Curve sulle superfici

Vogliamo mostrare che T_pS è esattamente l'insieme delle velocità in p al variare delle curve $\alpha : I \to S$ passanti per p.

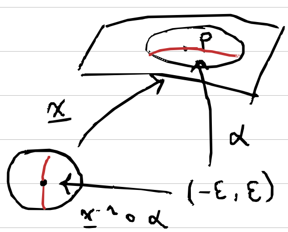
$\rightsquigarrow$ se $\underline{x}$ è una par. reg. intorno a $p \in S$, preso $\underline{v} = \lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$,

$\underline{x}$ C^∞ si ha $\underline{v} = \underline{x}_{(\lambda,\mu)}$. Presa dunque α che localmente su p è $\underline{x}(\underline{x}^{-1}(p) + t(\lambda,\mu))$, la velocità in p di α è esattamente $\underline{v}$.

Dobbiamo mostrare ora che ogni velocità in p di una curva $\alpha : I \to S$ (passante per p) sta in T_pS. Wlog $\alpha(0) = p$.

A patto di scegliere ε suff. piccolo, $\beta = \alpha|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ ha il supporto contenuto nell'immagine di una param. reg. $\underline{x}$ intorno a p.

Si ha dunque $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $u(t)$, $v(t)$ C^∞ ($\underline{x}^{-1} \circ \alpha$ è C^∞). Allora:



$$\alpha'(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_u & \underline{x}_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$$

$$= u'(t)\, \underline{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(u(t), v(t))$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) = u'(t)\, \underline{x}_u(p) + v'(t)\, \underline{x}_v(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) \in T_pS.$$

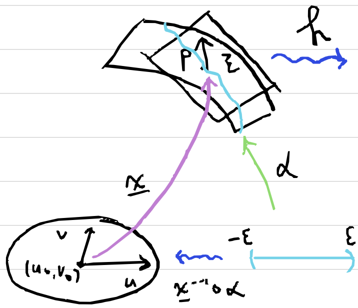
Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$T_pS = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ t.c. } \alpha(0) = p,\ \alpha \text{ curva} \}.$$

Operatore forma

Vogliamo studiare in modo analitico le forme locali di $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Def. $h : S \to \mathbb{R}^3$ si dice C^∞ se $\forall$ $\underline{x}$ param. reg. locale $h \circ \underline{x}$ è C^∞.



Vogliamo definire la derivata in direzione $\xi \in T_pS$, $\xi \neq 0$ di $h : S \to \mathbb{R}^3$. L'idea è che vogliamo "spostarci di poco" in direzione ξ da p.

Presa $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, "α si muove localmente in direzione ξ" intorno a 0 e quindi $h \circ \alpha$ localmente catturerà h "muovendosi in direzione ξ da p" intorno a 0.
È naturale dunque definire $D_\xi h(p)$ come:

$$D_\xi h(p) \triangleq (h \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostriamo che $D_\xi h(p)$ dipende solo da h e ξ. Sia $\underline{x} : U \to S$ parametr. regol. intorno a p. Sia $\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\underbrace{u(t)}_{C^\infty}, \underbrace{v(t)}_{C^\infty})$. Allora:

$$(*) \quad (h \circ \alpha)'(0) = \left[(h \circ \underline{x}) \circ (u(t), v(t)) \right]'(0) =$$

$$= u'(0) \cdot (h \circ \underline{x})_u(p) + v'(0) \cdot (h \circ \underline{x})_v(p).$$

coord. in U di ξ $\Longleftarrow$ $\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \sum_{e \in \{x,y,z\}} \underline{x}_e^{-1}(p) \cdot \underbrace{(\alpha'(0))_e}_{= \xi \text{ fissato}}$

Da $(*)$ si deduce subito che $(h \circ \alpha)'(0)$ non dip. dalla scelta della curva; inoltre, il membro a destra è invariante alla scelta di $\underline{x}$, dipendendo da α. Quindi $D_\xi h(p)$ è ben definita ed è anche lineare nella scelta della direzione (sempre grazie a $(*)$).

$\rightsquigarrow$ in generale, $D_\xi\, h(p) = D_{\underline{x}^{-1}(\xi)}\,(h \circ \underline{x})(\underline{x}^{-1}(p))$.

Ricordiamo che ogni superficie è localmente orientabile, dato che ogni param. reg. induce superfici orientabili.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$. Se $\underline{n} : A \to \mathbb{R}^3$ è una normale continua di S intorno a p, allora:

[che esiste sempre, essendo S loc. orient.]

$$\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1 \implies$$

$$\implies 2\,((\underline{n} \circ \alpha)'(t) \cdot \underline{n}(\alpha(t))) = 0 \implies$$

$$\to D_\xi\, \underline{n}(p) \cdot \underline{n}(p) = 0 \implies$$

$$\implies D_\xi\, \underline{n}(p) \in ((T_pS)^\perp)^\perp = T_pS.$$

Quindi $\xi \mapsto D_\xi\, \underline{n}(p)$ è un endomorfismo di T_pS:

Def. Si chiama **OPERATORE FORMA** l'endomorfismo $S_p : T_pS \to T_pS$ t.c. $S_p(\xi) \triangleq -D_\xi\, \underline{n}(p)$ con $\underline{n}$ normale fissata continua intorno a p. (Al più varia di un segno cambiando normale)

Esempio. (sfera)

Consideriamo la sfera $\Sigma_r = \{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f\, \triangleq} = r^2\}$. Una normale è data da $\nabla_p f = 2(x, y, z) \rightsquigarrow \underline{n}(p) = p/\|p\| = p/r$.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma_r$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, allora:

$$S_p(\xi) = -D_\xi\, \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha)'(0) \underset{\substack{(\underline{n} \circ \alpha)(t) = \\ = \alpha(t)/\|\alpha(t)\| = \\ = \alpha(t)/r}}{=} -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}\xi.$$

Quindi $S_p = -\frac{1}{r}\,\mathrm{id}$.

Prop. S_p è autoaggiunto $\quad (S_p(\xi)\cdot\eta = \xi\cdot S_p(\eta)\ \forall\ \xi,\eta\in T_pS)$

Sia $\underline{x}$ par. reg. di S int. a p. Mostriamo la tesi per la base $\{\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)\}$, da cui ne deriviamo poi la validità per tutto T_pS.

$$\begin{cases}\underline{N}(\underline{x}(u,v_0))\cdot\underline{x}_v(u,v_0)=0\\ \underline{N}(\underline{x}(v,u_0))\cdot\underline{x}_u(u_0,v)=0\end{cases} \xrightarrow[d/dv|_{v=v_0}]{d/du|_{u=u_0}} \begin{cases}D_u\underline{N}(p)\cdot\underline{x}_v(p)+\underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{vu}(p)=0\\ D_v\underline{N}(p)\cdot\underline{x}_u(p)+\underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{uv}(p)=0\end{cases} \quad (**)$$

Dal Teo. di Schwarz, $\underline{x}_{uv}(p)=\underline{x}_{vu}(p)$, quindi, da $(**)$:

$$-D_u\underline{N}(p)\cdot\underline{x}_v(p) = -D_v\underline{N}(p)\cdot\underline{x}_u(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_p(\underline{x}_u(p))\cdot\underline{x}_v(p) = \underline{x}_u(p)\cdot S_p(\underline{x}_v(p)) \qquad \square$$

⤳ applicando un ragionam. analogo a quello usato per ricavare $(**)$ si ottiene infine il seguente sistema di identità:

$$\begin{cases}S_p\,\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_u(p) = \underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{uu}(p)\\ S_p\,\underline{x}_v(p)\cdot\underline{x}_v(p) = \underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{vv}(p)\\ S_p\,\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_v(p) = \underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{uv}(p)\end{cases} \qquad (\square)$$

Definiamo adesso alcuni oggetti che ci permetteranno di calcolare agevolmente S_p.

Def. Sia $S\subseteq\mathbb{R}^3$ superficie. La famiglia dei prodotti scalari sui vari T_pS $\{I_p: T_pS\times T_pS\longrightarrow\mathbb{R} \mid I_p(v,w)=v\cdot w\}$ è detta I^a FORMA FONDAMENTALE.

⤳ ricordiamo che, grazie alla regolarità delle param reg., data $\underline{x}$ par. reg. intorno a $p\in S$, $\underline{x}_u(p)$ e $\underline{x}_v(p)$ formano una base di T_pS. In tale base I_p assumerà una forma matriciale:

$$I_p = \begin{array}{c|cc} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ \hline \underline{x}_u & E & F \\ \underline{x}_v & F & G \end{array} ,$$

dove $E = \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_u(p) = \| \underline{x}_u(p) \|^2$, $F = \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p)$ e
$G = \underline{x}_v(p) \cdot \underline{x}_v(p) = \| \underline{x}_v(p) \|^2$.

$\rightsquigarrow$ anche S_p avrà una forma matriciale:

$$\boxed{S_p = \begin{array}{c} \underline{x}_u \\ \underline{x}_v \end{array} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}$$
$$\qquad\qquad [S_p \underline{x}_u] \quad [S_p \underline{x}_v]$$

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. La famiglia dei prodotti scalari $\{ II_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \mid II_p(v,w) = I_p(S_p v, w) = S_p v \cdot w \}$ è detta **II^a FORMA FONDAMENTALE**.

II_p è un prod. scal., dacché S_p è autoaggiunto

$\rightsquigarrow$ pure II_p avrà una forma matriciale:

$$\boxed{II_p = \begin{array}{c|cc} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ \hline \underline{x}_u & \ell & m \\ \underline{x}_v & m & n \end{array}},$$

dove $\ell = S_p \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_u(p)$, $m = S_p \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p)$ e $n = S_p \underline{x}_v(p) \cdot \underline{x}_v(p)$. Da $\boxed{\square}$ quindi ricaviamo che:

$$\begin{cases} \ell = \underline{N}(p) \cdot \underline{x}_{uu}(p) \\ m = \underline{N}(p) \cdot \underline{x}_{uv}(p) \\ n = \underline{N}(p) \cdot \underline{x}_{vv}(p) \end{cases}$$

Osserviamo che $II_p(v,w) = I_p(S_p(v), w) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow [v]^T II_p [w] = [v]^T I_p S [w]$.

Quindi:

$$\boxed{II_p = I_p \cdot S}$$

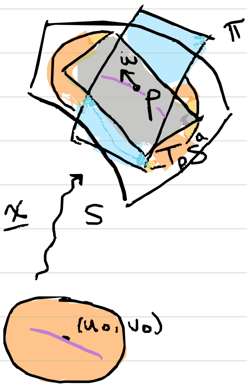
Inoltre $\det(I_p) = \| \underline{x}_u(p) \|^2 \| \underline{x}_v(p) \|^2 - (\underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p))^2 \neq 0$ per Cauchy-Schw., dacché $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$ sono lin. indip. Dunque I_p è invertibile e...

$$S = II_p \cdot I_p^{-1},$$

In particolare $\det(S) = (\ell n - m^2)/(EG - F^2)$.

Interpretazione geometrica dell' operatore forma

Cerchiamo innanzitutto quando un piano π passante per $p \in S$ intersecato a S da' luogo, almeno localmente, a una curva regolare.



Sia dunque $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ un piano affine di eq. $(a,b,c) \cdot x = d$ passante per $p \in S$. Sia $\underline{x} : U \to S$ una par. reg. intorno a $p \in S$.

Sia $f(u,v) = (a,b,c) \cdot \underline{x}(u,v)$. Allora

$\underline{x}^{-1}(\pi \cap S) = \{ \underbrace{f(u,v) = d}_{C^\infty} \}$.

Osserviamo che:

$$\begin{cases} f_u(u_0,v_0) = (a,b,c) \cdot \underline{x}_u(u_0,v_0) \\ f_v(u_0,v_0) = (a,b,c) \cdot \underline{x}_v(u_0,v_0) \end{cases}$$

Quindi se $(f_u, f_v)(u_0,v_0) \neq 0$ $(\Longleftrightarrow (a,b,c) \notin \text{span}(\underline{N}(p)) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \pi \neq \underbrace{T_pS^a}_{\text{piano affine}} \triangleq p + T_pS)$, $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S)$ è un grafico (per il Teo. della funz. implicita) attorno a (u_0,v_0), ossia — ponendo wlog $f_v(u_0,v_0) \neq 0$ — $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S)$ è localm. param. intorno a (u_0,v_0) come $(u, g(u))$ con g C^∞. Quindi $\pi \cap S$ è loc. par. come $\alpha(t) = \underline{x}(t, g(t))$ $(\alpha(u_0) = p)$

$\rightsquigarrow$ $\alpha'(t) = \underline{x}_u(t, g(t)) + g'(t)\, \underline{x}_v(t, g(t)) \neq 0$, dunque α è regolare!

lin. ind.

Possiamo riassumere la discussione in:

A patto che $\pi \neq T_pS^a$ $(\triangleq p + T_pS)$, $\pi \cap S$ è parametrizz. come curva regolare intorno a p.

Supponiamo wlog α p.l.a. Sia $\overbrace{\alpha'(s_0)}^{\alpha(s_0)=p} = w$ (unitario, essendo α p.l.a.)

$$\underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0 \xRightarrow{d/ds|_{s=s_0}} S_p w \cdot w = \underline{n}(p) \cdot \underbrace{\alpha''(s_0)}_{T'(s_0)}$$

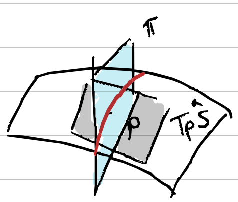
La quantità a destra allora non dipende da α, ma solo da w, ed è detta $k_n(p,w)$, la CURVATURA NORMALE IN p NELLA DIREZIONE w.

Dacché dipende solo da w, possiamo scegliere π in modo che $\underline{n}(p) \parallel \underbrace{T'(s_0)}_{\in w^\perp}$, scegliendo proprio $(a,b,c) \in T_pS$ (così $\text{giac}_w(\pi) = T_pS^\perp \ni \underline{n}(p)$).

In tal caso, allora:

$$k_n(p,w) = \underline{n}(p) \cdot T'(s_0) \overset{//}{=} \underbrace{\|\underline{n}(p)\|}_{=1} \, \underbrace{\|T'(s_0)\|}_{=k_\alpha(p)} = k_\alpha(p)$$

In altre parole:



La curvatura normale $k_n(p,w)$ è esattamente la curvatura in p di una curva regolare α che parametrizza intorno a p la sezione ottenuta intersecando S a un piano π perpendicolare a T_pS° (cioè normale).

Osserviamo che, se $S_p v = \lambda v$ con $\|v\| = 1$, allora:

$$k_n(p,v) = S_p v \cdot v = \lambda.$$

Quindi gli autovalori di S_p sono curvature normali speciali.

Def. Gli autospazi di S_p sono detti DIREZIONI PRINCIPALI e i loro autovalori sono detti CURVATURE PRINCIPALI.

⤳ grazie all'osservazione fatta prima, si deduce innanzitutto che le curvature principali sono delle speciali curvature normali.

Prop. Siano v_1, v_2 base ortonormale di S_p-autovettori.
Se $w \in T_pS$ è unitario, e w forma un angolo di θ gradi rispetto a v_1, allora:

$$\kappa_n(p,w) = \cos^2\theta \cdot \kappa_1 + \sin^2\theta \cdot \kappa_2,$$

FORMULA DI EULERO

dove $S_p v_1 = \kappa_1 v_1$, $S_p v_2 = \kappa_2 v_2$.

curvature principali

Infatti $w = \cos(\theta) \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot v_2 \implies$

$$\implies \kappa_n(p,w) = S_p w \cdot w =$$
$$= (\cos(\theta) \cdot \kappa_1 \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot \kappa_2 \cdot v_2) \cdot (\cos(\theta) \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot v_2) =$$
$$\underbrace{=}_{\substack{v_1 \perp v_2 \\ \|v_i\| = 1}} \cos^2(\theta)\, \kappa_1 + \sin^2(\theta) \cdot \kappa_2. \qquad \square$$

$\rightsquigarrow$ in particolare, dacché $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ e $\sin^2(\theta)$ è continua con $\sin^2(0) = 0$ e $\sin^2(\pi/2) = 1$,
si ha che $\kappa_n(p,w)$ varia in $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ con
$\kappa_{min} \triangleq \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ e $\kappa_{max} \triangleq \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$.

Dunque le curvature principali ci danno la possibilità di calcolare la minima e la massima curvatura normale.
Con queste possiamo studiare localmente la forma della superficie in p.

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$. La **CURVATURA GAUSSIANA** in $p \in S$ è definita come:

$$K(p) \triangleq \det(S_p) = \underbrace{\kappa_1 \cdot \kappa_2}_{\text{curvature principali}}$$

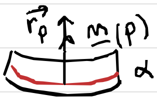
La **CURVATURA MEDIA** in $p \in S$ invece è definita come:

$$H(p) \triangleq \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S_p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

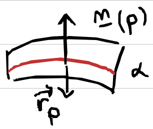
Se $K \equiv 0$ in S, S si dice **PIATTA**. Se $H \equiv 0$ in S, S si dice **MINIMA**.

⤳ la curvatura gaussiana rimane invariata anche prendendo $\underline{n}' = -\underline{n}$, mentre quella media cambia di segno.

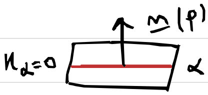
⤳ il segno di $k_n(w,p)$ è dato nel seguente modo:



- $k_n(w,p) > 0$: se il raggio di curvatura di α che parametrizz. $\pi \cap S$ in p è parallelo positivamente a $\underline{n}(p)$



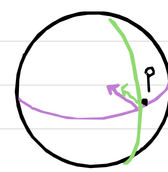
- $k_n(w,p) < 0$: " è parallelo negativamente a $\underline{n}(p)$



- $k_n(w,p) = 0$: " è nullo.

Def. (classificazione dei p.ti sulla superficie)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$.

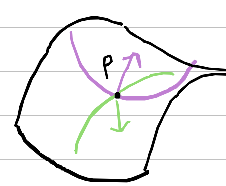
(i) p si dice **ELLITTICO** se $K(p) > 0$.



$\Updownarrow$

tutte le curvature normali sono conc. e $\neq 0$ $\iff$ k_1, k_2 concordi e $\neq 0$

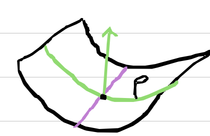
(ii) p si dice **IPERBOLICO** se $K(p) < 0$



$\Updownarrow$

k_1, k_2 discordi e $\neq 0$

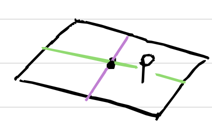
(iii) p si dice **PARABOLICO** se $K(p) = 0$ e $S_p \neq 0$



$k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$ o viceversa $\iff$ $S_p \neq 0$

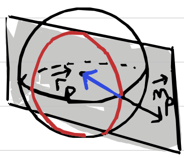
$\Rightarrow$ Tutte le curvature normali sono ≥ 0 o ≤ 0 e $\exists$ curv. normale nulla

(iv) p si dice **PLANARE** se $S_p = 0$ $\iff$ ogni curv. normale è nulla.



Esempio (sfera) Abbiamo già calcolato esplicitamente che per la sfera $\Sigma \triangleq S_a^2$ vale $S_p = -\frac{1}{a}\, id_{T_pS}$.

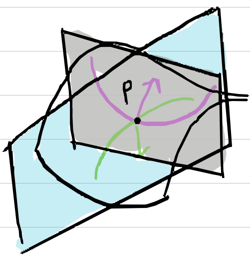
Usiamo l'intuizione geometrica per giustificare il risultato.



Ogni piano normale rispetto a $p \in \Sigma$ induce una curva regolare che è ha raggio di curvatura a in p.
Dacché la normale è negativamente parallela al raggio vettore $\vec{r_p}$, si ha $k_n(p,v) = -\frac{1}{a}$ $\forall v$. Dunque $k_1 = k_2 = -\frac{1}{a} \Longrightarrow S_p = -\frac{1}{a}\, id_{T_pS}$.

In particolare $\det(S_p) = \frac{1}{a^2} > 0$, quindi ogni p.to è ellittico.

Esempio (paraboloide iperbolico) Sia S l'immagine di $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Calcoliamo S_p in $p \triangleq \underline{x}(0,0)$.



Allora:

$$\begin{cases} E = \|\underline{x}_u(p)\|^2 = \|(1,0,0)\|^2 = 1 \\ F = \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p) = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0 \\ G = \|\underline{x}_v(p)\|^2 = \|(0,1,0)\|^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{I_p = id}$$

Una normale per p è $\underline{n} \triangleq \widehat{\underline{x}_u(p) \times \underline{x}_v(p)} = (0,0,1)$.
Quindi...

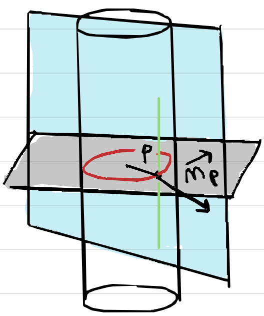
$$\begin{cases} l = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,2) = 2 \\ m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,0) = 0 \\ n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,-2) = -2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{II_p = 2\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}$$

Allora:

$S_p = I_p^{-1} II_p = II_p \Longrightarrow$ $\underline{x}_u$ direzione princ. con $k_1 = 2$
$\underline{x}_v$ " " $k_2 = -2$

$K(p) = k_1 \cdot k_2 = -4 < 0 \Longrightarrow p$ è iperbolico.

Esempio (cilindro)



Consideriamo il cilindro $\Sigma = \{x^2+y^2=a^2\}$*. Allora $\forall a \neq 0$, a è regolare per $f(x,y,z) = x^2+y^2$ quindi Σ è superficie con $\underline{n}(x,y,z) =$
$= \nabla_p f = \frac{1}{a}(x,y,0)$.

Dunque $(\underline{n} \circ \alpha)(x) = \frac{1}{a}\pi_{xy}(\alpha(x)) \longrightarrow J_p \pi_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow S_p v = -D_v \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha_v)'(0) =$

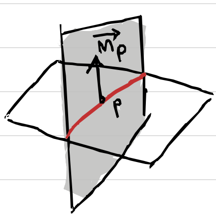
$= -\frac{1}{a}(\pi_{xy} \circ \alpha_v)'(0) = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} v.$

Osserviamo che $\underline{e_3}$ appartiene a ogni T_pS dacché $\underline{e_3} \cdot \nabla_p f = 0$, dunque $S_p \underline{e_3} = 0 \Longrightarrow \underline{e_3}$ dir. princ. con curv. 0 $\forall p$.

Se $p = (x_0, y_0, z_0)$, allora $\underline{u}_p = \frac{1}{a}(y_0, -x_0, 0) \in T_pS$ ($\underline{u}_p \cdot \nabla_p f = 0$) $\longrightarrow S_p \underline{u}_p = -\frac{1}{a}\underline{u}_p \Longrightarrow \underline{u}_p$ dir. princ. con curv. $-\frac{1}{a}$ in p.

Dunque $K(p) = 0$, ma $S_p \neq 0 \Longrightarrow p$ parabolico $\forall p \in S$.

Esempio (piano) Sia $\pi = \{\overbrace{\underline{n} \cdot x}^{C^\infty} = d\}$ con $\underline{n} \neq 0$ e $\|\underline{n}\| = 1$. Allora d è sempre regolare per $[x \mapsto \underline{n} \cdot x]$ e una normale di π è proprio $\underline{n}$ vettore, in ogni punto.



Quindi $S_p w = (\underline{n} \circ \alpha)'(0) = 0$ $\forall$ qls. curva α compatibile scelta. Dunque ogni p.to di un piano è planare.

* l'esercizio si può svolgere anche parametrizzando Σ come $\underline{x}(u,v) = (a\cos(u), a\sin(u), v)$. [a fissato]

Esercizio. (elicoide) Consideriamo $\underline{x}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), bv)$ con $b>0$ fissato.

Allora:

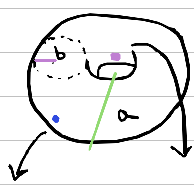
$$\begin{cases} \underline{x}_u = (\cos(v), \sin(v), 0) \\ \underline{x}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), b) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{u^2+b^2} \end{pmatrix}$$

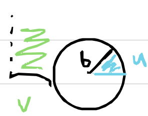
$$\begin{cases} \vec{n} = \widehat{\underline{x}_u \times \underline{x}_v} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+b^2}} (b\sin(v), -b\cos(v), u) \\ \underline{x}_{uv} = (-\sin(v), \cos(v), 0) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} l = \vec{n} \cdot \underline{x}_{uu} = 0 \\ m = \vec{n} \cdot \underline{x}_{uv} = -b/\sqrt{u^2+b^2} \\ n = \vec{n} \cdot \underline{x}_{vv} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{II} = -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

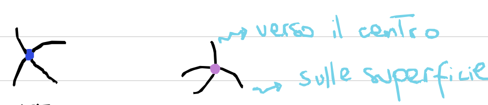
Dunque $S_p = \mathrm{I}^{-1}\,\mathrm{II} \rightsquigarrow K(p) = \cancel{\sqrt{u^2+b^2}} \dfrac{-b}{\cancel{\sqrt{u^2+b^2}}} = -b < 0$,
quindi ogni punto è iperbolico.

Esercizio (toro) Consideriamo il toro $\mathbb{T}_{a,b}$, che parametrizziamo con $\underline{x}(u,v) = ((a+b\cos(u))\cos(v), (a+b\cos(u))\sin(v), b\sin(u))$





Allora:
$$\begin{cases} \underline{x}_u = (-b\sin(u)\cos(v), -b\sin(u)\sin(v), b\cos(u)) \\ \underline{x}_v = (-(a+b\cos(u))\sin(v), (a+b\cos(u))\cos(v), 0) \end{cases}$$



ellittico parabolico

da cui:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a+b\cos(u))^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \widehat{\underline{x}_u \times \underline{x}_v} = -(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(v)).$$

Da cui:

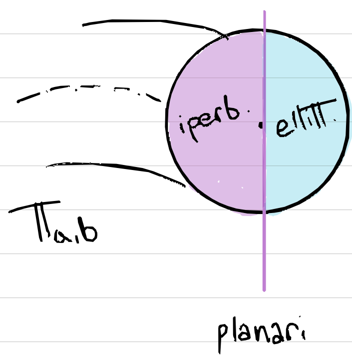
$$\boxed{\mathrm{II} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos(u))\cos(u) \end{pmatrix}}$$

Quindi:

$$K(p) = \det(S_p) = \det(\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}) =$$

$$= \frac{\cos(u)}{b\,(a+b\cos(u))},$$

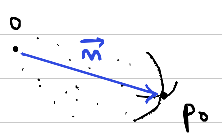
il cui segno dip. solo da $\cos(u)$! Dunque:



Esercizio Dimostrare che $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta $(\neq \emptyset)$ ha un p.to ellittico.

$\rightsquigarrow$ l'idea è che un p.to di norma massima di Σ sia ellittico dacché "i p.ti intorno possono solo curvare indietro".

Sia $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ t.c. $f(p) = \|p\|^2$ e sia p_0 un suo massimo.



$[w \triangleq \alpha'(0)]$

Sia α una curva p.l.a. su Σ passante per p_0 in 0. $f(\alpha(t))$ per costruzione ha massimo in 0 $\Longrightarrow$ $(f\circ\alpha)'(0) = 0$, $(f\circ\alpha)''(0) \leq 0$.

• $(f\circ\alpha)'(0) = Df(\alpha(0))\,\alpha'(0) = 2\,\overbrace{\alpha'(0)}^{w}\cdot\alpha(0) = 0 \Longrightarrow$

$\underset{w \text{ arbitr.}}{\underbrace{\longrightarrow}}$ $p_0 \perp T_{p_0}S \rightsquigarrow p_0 = \|p_0\|\,\underline{m}(p_0)$.

- $$(f\circ\alpha)''(0) = 2\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\alpha'(t)\cdot\alpha(t)\right] =$$

$$= 2\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\alpha''(t)\cdot\alpha(t) + \|\alpha'(t)\|^2\right] =$$

$$= 2\left(\alpha''(0)\cdot\alpha(0) + \overbrace{\|\alpha'(0)\|^2}^{=1}\right) =$$

$$= 2\Big(\underbrace{\|p_0\|\, \dot{T}_\alpha(0)\cdot \underline{n}(p_0)}_{k_n(p_0,\,\alpha'(0))} + 1\Big) \underbrace{\leq 0}_{\text{è un massimo}}$$

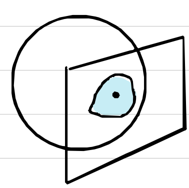
Dunque:

$$k_n(p_0, \alpha'(0)) \leq -\frac{1}{\|p_0\|} < 0 \qquad \forall\, w,\ \|w\|=1,$$

in particolare $\underbrace{k_1\cdot k_2 > 0}_{K(\Sigma)}$; i.e., p_0 è ellittico. $\square$

Esercizio Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. Si mostri che:

(i) se $p\in\Sigma$ è ellittico, $\exists$ intorno di p in Σ contenuto dalla stessa parte di $T_p S^a$; ovverosia tutto contenuto in uno dei due semispazi indotti dal taglio di $\mathbb{R}^3$ tramite $T_p S^a$.



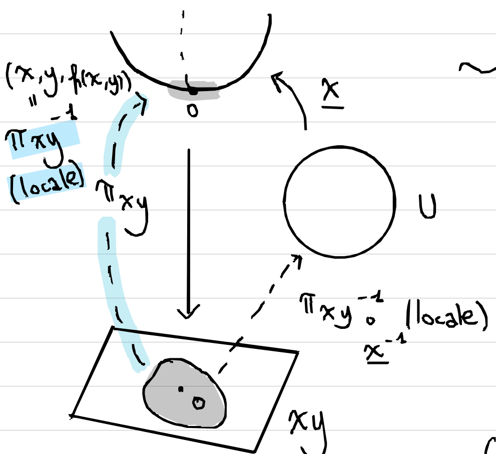
(ii) se $p\in\Sigma$ è iperbolico, $\nexists$ " .

(iii) se $p\in\Sigma$ è parabolico o planare, potrebbe esistere o meno (si mostrino esempi in cui esiste ed altri in cui <u>non</u> esiste).

$\rightsquigarrow$ osserviamo innanzitutto che le rototraslazioni non modificano le curvature normali, che sono curvature di curve; in particolare rimangono invariate le curvature principali (a meno di segno).

Possiamo dunque assumere wlog $p = 0 \in \Sigma$ con $T_pS = \text{span}(e_1, e_2)$ (i.e., piano x-y) e dir. principali proprio e_1 e e_2.

Sia $\underline{x} : U \to \underline{x}(U)$ una par. reg. intorno a $p = 0$. Allora
$\langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle = T_0 \Sigma$ $\rightsquigarrow$ l'ultima riga di $J\underline{x}$ è zero
$\rightsquigarrow$ precomp. $\underline{x}$ con π_{xy} si ha $J(\pi_{xy} \circ \underline{x})$ invertibile, da cui $\underbrace{\pi_{xy}}_{C^\infty} \circ \underbrace{\underline{x}}_{C^\infty}$ diffeo. localmente. Dunque $\rightarrow$ x regolarità
π_{xy}^{-1} è loc. inv. come diffeo.



$\rightsquigarrow$ un intorno di $0 \in \Sigma$ è grafico di $f : \underset{\text{intorno di } 0 \in \mathbb{R}^2}{V} \longrightarrow \Sigma$ C^∞ (i.e., è della forma $\{(u, v, f(u,v))\}$.
$f(0,0) = 0$

Per (i) la tesi consiste nel mostrare che localm. $f(u,v) \geq 0$ vicino a zero. $(o \leq 0)$

Consideriamo allora proprio la par. reg.
$\underline{y} : (u,v) \longmapsto (u, v, f(u,v))$.

Taylor $\Big[$ $f(u,v) = f(0,0) + u f_u(0) + v f_v(0) + \frac{1}{2}(u^2 f_{uu}(0) + 2uv f_{uv}(0) + v^2 f_{vv}(0)) + o(u^2 + v^2)$

$$\begin{cases} \underline{y}_u = (1, 0, f_u) \\ \underline{y}_v = (0, 1, f_v) \end{cases} \overset{T_0\Sigma \text{ è sul piano } xy}{\Longrightarrow} f_u(0) = f_v(0) = 0 \checkmark$$

$\Longrightarrow$ $\underline{y}_u = e_1$, $\underline{y}_v = e_2$

Quindi $E(0) = G(0) = 1$ e $F(0) = \underline{y}_u \cdot \underline{y}_v = 0$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Una normale è $\underline{n}(0) = (0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} \ell(0) = y_{uu}(0) \cdot \underline{n}(0) & h_{uu}(0) \\ m(0) = y_{uv}(0) \cdot \underline{N}(0) = & h_{uv}(0) \\ n(0) = y_{vv}(0) \cdot \underline{N}(0) = & h_{vv}(0) \end{cases}, \text{ quindi } \boxed{\mathrm{II} = \begin{pmatrix} h_{uu}(0) & h_{uv}(0) \\ h_{uv}(0) & h_{vv}(0) \end{pmatrix}.}$$

$\rightsquigarrow$ osserviamo che $S_0 = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II} = \mathrm{II}$.

Ricordiamo che e_1 ed e_2 sono x ipotesi dir. principali, dunque

$$h_{uu}(0) = k_1, \quad h_{vv}(0) = k_2, \qquad \left(S_0 = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$h_{uv}(0) = 0.$$

Pertanto $h(u,v) = \frac{1}{2}\left(k_1 u^2 + k_2 v^2 \right) + o(u^2+v^2)$.

(i) se 0 è ellittico, allora wlog $\underset{(*)}{k_1 \le k_2 < 0}$ o $\underset{(**)}{0 < k_1 \le k_2}$.

$$(*) \quad \frac{h(u,v)}{u^2+v^2} \le \frac{k_2}{2} + \frac{o(u^2+v^2)}{u^2+v^2} \xrightarrow[(u,v)\to(0,0)]{} \frac{k_2}{2},$$

quindi loc. $h(u,v) \le 0$ per perm. del segno

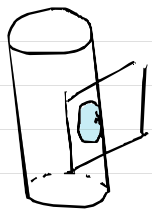
$(**)$ analog. loc. $h(u,v) \ge 0$ ".

(ii) se 0 è iperbolico, allora wlog $k_1 < 0 < k_2$.

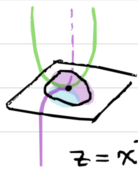
- $\dfrac{h(u,0)}{u^2} = \dfrac{k_1}{2} + \dfrac{o(u^2)}{u^2} \xrightarrow[u\to 0]{} \dfrac{k_1}{2} < 0$, quindi lungo $v=0$ è loc. ≤ 0
- $\dfrac{h(0,v)}{v^2} = \dfrac{k_2}{2} + \dfrac{o(v^2)}{v^2} \xrightarrow[v\to 0]{} \dfrac{k_2}{2} > 0$, " $u=0$ è loc. ≥ 0.

Dunque un intorno come desiderato <u>non</u> può esistere.

(iii) Parabolici



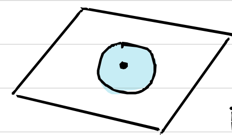
l'intorno esiste ✓



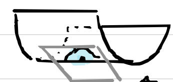
$z = x^2 + y^3$

l'intorno **non** esiste ✓

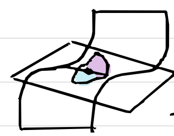
Planari



l'intorno esiste ✓



$z = y^4$



$z = y^3$

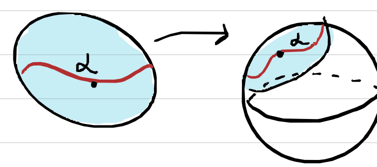
l'intorno **non** esiste ✓

Teorema egregium

Gauss cercò di classificare le param. $\underline{x}$ in grado di conservare le lunghezze delle curve dal piano, in altre parole si chiedeva:

(carte geografiche) in particolare da $\mathbb{R}^2$ alla sfera

Q. data $\underline{x} : U \to \overbrace{\underline{x}(U)}^{\Sigma \triangleq}$, quand'è che $\forall\, \bar{\alpha} : [a,b] \to U$ si ha $\ell(\bar{\alpha}) = \ell(\underbrace{\underline{x} \circ \bar{\alpha}}_{\alpha \triangleq})$?



$\ell(\alpha) = \ell(\bar{\alpha}) \;\; \forall \alpha \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_a^t \| \bar{\alpha}'(u) \| \, du = \int_a^t \| \alpha'(u) \| \, du \quad \forall\, t \in [a,b]$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \; \| \bar{\alpha}'(t) \| = \| \alpha'(t) \| \quad \forall\, t \in [a,b]. \qquad (\ast\ast\ast)$$

Sia $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$. Allora:

$$\alpha'(t) = \underbrace{u'(t)\, \underline{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(u(t), v(t))}_{\in T_{\alpha(t)} \Sigma}$$

Per $(\ast\ast\ast)$, siccome $(u'(t), v'(t))$ è arbitrario, si ha che —— fissato $p = \alpha(t_0)$ con $t_0 \in (a,b)$ —— l'app. $\varphi : (a,b) \longmapsto a\, \underline{x}_u(p) + b\, \underline{x}_v(p)$ è un'isometria da $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ a $(T_p\Sigma, I_p)$.

Dunque $I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = I_2 \Longrightarrow E = G = 1, \quad F = 0.$

(Il viceversa si mostra analogamente).

Prop. $\underline{x}$ conserva le lunghezze delle curve sse $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$ $\forall$ p.to.

Diciamo in qst. caso che $\underline{x}$ è un' **ISOMETRIA LOCALE** da $\mathbb{R}^2$ a Σ.

$\rightsquigarrow$ quindi il prob. di Gauss si riduceva a studiare le eventuali iso. loc. tra $\mathbb{R}^2$ e la sfera.

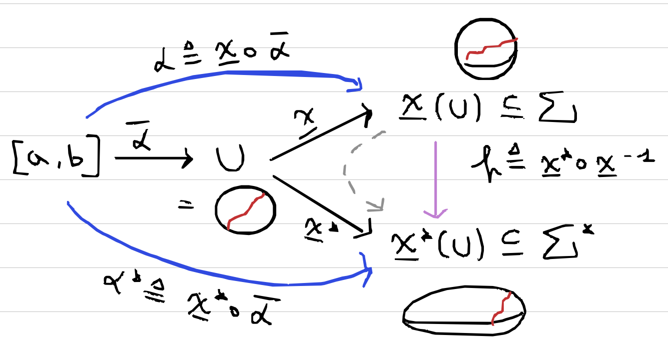
In generale:

Def. Siano $\Sigma, \Sigma^* \subseteq \mathbb{R}^3$ superfici con $p \in \Sigma$, $p^* \in \Sigma^*$. Si dice che Σ e Σ^* sono **LOC. ISOMETRICHE** intorno a p e p^* se $\exists$ par. reg. $\underline{x}$ per p, $\underline{x}^*$ per p t.c. $\underline{x}, \underline{x}^* : \underset{\sim}{U} \to \Sigma, \Sigma^*$ $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$. Diciamo loc. isom. se lo sono ovunque in corrispondenza.

stesso dominio

L'uguagl. dei triedri (E, F, G) suggerisce proprio che i piani tangenti sono isometrici. In effetti, si possono trasportare curve isometricam. da Σ a Σ^* o viceversa.

tramite le param.!



Mostriamo che in effetti
$\ell(\alpha) = \ell(\alpha^*) = \ell(f \circ \alpha)$ $= \alpha^*$
con $f = \underline{x}^* \circ \underline{x}^{-1}$.

E' suff. mostrare che le velocità di α e di α^* coincidono $\forall\, t$.

Sia $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$. Allora $\alpha'(t) = u'(t)\, \underline{x}_u(\alpha(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(\alpha(t))$

$\rightsquigarrow \quad \|\alpha'(t)\|^2 = (u'(t) \;\; v'(t))\; I_{\alpha(t)}\; (u'(t) \;\; v'(t))^T.$

Analogamente $\|\alpha^{*\prime}(t)\|^2 =$ " $I_{\alpha^*(t)}$ " ^{T}. Poiché $I_{\alpha(t)} = I_{\alpha^*(t)}$, si deduce che in effetti le vel. coincidono.

$\rightsquigarrow$ le rototrasl. inducono sup. localm. isometriche!

Teorema (egregium di Gauss) Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $\underline{x} : U \to \Sigma$ par. reg. di Σ. Allora $K(p)$ è esprimibile in funz. di $E(p), F(p), G(p)$, $E'(p), F'(p)$ e $G'(p)$.

Corollario. Superf. localm. isometriche hanno stessa curvatura gaussiana nei p.ti corrispettivi. (stessi E, F, G)

Corollario. $\mathbb{R}^2$ e la sfera <u>non</u> sono loc. isometriche.

$$K_{\mathbb{R}^2}(p) = 0 \neq \frac{1}{a^2} = K_{S_a^2(0)}(p^*). \qquad \square$$

<u>Dimostrazione del Teorema egregium</u> Ricordiamo che $\underline{x}_u, \underline{x}_v$ e $\underline{n}$ formano in ogni p.to una base di $\mathbb{R}^3$. Dunque $\underline{x}_{uu}, \underline{x}_{uv}$ e $\underline{x}_{vv}$ devono potersi esprimere come comb. lineare come segue:

$$\begin{cases} \underline{x}_{uu} = \Gamma_{uu}^{u}\, \underline{x}_u + \Gamma_{uu}^{v}\, \underline{x}_v + \ell\, \underline{n} & \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} \\ \underline{x}_{uv} = \Gamma_{uv}^{u}\, \underline{x}_u + \Gamma_{uv}^{v}\, \underline{x}_v + m\, \underline{n} & \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} \\ \underline{x}_{vv} = \Gamma_{vv}^{u}\, \underline{x}_u + \Gamma_{vv}^{v}\, \underline{x}_v + n\, \underline{n} & \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} \end{cases}$$

I Γ_{ij}^{k} sono detti **SIMBOLI DI CHRISTOFFEL**

Osserviamo che:

$$\begin{cases} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} = \Gamma_{uu}^{u} \|\underline{x}_u\|^2 + \Gamma_{uu}^{v}\, \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = E\, \Gamma_{uu}^{u} + F\, \Gamma_{uu}^{v} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} = \Gamma_{uu}^{u}\, \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v + \Gamma_{uu}^{v} \|\underline{x}_v\|^2 = F\, \Gamma_{uu}^{u} + G\, \Gamma_{uu}^{v} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} \end{pmatrix} = \underbrace{I}_{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^{u} \\ \Gamma_{uu}^{v} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Inoltre $(\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_u = 2\, \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} \rightsquigarrow \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} = \frac{(\overbrace{\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u}^{E})_u}{2}$,
da cui:

$$\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} = \frac{E_u}{2} \qquad (**)$$

Osserviamo che $(\overbrace{\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v}^{F})_u = (\underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v) + (\overbrace{\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uv}}^{E_u/2})$, da
cui:

$$\underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} = F_u - E_v/2 \qquad (***)$$

Combinando $(*)$, $(**)$ e $(***)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \mathrm{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u/2 \\ F_u - E_v/2 \end{pmatrix},$$

e quindi $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}$ sono esprimibili in funzione di E_u, E_v e F_u. Analog. si mostra che tutti i simboli di Christoffel si esprimono in funz. di derivate di E, F e G.

L'osservazione chiave è la seguente:

$$S = \mathrm{I}^{-1}\,\mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \Rightarrow \ell d - mb = \frac{1}{EF-G^2}\big(\ell(-mF+nE)$$

$$- m(-\ell F + mE)\big) =$$

$$= \frac{1}{EG-F^2}\left(\cancel{-\ell mF} + \ell n E + \cancel{\ell mF} - m^2 E\right) =$$

$$= E\, \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = EK$$

Dunque, mostrando che $\ell d - mb$ è esprimibile in funz. di E, F, G e derivate, la Tesi segue immed. In part., poiché sono espr. i simboli di Christoffel, è suff. mostrare che $\ell d - mb$ si espr. con questi simboli.

- $\underline{x}_{uuv} = \left(\Gamma^u_{uu}\, \underline{x}_u + \Gamma^v_{uu}\, \underline{x}_v + \ell\, \underline{n} \right)_v =$

$$= \dots + \left(\Gamma^u_{uu} \underbrace{\Gamma^v_{uv}} + (\Gamma^v_{uu})_v - \ell d \right) \underline{x}_v + \dots$$

coord. in $\underline{x}_v$ di $\underline{x}_{uv}$

$\underline{n}_v = -S(\underline{x}_v) = -c\,\underline{x}_u - d\,\underline{x}_v$

- $\underline{x}_{uvu} = \left(\Gamma^u_{uv}\, \underline{x}_u + \Gamma^v_{uv}\, \underline{x}_v + m\, \underline{n} \right)_u =$

$$= \dots + \left(\Gamma^u_{uv} \underbrace{\Gamma^v_{uu}} + (\Gamma^v_{uv})_u - m b \right) \underline{x}_v + \dots$$

coord. in $\underline{x}_v$ di $\underline{x}_{uu}$

$\underline{n}_u = -S(\underline{x}_u) = -a\,\underline{x}_u - b\,\underline{x}_v$

Dacché $\underline{x}_{uuv} = \underline{x}_{uvu}$ per Schwarz, e $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, allora:

$$\ell d - m b = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + - (\Gamma^v_{uv})_u ,$$

da cui la Tesi. $\square$

$\rightsquigarrow$ ricordiamo che un cilindro è loc. isom. al piano, dacché ha $E \equiv G \equiv 1$ e $F \equiv 0$.

$\rightsquigarrow$ un' elicoide $(K<0)$ non può essere loc. iso. al piano $(K=0)$ né alla sfera $(K>0)$.

Trasporto parallelo

Def. $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. Un CAMPO VETTORIALE (TANGENTE) su Σ è una mappa C^∞ $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ t.c. $X(p) \in T_p\Sigma$ $\forall p \in \Sigma$.

Def. Dato un campo vettoriale $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $p \in \Sigma$, $v \in T_p\Sigma$, si definisce:

$$\nabla_v X(p) \triangleq \pi_{T_p\Sigma}(\underbrace{D_v}_{\text{deriv. direz.}} X(p)) = D_v X(p) - \overbrace{(D_v X(p) \cdot \underline{n}(p))\,\underline{n}(p)}^{\text{non dip. dalla scelta di } \underline{n}(p)!} \in T_p\Sigma,$$

come la DERIVATA COVARIANTE di X in direzione v sul p.to $p \in \Sigma$.

$\rightsquigarrow$ osserviamo che $\nabla_v X(p)$ è ben def., e anzi che è suff. che X sia def. lungo una curva α passante in 0 per p con $\alpha'(0) = v$.