Curve sulle superfici

Vogliamo mostrare che T_pS è esattamente l'insieme delle velocità in p al variare delle curve $\alpha : I \to S$ passanti per p.

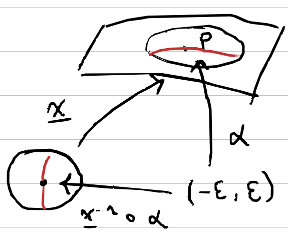
$\rightsquigarrow$ se $\underline{x}$ è una par. reg. intorno a $p \in S$, preso $\underline{v} = \lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$,

$\underline{x}$ C^∞ si ha $\underline{v} = \underline{x}_{(\lambda,\mu)}$. Presa dunque α che localmente su p è $\underline{x}(\underline{x}^{-1}(p) + t(\lambda,\mu))$, la velocità in p di α è esattamente $\underline{v}$.

Dobbiamo mostrare ora che ogni velocità in p di una curva $\alpha : I \to S$ (passante per p) sta in T_pS. Wlog $\alpha(0) = p$.

A patto di scegliere ε suff. piccolo, $\beta = \alpha|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ ha il supporto contenuto nell'immagine di una param. reg. $\underline{x}$ intorno a p.

Si ha dunque $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ in $(-\varepsilon,\varepsilon)$ con $u(t), v(t)$ C^∞ ($\underline{x}^{-1} \circ \alpha$ è C^∞). Allora:



$$\alpha'(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_u & \underline{x}_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$$

$$= u'(t)\, \underline{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(u(t), v(t))$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) = u'(t)\, \underline{x}_u(p) + v'(t)\, \underline{x}_v(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) \in T_pS.$$

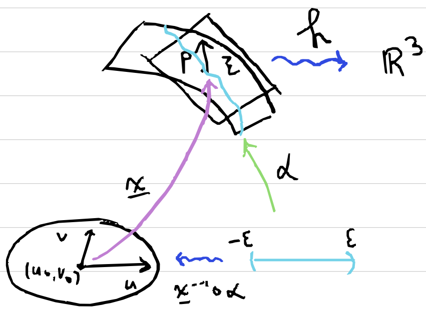
Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$T_pS = \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to S \text{ t.c. } \alpha(0) = p,\ \alpha \text{ curva}\}.$$

Operatore forma

Vogliamo studiare in modo analitico le forme locali di $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Def. $h: S \to \mathbb{R}^3$ si dice C^∞ se $\forall$ $\underline{x}$ param. reg. locale $h \circ \underline{x}$ è C^∞.



Vogliamo definire la derivata in direzione $\xi \in T_pS$, $\xi \neq 0$, di $h: S \to \mathbb{R}^3$. L'idea è che vogliamo "spostarci di poco" in direzione ξ da p.

Presa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, "α si muove localmente in direzione ξ" intorno a 0 e quindi $h \circ \alpha$ localmente catturerà h "muovendosi in direzione ξ da p" intorno a 0. È naturale dunque definire $D_\xi h(p)$ come:

$$D_\xi h(p) \triangleq (h \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostriamo che $D_\xi h(p)$ dipende solo da h e ξ. Sia $\underline{x}: U \to S$ parametr. regol. intorno a p. Sia $\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\underbrace{u(t)}_{C^\infty}, \underbrace{v(t)}_{C^\infty})$. Allora:

$$(*) \quad (h \circ \alpha)'(0) = [(h \circ \underline{x}) \circ (u(t), v(t))]'(0) =$$

$$= u'(0) \cdot (h \circ \underline{x})_u(p) + v'(0) \cdot (h \circ \underline{x})_v(p).$$

coord. in U di ξ $\Longleftarrow$ $\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \sum_{e \in \{x,y,z\}} \underline{x}_e^{-1}(p) \cdot \underbrace{(\alpha'(0))_e}_{\substack{= \xi \\ \text{fissato}}}$

Da $(*)$ si deduce subito che $(h \circ \alpha)'(0)$ non dip. dalla scelta della curva; inoltre, il membro a destra è invariante alla scelta di $\underline{x}$, dipendendo da α. Quindi $D_\xi h(p)$ è ben definita ed è anche lineare nella scelta della direzione (sempre grazie a $(*)$).

$\rightsquigarrow$ in generale, $D_\xi h(p) = D_{\underline{x}^{-1}(\xi)} (h \circ \underline{x})(\underline{x}^{-1}(p))$.

Ricordiamo che ogni superficie è localmente orientabile, dato che ogni param. reg. induce superfici orientabili.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$. Se $\underline{n} : A \to \mathbb{R}^3$ è una normale continua di S intorno a p, allora:

[che esiste sempre, essendo S loc. orient.]

$$\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1 \implies$$

$$\implies 2\left((\underline{n} \circ \alpha)'(t) \cdot \underline{n}(\alpha(t))\right) = 0 \implies$$

$$\rightarrow D_\xi \underline{n}(p) \cdot \underline{n}(p) = 0 \implies$$

$$\implies D_\xi \underline{n}(p) \in \left((T_pS)^\perp\right)^\perp = T_pS.$$

Quindi $\xi \mapsto D_\xi \underline{n}(p)$ è un endomorfismo di T_pS:

Def. Si chiama **OPERATORE FORMA** l'endomorfismo $S_p : T_pS \to T_pS$ t.c. $S_p(\xi) \triangleq -D_\xi \underline{n}(p)$ con $\underline{n}$ normale fissata continua intorno a p. (Al più varia di un segno cambiando normale)

Esempio (sfera)

Consideriamo la sfera $\Sigma_r = \{\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{h \triangleq} = r^2\}$. Una normale è data da $\nabla_p f = 2(x,y,z) \rightsquigarrow \underline{n}(p) = p/\|p\| = p/r$.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma_r$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, allora:

$$S_p(\xi) = -D_\xi \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha)'(0) \underset{\smile}{=} -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}\xi.$$

$(\underline{n} \circ \alpha)(t) =$
$= \alpha(t)/\|\alpha(t)\| =$
$= \alpha(t)/r$

Quindi: $S_p = -\frac{1}{r}\,\text{id}.$

Prop. S_p è autoaggiunto $\quad (S_p(\xi)\cdot\eta = \xi\cdot S_p(\eta) \ \forall \xi,\eta\in T_pS)$

Sia $\underline{x}$ par. reg. di S int. a p. Mostriamo la tesi per la base $\{\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)\}$, da cui ne deriviamo poi la validità per tutto T_pS.

$$\begin{cases} \underline{m}(\underline{x}(u,v_0))\cdot\underline{x}_v(u,v_0)=0 \\ \underline{m}(\underline{x}(v,u_0))\cdot\underline{x}_u(u_0,v)=0 \end{cases} \xrightarrow[\frac{d}{dv}|_{v=v_0}]{\frac{d}{du}|_{u=u_0}} \begin{cases} D_u\underline{m}(p)\cdot\underline{x}_v(p)+\underline{m}(p)\cdot\underline{x}_{vu}(p)=0 \\ D_v\underline{m}(p)\cdot\underline{x}_u(p)+\underline{m}(p)\cdot\underline{x}_{uv}(p)=0 \end{cases} \quad (**)$$

Dal Teo. di Schwarz, $\underline{x}_{uv}(p)=\underline{x}_{vu}(p)$, quindi, da $(**)$:

$$-D_u\underline{m}(p)\cdot\underline{x}_v(p) = -D_v\underline{m}(p)\cdot\underline{x}_u(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_p(\underline{x}_u(p))\cdot\underline{x}_v(p) = \underline{x}_u(p)\cdot S_p(\underline{x}_v(p)) \qquad \square$$

⤳ applicando un ragionam. analogo a quello usato per ricavare $(**)$ si ottiene infine il seguente sistema di identità:

$$\begin{cases} S_p\,\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_u(p) = \underline{m}(p)\cdot\underline{x}_{uu}(p) \\ S_p\,\underline{x}_v(p)\cdot\underline{x}_v(p) = \underline{m}(p)\cdot\underline{x}_{vv}(p) \\ S_p\,\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_v(p) = \underline{m}(p)\cdot\underline{x}_{uv}(p) \end{cases} \qquad (\square)$$

Definiamo adesso alcuni oggetti che ci permetteranno di calcolare agevolmente S_p.

Def. Sia $S\subseteq\mathbb{R}^3$ superficie. La famiglia dei prodotti scalari sui vari T_pS $\{I_p : T_pS\times T_pS\longrightarrow\mathbb{R} \mid I_p(v,w)=v\cdot w\}$ è detta I° FORMA FONDAMENTALE.

⤳ ricordiamo che, grazie alla regolarità delle param reg., data $\underline{x}$ par. reg. intorno a $p\in S$, $\underline{x}_u(p)$ e $\underline{x}_v(p)$ formano una base di T_pS. In tale base I_p assumerà una forma matriciale:

$$I_p = \begin{array}{c} \\ \underline{x}_u \\ \underline{x}_v \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \underline{x}_u & \underline{x}_v \end{array} \\ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \end{array},$$

dove $E = \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_u(p) = \|\underline{x}_u(p)\|^2$, $F = \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p)$ e
$G = \underline{x}_v(p) \cdot \underline{x}_v(p) = \|\underline{x}_v(p)\|^2$.

$\rightsquigarrow$ anche S_p avrà una forma matriciale:

$$S_p = \begin{array}{c} \underline{x}_u \\ \underline{x}_v \end{array} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad [S_p \underline{x}_u] \quad [S_p \underline{x}_v]$$

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. La famiglia dei prodotti scalari $\{ \mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \mid \mathrm{II}_p(v,w) = \mathrm{I}_p(S_p v, w) = S_p v \cdot w \}$ è detta **II^a FORMA FONDAMENTALE**.

$\rightsquigarrow$ pure II_p avrà una forma matriciale:

$$\mathrm{II}_p = \begin{array}{c|cc} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ \hline \underline{x}_u & \ell & m \\ \underline{x}_v & m & n \end{array},$$

II_p è un prod. scal, dacché S_p è autoaggiunto

dove $\ell = S_p\, \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_u(p)$, $m = S_p\, \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p)$ e
$n = S_p\, \underline{x}_v(p) \cdot \underline{x}_v(p)$. Da $\boxed{(\square)}$ quindi ricaviamo che:

$$\begin{cases} \ell = \underline{N}(p) \cdot \underline{x}_{uu}(p) \\ m = \underline{N}(p) \cdot \underline{x}_{uv}(p) \\ n = \underline{N}(p) \cdot \underline{x}_{vv}(p) \end{cases}$$

Osserviamo che $\mathrm{II}_p(v,w) = \mathrm{I}_p(S_p(v), w) \Longrightarrow$
$\Rightarrow [v]^T\, \mathrm{II}_p\, [w] = [v]^T\, \mathrm{I}_p\, S\, [w]$.

Quindi:

$$\mathrm{II}_p = \mathrm{I}_p \cdot S$$

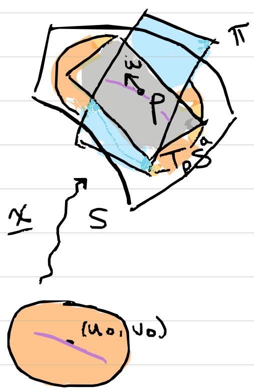
Inoltre $\det(\mathrm{I}_p) = \|\underline{x}_u(p)\|^2 \|\underline{x}_v(p)\|^2 - (\underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p))^2 \neq 0$ per Cauchy-Schw., dacché $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$ sono lin. indip. Dunque I_p è invertibile e...

$$S = \mathrm{II}_p \cdot \mathrm{I}_p^{-1},$$

In particolare $\det(S) = (\ell n - m^2)/(EG - F^2)$.

Interpretazione geometrica dell' operatore forma

Cerchiamo innanzitutto quando un piano π passante per $p \in S$ intersecato a S da' luogo, almeno localmente, a una curva regolare.



Sia dunque $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ un piano affine di eq. $(a,b,c) \cdot x = d$ passante per $p \in S$. Sia $\underline{x} : U \to S$ una par. reg. intorno a $p \in S$.

Sia $f(u,v) = (a,b,c) \cdot \underline{x}(u,v)$. Allora $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S) = \{ \underbrace{f(u,v) = d}_{C^\infty} \}$.

Osserviamo che:

$$\begin{cases} f_u(u_0,v_0) = (a,b,c) \cdot \underline{x}_u(u_0,v_0) \\ f_v(u_0,v_0) = (a,b,c) \cdot \underline{x}_v(u_0,v_0) \end{cases}$$

Quindi se $(f_u, f_v)(u_0,v_0) \neq 0$ $\left(\iff (a,b,c) \notin \mathrm{span}(\underline{N}(p)) \iff \pi \neq \underbrace{T_pS^a}_{\text{piano affine}} \triangleq p + T_pS \right)$, $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S)$ è un grafico (per il Teo. della funz. implicita) attorno a (u_0,v_0), ossia — ponendo wlog $f_v(u_0,v_0) \neq 0$ — $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S)$ è localm. param. intorno a (u_0,v_0) come $(u, g(u))$ con g C^∞. Quindi $\pi \cap S$ è loc. par. come $\alpha(t) = \underline{x}(t, g(t))$ $(\alpha(u_0) = p)$

$\rightsquigarrow$ $\alpha'(t) = \underline{x}_u(t,g(t)) + g'(t)\, \underline{x}_v(t, g(t)) \neq 0$, dunque α è regolare!

lin. ind.

Possiamo riassumere la discussione in:

> A patto che $\pi \neq T_pS^a$ $(\triangleq p + T_pS)$, $\pi \cap S$ è parametrizz. come curva regolare intorno a p.

Supponiamo wlog α p.l.a. Sia $\overbrace{\alpha'(s_0)}^{\alpha(s_0)=p} = w$ (unitario, essendo α p.l.a.)

$$\underline{m}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0 \xRightarrow{d/ds|_{s=s_0}} S_p w \cdot w = \underline{m}(p) \cdot \underbrace{\alpha''(s_0)}_{T'(s_0)}$$

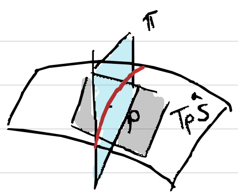
La quantità a destra allora non dipende da α, ma solo da w, ed è detta $k_m(p,w)$, la CURVATURA NORMALE IN p NELLA DIREZIONE w.

Dacché dipende solo da w, possiamo scegliere π in modo che $\underline{m}(p) \,//\, \underbrace{T'(s_0)}_{\in\, w^\perp}$, scegliendo proprio $(a,b,c) \in T_pS$ (così $\mathrm{giac}_w(\pi) = T_pS^\perp_w \ni \underline{m}(p)$).

In tal caso, allora:

$$k_m(p,w) = \underline{m}(p) \cdot T'(s_0) \overset{//}{=} \underbrace{\|\underline{m}(p)\|}_{=1} \underbrace{\|T'(s_0)\|}_{=k_\alpha(p)} = k_\alpha(p)$$

In altre parole:



La curvatura normale $k_m(p,w)$ è esattamente la curvatura in p di una curva regolare α che parametrizza intorno a p la sezione ottenuta intersecando S a un piano π perpendicolare a T_pS (cioè normale).

Osserviamo che, se $S_p v = \lambda v$ con $\|v\|=1$, allora:

$$k_m(p,v) = S_p v \cdot v = \lambda.$$

Quindi gli autovalori di S_p sono curvature normali speciali.

Def. Gli autospazi di S_p sono detti DIREZIONI PRINCIPALI e i loro autovalori sono detti CURVATURE PRINCIPALI.

$\rightsquigarrow$ grazie all'osservazione fatta prima, si deduce innanzitutto che le curvature principali sono delle speciali curvature normali.

Prop. Siano v_1, v_2 base ortonormale di S_p-autovettori. Se $w \in T_pS$ è unitario, e w forma un angolo di θ gradi rispetto a v_1, allora:

$$\underbrace{\kappa_n(p,w) = \cos^2\theta \cdot \kappa_1 + \sin^2\theta \cdot \kappa_2}$$

FORMULA DI EULERO

dove $S_p v_1 = \kappa_1 v_1$, $S_p v_2 = \kappa_2 v_2$.

curvature principali

Infatti $w = \cos(\theta) \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot v_2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \kappa_n(p,w) = S_p w \cdot w =$$
$$= (\cos(\theta) \cdot \kappa_1 \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot \kappa_2 \cdot v_2) \cdot (\cos(\theta) \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot v_2) =$$
$$\underbrace{=}_{\substack{v_1 \perp v_2 \\ \|v_i\| = 1}} \cos^2(\theta)\, \kappa_1 + \sin^2(\theta) \cdot \kappa_2. \qquad \square$$

$\rightsquigarrow$ in particolare, dacché $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ e $\sin^2(\theta)$ è continua con $\sin^2(0) = 0$ e $\sin^2(\pi/2) = 1$, si ha che $\kappa_n(p,w)$ varia in $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ con $\kappa_{min} \triangleq \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ e $\kappa_{max} \triangleq \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$.

Dunque le curvature principali ci danno la possibilità di calcolare la minima e la massima curvatura normale. Con queste possiamo studiare localmente la forma della superficie in p.

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$. La CURVATURA GAUSSIANA in $p \in S$ è definita come:

$$\kappa(p) \triangleq \det(S_p) = \underbrace{\kappa_1 \cdot \kappa_2}_{\text{curvature principali}}$$

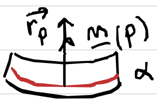
La CURVATURA MEDIA in $p \in S$ invece è definita come:

$$H(p) \triangleq \frac{1}{2} tr(S_p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

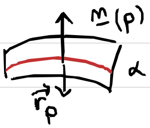
Se $\kappa \equiv 0$ in S, S si dice PIATTA. Se $H \equiv 0$ in S, S si dice MINIMA.

⤳ la curvatura gaussiana rimane invariata anche prendendo $\underline{n}' = -\underline{n}$, mentre quella media cambia di segno.

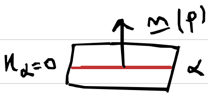
⤳ il segno di $k_n(w,p)$ è dato nel seguente modo:



- $k_n(w,p) > 0$: se il raggio di curvatura di α che parametrizz. $\pi \cap S$ in p è parallelo positivamente a $\underline{n}(p)$



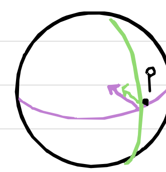
- $k_n(w,p) < 0$: " è parallelo negativamente a $\underline{n}(p)$



- $k_n(w,p) = 0$: " è nullo.

Def. (classificazione dei p.ti sulla superficie)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$.

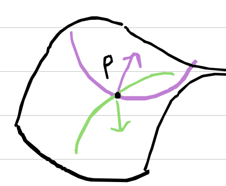
(i) p si dice **ELLITTICO** se $K(p) > 0$.



$$\Updownarrow$$

tutte le curvature normali sono conc. e $\neq 0$ $\iff$ k_1, k_2 concordi e $\neq 0$

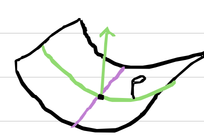
(ii) p si dice **IPERBOLICO** se $K(p) < 0$



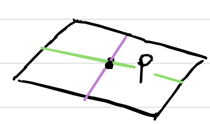
$$\Updownarrow$$

k_1, k_2 discordi e $\neq 0$

(iii) p si dice **PARABOLICO** se $K(p) = 0$ e
$k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$ o viceversa $\iff$ $S_p \neq 0$
$\Rightarrow$ Tutte le curvature normali sono ≥ 0 o ≤ 0 e $\exists$ curv. normale nulla

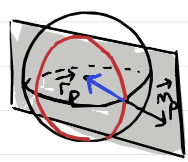


(iv) p si dice **PLANARE** se $S_p = 0$ $\iff$ ogni curv. normale è nulla.



Esempio (sfera) Abbiamo già calcolato esplicitamente che per la sfera $\Sigma \triangleq S_a^2$ vale $S_p = -\frac{1}{a}\,\mathrm{id}_{T_pS}$.

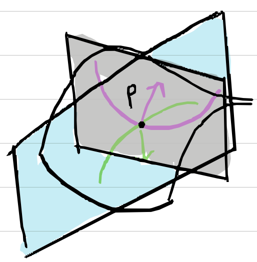
Usiamo l'intuizione geometrica per giustificare il risultato.



Ogni piano normale rispetto a $p \in \Sigma$ induce una curva regolare che è ha raggio di curvatura a in p.
Dacché la normale è negativamente parallela al raggio vettore $\vec{r_p}$, si ha $\kappa_m(p,v) = -\frac{1}{a}$ $\forall v$. Dunque $\kappa_1 = \kappa_2 = -\frac{1}{a} \Longrightarrow S_p = -\frac{1}{a}\,\mathrm{id}_{T_pS}$.

In particolare $\det(S_p) = \frac{1}{a^2} > 0$, quindi ogni p.to è ellittico.

Esempio (paraboloide iperbolico) Sia S l'immagine di $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Calcoliamo S_p in $p \triangleq \underline{x}(0,0)$.



Allora:

$$\begin{cases} E = \|\underline{x}_u(p)\|^2 = \|(1,0,0)\|^2 = 1 \\ F = \underline{x}_u(p)\cdot \underline{x}_v(p) = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0 \\ G = \|\underline{x}_v(p)\|^2 = \|(0,1,0)\|^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{I}_p = \mathrm{id}}$$

Una normale per p è $\underline{m} \triangleq \widehat{\underline{x}_u(p) \times \underline{x}_v(p)} = (0,0,1)$.
Quindi...

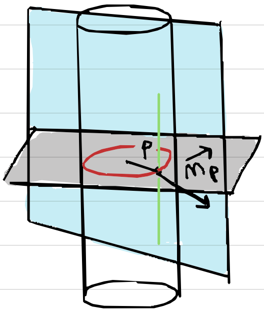
$$\begin{cases} l = \underline{m}\cdot \underline{x}_{uu}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,2) = 2 \\ m = \underline{m}\cdot \underline{x}_{uv}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,0) = 0 \\ n = \underline{m}\cdot \underline{x}_{vv}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,-2) = -2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{II}_p = 2\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}$$

Allora:

$S_p = \mathrm{I}_p^{-1}\,\mathrm{II}_p = \mathrm{II}_p \Longrightarrow$ $\underline{x}_u$ direzione princ. con $\kappa_1 = 2$
$\underline{x}_v$ " " $\kappa_2 = -2$

$\kappa(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = -4 < 0 \Longrightarrow p$ è iperbolico.

Esempio (cilindro)



Consideriamo il cilindro $\Sigma = \{x^2+y^2 = a^2\}$*. Allora $\forall a \neq 0$, a è regolare per $f(x,y,z) = x^2+y^2$ quindi Σ è superficie con $\underline{n}(x,y,z) = = \nabla_p f = \frac{1}{a}(x,y,0)$.

Dunque $(\underline{n} \circ \alpha)(x) = \frac{1}{a}\pi_{xy}(\alpha(x)) \longrightarrow J_p \pi_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow S_p v = -D_v \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha_v)'(0) =$

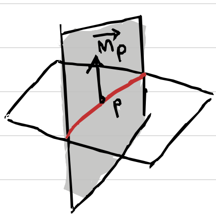
$= -\frac{1}{a}(\pi_{xy} \circ \alpha_v)'(0) = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} v$.

Osserviamo che $\underline{e}_3$ appartiene a ogni T_pS dacché $\underline{e}_3 \cdot \nabla_p f = 0$, dunque $S_p \underline{e}_3 = 0 \Longrightarrow \underline{e}_3$ dir. princ. con curv. 0 $\forall p$.

Se $p = (x_0, y_0, z_0)$, allora $\underline{u}_p = \frac{1}{a}(y_0, -x_0, 0) \in T_pS$ $(\underline{u}_p \cdot \nabla_p f = 0)$
$\longrightarrow S_p \underline{u}_p = -\frac{1}{a}\underline{u}_p \Longrightarrow \underline{u}_p$ dir. princ. con curv. $-\frac{1}{a}$ in p.

Dunque $K(p) = 0$, ma $S_p \neq 0 \Longrightarrow p$ parabolico $\forall p \in S$.

Esempio (piano) Sia $\pi = \{\overbrace{\underline{n} \cdot x}^{C^\infty} = d\}$ con $\underline{n} \neq 0$ e $\|\underline{n}\| = 1$. Allora d è sempre regolare per $[x \longmapsto \underline{n} \cdot x]$ e una normale di π è proprio $\underline{n}$ vettore, in ogni punto.



Quindi $S_p w = (\underline{n} \circ \alpha)'(0) = 0$ $\forall$ qls. curva α compatibile scelta. Dunque ogni p.to di un piano è planare.

* l'esercizio si può svolgere anche parametrizzando Σ come $\underline{x}(u,v) = (a\cos(u), a\sin(u), v)$. [a fissato]

Esercizio (elicoide) Consideriamo $\underline{x}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), bv)$ con $b>0$ fissato.

Allora:

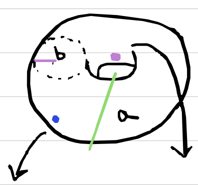
$$\begin{cases} \underline{x}_u = (\cos(v), \sin(v), 0) \\ \underline{x}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), b) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{u^2+b^2} \end{pmatrix}}$$

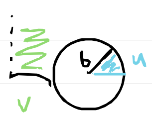
$$\begin{cases} \vec{n} = \widehat{\underline{x}_u \times \underline{x}_v} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+b^2}} (b\sin(v), -b\cos(v), u). \\ \underline{x}_{uv} = (-\sin(v), \cos(v), 0) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} l = \vec{n} \cdot \underline{x}_{uu} = 0 \\ m = \vec{n} \cdot \underline{x}_{uv} = -b / \sqrt{u^2+b^2} \\ n = \vec{n} \cdot \underline{x}_{vv} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{II} = -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Dunque $S_p = \mathrm{I}^{-1}\,\mathrm{II} \rightsquigarrow K(p) = \cancel{\sqrt{u^2+b^2}} \cdot \dfrac{-b}{\cancel{\sqrt{u^2+b^2}}} = -b < 0$,
quindi ogni punto è iperbolico.

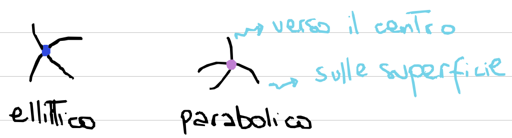
Esercizio (toro) Consideriamo il toro $\mathbb{T}_{a,b}$, che parametrizziamo con $\underline{x}(u,v) = ((a+b\cos(u))\cos(v), (a+b\cos(u))\sin(v), b\sin(u))$





Allora:

$$\begin{cases} \underline{x}_u = (-b\sin(u)\cos(v), -b\sin(u)\sin(v), b\cos(u)) \\ \underline{x}_v = (-(a+b\cos(u))\sin(v), (a+b\cos(u))\cos(v), 0) \end{cases}$$



da cui:

$$\boxed{\mathrm{I} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a+b\cos(u))^2 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{n} = \widehat{\underline{x}_u \times \underline{x}_v} = -(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(v)).$$

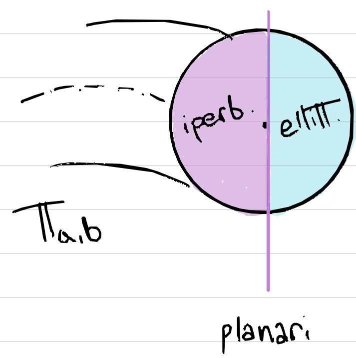
Da cui:

$$\boxed{II = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos(u))\cos(u) \end{pmatrix}}$$

Quindi:

$$K(p) = \det(S_p) = \det(I^{-1}\, II) = $$
$$= \frac{\cos(u)}{b(a+b\cos(u))},$$

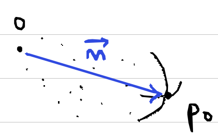
il cui segno dip. solo da $\cos(u)$! Dunque:



Esercizio Dimostrare che $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta $(\neq \emptyset)$ ha un pto ellittico.

$\rightsquigarrow$ l'idea è che un pto di norma massima di Σ sia ellittico dacché "i pti intorno possono solo curvare indietro".

Sia $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ t.c. $f(p) = \|p\|^2$ e sia p_0 un suo massimo.



$[w \triangleq \alpha'(0)]$

Sia α una curva p.l.a su Σ passante per p_0 in 0. $f(\alpha(t))$ per costruzione ha massimo in 0 $\Longrightarrow$ $(f\circ\alpha)'(0) = 0$, $(f\circ\alpha)''(0) \leq 0$.

• $(f\circ\alpha)'(0) = Df(\alpha(0))\,\alpha'(0) = 2\,\overbrace{\alpha'(0)}^{w} \cdot \alpha(0) = 0 \Longrightarrow$

$\underbrace{\longrightarrow}_{w \text{ arbitr.}}$ $p_0 \perp T_{p_0}S \rightsquigarrow p_0 = \|p_0\|\, m(p_0)$.

- $$(f\circ\alpha)''(0) = 2\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\alpha'(t)\cdot\alpha(t)\right] =$$

$$= 2\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\alpha''(t)\cdot\alpha(t) + \|\alpha'(t)\|^2\right] =$$

$$= 2\left(\alpha''(0)\cdot\alpha(0) + \overbrace{\|\alpha'(0)\|^2}^{=1}\right) =$$

$$= 2\Big(\|p_0\| \underbrace{\dot{T}_\alpha(0)\cdot \underline{n}(p_0)}_{k_n(p_0,\,\alpha'(0))} + 1\Big) \underbrace{\le 0}_{\text{è un massimo}}$$

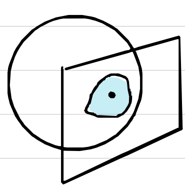
Dunque:

$$k_n(p_0,\alpha'(0)) \le -1/\|p_0\| < 0 \qquad \forall\, w,\ \|w\|=1,$$

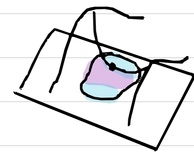
in particolare $\underbrace{k_1\cdot k_2 > 0}_{K(\Sigma)}$; i.e., p_0 è ellittico. $\square$

Esercizio Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. Si mostri che:

(i) se $p\in\Sigma$ è ellittico, $\exists$ intorno di p in Σ contenuto dalla stessa parte di $T_p S^a$; ovverosia tutto contenuto in uno dei due semispazi indotti dal taglio di $\mathbb{R}^3$ tramite $T_p S^a$.



(ii) se $p\in\Sigma$ è iperbolico, $\nexists$ " .

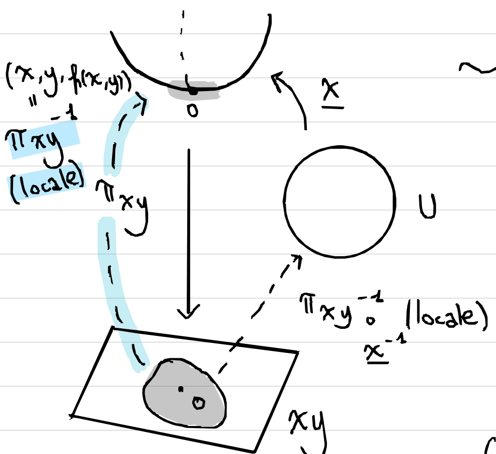


(iii) se $p\in\Sigma$ è parabolico o planare, potrebbe esistere o meno (si mostrino esempi in cui esiste ed altri in cui <u>non</u> esiste).

$\rightsquigarrow$ osserviamo innanzitutto che le rototraslazioni non modificano le curvature normali, che sono curvature di curve; in particolare rimangono invariate le curvature principali (a meno di segno).

Possiamo dunque assumere wlog $p = 0 \in \Sigma$ con $T_pS = \text{span}(e_1, e_2)$ (i.e., piano x-y) e dir. principali proprio e_1 e e_2.

Sia $\underline{x} : U \to \underline{x}(U)$ una par. reg. intorno a $p = 0$. Allora $\langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle = T_0\Sigma$ $\rightsquigarrow$ l'ultima riga di $J\underline{x}$ è zero
$\rightsquigarrow$ pre comp. $\underline{x}$ con π_{xy} si ha $J(\pi_{xy} \circ \underline{x})$ invertibile, da cui $\underset{C^\infty}{\pi_{xy}} \circ \underset{C^\infty}{\underline{x}}$ diffeo. localmente. Dunque $\to$ x regolarità π_{xy}^{-1} è loc. inv. come diffeo.



$\rightsquigarrow$ un intorno di $0 \in \Sigma$ è grafico di $f : \underset{\text{intorno di } 0 \in \mathbb{R}^2}{V} \to \Sigma$ (i.e., è C^∞ della forma $\{(u, v, f(u,v))\}$.
$f(0,0) = 0$

Per (i) la tesi consiste nel mostrare che localm. $f(u,v) \geq 0$ vicino a zero. ($\circ \leq 0$)

Consideriamo allora proprio la par. reg. $\underline{y} : (u,v) \longmapsto (u, v, f(u,v))$.

Taylor $\left[\begin{array}{l} f(u,v) = f(0,0) + u f_u(0) + v f_v(0) + \frac{1}{2}(u^2 f_{uu}(0) + \\ + 2uv f_{uv}(0) + v^2 f_{vv}(0)) + o(u^2 + v^2) \end{array} \right.$

$\begin{cases} \underline{y}_u = (1, 0, f_u) \\ \underline{y}_v = (0, 1, f_v) \end{cases} \overset{T_0\Sigma \text{ è sul piano } xy}{\Longrightarrow} f_u(0) = f_v(0) = 0$ ✓

$\Longrightarrow \underline{y}_u = e_1, \ \underline{y}_v = e_2$

Quindi $E(0) = G(0) = 1$ e $F(0) = \underline{y}_u \cdot \underline{y}_v = 0 \rightsquigarrow \boxed{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Una normale è $\underline{n}(0) = (0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} \ell(0) = y_{uu}(0) \cdot \underline{n}(0) & h_{uu}(0) \\ m(0) = y_{uv}(0) \cdot \underline{N}(0) = & h_{uv}(0) \\ n(0) = y_{vv}(0) \cdot \underline{N}(0) = & h_{vv}(0) \end{cases}, \text{ quindi } \boxed{\mathrm{II} = \begin{pmatrix} h_{uu}(0) & h_{uv}(0) \\ h_{uv}(0) & h_{vv}(0) \end{pmatrix}}.$$

$\rightsquigarrow$ osserviamo che $S_0 = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II} = \mathrm{II}$.

Ricordiamo che e_1 ed e_2 sono x ipotesi dir. principali, dunque

$$h_{uu}(0) = k_1, \quad h_{vv}(0) = k_2, \qquad \left(S_0 = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$h_{uv}(0) = 0.$$

Pertanto $h(u,v) = \frac{1}{2}(k_1 u^2 + k_2 v^2) + o(u^2+v^2)$.

(i) se 0 è ellittico, allora wlog $k_1 \le k_2 < 0$ o $0 < k_1 \le k_2$.
$(*)$ $\qquad (**)$

$(*)$ $\quad \dfrac{h(u,v)}{u^2+v^2} \le \dfrac{k_2}{2} + \dfrac{o(u^2+v^2)}{u^2+v^2} \xrightarrow[(u,v)\to(0,0)]{} \dfrac{k_2}{2}$,

quindi loc. $h(u,v) \le 0$ per perm. del segno

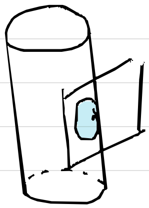
$(**)$ analog. loc. $h(u,v) \ge 0$ ".

(ii) se 0 è iperbolico, allora wlog $k_1 < 0 < k_2$.

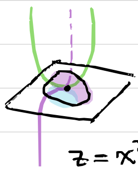
- $\dfrac{h(u,0)}{u^2} = \dfrac{k_1}{2} + \dfrac{o(u^2)}{u^2} \xrightarrow[u\to 0]{} \dfrac{k_1}{2} < 0$, quindi lungo $v=0$ è loc. ≤ 0
- $\dfrac{h(0,v)}{v^2} = \dfrac{k_2}{2} + \dfrac{o(v^2)}{v^2} \xrightarrow[v\to 0]{} \dfrac{k_2}{2} > 0$, " $u=0$ è loc. ≥ 0.

Dunque un intorno come desiderato <u>non</u> può esistere.

(iii) **Parabolici**



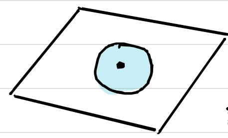
l'intorno esiste ✓



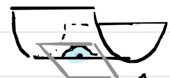
$z = x^2 + y^3$

l'intorno <u>non</u> esiste ✓

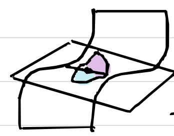
Planari



l'intorno esiste ✓



$z = y^4$



$z = y^3$

l'intorno <u>non</u> esiste ✓