Curve sulle superfici

Vogliamo mostrare che T_pS è esattamente l'insieme delle velocità in p al variare delle curve $\alpha : I \to S$ passanti per p.

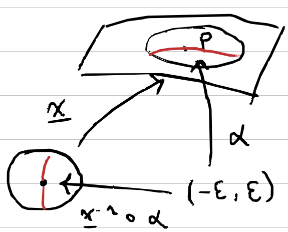
$\rightsquigarrow$ se $\underline{x}$ è una par. reg. intorno a $p \in S$, preso $\underline{v} = \lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$,

$\underline{x}$ C^∞ $\Big\{$ si ha $\underline{v} = \underline{x}_{(\lambda,\mu)}$. Presa dunque α che localmente su p è $\underline{x}(\underline{x}^{-1}(p) + t(\lambda,\mu))$, la velocità in p di α è esattamente $\underline{v}$.

Dobbiamo mostrare ora che ogni velocità in p di una curva $\alpha : I \to S$ (passante per p) sta in T_pS. Wlog $\alpha(0) = p$.

A patto di scegliere ε suff. piccolo, $\beta = \alpha|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ ha il supporto contenuto nell'immagine di una param. reg. $\underline{x}$ intorno a p.

Si ha dunque $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ in $(-\varepsilon,\varepsilon)$ con $u(t)$, $v(t)$ C^∞ ($\underline{x}^{-1} \circ \alpha$ è C^∞). Allora:



$$\alpha'(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_u & \underline{x}_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$$

$$= u'(t)\, \underline{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(u(t), v(t))$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) = u'(t)\, \underline{x}_u(p) + v'(t)\, \underline{x}_v(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) \in T_pS.$$

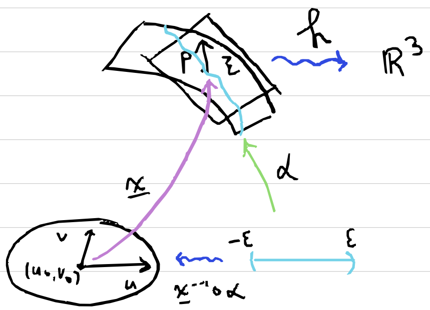
Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$T_pS = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to S \text{ t.c. } \alpha(0) = p,\ \alpha \text{ curva} \}.$$

Operatore forma

Vogliamo studiare in modo analitico le forme locali di $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Def. $f: S \to \mathbb{R}^3$ si dice C^∞ se $\forall$ $\underline{x}$ param. reg. locale
$f \circ \underline{x}$ è C^∞.



Vogliamo definire la derivata in direzione $\xi \in T_pS$, $\xi \neq 0$, di $f: S \to \mathbb{R}^3$. L'idea è che vogliamo "spostarci di poco" in direzione ξ da p.

Presa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, "α si muove localmente in direzione ξ" intorno a 0 e quindi $f \circ \alpha$ localmente catturerà f "muovendosi in direzione ξ da p" intorno a 0.
È naturale dunque definire $D_\xi f(p)$ come:

$$D_\xi f(p) \triangleq (f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostriamo che $D_\xi f(p)$ dipende solo da f e ξ. Sia $\underline{x}: U \to S$ parametr. regol. intorno a p. Sia $\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\underbrace{u(t)}_{C^\infty}, \underbrace{v(t)}_{C^\infty})$. Allora:

(*) $$(f \circ \alpha)'(0) = \left[(f \circ \underline{x}) \circ (u(t), v(t)) \right]'(0) =$$

$$= u'(0) \cdot (f \circ \underline{x})_u (p) + v'(0) \cdot (f \circ \underline{x})_v (p).$$

coord. in U di ξ $\Longleftarrow$ $\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \sum_{e \in \{x,y,z\}} \underline{x}_e^{-1}(p) \cdot \underbrace{(\alpha'(0))_e}_{\substack{= \xi \\ \text{fissato}}}$

Da (*) si deduce subito che $(f \circ \alpha)'(0)$ non dip. dalla scelta della curva; inoltre, il membro a destra è invariante alla scelta di $\underline{x}$, dipendendo da α. Quindi $D_\xi f(p)$ è ben definita ed è anche lineare nella scelta della direzione (sempre grazie a (*)).

$\rightsquigarrow$ in generale, $D_\xi f(p) = D_{\underline{x}^{-1}(\xi)} (f \circ \underline{x})(\underline{x}^{-1}(p))$.

Ricordiamo che ogni superficie è localmente orientabile, dato che ogni param. reg. induce superfici orientabili.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$. Se $\underline{n} : A \to \mathbb{R}^3$ è una normale continua di S intorno a p, allora:

[che esiste sempre, essendo S loc. orient.]

$$\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1 \implies$$

$$\implies 2\left((\underline{n} \circ \alpha)'(t) \cdot \underline{n}(\alpha(t))\right) = 0 \implies$$

$$\to D_\xi \underline{n}(p) \cdot \underline{n}(p) = 0 \implies$$

$$\implies D_\xi \underline{n}(p) \in \left((T_pS)^\perp\right)^\perp = T_pS.$$

Quindi $\xi \mapsto D_\xi \underline{n}(p)$ è un endomorfismo di T_pS:

Def. Si chiama OPERATORE FORMA l'endomorfismo $S_p : T_pS \to T_pS$ t.c. $S_p(\xi) \triangleq -D_\xi \underline{n}(p)$ con $\underline{n}$ normale fissata continua intorno a p. (Al più varia di un segno cambiando normale)

Esempio. (sfera)

Consideriamo la sfera $\Sigma_r = \{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f \triangleq} = r^2\}$. Una normale è data da $\nabla_p f = 2(x,y,z) \rightsquigarrow \underline{n}(p) = p/\|p\| = p/r$.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma_r$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, allora:

$$S_p(\xi) = -D_\xi \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha)'(0) \underset{\substack{(\underline{n}\circ\alpha)(t) = \\ = \alpha(t)/\|\alpha(t)\| = \\ = \alpha(t)/r}}{=} -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}\xi.$$

Quindi: $S_p = -\frac{1}{r}\,\mathrm{id}$.

Prop. S_p è autoaggiunto $\quad (S_p(\xi) \cdot \eta = \xi \cdot S_p(\eta) \ \forall\, \xi, \eta \in T_pS)$

Sia $\underline{x}$ par. reg. di S int. a p. Mostriamo la tesi per la base $\{\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)\}$, da cui ne deriviamo poi la validità per tutto T_pS.

$$\begin{cases} \underline{m}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_v(u, v_0) = 0 \\ \underline{m}(\underline{x}(v, u_0)) \cdot \underline{x}_u(u_0, v) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\frac{d}{dv}\big|_{v=v_0}]{\frac{d}{du}\big|_{u=u_0}} \begin{cases} D_u \underline{m}(p) \cdot \underline{x}_v(p) + \underline{m}(p) \cdot \underline{x}_{vu}(p) = 0 \\ D_v \underline{m}(p) \cdot \underline{x}_u(p) + \underline{m}(p) \cdot \underline{x}_{uv}(p) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Dal Teo. di Schwarz, $\underline{x}_{uv}(p) = \underline{x}_{vu}(p)$, quindi, da $(**)$:

$$-D_u \underline{m}(p) \cdot \underline{x}_v(p) = -D_v \underline{m}(p) \cdot \underline{x}_u(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_p(\underline{x}_u(p)) \cdot \underline{x}_v(p) = \underline{x}_u(p) \cdot S_p(\underline{x}_v(p)). \qquad \square$$