Curve sulle superfici

Vogliamo mostrare che T_pS è esattamente l'insieme delle velocità in p al variare delle curve $\alpha : I \to S$ passanti per p.

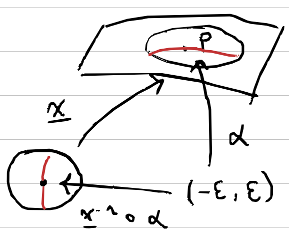
$\rightsquigarrow$ se $\underline{x}$ è una par. reg. intorno a $p \in S$, preso $\underline{v} = \lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$, si ha $\underline{v} = \underline{x}_{(\lambda,\mu)}$. Presa dunque α che localmente su p è $\underline{x}(\underline{x}^{-1}(p) + t(\lambda,\mu))$, la velocità in p di α è esattamente $\underline{v}$.

$\underline{x}$ C^∞

Dobbiamo mostrare ora che ogni velocità in p di una curva $\alpha : I \to S$ (passante per p) sta in T_pS. Wlog $\alpha(0) = p$.

A patto di scegliere ε suff. piccolo, $\beta = \alpha|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ ha il supporto contenuto nell'immagine di una param. reg. $\underline{x}$ intorno a p.

Si ha dunque $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $u(t), v(t)$ C^∞ ($\underline{x}^{-1} \circ \alpha$ è C^∞). Allora:



$$\alpha'(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_u & \underline{x}_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$$

$$= u'(t)\, \underline{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \underline{x}_v(u(t), v(t))$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) = u'(t)\, \underline{x}_u(p) + v'(t)\, \underline{x}_v(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha'(0) \in T_pS.$$

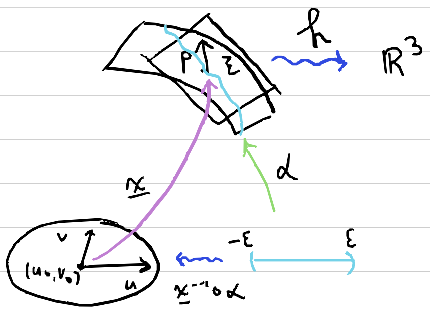
Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$T_pS = \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to S \text{ t.c. } \alpha(0) = p,\ \alpha \text{ curva}\}.$$

Operatore forma

Vogliamo studiare in modo analitico le forme locali di $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Def. $f: S \to \mathbb{R}^3$ si dice C^∞ se $\forall$ $\underline{x}$ param. reg. locale $f \circ \underline{x}$ è C^∞.



Vogliamo definire la derivata in direzione $\xi \in T_pS$ ($\neq 0$) di $f: S \to \mathbb{R}^3$. L'idea è che vogliamo "spostarci di poco" in direzione ξ da p.

Presa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, "α si muove localmente in direzione ξ" intorno a 0 e quindi $f \circ \alpha$ localmente catturerà f "muovendosi in direzione ξ da p" intorno a 0.
È naturale dunque definire $D_\xi f(p)$ come:

$$D_\xi f(p) \triangleq (f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostriamo che $D_\xi f(p)$ dipende solo da f e ξ. Sia $\underline{x}: U \to S$ parametr. regol. intorno a p. Sia $\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\underbrace{u(t)}_{C^\infty}, \underbrace{v(t)}_{C^\infty})$. Allora:

(*) $$(f \circ \alpha)'(0) = \left[(f \circ \underline{x}) \circ (u(t), v(t))\right]'(0) =$$

$$= u'(0) \cdot (f \circ \underline{x})_u(p) + v'(0) \cdot (f \circ \underline{x})_v(p).$$

coord. in U di ξ $\Longleftarrow$ $\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \sum_{e \in \{x,y,z\}} \underline{x}^{-1}_e(p) \cdot (\overbrace{\alpha'(0)}^{=\xi \text{ fissato}})_e$

Da (*) si deduce subito che $(f \circ \alpha)'(0)$ non dip. dalla scelta della curva; inoltre, il membro a destra è invariante alla scelta di $\underline{x}$, dipendendo da α. Quindi $D_\xi f(p)$ è ben definita ed è anche lineare nella scelta della direzione (sempre grazie a (*)).

$\rightsquigarrow$ in generale, $D_\xi h(p) = D_{\underline{x}^{-1}(\xi)}(h \circ \underline{x})(\underline{x}^{-1}(p))$.

Ricordiamo che ogni superficie è localmente orientabile, dato che ogni param. reg. induce superfici orientabili.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$. Se $\underline{n} : A \to \mathbb{R}^3$ è una normale continua di S intorno a p, allora:

[che esiste sempre, essendo S loc. orient.]

$$\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1 \implies$$

$$\implies 2\left((\underline{n} \circ \alpha)'(t) \cdot \underline{n}(\alpha(t))\right) = 0 \implies$$

$$\longrightarrow D_\xi \underline{n}(p) \cdot \underline{n}(p) = 0 \implies$$

$$\implies D_\xi \underline{n}(p) \in \left((T_pS)^\perp\right)^\perp = T_pS.$$

Quindi $\xi \mapsto D_\xi \underline{n}(p)$ è un endomorfismo di T_pS:

Def. Si chiama **OPERATORE FORMA** l'endomorfismo $S_p : T_pS \to T_pS$ t.c. $S_p(\xi) \triangleq -D_\xi \underline{n}(p)$ con $\underline{n}$ normale fissata continua intorno a p. (Al più varia di un segno cambiando normale)

Esempio. (sfera)

Consideriamo la sfera $\Sigma_r = \{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{h \triangleq} = r^2\}$. Una normale è data da $\nabla_p f = 2(x,y,z) \rightsquigarrow \underline{n}(p) = p/\|p\| = p/r$.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma_r$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \xi$, allora:

$$S_p(\xi) = -D_\xi \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha)'(0) \underset{\substack{(\underline{n}\circ\alpha)(t) = \\ = \alpha(t)/\|\alpha(t)\| = \\ = \alpha(t)/r}}{=} -\frac{1}{r}\alpha'(0) = -\frac{1}{r}\xi.$$

Quindi $S_p = -\frac{1}{r}\,\mathrm{id}$.

Prop. S_p è autoaggiunto $\quad (S_p(\xi)\cdot\nu = \xi\cdot S_p(\nu)\ \forall\, \xi,\nu\in T_pS)$

Sia $\underline{x}$ par. reg. di S int. a p. Mostriamo la tesi per la base $\{\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)\}$, da cui ne deriviamo poi la validità per tutto T_pS.

$$\begin{cases} \underline{N}(\underline{x}(u,v_0))\cdot \underline{x}_v(u,v_0) = 0 \\ \underline{N}(\underline{x}(v,u_0))\cdot \underline{x}_u(u_0,v) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\frac{d}{dv}\big|_{v=v_0}]{\frac{d}{du}\big|_{u=u_0}} \begin{cases} D_u\underline{N}(p)\cdot \underline{x}_v(p) + \underline{N}(p)\cdot \underline{x}_{vu}(p) = 0 \\ D_v\underline{N}(p)\cdot \underline{x}_u(p) + \underline{N}(p)\cdot \underline{x}_{uv}(p) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Dal Teo. di Schwarz, $\underline{x}_{uv}(p) = \underline{x}_{vu}(p)$, quindi, da $(**)$:

$$-D_u\underline{N}(p)\cdot \underline{x}_v(p) = -D_v\underline{N}(p)\cdot \underline{x}_u(p) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_p(\underline{x}_u(p))\cdot \underline{x}_v(p) = \underline{x}_u(p)\cdot S_p(\underline{x}_v(p)) \qquad \square$$

⤳ applicando un ragionam. analogo a quello usato per ricavare $(**)$ si ottiene infine il seguente sistema di identità:

$$\begin{cases} S_p\,\underline{x}_u(p)\cdot \underline{x}_u(p) = \underline{N}(p)\cdot \underline{x}_{uu}(p) \\ S_p\,\underline{x}_v(p)\cdot \underline{x}_v(p) = \underline{N}(p)\cdot \underline{x}_{vv}(p) \\ S_p\,\underline{x}_u(p)\cdot \underline{x}_v(p) = \underline{N}(p)\cdot \underline{x}_{uv}(p) \end{cases} \qquad (\square)$$

Definiamo adesso alcuni oggetti che ci permetteranno di calcolare agevolmente S_p.

Def. Sia $S\subseteq\mathbb{R}^3$ superficie. La famiglia dei prodotti scalari sui vari T_pS $\{I_p : T_pS\times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \mid I_p(v,w) = v\cdot w\}$ è detta **I^a FORMA FONDAMENTALE**.

⤳ ricordiamo che, grazie alla regolarità delle param. reg., data $\underline{x}$ par. reg. intorno a $p\in S$, $\underline{x}_u(p)$ e $\underline{x}_v(p)$ formano una base di T_pS. In tale base I_p assumerà una forma matriciale:

$$I_p = \begin{array}{c|cc} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ \hline \underline{x}_u & E & F \\ \underline{x}_v & F & G \end{array}\ ,$$

dove $E = \underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_u(p) = \|\underline{x}_u(p)\|^2$, $F = \underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_v(p)$ e
$G = \underline{x}_v(p)\cdot\underline{x}_v(p) = \|\underline{x}_v(p)\|^2$.

$\rightsquigarrow$ anche S_p avrà una forma matriciale:

$$S_p = \begin{array}{c} \underline{x}_u \\ \underline{x}_v \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{[S_p\underline{x}_u]\ [S_p\underline{x}_v]}$$

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. La famiglia dei prodotti scalari
$\{ II_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \mid II_p(v,w) = I_p(S_p v, w) = S_p v \cdot w \}$ è
detta **II^a FORMA FONDAMENTALE**.

I_p è un prod. scal., dacché S_p è autoaggiunto

$\rightsquigarrow$ pure II_p avrà una forma matriciale:

$$II_p = \begin{array}{c|cc} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ \hline \underline{x}_u & \ell & m \\ \underline{x}_v & m & n \end{array},$$

dove $\ell = S_p\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_u(p)$, $m = S_p\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_v(p)$ e
$n = S_p\underline{x}_v(p)\cdot\underline{x}_v(p)$. Da $(\square)$ quindi ricaviamo che:

$$\begin{cases} \ell = \underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{uu}(p) \\ m = \underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{uv}(p) \\ n = \underline{N}(p)\cdot\underline{x}_{vv}(p) \end{cases}$$

Osserviamo che $II_p(v,w) = I_p(S_p(v), w) \Longrightarrow$
$\Rightarrow [v]^T II_p [w] = [v]^T I_p S [w]$.

Quindi:

$$\boxed{II_p = I_p \cdot S}$$

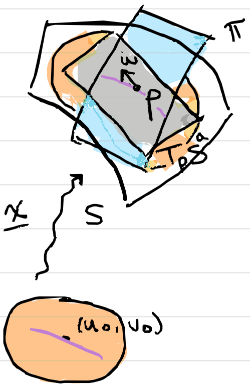
Inoltre $\det(I_p) = \|\underline{x}_u(p)\|^2\|\underline{x}_v(p)\|^2 - (\underline{x}_u(p)\cdot\underline{x}_v(p))^2 \neq 0$ per Cauchy-Schw., dacché $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$ sono lin. indip. Dunque I_p è invertibile e...

$$S = II_p \cdot I_p^{-1},$$

In particolare $\det(S) = (\ell n - m^2)/(EG - F^2)$.

Interpretazione geometrica dell'operatore forma

Cerchiamo innanzitutto quando un piano π passante per $p \in S$ intersecato a S da' luogo, almeno localmente, a una curva regolare.



Sia dunque $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ un piano affine di eq. $(a,b,c)\cdot x = d$ passante per $p \in S$. Sia $\underline{x} : U \to S$ una par. reg. intorno a $p \in S$.

Sia $f(u,v) = (a,b,c)\cdot \underline{x}(u,v)$. Allora $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S) = \{\underbrace{f(u,v)}_{C^\infty} = d\}$.

Osserviamo che:

$$\begin{cases} f_u(u_0,v_0) = (a,b,c)\cdot \underline{x}_u(u_0,v_0) \\ f_v(u_0,v_0) = (a,b,c)\cdot \underline{x}_v(u_0,v_0) \end{cases}$$

Quindi se $(f_u, f_v)(u_0,v_0) \neq 0$ $\left(\iff (a,b,c) \notin \mathrm{span}(\underline{N}(p)) \iff\right.$ $\left.\iff \pi \neq \underbrace{T_pS^a}_{\text{piano affine}} \triangleq p + T_pS\right)$, $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S)$ è un grafico (per il Teo. della funz. implicita) attorno a (u_0,v_0), ossia — ponendo wlog $f_v(u_0,v_0) \neq 0$ — $\underline{x}^{-1}(\pi \cap S)$ è localm. param. intorno a (u_0,v_0) come $(u, g(u))$ con g C^∞. Quindi $\pi \cap S$ è loc. par. come $\alpha(t) = \underline{x}(t, g(t))$ $(\alpha(u_0) = p)$

$\rightsquigarrow$ $\alpha'(t) = \underline{x}_u(t,g(t)) + g'(t)\,\underline{x}_v(t,g(t)) \neq 0$, dunque α è regolare!

lin. ind.

Possiamo riassumere la discussione in:

A patto che $\pi \neq T_pS^a$ $(\triangleq p + T_pS)$, $\pi \cap S$ è parametrizz. come curva regolare intorno a p.

Supponiamo wlog α p.l.a. Sia $\overbrace{\alpha'(s_0)}^{\alpha(s_0)=p} = w$ (unitario, essendo α p.l.a.)

$$\underline{m}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0 \xRightarrow{d/ds|_{s=s_0}} S_p w \cdot w = \underline{m}(p) \cdot \underbrace{\alpha''(s_0)}_{T'(s_0)}$$

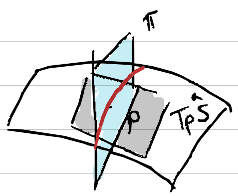
La quantità a destra allora non dipende da α, ma solo da w, ed è detta $\kappa_m(p,w)$, la CURVATURA NORMALE IN p NELLA DIREZIONE w.

Dacché dipende solo da w, possiamo scegliere π in modo che $\underline{m}(p) \,//\, \underbrace{T'(s_0)}_{\in w^\perp}$, scegliendo proprio $(a,b,c) \in T_pS$ (così $\text{giac}(\pi) = T_pS^\perp \ni \underline{m}(p)$).
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad w \qquad\qquad w$

In tal caso, allora:

$$\kappa_n(p,w) = \underline{m}(p) \cdot T'(s_0) \overset{//}{=} \underbrace{\|\underline{m}(p)\|}_{=1} \; \underbrace{\|T'(s_0)\|}_{=\kappa_\alpha(p)} = \kappa_\alpha(p)$$

In altre parole:



La curvatura normale $\kappa_m(p,w)$ è esattamente la curvatura in p di una curva regolare α che parametrizza intorno a p la sezione ottenuta intersecando S a un piano π perpendicolare a T_pS (cioè normale).

Osserviamo che, se $S_p v = \lambda v$ con $\|v\| = 1$, allora:

$$\kappa_m(p,v) = S_p v \cdot v = \lambda.$$

Quindi gli autovalori di S_p sono curvature normali speciali.

Def. Gli autospazi di S_p sono detti DIREZIONI PRINCIPALI e i loro autovalori sono detti CURVATURE PRINCIPALI.

$\rightsquigarrow$ grazie all'osservazione fatta prima, si deduce innanzitutto che le curvature principali sono delle speciali curvature normali.

Prop. Siano v_1, v_2 base ortonormale di S_p-autovettori. Se $w \in T_pS$ è unitario, e w forma un angolo di θ gradi rispetto a v_1, allora:

$$\kappa_n(p,w) = \cos^2\theta \cdot \kappa_1 + \sin^2\theta \cdot \kappa_2,$$

FORMULA DI EULERO

dove $S_p v_1 = \kappa_1 v_1$, $S_p v_2 = \kappa_2 v_2$. curvature principali

Infatti $w = \cos(\theta) \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot v_2 \implies$

$$\implies \kappa_n(p,w) = S_p w \cdot w =$$
$$= (\cos(\theta) \cdot \kappa_1 \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot \kappa_2 \cdot v_2) \cdot (\cos(\theta) \cdot v_1 + \sin(\theta) \cdot v_2) =$$
$$\underbrace{=}_{\substack{v_1 \perp v_2 \\ \|v_i\| = 1}} \cos^2(\theta)\, \kappa_1 + \sin^2(\theta) \cdot \kappa_2. \qquad \square$$

$\rightsquigarrow$ in particolare, dacché $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ e $\sin^2(\theta)$ è continua con $\sin^2(0) = 0$ e $\sin^2(\pi/2) = 1$, si ha che $\kappa_n(p,w)$ varia in $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ con $\kappa_{min} \triangleq \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ e $\kappa_{max} \triangleq \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$.

Dunque le curvature principali ci danno la possibilità di calcolare la minima e la massima curvatura normale. Con queste possiamo studiare localmente la forma della superficie in p.

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$. La CURVATURA GAUSSIANA in $p \in S$ è definita come:

$$\kappa(p) \triangleq \det(S_p) = \overbrace{\kappa_1 \cdot \kappa_2}^{\text{curvature principali}}$$

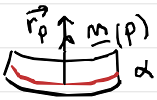
La CURVATURA MEDIA in $p \in S$ invece è definita come:

$$H(p) \triangleq \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S_p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

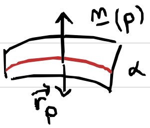
Se $\kappa \equiv 0$ in S, S si dice PIATTA. Se $H \equiv 0$ in S, S si dice MINIMA.

→ la curvatura gaussiana rimane invariata anche prendendo $\underline{n}' = -\underline{n}$, mentre quella media cambia di segno.

→ il segno di $k_n(w,p)$ è dato nel seguente modo:

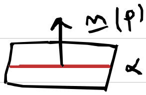


- $k_n(w,p) > 0$: se il raggio di curvatura di α che parametrizz. $\pi \cap S$ in p è parallelo positivamente a $\underline{n}(p)$



- $k_n(w,p) < 0$: " è parallelo negativamente a $\underline{n}(p)$

$k_\alpha = 0$



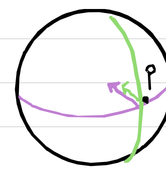
- $k_n(w,p) = 0$: " è nullo.

Def. (classificazione dei p.ti sulla superficie)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$.

(i) p si dice ELLITTICO se $K(p) > 0$.

$\Updownarrow$

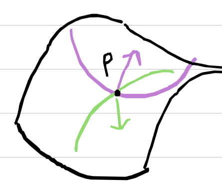
tutte le curvature normali sono conc. e $\neq 0$ $\iff$ k_1, k_2 concordi e $\neq 0$



(ii) p si dice IPERBOLICO se $K(p) < 0$

$\Updownarrow$

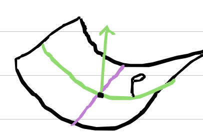
k_1, k_2 discordi e $\neq 0$



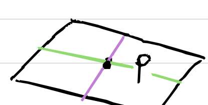
(iii) p si dice PARABOLICO se $K(p) = 0$ e $S_p \neq 0$

$k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$ o viceversa $\iff$ $S_p \neq 0$

$\Rightarrow$ tutte le curvature normali sono ≥ 0 o ≤ 0 e $\exists$ curv. normale nulla

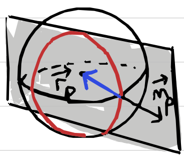


(iv) p si dice PLANARE se $S_p = 0$ $\iff$ ogni curv. normale è nulla.



Esempio (sfera) Abbiamo già calcolato esplicitamente che per la sfera $\Sigma \triangleq S_a^2$ vale $S_p = -\frac{1}{a}\, id_{T_pS}$.

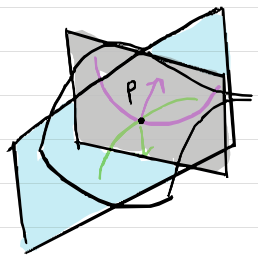
Usiamo l'intuizione geometrica per giustificare il risultato.



Ogni piano normale rispetto a $p \in \Sigma$ induce una curva regolare che è ha raggio di curvatura a in p.
Dacché la normale è negativamente parallela al raggio vettore $\vec{r_p}$, si ha $k_n(p,v) = -\frac{1}{a}$ $\forall v$. Dunque $k_1 = k_2 = -\frac{1}{a} \implies S_p = -\frac{1}{a}\, id_{T_pS}$.

In particolare $\det(S_p) = \frac{1}{a^2} > 0$, quindi ogni p.to è ellittico.

Esempio (paraboloide iperbolico) Sia S l'immagine di $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Calcoliamo S_p in $p \triangleq \underline{x}(0,0)$.



Allora:

$$\begin{cases} E = \|\underline{x}_u(p)\|^2 = \|(1,0,0)\|^2 = 1 \\ F = \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p) = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0 \\ G = \|\underline{x}_v(p)\|^2 = \|(0,1,0)\|^2 = 1 \end{cases} \implies \boxed{I_p = id}$$

Una normale per p è $\underline{n} \triangleq \hat{\underline{x}_u}(p) \times \hat{\underline{x}_v}(p) = (0,0,1)$.
Quindi...

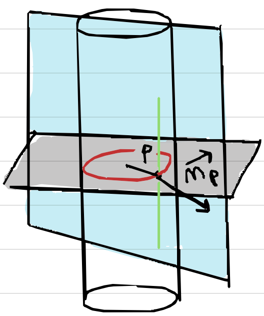
$$\begin{cases} l = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,2) = 2 \\ m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,0) = 0 \\ n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv}(p) = (0,0,1)\cdot(0,0,-2) = -2 \end{cases} \implies \boxed{II_p = 2\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}$$

Allora:

$$S_p = I_p^{-1} II_p = II_p \implies \begin{array}{l} \underline{x}_u \text{ direzione princ. con } k_1 = 2 \\ \underline{x}_v \quad '' \quad\quad '' \quad k_2 = -2 \end{array}$$

$K(p) = k_1 \cdot k_2 = -4 < 0 \implies p$ è iperbolico.

Esempio (cilindro)



Consideriamo il cilindro $\Sigma = \{x^2+y^2=a^2\}$. Allora $\forall a \neq 0$, a è regolare per $f(x,y,z) = x^2+y^2$ quindi Σ è superficie con $\underline{n}(x,y,z) = $
$= \nabla_p f = \frac{1}{a}(x,y,0)$.

Dunque $(\underline{n} \circ \alpha)(x) = \frac{1}{a}\pi_{xy}(\alpha(x)) \longrightarrow$ $J_p \pi_{xy} = $

$\Longrightarrow S_p v = -D_v \underline{n}(p) = -(\underline{n} \circ \alpha_v)'(0) =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

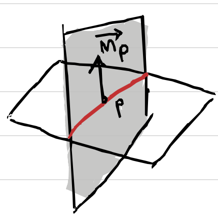
$= -\frac{1}{a}(\pi_{xy} \circ \alpha_v)'(0) = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} v$.

Osserviamo che $\underline{e_3}$ appartiene a ogni T_pS dacché $\underline{e_3} \cdot \nabla_p f = 0$, dunque $S_p \underline{e_3} = 0 \Longrightarrow \underline{e_3}$ dir. princ. con curv. 0 $\forall p$.

Se $p = (x_0, y_0, z_0)$, allora $\underline{u}_p = \frac{1}{a}(y_0, -x_0, 0) \in T_pS$ ($\underline{u}_p \cdot \nabla_p f = 0$)
$\longrightarrow S_p \underline{u}_p = -\frac{1}{a}\underline{u}_p \Longrightarrow \underline{u}_p$ dir. princ. con curv. $-\frac{1}{a}$ in p.

Dunque $K(p) = 0$, ma $S_p \neq 0 \Longrightarrow p$ parabolico $\forall p \in S$.

Esempio (piano) Sia $\pi = \{\overbrace{\underline{n} \cdot x}^{C^\infty} = d\}$ con $\underline{n} \neq 0$ e $\|\underline{n}\| = 1$. Allora d è sempre regolare per $[x \longmapsto \underline{n} \cdot x]$ e una normale di π è proprio $\underline{n}$ vettore, in ogni punto.



Quindi $S_p w = (\underline{n} \circ \alpha)'(0) = 0$ $\forall$ qls. curva α compatibile scelta. Dunque ogni p.to di un piano è planare.