl von Standardwerten

Startwertwahl von $a_0 = 0$ $P_0 = 1/\alpha I$ (I : Einheitsmatrix). Dies führt für große Alpha zu $P_k \approx \phi_k^T \phi_k$

Rekursive MkQ mit exponentiell nachlassendem Gedächtnis

Rechentechnische Umsetzung der MkQ

TODO

Identifikation nicht-linearer Systeme

Hammerstein-Modell: nicht-linear statisches System + dynamisch lineares System

Einfacher Ansatz für nicht-Linearität: $\tilde{u}[k] = r_0 + r_1 \cdot u[k] + \dots r_p \cdot u[k]^p$

Ergibt lineares Modell mit mehreren Eingängen, darstellbar in der Form $y[k] = \phi a$

2.7 Modifikationen der MkQ

2.7.1 Totale MkQ (orthogonale Regression)

Minimierung des Fehlers der Ausgangsdaten F und des Fehlers der Eingangsdaten ϵ :

$$y + \epsilon = (\Phi + F)a$$

$$\Rightarrow [(\Phi y) + (F\epsilon)] \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Minimierung von $(F\epsilon)$ im Sinne der Frobeniusnorm.

Einschub: Singulärwertzerlegung

Mann kann Matrizen unter gewissen Voraussetzungen folgendermaßen zerlegen:

$$C = U\Sigma V^T$$

TODO

2.7.2 Methode der Hilfsvariablen

Anwendung: bei verzerrten Schätzern (ARX-Modell nicht perfekt)

Prinzip: Multiplikation der Modellfehlergleichung mit sog. Hilfsvariablen:
 $W^T \epsilon = W^T y - W^T \Phi a$

W ist so wählen, dass Spalten unkorreliert mit ϵ sind.

=> Lösung der modifizierten Normalengleichung: $a = (W^T \Phi)^{-1} W^T y$

Wahl von W:

1. Schätzen von Parametervektor mit MkQ: $\hat{a} = \Phi^+ y$
2. Simulation des Modells $\hat{y} = \Phi \hat{a}$
3. $W = \dots$ (siehe Skript)
4. Schätzung mittels Hilfsvariablen

Iteratives Wiederholen von 2-4 beseitigt Bias von MkQ Schätzer

3. Subspace-based State-Space System Identification (4 SID)

3.1 Grundgleichungen, Zustandsraummodelle

Zustandsraummodell:

$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$ - Folgezustand abhängig von aktuellem Zustand + Eingang

$y[k] = Cx[k] + Du[k]$ - Ausgang abhängig von Zustand ü Eingang

Bekannt: N Messdatenpaare $u[k], y[k]$

Problem: Weder Zustandsfolge $x[k]$ noch Zustandsdimension n bekannt

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[k-1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix}}_{\substack{Q_{B,k} \\ \text{Beobachtbarkeitsmatrix}}} x[0] + \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & D & 0 \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & CB & D \end{pmatrix}}_{H_k} \begin{pmatrix} u[0] \\ u[1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung in Blockmatrizen:

$$Y = \begin{pmatrix} y[0] & \dots & y[N-2k] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y[k-1] & \dots & y[N-k-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y[k] & \dots & y[N-k] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y[2k-1] & \dots & y[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_f \\ Y_p \end{pmatrix}$$

Analog für: $U = \begin{pmatrix} U_f \\ U_p \end{pmatrix}$

Subspace-Gleichungen

$$Y_p = Q_{B,k}X_p + H_K U_p$$

$$Y_f = Q_{B,k}X_f + H_K U_f$$

$$X_f = A^k x_p + Q_{S,k} U_p$$

mit $Q_{S,k} = (A^{k-1}B \ A^{k-2}B \ \dots \ AB \ B)$ (erweiterte Steuerbarkeitsmatrix)

Durch Umformen/Einsetzen ergibt sich:

$X_f = \dots$ (nur abhängig von Vergangenheit)

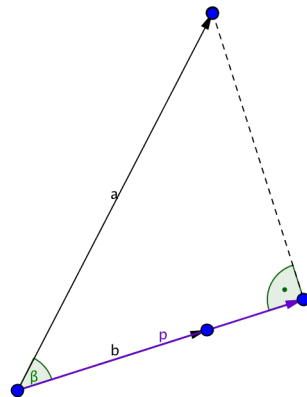
$$Y_f = Q_{B-k} L_{P,k} (U_p y_p)^T + H_k U_f$$

=> Für nächsten Ausgang Wissen der zukünftigen Eingabe erforderlich

3.2 Grundlagen: Projektion

3.2.1 Orthogonale Projektion

(0.5, 4.75)



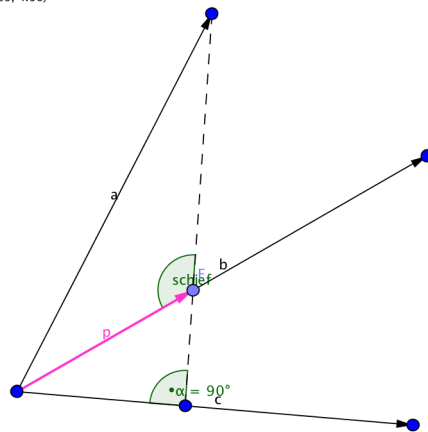
(5.58, 0.58)

Im zweidimensionalen lässt sich der Projektor p folgendermaßen bestimmen:

$$p = a \cos \alpha \frac{|a|}{|b|} = a \frac{b^T b}{b b^T}$$

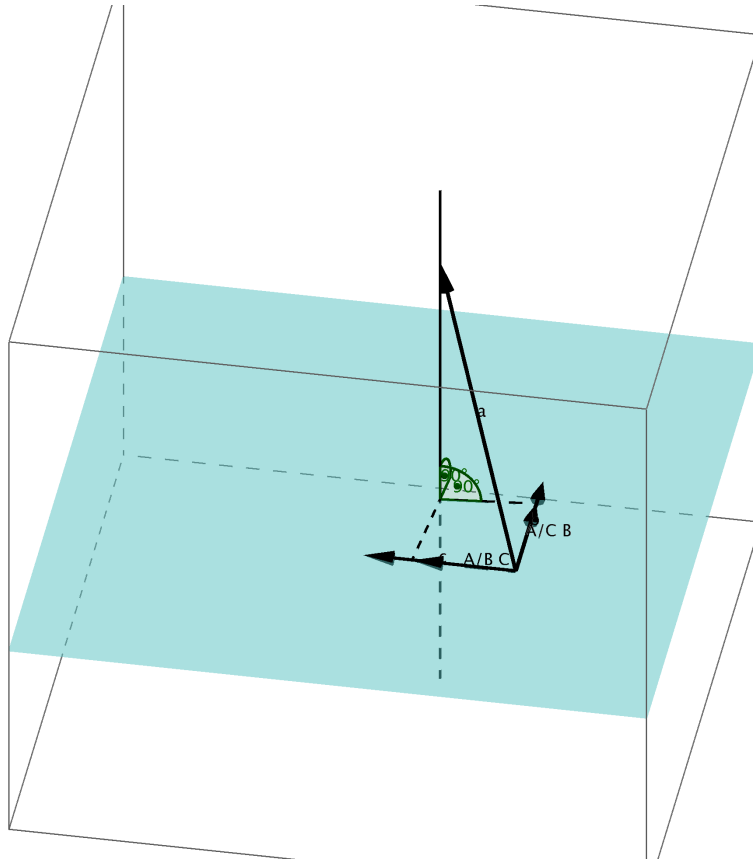
3.2.2 Schiefe Projektion

(0.65, 4.56)



(5.63, 0.47)

Allgemeine schiefe Projektion



Vorgehen:

- Senkrechte Projektion in die von B und C aufgespannte Ebene
- Schiefe Projektion der Ebene

Definition: Allgemeine schiefe Projektion entlang des Orthogonalokomplements von C auf B:

$$A/_CB := A \cdot \Pi$$

mit:

$$\Pi = (B^T \ C^T) \begin{pmatrix} BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ablaufschema 4 SID

- Messdaten $u[i]$, $y[i]$ aufnehmen, in Hankelmatrizen U , Y anordnen
- Schiefen Prädiktor P berechnen
- SVD von P (Schätzung der Systemordnung (Länge Zustandsvektor); Schätzung für Beobachtbarkeitsmatrix $Q_{B,k}$)
- Berechnen von A , C
- Berechnen von B , D

4. Kalman-Filter

Ausgangspunkt: System mit Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + v[k] \\ y[k] &= Cx[k] + e[k]\end{aligned}$$

Annahmen

- Systemmatrizen A,B,C bekannt
- Eingang $u[k]$, Ausgang $y[k]$ bekannt
- Systemrauschen $v[k]$ und Messrauschen $e[k]$: unkorrelierte, mittelwertfreie Rauschprozesse

Ziel

Schätzung $\hat{x}[k]$ des Zustandsvektors $x[k]$

Ansatz: Filterstruktur

$$\hat{x}[k+1] = \underbrace{A\hat{x}[k] + Bu[k]}_{\substack{\text{Prädiktionsterm} \\ \text{"a priori Schätzung"}}} + \underbrace{K[k]}_{\substack{\text{Kalman-Matrix} \\ \text{"Korrekturmatrix"}}} \underbrace{(y[k] - \hat{x}[k])}_{\text{Korrekturterm}}$$

- Dieser Schätzer ist besonders gut, da erwartungstreu
- Kalman-Matrix so wählen, dass Kovarianz $P[k]$ von Schätzfehler $\tilde{x}[k+1] = \hat{x}[k+1] - x[k+1]$ minimiert wird

$$\begin{aligned}K[k] &= P[k]C^T(Y + CP[k]C^T)^{-1} \\ P[k+1] &= AP[k]A^T + V - K[k]CP[k]\end{aligned}$$

- V: Kovarianz des Systemrauschens
- Y: Kovarianz des Messrauschens (frei wählbar)

Ergebnis: erwartungstreuer Schätzer mit kleinster Varianz

Filteralgorithmus

1. Init: $\hat{x}[0]$ & $P[0]$ (Anfangszustand aus phys. Vorwissen wählen oder 0 setzen)
2. Prädiktion/Zeitupdate: Schätzung des Zustands auf Basis der Messwerte bis Zeitpunkt k

$$\hat{x}^-[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k]$$

3. Korrektur/Messupdate: Berechnung der neuen Kalman-Matrix, Korrektur der Zustandsschätzung anhand des neuen Messwertes $y[k+1] \rightarrow$ a posteriori Schätzung
- Schritte 2. und 3. iterativ für alle Messwerte wiederholen bis Schätzung des internen Zustands konvergiert

Kalman-Filter als Parameterschätzer

5. Identifikation nichtparametrischer Modelle

5.1 Frequenzgang mit period. Anregung

Variante 1: Anregung mit harmon. Eingangssignal (Sinus)

- Nach Einschwingen: Amplitude + Phase messen
- Wiederholung für versch. Frequenzen

Problem: reine Sinusschwingungen schwierig zu erzeugen

Variante 2: Anregung mit Trapez- oder Rechtecksignal

- Beginn bei hohen Frequenzen
- Bei kleineren Anregungsfrequenzen: Berücksichtigung der höheren harmonischen notwendig
- Aus vorherigen Messungen ist Übertragungsverhalten für hohe Frequenzen bekannt \rightarrow Signalanteile können subtrahiert werden; somit wird Grundschwingung isoliert

Nachteil: zeitaufwendig, da warten auf Einschwingen

Ausweg: Signale mit mehreren Frequenzanteilen

Allgemeine Nachteile:

- nur stabile Systeme
- keine passive Messungen
- nur kleine Störsignale

5.2 Korrelationsanalyse

5.2.1 Schätzung der Korrelationsfunktion

Def. Kreuzkorrelationsfolge: $R_{uy}[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k-j]y[k]$

Def. Autokorrelationsfolge: $R_u[j] = R_{uu}[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k-j]u[k]$

Eigenschaften:

- $R_{uy}[j] = R_{yu}[-j]$
- $R_u[j] = R_u[-j]$

Problem: Messung nur über endlichen Zeithorizont => Schätzung

Schätzung der Autokorrelationsfolge: $\hat{R}_u[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Bemerkung: Schätzung $\hat{R}_u[j]$ ist nicht erwartungstreu: $E\{\hat{R}_u[j]\} = (1 - \frac{|j|}{N})R_u[j]$

Andere Möglichkeit: $\hat{R}'_u[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-|j|} \sum_{k=0}^{N-|j|-1} u[k-|j|]u[k]$

Dieser Schätzer ist erwartungstreu, weist aber eine um den Faktor $N/(N-|j|)$ größere Varianz auf -> Praktisch wird ersterer verwendet

5.2.2 Schätzung der Gewichtsfolge

Für lineare zeitdiskrete Systeme sind Ein- und Ausgangssignal mittels Faltungssumme verknüpft:

$$y[k] = g * u = \sum_{l=0}^{\infty} g[k-l]u[l] = \sum_{l=0}^{\infty} g[l]u[k-l]$$

Für Kreuzkorrelationsfolge $R_{uy}[j]$ gilt:

$$R_{uy}[j] = \dots (\text{siehe Skript}) = g * R_u = \sum_{l=0}^{\infty} g[l]R_u[j-l]$$

Annahme: $R_{uy}[j]$ und $R_u[j]$ bekannt für j mit $-P \leq j \leq M$

=> Gleichungssystem aufstellen (siehe Skript)

Lösung mittels MkQ liefert:

$$\hat{g} = \hat{R}_u^+ \hat{R}_{uy}$$

Falls Eingangssignal weißes Rauschen mit Autokorrelationsfunktion

...

Dann folgt:

$$\hat{R}_{uy} = \hat{\sigma}^2 g[i]$$

=> Schätzung für Gewichtsfolge: $\hat{g}[i] = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \hat{R}_{uy}$

Parameterschätzung für Differenzengleichungen

6. Statistische Parameteridentifikation

6.1 Maximum-Likelihood-Methode

6.1.1 Grundgedanke

bisher: keine Annahme für Verteilungsfunktion der betrachteten Fehlersignale

jetzt: stochastische (meist normalverteilte) Fehlersignale mit bekannter Verteilung

Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, a)$ abhängig von Parameter a . Wahrscheinlichkeit für Auftreten der Stichprobe x_1, \dots, x_N :

$$L(a) = P(x_1, a) \cdot P(x_2, a) \cdot \dots \cdot P(x_N, a)$$

Diese Funktion wird als **Likelihood-Funktion** bezeichnet.

Maximum-Likelihood-Schätzung: $\hat{a} = \underset{a}{\operatorname{argmax}} L$

Einfacher zu analysieren: **Log-Likelihood-Funktion**

$$\ln(L(a)) = \ln(P(x_1, a)) + \ln(P(x_2, a)) + \dots + \ln(P(x_N, a))$$

Ableitung liefert notwendige Bedingung für Maximum:

$$\frac{\partial(L)}{\partial a} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \ln p(x_i, a)}{\partial a} \stackrel{!}{=} 0$$

6.1.2 Maximum-Likelihood-Schätzer für statische Systeme

- statischer Prozess mit Eingang u , Ausgang y
- Likelihood-Funktion als bedingte Wahrscheinlichkeit $p(y|u, a)$

TODO

Zusammenfassende Fragen

- Ansatz Herleitung der MkQ; Was wird Minimiert?
- Gegeben: Messdaten Eingang + Ausgang
 - Welches Vorgehen?
 - Welcher Ansatz setzt was voraus?
 - linear \leftrightarrow nicht-linear unterscheiden
 - parameterlinear \leftrightarrow nicht-parameterlinear unterscheiden
- statisch \leftrightarrow dynamische Systeme
- Umrechnung kontinuierliche \leftrightarrow diskrete Systeme
 - Warum notwendig?
 - Wie zurück rechnen?
- 4SID nur knapp
 - Zustandsraum
 - Vorteile (Mehrgrößen und Dimension)
 - Nachteil (Verzerrter Schätzer wie MkQ; Zusammenhang physikalische Systeme, schlechte Abbildung)
- Kalman-Filter (Struktur, nicht unbedingt Details)
- Rekursive MkQ
 - keine Herleitung
 - Was bringt diese Methode?
 - Matrix-Inversion gespart
 - Rechenaufwand gering
 - online implementierbar
 - Wieviele/ welche Daten müssen gespeichert werden? Vergleich mit MkQ
- Nicht-lineare Systeme (Hammerstein-Modell)
- Frequenzgang-Messung (aufwendig, zeitintensiv, nicht-parametrisches Modell nicht besonders nützlich)
- Erzeugung Pseudo-Rausch-Binär-Signal

Weniger relevant

- Matrixzerlegung
- Projektion
- Methode der Hilfsvariablen; totale MkQ (jeweils nur Grundkonzept wissen)