

## Composizione di app. lineari

Date  $f: V \rightarrow W$  e  $g: W \rightarrow Z$  app. lineari, allora  $f \circ g: V \rightarrow Z$  è app. lineare. Infatti:

$$(i) f(g(\underline{v_1} + \underline{v_2})) = f(g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2})) = f(g(\underline{v_1})) + f(g(\underline{v_2}))$$

$$(ii) f(g(\alpha \underline{v})) = f(\alpha g(\underline{v})) = \alpha f(g(\underline{v}))$$

In particolare valgono le seguenti proprietà:

$$(i) f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad (\text{associatività})$$

$$(ii) f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h \quad (\text{distributività})$$

$$(iii) (cg) \circ h = c(g \circ h) = g \circ (ch) \quad \forall c \in \mathbb{K}$$

Si definisce  $\text{reg}(f) := \dim \text{Imm } f$ . Vale la fondamentale proprietà per cui, data  $f: V \rightarrow W$  app. lin.,

$$\text{reg}(f) = \text{reg} \underbrace{M_{B'}^B(f)}_A$$

con  $B$  base di  $V$  e  $B'$  di  $W$ . Infatti  $\text{Imm } f \cong \text{Imm } f_A$ , con isomorfismo  $\varphi_B: \underline{w} \mapsto [\underline{w}]_{B'}$ .

Prop.  $g \circ f$  iniettiva  $\Rightarrow f$  iniettiva

Se  $f$  non fosse iniettiva,  $\exists \underline{v_1} \neq \underline{v_2} \in V \mid f(\underline{v_1}) = f(\underline{v_2}) \rightarrow$   
 $\Rightarrow g(f(\underline{v_1})) = g(f(\underline{v_2}))$ ; allora  $g \circ f$  non sarebbe  
iniettiva,  $\square$

Prop.  $g \circ f$  surgettiva  $\Rightarrow g$  surgettiva

Se  $g$  non fosse surgettiva,  $\exists \underline{z} \in Z \mid \forall \underline{w} \in W g(\underline{w}) \neq \underline{z}$ .  
Tuttavia così  $g \circ f$  non potrebbe essere surgettiva,  $\square$

Oss.  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$ ,  $\text{Imm } g \circ f \subset \text{Imm } g$

Oss.  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min \{ \text{rg}(g), \text{rg}(f) \}$

$$(\text{i}) \quad \dim \text{Imm } g \circ f \leq \dim \text{Imm } g \quad \checkmark$$

$$(\text{ii}) \quad \dim \text{Imm } g \circ f = \dim \text{Imm } f - \dim (\text{Imm } f \cap \text{Ker } g) \leq \dim \text{Imm } f \quad \checkmark$$

## Endomorfismi

Data un'app. lineare  $f: V \rightarrow V$ , essa si chiama  
**ENDOMORFISMO** di  $V$  (o **OPERATORE**).

Un endomorfismo  $f$  è invertibile se e solo se è un isomorfismo, ossia se è un **automorfismo**.

Per comodità si definisce  $\text{End}(V) = \mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti per  $f \in \mathcal{L}(V)$ :

- (i)  $f$  invertibile
- (ii)  $f$  isomorfismo
- (iii)  $f$  iniettiva
- (iv)  $\text{rg}(f) = \dim V$

**Teorema**  $M_{B''}^B(g \circ f) = M_{B''}^{B'}(g) M_{B'}^B(f)$

$$\begin{aligned} M_{B''}^B(g \circ f)^J &= \left[ (g \circ f)(\underline{v}_1) \right]_{B''} = \left[ g(f(\underline{v}_1)) \right]_{B''} = \\ &= M_{B''}^{B'}(g) \left[ f(\underline{v}_1) \right]_{B'} \end{aligned}$$

Quindi:  $M_{B''}^B(g \circ f) = [M_{B''}^{B'}(g) [f(v_1)]_{B'} | \dots | M_{B''}^{B'} [f(v_k)]_{B'}] =$

$$= M_{B''}^{B'}(g) M_{B'}^B(f)$$

□

Corollario  $\text{rg}(AB) \leq \min \{ \text{rg}(A), \text{rg}(B) \}$

$$\begin{aligned} \text{rg}(f_A \circ f_B) &\leq \min \{ \text{rg}(f_A), \text{rg}(f_B) \} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{rg}(AB) &\leq \min \{ \text{rg}(A), \text{rg}(B) \} \end{aligned}$$

es.  $\text{Id}_V : V \rightarrow V \quad M_B^B(\text{Id}_V) = [[\text{Id}_V(v_i)]_B | \dots] =$

$$= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{MATRICE} \\ \text{IDENTITÀ} \end{array} \right\}$$

OSS. Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo invertibile, allora

$$\begin{aligned} e &= M_B^B(f \circ f^{-1}) = M_{B'}^B(f) M_{B'}^B(f^{-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{B'}^B(f^{-1}) &= M_B^{B'}(f)^{-1} \end{aligned}$$

Prop. Una matrice  $A \in M_m(\mathbb{K})$  è invertibile se e solo se

- (i)  $\text{rg}(A) = m$
- (ii)

$$\underline{(\text{i})} \Rightarrow \underline{(\text{ii})} \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } A \text{ è invertibile, lo è anche } f_A. \\ \dim V = \operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} f_A \Rightarrow \\ \dim V = \operatorname{rg}(A) + 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = m \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (\text{ii}) \Rightarrow (\text{i}) & \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{n}_{\dim V} = \operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} f_A \Rightarrow \\ \qquad \qquad \qquad = m \\ \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f_A = 0 \Rightarrow f_A \text{ e' iniettiva.} \\ \\ f_A \text{ e' surgettiva perche' } \operatorname{rg}(A) = m \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim \operatorname{Imm} f_A = \dim V \Rightarrow \operatorname{Imm} f_A = V. \\ \\ \text{Poiche' bigettiva, } f_A \text{ e' invertibile, e cosi':} \\ \text{anche A.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



OSS. Se  $A$  e  $B$  sono invertibili, lo sono anche  $AB$  e  $BA$ , infatti  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ,  $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .

OSS. Le matrici invertibili  $n \times n$  formano un gruppo con il prodotto, il quale è detto  $GL_n(\mathbb{K})$ , ossia gruppo lineare.

es.  $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{rg}(A) = 2 \right\}$

Teorema del cambiamento di base Siano  $B$  ed  $e$  basi di  $V$ ,  $B'$  ed  $e'$  basi di  $W$  e sia  $f: V \rightarrow W$  app. lineare, allora:

$$M_{e'}^e(f) = M_{e'}^{B'}(\text{Id}_W) M_{B'}^B(f) M_B^e(\text{Id}_V)$$

Infatti:  $M_{e'}^e(f) = M_{e'}^e(\text{Id}_W \circ f \circ \text{Id}_V) =$   
 $= M_{e'}^{B'}(\text{Id}_W) M_{B'}^B(f) M_B^e(\text{Id}_V)$  □

OSS. La relazione  $A \sim_{SD} B \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{K}), Q \in GL_n(\mathbb{K}) | A = P B Q$  e' una relazione d'equivalenza, detta  
SD-equivalenza (equiv. sinistra-destra):

(i) riflessiva:  $A = \text{Id}_m A \text{Id}_m$

(ii) simmetrica:  $A = P B Q \Rightarrow B = P^{-1} A Q^{-1}$

(iii) transitiva:  $A = P B Q, B = P' C Q' \Rightarrow A = P P' C Q' Q$

Prop.  $g$  iniettiva  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

$$\dim \text{Imm } g|_{f(V)} = \dim f(V) - \dim (\text{Ker } g \cap \underbrace{\text{Imm } f}_{=0})$$

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) \quad \square$$

Prop.  $f$  surgettiva  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim (\text{Ker } g \cap \underbrace{\text{Imm } f}_{W})$$

$$\text{rg}(g \circ f) = \dim W - \dim \text{Ker } g = \text{rg}(g) \quad \square$$

OSS. •  $f$  isomorfismo  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$

•  $g$  isomorfismo  $\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$

•  $A$  invertibile  $\Rightarrow \text{rg } AB = \text{rg } B$

•  $B$  invertibile  $\Rightarrow \text{rg } AB = \text{rg } A$

Teorema Sia  $f: V \rightarrow W$  con  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$  e  $\operatorname{rg} f = r$ . Allora  $\exists B \subset V$ ,  $B' \subset W$  basi t.c.

$$M_{B'}^B(f) = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{matrix}}^r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sia  $\underline{v}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \dots, \underline{v}_n$  base di  $\operatorname{Ker} f$  e venga estesa a una base  $B$  di  $V$ . Allora  $B = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n)$ .

Si pone  $\underline{w}_i = f(\underline{v}_i)$  e si dimostra che  $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r\}$  è lin. ind.

$$\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_r \underline{w}_r = \underline{0} \iff$$

$$\iff f(\underbrace{\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_r \underline{v}_r}_V) = \underline{0} \iff$$

$$\iff V \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r) \iff$$

$$\iff \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_r \underline{v}_r = \alpha_{r+1} \underline{v}_{r+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \iff$$

$$\iff \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_r \underline{v}_r - \alpha_{r+1} \underline{v}_{r+1} - \dots - \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0} \iff$$

$$\iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Sia  $B'$  un'estensione alla base di  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r$ , allora

$$B' = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \dots, \underline{w}_m).$$

$$M_{B'}^B(f) = \left[ [f(v_1)]_{B'} \mid \dots \mid [f(v_n)]_{B'} \right] =$$

$$= \left[ [\underline{w_1}]_{B'} \mid \dots \mid [\underline{o}]_{B'} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline \dots & 0 \end{array} \right]$$

□

## Teorema

$$A \underset{\text{(i)}}{\sim} B \iff \underset{\text{(ii)}}{\text{rg}(A)} = \text{rg}(B)$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\left\{ \begin{array}{l} A = P B Q. \text{ Poiché } P \in GL_m(\mathbb{K}) \text{ e} \\ Q \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ sono invertibili, si ha} \\ \text{che } \text{rg}(A) = \text{rg}(P B Q) = \text{rg}(BQ) = \\ = \text{rg}(B). \end{array} \right.$

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sia } \text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r, \text{ allora si} \\ \text{consideri } f = f_A. \text{ Chiaramente } M_e^e(f_A) = \\ = A. \text{ Per il Teorema precedente } \exists B \\ \text{base di } M_n(\mathbb{K}), B' \text{ base di } M_m(\mathbb{K}) \mid \\ M_{B'}^B(f) = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \right.$

Per il Teorema del cambiamento di

base  $A = M_e^e(f) = M_{B'}^{B'}(\text{Id}_m) M_{B'}^B(f) M_e^B(\text{Id}_n)$ .  
 Pertanto  $A \underset{\text{SD}}{\sim} M_{B'}^B(f)$ .  
 Analogamente  $B \underset{\text{SD}}{\sim} M_{B'}^B(f)$ . Per la  
 transitività si ha dunque che  $A \underset{\text{SD}}{\sim} B$ .

□

Pertanto si dice che il rango è un **INVARIANTE COMPLETO** per la relazione. Data una matrice  $m \times n$ , in particolare può partecipare a una tra le  $\min\{m, n\}$  classi di equivalenza disponibili.

**OSS.** Sia  $f: V \rightarrow V$  un endomorfismo e siano  $B$  ed  $e$  due basi di  $V$ , allora:

$$M_B^B(f) = \underbrace{M_B^e(\text{Id}_V)}_A \underbrace{M_e^e(f)}_B \underbrace{M_e^e(\text{Id}_V)}_{P^{-1}}$$

ossia  $A = P B P^{-1}$ , il coniugio di  $B$  rispetto a  $P$ , che è detta matrice di cambio-base. In particolare  $P \in \text{GL}_m(K)$ , dove  $m = \dim V$ .

Def.  $A \sim B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A = PBP^{-1} \iff$   
 $\iff A \text{ e } B \text{ sono simili}$

OSS.  $\sim$  è una relazione di equivalenza.

OSS. Il rango è certamente invariante,  $A \sim B \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

OSS.  $PIP^{-1} = P P^{-1} I = I$ , ossia  $I$  è simile solo a sé stessa.

Prop.  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ,  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m A_i B^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = C$$

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^n B_j A^j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = C$$

□

Corollario  $\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(A)$

$$\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$$

□