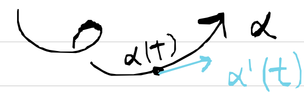
Curve

Una **curva parametrizzata** è una mappa **liscia** (i.e., C^∞) $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, con I intervallo in $\mathbb{R}$.

Chiamiamo **supporto** o **traccia** di una curva α la sua immagine $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Definiamo il **vettore velocità** come lo **jacobiano di α**, ossia:

$$\alpha'(t) \triangleq \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}.$$



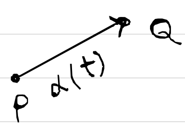
$\rightsquigarrow$ $\alpha = (x,y,z) \implies \alpha' = (x', y', z')$ (comp. per comp.)

Definiamo la **lunghezza di α** come $\ell(\alpha) \triangleq \int_{I^+} \underbrace{\|\alpha'(t)\|}_{\geq 0} dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

orient. verso destra $\leftarrow$ I^+

Esempio Convinciamoci del fatto che $\ell(\alpha)$ implementa correttamente la nostra idea di lunghezza.

i) **segmento lineare**

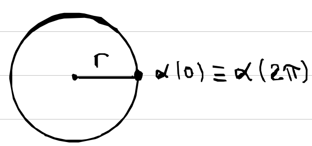


$\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto P + t(Q-P)$.

Quindi $\alpha'(t) = Q - P \Rightarrow \ell(\alpha) = \int_0^1 \|Q-P\|\, dt = \|Q-P\|$. ✓

ii) **Circonferenza**

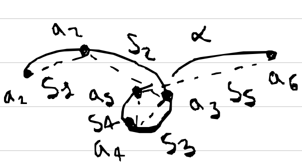
$\alpha: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto r(\cos(t), \sin(t), 0)$



$\alpha'(t) = r(-\sin(t), \cos(t), 0) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \ell(\alpha) = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$

L'idea intuitiva è che, dal momento che "l'intuizione funziona sui segmenti", il risultato teorico sia dato dal fatto che "il limite delle lunghezze di funzioni a tratti composte da segmenti"* sia proprio la lunghezza (a livello di integrale).



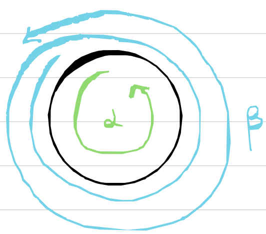
* che "approssimano α", come in figura.

Il risultato tecnico (non dim.) è il seguente:

$$\boxed{\text{Dato } \varepsilon>0,\ \exists\, m>0 \text{ t.c. } \max\{\underbrace{|S_i|}_{\text{segm. i-esimo}}\}<m,\quad \big|\underbrace{|S|}_{=\sum_i |S_i|}-\ell(\alpha)\big|<\varepsilon}$$

Q: $\ell(\cdot)$ dipende o no dalla parametrizzazione? Basta avere supporto uguale?

No: $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0)$, con $t \in [0, 2\pi]$, hanno stesso supporto, ma β percorre due volte la circonferenza, e infatti $\ell(\beta) = 2\ell(\alpha) \neq \ell(\alpha)$.



Il punto è che β in effetti riparametrizza α, ma correttamente solo su $I=[0,\pi]$, non $I=[0,2\pi]$!

Data $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$, una riparametrizzazione di α è una mappa $\beta: J \to \mathbb{R}^3$ t.c. $\exists\ h: J \to I$ diffeomorfismo (i.e., C^∞ con inversa C^∞) di modo che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\beta"'] & I \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \beta = \alpha \circ h.$$

Dal momento che h è invertibile, sugli intervalli $I=[a,b]$, $J=[c,d]$ possono esserci solo due casi:

I: $h(a)=c$, $h(b)=d$, $h'>0$ (orientam. positivo/concorde)
II: $h(a)=d$, $h(b)=c$, $h'<0$ (" negativo/discorde)

Infatti da $h \circ h^{-1} = id$ si deduce che:

$$h'(h^{-1}(t))\,(h^{-1})'(t) = 1 \implies h'(t)\neq 0\ \forall t$$ e dunque (siccome h è C^∞), o $h>0$ o $h<0$.

Prop. Se β è una riparam. di α, allora $\ell(\beta)=\ell(\alpha)$.

$$\ell(\alpha) = \int_{I^+} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{I^+} \|\beta'(h(t))\|\, |h'(t)|\, dt$$

$$\underset{s=h(t)}{=} \xrightarrow[h'>0]{\mathrm{I}} \int_{J^+} \|\beta'(s)\| \underbrace{\frac{|h'(h^{-1}(s))|}{h'(h^{-1}(s))}}_{1} ds = \int_{J^+} \|\beta'(s)\| ds = \ell(\beta)$$

$$\xrightarrow[h'<0]{\mathrm{II}} \int_{J^-} \|\beta'(s)\| \underbrace{\frac{|h'(h^{-1}(s))|}{h'(h^{-1}(s))}}_{-1} ds = \int_{J^+} \|\beta'(s)\| ds = \ell(\beta). \quad \square$$

Diciamo che α è **regolare** se <u>non</u> ha mai velocità nulla (i.e., $\alpha'(t)\neq 0 \ \forall t$).

Se α è regolare, α ammette una riparametrizz. data dalla "**coord. curvilinea**", ossia indotta dalla lungh. d'arco:

$$s(t) \triangleq \int_{a \in I}^{t} \underbrace{\|\alpha'(u)\|}_{\neq 0\ \forall u} du \rightsquigarrow \beta = \alpha \circ s^{-1}.$$

$\Longrightarrow$ invertibile

$$(s: I \to [0, \ell(\alpha)])$$

Esempio Consideriamo il segmento $\overrightarrow{PQ}$: $(P\neq Q)$

$$\alpha(t) = P + t(Q-P) \Longrightarrow \alpha'(t) = Q-P \neq 0.$$

Dunque, $s(t) = \int_0^t \|Q-P\|\, du = \|Q-P\|\, t \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \beta(t) = \alpha\left(\frac{t}{\|Q-P\|}\right) = P + t\underbrace{\frac{Q-P}{\|Q-P\|}}_{\text{unitario}} \qquad J = [0, \|Q-P\|]$$

<u>Non</u> è un caso aver ottenuto nella riparametrizz. un vettore velocità sempre **unitario**: vale in generale.

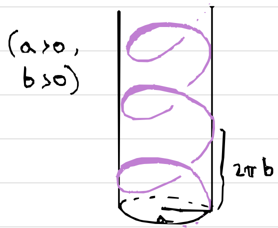
$$\|\alpha'(t)\| = \|(\beta\circ s)'(t)\| = \|\beta'(s(t))\|\, |s'(t)| \longrightarrow$$

$$\rightsquigarrow \|\beta'(s(t))\| = \frac{\|\alpha'(t)\|}{|s'(t)| = \|\alpha'(t)\|} = 1. \quad \checkmark \quad (s \text{ è biunivoca})$$

$\rightsquigarrow$ nella realtà la riparam. tramite lunghezza d'arco è difficilm. esprimibile in modo esplicito (vd., $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$).

Esempio (elica)

Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (a\cos(t), a\sin(t), bt)$. Se $a > 0$, $b > 0$, α rappresenta un'elica destrorsa.



$\alpha'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b) \rightsquigarrow$ sempre regolare!

$\rightsquigarrow \ell(\alpha|_{[c,d]}) = \int_c^d \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\,(d-c)$.

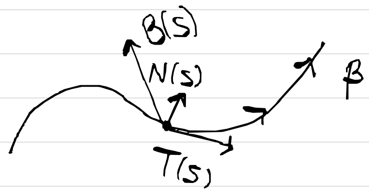
$$S(t) = \sqrt{a^2+b^2} \xrightarrow{\beta = \alpha \circ S^{-1}} \beta(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), b\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Si dice che una curva è **parametrizzata a lunghezza d'arco** **(p.l.a)** se $\|\alpha'(t)\| = 1 \ \forall t$. In tal caso, dopo t tempo avrò percorso t unità della curva.

Equazioni di Frenet

$\rightsquigarrow$ definiamo $T(s) \triangleq \beta'(s)$ come il **versore tangente** per una curva β.

Se β è p.l.a., definiamo **curvatura** di β il valore $k(s) \triangleq \|T'(s)\|$.



(o biregolare)
Una curva regolare si dice **di Frenet** se la sua versione p.l.a.* è t.c. $k(s) > 0 \ \forall s$.

In tal caso è ben definito il **versore normale principale**:

$$N(s) \triangleq T'(s) / \|T'(s)\|.$$

* la def. è ben posta: una curva regolare ammette riparam. p.l.a. e queste concordano sulle nullità di $k(\cdot)$.

Analogamente è ben definito il versore binormale:

$$B(s) = \underbrace{T(s)}_{\text{versore}} \times \underbrace{N(s)}_{\text{versore}}.$$

PRIMA EQUAZIONE DI FRENET

$$\boxed{T'(s) = \kappa(s)\, N(s)} \longleftarrow \quad T'(s) = \underbrace{\|T'(s)\|}_{\kappa(s)} \underbrace{\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}}_{N(s)}$$

La tripletta $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale ed è detta riferimento di Frenet (o triedro di Frenet).

Cerchiamo di caratterizzare anche N' e B'. Dal momento che $N(s) \perp N'(s)$, allora $N'(s) \in N(s)^{\perp} = \text{span}(T(s), B(s))$.
In particolare, $T(s) \cdot N(s) = 0 \Rightarrow \underbrace{T'(s) \cdot N(s)}_{\kappa(s)} + T(s) \cdot N'(s) = 0$, da cui si deduce che il coefficiente relativo a $T(s)$ in $N'(s)$ è $-\kappa(s)$. Definiamo allora $\tau(s)$, detta torsione, di modo che valga la seguente equazione:

SECONDA EQUAZIONE DI FRENET

$$\boxed{N'(s) = -\kappa(s)\, T(s) + \tau(s)\, B(s)}$$

Analogamente, $B'(s) \in \text{span}(T(s), N(s))$. Da $T(s) \cdot B(s) = 0$ si ottiene $\underbrace{T'(s) \cdot B(s)}_{\kappa(s)N(s) \perp B(s)} + T(s) \cdot B'(s) = 0 \Rightarrow T(s) \cdot B'(s) = 0$. Quindi $B'(s) \in \text{span}(N(s))$.

In effetti $N(s) \cdot B(s) = 0 \Rightarrow \underbrace{N'(s) \cdot B(s)}_{\tau(s)} + N(s) \cdot B'(s) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow N(s) \cdot B'(s) = -\tau(s)$, da cui ...

TERZA EQUAZIONE DI FRENET

$$\boxed{B'(s) = -\tau(s)\, N(s)}$$

Chiamiamo l'insieme delle tre equazioni sistema di Frenet:

$$\boxed{\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ la curvatura indica quanto la curva è simile a una retta ($\kappa = 0 \Rightarrow$ retta), la torsione quanto la curva è planare ($\tau = 0 \Rightarrow$ planare)

Q.: la curvatura e la torsione sono ben definite per curve non p.l.a.? E i versori?

$\rightsquigarrow$ osserviamo intanto che due riparametr. s_1 e s_2 a lunghezza d'arco hanno stessa derivata, quindi — essendo I connesso — s_1 è una traslazione in input di s_2 (e ci aspettiamo dunque di avere le stesse definizioni). In effetti è così.

Prop. La curvatura, la torsione e il riferimento di Frenet sono indipendenti dalla scelta della riparam. p.l.a., e valgono le seguenti formule:

$$T(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \widehat{\alpha'(t)} \qquad \text{(I)}$$

$$\kappa(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \text{(II)}$$

per le curve di Frenet

$$B(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \widehat{\alpha'(t) \times \alpha''(t)} \qquad \text{(III)}$$

$$N(s(t)) = B(s(t)) \times T(s(t)) = \widehat{T'(s(t))} \qquad \text{(IV)}$$

$$\tau(s(t)) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \qquad \text{(V)}$$

Sia $s(t)$ una riparam. della coord. a lunghezza d'arco con $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Allora:

(1) $\underbrace{\beta'(s(t))}_{T(s(t))} \cdot \underbrace{s'(t)}_{\|\alpha'(t)\|} = \alpha'(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow T(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \text{ da cui (I).}$$

Derivando ancora si ottiene:

$$(2)\quad \underbrace{\beta''(s(t))}_{T'(s(t))} \cdot \underbrace{s'(t)^2}_{\|\alpha'(t)\|^2} + \underbrace{\beta'(s(t))}_{T(s(t))} \cdot s''(t) = \alpha''(t).$$

Prendendo (1) × (2) si ricava, usando $T(s(t)) \times T(s(t)) = 0$:

$$(3)\quad \|\alpha'(t)\|^3 \left(T(s(t)) \times T'(s(t))\right) = \alpha'(t) \times \alpha''(t)$$

Prendendo le norme in (3) si ottiene, usando $T \perp T'$:

$$\|\alpha'(t)\|^3 \underbrace{\|T(s(t))\|}_{=1\ (p.l.a)} \cdot \underbrace{\|T'(s(t))\|}_{k(s(t))} = \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|,$$

da cui:

$$k(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \text{ ossia (II).}$$

Supponendo ora la curva di Frenet, usiamo la prima eq. di Frenet in (3):

$$(4)\quad k(s(t))\, \|\alpha'(t)\|^3 \big(\underbrace{T(s(t)) \times N(s(t))}_{B(s(t))}\big) = \alpha'(t) \times \alpha''(t),$$

Quindi:

$$B(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{k(s(t))\, \|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \text{ la (III).}$$

Per definizione $B(s(t)) = T(s(t)) \times N(s(t))$, dunque la (IV) è immediata.

Derivando (2) e usando la prima eq. di Frenet si ottiene:

$$\alpha''(t) = T(s(t)) \cdot s''(t) + k(s(t))\, s'(t)^2\, N(s(t)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \alpha'''(t) = \underbrace{T'(s(t))}_{k(s(t))\, N(s(t))} s'(t) \cdot s''(t) + T(s(t)) \cdot s'''(t) + k'(s(t)) \cdot s'(t)^3 N(s(t))$$
$$+ 2\, k(s(t))\, s''(t)\, s'(t)\, N(s(t)) +$$
$$+ k(s(t))\, s'(t)^3\, N'(s(t)) = (*)$$

$$(*) = s'''(t)\,T(s(t)) + 3s''(t)\,s'(t)\,\kappa(s(t))\,N(s(t)) +$$
(5) $$+ s'^3\,\kappa'(s(t))\,N(s(t)) + s'^3(t)\,\kappa(s(t))\,N'(s(t)).$$

Sostituendo la seconda eq. di Frenet in (5) si ottiene:

(6) $$\alpha'''(t) = (s'''(t) - \kappa(s(t))\,s'^3(t))\,T(s(t)) + (\kappa'(s(t))\,s'^3(t) + 3\kappa(s(t))\,s'(t)\,s''(t))\,N(s(t)) + \kappa(s(t))\,\tau(s(t))\,s'^3(t)\,B(s(t)).$$

Dalla (III) e la (6) si ottiene infine:

$$\underbrace{(\alpha'(t)\times\alpha''(t))}_{B(s(t))\,\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}\cdot\alpha'''(t) = \|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|\,\kappa(s(t))\,\tau(s(t))\,s'^3(t)$$

$$\Longrightarrow \tau(s(t)) = \frac{(\alpha'(t)\times\alpha''(t))\cdot\alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|\,\kappa(s(t))\,s'^3(t)} = \frac{(\alpha'(t)\times\alpha''(t))\cdot\alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2},$$

ossia si ottiene la (V). $\square$

Esercizi

1) Sia data un'elica destrorsa. Se ne calcoli curvatura e torsione.

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \qquad (a>0)$$

$$\rightsquigarrow \beta(s) = \left(a\cos\left(s/\sqrt{a^2+b^2}\right), a\sin\left(s/\sqrt{a^2+b^2}\right), b\left(s/\sqrt{a^2+b^2}\right)\right) =$$
(p.l.a.)
$$= (a\cos(s/c), a\sin(s/c), b\,s/c) \qquad (c=\sqrt{a^2+b^2})$$

Quindi $T(s) = \beta'(s) = \frac{1}{c}(-a\sin(s/c), a\cos(s/c), b) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow T'(s) = \frac{a}{c^2}\underbrace{(-\cos(s/c), -\sin(s/c), 0)}_{N(s)} \xrightarrow{\kappa(s) = N(s)\cdot T'(s)}$$

$$\longrightarrow \boxed{\kappa(s) = a/c^2}$$

- $$B(s) = T(s)\times N(s) = \frac{1}{c}(b\sin(s/c), -b\cos(s/c), a) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B'(s) = -\frac{b}{c^2}\underbrace{(-\cos(s/c), -\sin(s/c), 0)}_{N(s)} \xrightarrow{\tau(s) = -B'(s)\cdot N(s)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tau(s) = b/c^2}$$

Riprouiamoci applicando le formule esplicite:

$$\alpha(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt) \longrightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha'(t) = (-a\sin(t),\ a\cos(t),\ b) \longrightarrow \qquad (\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2})$$
$$\Rightarrow \alpha''(t) = (-a\cos(t),\ -a\sin(t),\ 0) \longrightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha'''(t) = (a\sin(t),\ -a\cos(t),\ 0).$$

$$\boxed{\kappa(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}} = (*)$$

$$\cdot\ \alpha'(t)\times\alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin & a\cos & b \\ -a\cos & -a\sin & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin(t),\ -ab\cos(t),\ a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} \overset{a>0}{=} a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$(*) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}^{\,3}} = a/c^2 \checkmark$$

$$\boxed{\tau(s(t)) = \frac{(\alpha'(t)\times\alpha''(t))\cdot\alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}} = (**)$$

$$\cdot\ (\alpha'(t)\times\alpha''(t))\cdot\alpha'''(t) = (ab\sin(t),\ -ab\cos(t),\ a^2)\cdot(a\sin(t),\ -a\cos(t),\ 0) =$$
$$= a^2b\sin^2(t) + a^2b\cos^2(t) = a^2b$$

$$(**) = \frac{a^2b}{(a\sqrt{a^2+b^2})^2} = \frac{a^2b}{a^2c^2} = b/c^2 \checkmark$$

ii) Sia data $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ t.c. $\alpha(t) = (\tfrac{1}{3}t^3,\ \sqrt{2}(t\sin(t)+\cos(t)),\ \tfrac{1}{2}(t+\sin(t)\cos(t)))$.

a. Dimostrare che α ristretta a un intorno di 0 è di Frenet.
b. Calcolare curvatura e rif. di Frenet in $(0,\sqrt{2},0)$.

a. Osserviamo che è sufficiente mostrare prima che $\alpha'(0)\neq 0$ (così che* α sia localm. regolare in 0) e poi che $T'(s(0)) = \kappa(s(0)) > 0$ (per analogo motivo).

* ricordiamo che α è C^∞.

- $\alpha'(t) = (t^2, \sqrt{2}\, t\cos(t), \cos^2(t)) \rightsquigarrow \alpha'(0) = \underset{\neq 0}{(0,0,1)}$ ✓

- $\alpha''(t) = (2t, \sqrt{2}(\cos(t) - t\sin(t)), -\sin(2t)) \rightsquigarrow$
  $\rightsquigarrow \alpha''(0) = (0, \sqrt{2}, 0)$.

Poiché $\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (0,0,1) \times (0,\sqrt{2},0) = -\sqrt{2}\, e_1 \neq 0$, allora — per la formula della curvatura — $\kappa(s(0)) \neq 0$, da cui la Tesi. ✓

b.
- $T(s(0)) = \dfrac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = (0,0,1) = e_3$ ✓

- $B(s(0)) = \dfrac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|} = (-1,0,0) = -e_1$ ✓

- $N(s(0)) = \underbrace{B(s(0))}_{-e_1} \times \underbrace{T(s(0))}_{e_3} = (0,1,0) = e_2$ ✓

Quindi il Triedro è $(e_3, e_2, -e_1)$. Per la curvatura si usa ancora la formula esplicita:

$$\kappa(s(0)) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$ ✓

iii $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, \frac{1}{3} t^3\right)$.

a. Mostrare che α è regolare e di Frenet.
b. Calcolare curvatura, torsione e rif. di Frenet.

a. $\alpha'(t) = (1, \sqrt{2}\, t, t^2) \neq 0$ ✓ (regolare)
$\alpha''(t) = (0, \sqrt{2}, 2t)$
$\alpha'''(t) = (0, 0, 2)$

- $\|\alpha'(t)\|^3 = (t^2+1)^3$

- $\kappa(s(t)) = \dfrac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = (*)$

- $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (\sqrt{2}\, t \cdot 2t - \sqrt{2}\, t^2, -2t, \sqrt{2}) =$
  $= (\sqrt{2}\, t^2, -2t, \sqrt{2})$

$$(*) = \frac{\sqrt{2}\,(t^2+1)}{(t^2+1)^3} = \frac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2} \underbrace{> 0}_{\text{di Frenet}}$$ ✓

- $\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \sqrt{2}\,(t^2+1)$

- $\tau(s(t)) = \dfrac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}(t^2+1)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2}$ ✓

- $T(s(t)) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\dfrac{1}{t^2+1}, \dfrac{\sqrt{2}t}{t^2+1}, \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)$ ✓

- $B(s(t)) = \dfrac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \left(\dfrac{t^2}{t^2+1}, -\dfrac{\sqrt{2}t}{t^2+1}, \dfrac{1}{t^2+1}\right)$ ✓

- $N(s(t)) = B(s(t)) \times T(s(t)) = \dfrac{1}{(t^2+1)} \begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 & -\sqrt{2}t & 1 \\ 1 & \sqrt{2}t & t^2 \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{1}{(t^2+1)}\left(-\sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t,\ 1 - t^4,\ \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t\right)$ ✓

IV) Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ regolare. Si mostri che se α ha curvatura nulla ovunque, allora $\alpha(I)$ è contenuta in una retta affine (il viceversa è già stato dimostrato).

Dal momento che le riparam. condividono lo stesso supp. di α, supponiamo α p.l.a. Se $\kappa = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\| = 0$, allora $\alpha''(s) = 0$ ovunque $\xrightarrow{I \text{ connesso}}$ $\alpha'(s) = v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha(s) = P + sv$, che parametrizza la retta $P + \mathrm{span}(v)$. ✓ □

V) " di Frenet. Si mostri che α ha torsione nulla ovunque se e solo se α è planare (i.e., $\alpha(I) \subseteq$ piano affine).

Come prima, possiamo assumere α p.l.a. $(\beta \triangleq \alpha)$

$(\Rightarrow)$ $\tau(s(t)) = 0 \xrightarrow[\text{eq. di Frenet}]{\text{terza}} B'(s(t)) = -\tau(s(t))\, N(s(t)) = 0 \xRightarrow{I \text{ conn.}}$
$\Rightarrow B(s(t)) = b \in \mathbb{R}^3$.

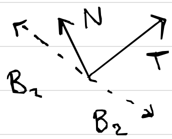
Quindi $T(s(t)) \in B(s(t))^\perp = b^\perp \Rightarrow 0 = T(s) \cdot b = \beta'(s) \cdot b =$
$= (\beta(s) \cdot b)' \xrightarrow{I \text{ connesso}} (\beta(s) - \beta(s_0)) \cdot b = 0 \quad \forall s \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta(I)$ è in un piano affine. ✓

$(\Leftarrow)$ β è planare $\Rightarrow \beta(s) \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot b = c\}$ per qualche $b \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$. $\beta(s) \cdot b = c \Rightarrow \underbrace{\beta''(s)}_{=\kappa(s)N(s)} \cdot b = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{\kappa(s)}_{\text{Frenet} \Rightarrow \neq 0} N(s) \cdot b = 0 \Rightarrow N(s) \cdot b = 0.$

Inoltre $T'(s)\cdot b = \underbrace{\kappa(s)}_{\neq 0}\cdot N(s)\cdot b = N(s)\cdot b = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B(s) \in T(s)^{\perp} \cap N(s)^{\perp}$. Poiché $B(\cdot)$ è continua e può essere solo due vettori*, $B(\cdot)$ è necessariamente costante. Dunque $B'(s) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow -\tau \underbrace{N(s)}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \tau = 0.$$



* come nella figura.

vi. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regolare. Se $\alpha(I) \subseteq$ sfera di raggio R, allora α è di Frenet e $\kappa \geq \frac{1}{R} > 0$.

Sia $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = R\}$ ($P \equiv$ centro della sfera).
Wlog. assumiamo $\beta \equiv \alpha$ p.l.a.

$\beta(s) \in S \iff \|\beta(s) - P\| = R$. Quindi $(\beta(s)-P)\cdot(\beta(s)-P) = R^2$. Derivando otteniamo:

$$\cancel{2}\, T(s)\cdot(\beta(s)-P) = 0 \xRightarrow{d/ds} T'(s)(\beta(s)-P) + \underbrace{T(s)\cdot T(s)}_{1} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\|T'(s)\|}_{\kappa(s)}\,\underbrace{\|\beta(s)-P\|}_{R} \overset{\text{c.s.}}{\geq} |T'(s)\cdot(\beta(s)-P)| = 1 \Longrightarrow$$

$\square$

$$\Longrightarrow \kappa(s) \geq \frac{1}{R}.$$

Teorema fond. della teoria delle curve

Vogliamo caratterizzare le curve con curvatura e torsione.

Partiamo mostrando che le isometrie non cambiano queste quantità. Siano $\beta, \tilde{\beta} : I \to \mathbb{R}^3$ p.l.a., supponendo che $\exists$ $A \in SO(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$ t.c.:

$$\tilde{\beta}(s) = A\cdot\beta(s) + b.$$

Verifichiamo che κ e τ coincidano in corrispondenza.

$$\tilde T(s) = \tilde\beta'(s) = A\cdot\beta'(s) = AT(s).$$

d/ds

$$\Longrightarrow \quad \tilde T'(s) = \tilde\beta''(s) = A\cdot\beta''(s) = AT'(s). \quad (\tilde N(s) = AN(s))$$

Dacché A non modifica le norme, le curvature coincidono.

$$\tilde B(s) = \tilde T(s)\times\tilde N(s) = AT(s)\times AN(s) \overset{*}{=} A(T(s)\times N(s)) = AB(s).$$

dunque anche la torsione rimane invariata.

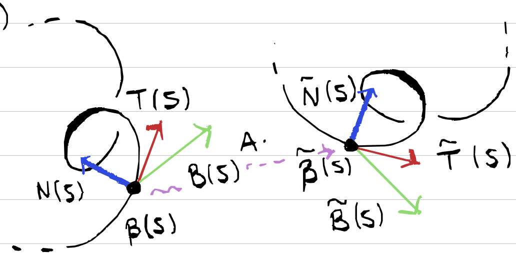
Verifichiamo che la corrispondenza vale anche al contrario...

Teorema (fond. di Teoria delle curve) Due curve $\beta, \tilde\beta : I \to \mathbb{R}^3$ p.l.a. di Frenet hanno stessa curvatura e torsione sse sono identiche a meno di isometria di parte lineare con det positivo (i.e., $A \in SO(3)$) [ossia uniche a meno di congruenza]

$\longrightarrow$ l'esistenza di una curva di Frenet con dati $I \subseteq \mathbb{R}$, $\kappa : I \to \mathbb{R}^+$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ si vede dal fatto che il sistema di Frenet è un sistema di eq. diff. lineari.

($\Leftarrow$) appena visto

($\Rightarrow$) ...



Sia $s_0 \in I$. Sia A la matrice $\in SO(3)$ che ruota $(T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ in $(\tilde T(s_0), \tilde N(s_0), \tilde B(s_0))$.

Sia $\beta^*(s) = A\beta(s) + b$. Verifichiamo che $\beta^* \equiv \tilde\beta$: sia $f : I \to \mathbb{R}$:

$$f(s) = \overset{\le 1}{T_{\beta^*}(s)\cdot T_{\tilde\beta}(s)} + \overset{\le 1}{N_{\beta^*}(s)\cdot N_{\tilde\beta}(s)} + \overset{\le 1}{B_{\beta^*}(s)\cdot B_{\tilde\beta}(s)} \quad (1)$$

Allora, derivando (1) e usando le tre eq. di Frenet si ottiene:

$$f'(s) = T_{\beta^*}'(s)\cdot T_{\tilde\beta}(s) + T_{\beta^*}(s)\cdot T_{\tilde\beta}'(s) + N_{\beta^*}'(s)\cdot N_{\tilde\beta}(s) + N_{\beta^*}(s)\cdot N_{\tilde\beta}'(s) + B_{\beta^*}'(s)\cdot B_{\tilde\beta}(s) + B_{\beta^*}(s)\cdot B_{\tilde\beta}'(s) = (2)$$

* si è usato che per $A \in SO(3)$, $(Av)\times(Aw) = A(v\times w)$.

$K_{\beta^*} = K_\beta = K_{\tilde\beta}$
$\tau_{\beta^*} = \tau_\beta = \tau_{\tilde\beta}$

$$(*)\ \underbrace{\quad\quad}_{1^a,\,2^a,\,3^a \text{ eq. di Frenet}}\ K_{\beta^*}\left(\cancel{N_{\beta^*}(s)\cdot T_{\tilde\beta}(s)} + T_{\tilde\beta}(s)\cdot N_{\beta^*}(s)\right) +$$
$$- K_{\beta^*}\left(\cancel{N_{\beta^*}(s)\cdot T_{\tilde\beta}(s)} + T_{\tilde\beta}(s)\cdot N_{\beta^*}(s)\right) +$$
$$+ \tau_{\alpha^*}\left(\cancel{B_{\tilde\beta}(s)\cdot N_{\beta^*}(s)} + N_{\tilde\beta}(s)\cdot B_{\beta^*}(s)\right) - \tau_{\alpha^*}\left(\cancel{B_{\tilde\beta}(s)\cdot N_{\beta^*}(s)} +\right.$$
$$\left. + \cancel{N_{\tilde\beta}(s)\cdot B_{\beta^*}(s)}\right) = 0.$$

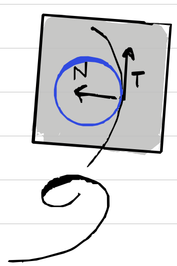
Dal momento che I e' connesso, f e' costante, ovverosia:

$$f(s) = f(s_0) = \|A T_\beta(s)\|^2 + \|A N_\beta(s)\|^2 + \|A B_\beta(s)\|^2 =$$
$$= 3,$$

da cui** $(T_{\tilde\beta}, N_{\tilde\beta}, B_{\tilde\beta}) = (T_{\beta^*}, N_{\beta^*}, B_{\beta^*})$ in ogni p.to $\xrightarrow{\begin{cases}\tilde\beta'(s_0) = \beta^{*\prime}(s_0)\\ \tilde\beta(s_0) = \beta^*(s_0)\end{cases}}$

$\rightsquigarrow$ $\tilde\beta = \beta^*$. $\square$

Sia $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.l.a. di Frenet. Si definisce il **piano osculatore** in $\gamma(s_0)$ come il piano affine $\gamma(s_0) + \mathrm{Span}(T(s_0), N(s_0))$ ed e' il piano in cui meglio si colloca la curva localmente.



Definiamo il **cerchio osculatore** in $\gamma(s_0)$ come il cerchio C di centro P e raggio R nel piano osculatore che "meglio approssima γ intorno a s_0", ovverosia che, posta

$f(s) \triangleq \|\gamma(s) - P\|^2 - R^2$, sia t.c.:

- $f(s_0) = 0$ $\quad(\gamma(s_0) \in C)$
- $f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ $\quad$(appr. al II° ord.)

$\rightsquigarrow$ $f'(s) = 2\gamma'(s)\cdot(\gamma(s) - P) =$
$= 2T(s)\cdot(\gamma(s) - P)$

$f''(s) = 2\left(\gamma''(s)\cdot(\gamma(s) - P) + \|\gamma'(s)\|^2\right) =$
$= 2\left(K(s)\,N(s)\cdot(\gamma(s) - P) + 1\right).$

** : Triedri sono triedri di versori, dunque, e.g., $\tilde T \cdot T^* = 1 \Rightarrow \tilde T = T^*$.

Quindi:

$$\begin{cases} f'=0 & T(s_0)\cdot(\gamma(s_0)-P)=0 \implies T(s_0)\perp(\gamma(s_0)-P) \implies \gamma(s_0)-P \,/\!/\, N(s_0) \\ f''=0 & N(s_0)\cdot(\gamma(s_0)-P) = -\dfrac{1}{\kappa(s_0)} \implies \gamma(s_0)-P = -\dfrac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0) \implies \\ & \implies P = \gamma(s_0) + \dfrac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0). \\ f=0 & \|\gamma(s_0)-P\|^2 - R^2 = 0 \implies R = \dfrac{1}{\kappa(s_0)}. \end{cases}$$

Dunque il cerchio osculatore esiste sempre in $\gamma(s_0)$, ha raggio $1/\kappa(s_0)$ e centro $\gamma(s_0) + 1/\kappa(s_0)\, N(s_0)$.

Il valore $1/\kappa(s_0)$ e' dunque detto raggio di curvatura.