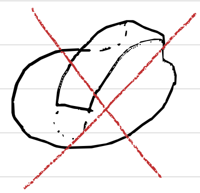
Superfici

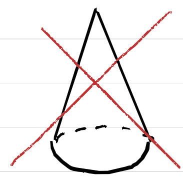
Vogliamo definire, come per le curve, un' idea di superficie che corrisponda alla nostra intuizione.

Vediamo innanzitutto che proprietà desideriamo dalla mappa $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$ che parametrizzerà la superficie: U aperto in $\mathbb{R}^2$

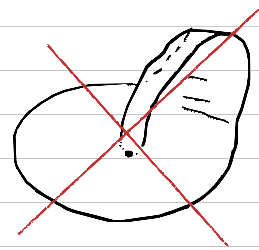
- non studiamo "superfici autointersecanti", ossia richiediamo $\underline{x}$ iniettiva.



- non vogliamo "p.ti spigolosi" perché ci interessa definire i piani tangenti, dunque vogliamo $\underline{x}$ liscia



- non vogliamo che la superficie si avvicini indefinitivamente a un p.to, e dunque richiediamo omeomorfismi.



$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Def. Una mappa C^∞ $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto si dice **PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE** se:

- $\underline{x}$ è iniettiva
- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U$ (regolarità)
- $\underline{x}^{-1}$ è continua

$\rightsquigarrow$ $\underline{x}_u \triangleq \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\underline{x}_u \triangleq (x_u, y_u, z_u)$

Richiedere $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ equivale a richiedere $rg(J(\underline{x})) = 2$, e quindi che la superficie ammetta sempre piani tangenti.

Def. Una **SUPERFICIE** è un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ t.c. $\forall p \in S$ $\exists$ param. reg. la cui immagine sia contenuta in S e che sia intorno di p in S.

$\rightsquigarrow$ $\underline{x}$ param. reg. $\Longrightarrow$ $\underline{x}(U)$ superficie.

Esempi.

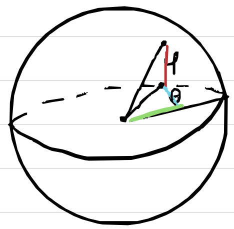
i.) Sia $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞. Il grafico di f si parametrizza
aperto

facilmente come $\underline{x}: (u,v) \longmapsto (u, v, f(u,v))$.

Chiaramente $\underline{x}$ è iniettiva e $J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}$ ha sempre rango 2. Inoltre l'inversa
$\underline{x}^{-1}: (u,v,f(u,v)) \longmapsto (u,v)$ è continua
in quanto proiezione. Dunque $\underline{x}$ è una parametrizzazione regolare e $\Gamma_f = \underline{x}(U)$ è superficie.

ii.) Si consideri l'elicoide $\underline{x}: (u,v) \longmapsto (u\cos(v), u\sin(v), bv)$ per $U = \{(u,v) \mid u > 0\}$ e $b \neq 0$. Questa corrisponde alla superficie generata da tutte le eliche destrorse.

Si verifica facilmente che $\underline{x}$ è una param. regolare.

iii.) 

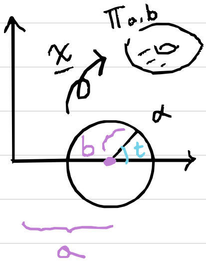
Sia $a > 0$. La **sfera di raggio a** è parametrizzata come:

$$\underline{x}: (\theta, \varphi) \longmapsto (a\cos(\varphi)\cos(\theta),\ a\cos(\varphi)\sin(\theta),\ a\sin(\varphi))$$

$\underline{x}$ è una param. regolare, dunque la sfera è una superficie.
Si può dimostrare lo stesso risultato considerando le funzioni $f_{+/-}(x,y) = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$, i cui grafici sono le semisfere.

iv.) Superficie di rotazione

Consideriamo la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ t.c. $t \mapsto (\overbrace{a + b\cos(t)}^{h(t)}, 0, \overbrace{b\sin(t)}^{g(t)})$.



L'idea è quella di ruotare α intorno all'asse z per ottenere una superficie (in questo caso un toro), utilizzando la mappa
$\underline{x} : (u,v) \longmapsto (h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), g(u))$.

Si può astrarre questo procedimento a $h > 0$ g più generiche, ottenendo una superficie di rotazione.

Q: in quali casi $\underline{x}$ dà effettivamente luogo a una superficie?

Consideriamo il p.to $\underline{x}(u_0, v_0)$. Vogliamo che $\exists$ param. reg. per un suo intorno.

- Se esiste un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $u_0 \in I$ t.c. $\alpha|_I$ è iniettiva, allora $\underline{x}|_{I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)}$ è iniettiva (i.e., "la rotazione di $\alpha|_I$ di al più un giro)

Infatti, se $u, u' \in I$ e $\underline{x}(u,v) = \underline{x}(u',v')$, allora i p.ti hanno stessa altezza e distano uguale dall'asse z, e quindi — essendo le distanze $h(u)$ e $h(u')$ — $\alpha(u) = \alpha(u') \overset{\in I}{\Longrightarrow} u = u'$.
Infine, se $v, v' \in (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$, $\underline{x}(u,v) = \underline{x}(u,v') \Longrightarrow$
$\underset{h>0}{\Longrightarrow} \cos(v) = \cos(v'), \sin(v) = \sin(v') \underset{\in (v_0 - \pi, v_0 + \pi)}{\Longrightarrow} v = v'$. ✓

- **Regolarità:** $\underline{x_u}(u,v) = (h'(u)\cos(v), h'(u)\sin(v), g'(u))$ e
$\underline{x_v}(u,v) = (-h(u)\sin(v), h(u)\cos(v), 0)$.

Dunque $\underline{x_u} \times \underline{x_v} = (-g'(u)h(u)\cos(v), -g'(u)h(u)\sin(v), h'(u)h(u))$.

Se $\alpha|_I$ è regolare, $\|\underline{x_u} \times \underline{x_v}\|^2 = g'(u)^2 h(u)^2 + h'(u)^2 h(u)^2 =$
$= \underbrace{h(u)^2}_{>0} (\underbrace{h'(u)^2 + g'(u)^2}_{= \|\alpha'(u)\|^2 > 0}) > 0 \Longrightarrow \underline{x_u} \times \underline{x_v} \neq 0$ in $I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$.

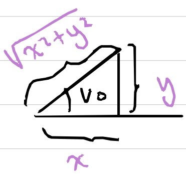
• Continuità di $\underline{x}^{-1}$ nell'"intorno" scelto: supponiamo che $\alpha|_I^{-1}$ sia continua (dunque "escludiamo i lacci"). (localmente)

Verifichiamo che sotto queste ipotesi $\underline{x}^{-1}|_{\underline{x}(I\times(v_0-\pi,v_0+\pi))}$ è continua intorno a $\underline{x}(s_0,v_0)$.

continua

$$\varphi: (x,y,z)\mapsto \left(\alpha^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2},\,0,\,z\right),\ \arccos\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$$

inverte localmente e continuamente $\underline{x}$ nel p.to desiderato, a patto che $v_0\notin\pi\mathbb{Z}$ (così non ci sono p.ti con stesso coseno). Se invece $v_0\in\pi\mathbb{Z}$,



$$\varphi': (x,y,z)\mapsto\left(\alpha^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2},0,z\right),\ \arctan\left(y/x\right)\right)$$

continua

inverte " e " $\underline{x}$ ".

• Ci serve che $\underline{x}(I\times \overbrace{(v_0-\pi,v_0+\pi)}^{J\triangleq})$ sia effettivamente un intorno di $\underline{x}(u_0,v_0)$. Mostriamo che $\underline{x}(I\times J)$ è un intorno mostrando che $\forall \{\underline{x}(u_i,v_i)\}$ t.c. $\underline{x}(u_i,v_i)\longrightarrow\underline{x}(u_0,v_0)$ si ha $\underline{x}_i\triangleq\underline{x}(u_i,v_i)$ definitivamente in $\underline{x}(I\times J)$.

Sia $\beta:(x,y,z)\longmapsto\left(\sqrt{x^2+y^2},0,z\right)$. Si osserva che β è continua e che $\beta\circ\underline{x}=\alpha$.

Allora $\underline{x}_i\to\underline{x}(u_0,v_0)\overset{\beta\circ}{\Longrightarrow}\alpha(u_i)\longrightarrow\alpha(u_0)$. Analogamente, usando φ (se $v_0\notin\pi\mathbb{Z}$) o φ' (se $v_0\in\pi\mathbb{Z}$), si mostra che $v_i\longmapsto v_0$ (dunque v_i definitivamente in $(v_0-\pi,v_0+\pi)$).

Supponendo valga anche $\alpha(u_i)\longrightarrow\alpha(u_0)\Longrightarrow u_i\to u_0$, si avrebbe allora la tesi; quest'assunzione è equivalente a richiedere $\alpha(I)$ intorno di $\alpha(u_0)$.

Riassumendo tutte le assunzioni:

Data $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(u)=(f(u),0,g(u))$ regolare e omeomorfismo locale, la sua superficie di rotazione è una superficie.

(dunque il Toro è una superficie).

V.) Superfici di livello

Sia $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞. Si dice che $a \in \mathbb{R}$ è un valore regolare per f se:

$$f^{-1}(a) = \emptyset \qquad o \qquad \nabla_p f \neq 0 \quad \forall\, p \in f^{-1}(a).$$

Teorema (della funzione implicita)

Sia $f: \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^k. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$ t.c.

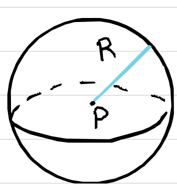
$$J_{f,y}(x_0,y_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0,y_0) \right]_{\substack{i=1 - m \\ j=n+1 - n+m}}$$

sia invertibile. Allora $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ int. di y, $g: U \longrightarrow V$ C^k t.c. $\forall\, (x,y) \in U \times V$ $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ $\Longleftrightarrow$ $y = g(x)$.

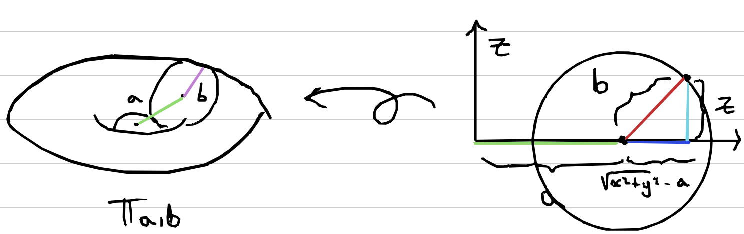
$\rightsquigarrow$ il Teorema della fun. imp. ci dice che le superfici di livello $f^{-1}(a)$ sono localmente dei grafici per $a \in \mathbb{R}$ regolare con $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Infatti $\nabla_p f \neq 0$ implica che almeno una delle coordinate si scriva localmente in funzione delle altre. Essendo localmente un grafico, ogni sup. di livello regolare è una superficie.

Esempio. Dacché una sfera è il luogo dei p.ti t.c. $\underbrace{\|x-p\|^2 = R^2}_{C^\infty}$, una sfera è una superficie.
Analogamente lo è un Toro, dacché è il luogo dei p.ti soddisfacent.

$$\underbrace{\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2}_{C^\infty}.$$



$S_R(P)$



$T_{a,b}$

Piano tangente

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Vorremmo definire il piano tangente T_pS come $\mathrm{span}(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p))$ (dove $\underline{x}_u(p) \triangleq \underline{x}_u(\underline{x}^{-1}(p))$, $\underline{x}_v(p) \triangleq \underline{x}_v(\underline{x}^{-1}(p))$).

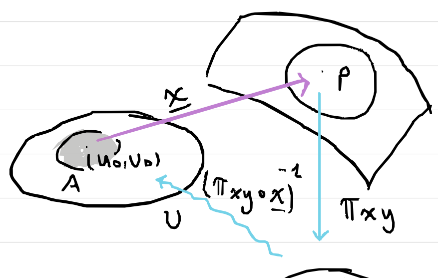
Q. date due parametrizzazioni regolari $\underline{x}, \underline{y} : U, V \to \mathbb{R}^3$ di un intorno di $p \in S$, ottengo lo stesso piano tangente? In altre parole, e' vero che $\mathrm{span}(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)) =$ $= \mathrm{span}(\underline{y}_u(p), \underline{y}_v(p))$?

Teorema (d'invertibilità locale) Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^k. Sia $x \in U$ t.c. $J_f(x)$ sia invertibile. Allora f e' localmente invertibile intorno a x con inversa C^k.

↝ osserviamo che una parametrizzazione regolare e' un diffeomorfismo C^∞, ovverosia ammette inversa C^∞. Infatti, dalla regolarità si sa che:

$$rg(J_f(u_0,v_0)) = rg\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = 2 \implies$$

$\exists$ minore 2×2 in $J_{\underline{x}}(u,v)$ con det. $\neq 0$.



Supponendo wlog $\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq 0$, si ha che $\pi_{xy} \circ \underline{x} : U \to \mathbb{R}^2$ e' t.c.

$$J_{\pi_{xy}\circ \underline{x}}(u,v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

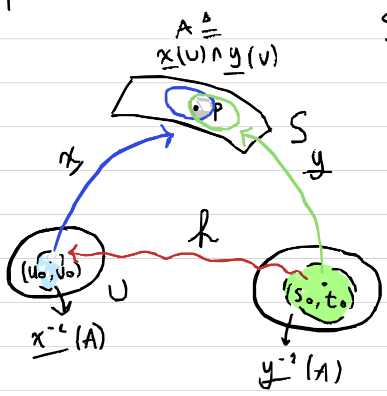
è invertibile. Dunque, per il teo. d'invertibilità locale $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ intorno di (u_0,v_0) t.c. $(\pi_{xy} \circ \underline{x})|_A$ sia invertibile con inversa C^∞.

Allora $\underline{x}^{-1}|_{\underline{x}(U)} = \underbrace{(\pi_{xy} \circ \underline{x})^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{\pi_{xy}|_{\underline{x}(U)}}_{C^\infty}$ è C^∞. Dunque $\underline{x}$ e' un diffeomorfismo C^∞ locale. Dacché però $\underline{x}$ e' invertibile, $\underline{x}$ e' proprio un diffeomorfismo C^∞.

(Infatti vuol dire che $\underline{x}^{-1}$ è localmente C^∞ su un aperto, dunque $\underline{x}$ e' un diffeomorfismo C^∞)

Ora possiamo rispondere alla domanda di prima.

Consideriamo due param. regolari $\underline{x}, \underline{y} : U, V \to \mathbb{R}^3$ intorno a $p \in S$.



Sia $A \triangleq \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$. Consideriamo $h : \underline{y}^{-1}(A) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(A)$ t.c. $h(s,t) = \underline{x}^{-1}(\underline{y}(s,t))$, detta FUNZIONE DI TRANSIZIONE (dalle coord. di $\underline{y}$ a quelle di $\underline{x}$).

Essendo composizione di diffeo. C^∞, h è un diffeo. C^∞ ($\underline{x}^{-1}$ è C^∞, come visto prima).

Dunque:

$$J_{\underline{y}}(s_0,t_0) = J_{\underline{x}}(\overset{(u_0,t_0)}{\overbrace{h(s_0,t_0)}}) \cdot J_h(s_0,t_0) = \begin{bmatrix} \underline{x}_u & \underline{x}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \underline{y}_s(s_0,t_0) = \underline{x}_u(u_0,t_0)\, u_s(s_0,t_0) + \underline{x}_v(u_0,t_0)\, v_s(s_0,t_0) \\ \underline{y}_t(s_0,t_0) = \underline{x}_u(u_0,t_0)\, u_t(s_0,t_0) + \underline{x}_v(u_0,t_0)\, v_t(s_0,t_0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{span}(\underline{y}_s(p), \underline{y}_t(p)) \subseteq \operatorname{span}(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)) \Longrightarrow \left[\text{Uguagl. dim. data dalla regolarità}\right]$$

$$\Longrightarrow \operatorname{span}(\underline{y}_s(p), \underline{y}_t(p)) = \operatorname{span}(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)). \checkmark$$

Dunque la seguente è una buona definizione:

Def. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie e sia $p \in S$. Si definisce il PIANO TANGENTE $T_p S$ come $\operatorname{span}(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p))$, dove $\underline{x}$ è una param. regolare di S in un intorno di p.

Orientabilità e versore normale

Vogliamo definire un'idea di orientabilità per le superfici, ovverosia essere in grado di classificare le superfici con "due facce" e quelle con "una".

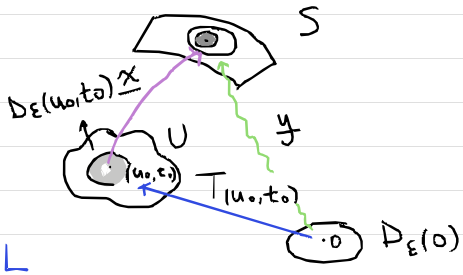
Per fare ciò useremo l'idea di versore normale. Data $\underline{x}$ parametrizz. definiamo:

$$n_{\underline{x}}(p) \triangleq (\underline{x}_u \times \underline{x}_v)/\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \widehat{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}$$

$\in T_pS^{\perp}$

Notiamo però che $n_{\underline{x}}(p)$ e $n_{\underline{y}}(p)$ in generale potrebbero avere segno opposto.

⇝ in generale ogni parametr. reg. $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$ intorno a $p \in S$ può ridursi a una param. $\underline{y} : D_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^3$.



Infatti, preso $\varepsilon > 0$ t.c. $D_\varepsilon(s_0,t_0) \subseteq U$, la mappa da $D_\varepsilon(0)$ che prima trasla il disco su $D_\varepsilon(s_0,t_0)$ ($T_{(u_0,t_0)}$) e poi applica $\underline{x}$ è un'altra param. reg.

Infatti se $\underline{x} : D_\varepsilon(0) \to S$ è una param. reg., anche $\underline{y} : D_\varepsilon(0) \to S$ con $\underline{y}(s,t) = \underline{x}(s,-t)$ è una param. reg. ($(s,t) \longmapsto (s,-t)$ è diffeo. C^∞), ed è t.c.

$$\underline{y}_s = \underline{x}_s, \quad \underline{y}_t = -\underline{x}_t \implies n_{\underline{x}}(p) = -n_{\underline{y}}(p).$$

Non è un caso aver "riflesso" il disco:

Prop. $\underline{x}$ e $\underline{y}$ hanno stesso versore normale in $p \in S$ sse lo Jacobiano della funzione di transizione h ha determinante positivo (i.e., sse tale Jacobiano preserva l'orientazione).

(infatti le riflessioni hanno determinante negativo)

Come visto prima: $\left[h(s,t) = (u(s,t),\ v(s,t)) \right]$

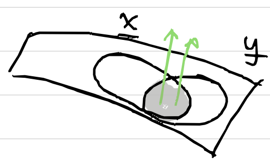
$$\begin{cases} y_s(s_0,t_0) = \underline{x}_u(u_0,t_0)\, u_s(s_0,t_0) + \underline{x}_v(u_0,t_0)\, v_s(s_0,t_0) \\ y_t(s_0,t_0) = \underline{x}_u(u_0,t_0)\, u_t(s_0,t_0) + \underline{x}_v(u_0,t_0)\, v_t(s_0,t_0) \end{cases}$$

Quindi:

$$\underline{y}_s \times \underline{y}_t = (u_s v_t - u_t v_s)\ \underline{x}_s \times \underline{x}_t .$$

Da cui si deduce che le normali hanno stesso verso sse
$u_s v_t - u_t v_s = \det \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix} = \det J_h(s_0,t_0) > 0$. $\square$

Def. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice **ORIENTABILE** se è ricoperta di param. reg. t.c. a due a due, se l'intersezione delle immagini è non vuota, la funzione di transizione tra le due param. mantenga l'orientazione, ossia con $\det(J_h) > 0$ (condizione di compatibilità).



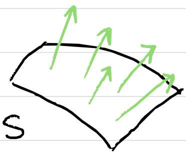
Esempio. le param. regolari inducono superfici orientabili (ricopribili, per l'appunto, con un'unica parametrizzazione). Quindi la sfera, il Toro, i grafici e le eliche sono superfici orientabili.

Prop. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie. Una funzione $h : S \to \mathbb{R}$ è continua sse $\forall\, \underline{x}$ par. reg. di un intorno di $p \in S$, $h \circ \underline{x}$ è continua.

$(\Rightarrow)$ banale (comp. di continue)

$(\Leftarrow)$ h è continua sse è localmente continua. Dato $p \in S$ $\exists\, \underline{x}$ param. reg. $U \to S$ con $\underline{x}(U)$ intorno di p.
Allora $\underbrace{(h \circ \underline{x})}_{\text{continua}} \circ \underbrace{\underline{x}^{-1}}_{\text{continua}}\big|_{\underline{x}(U)} = h\big|_{\underline{x}(U)}$ è continua $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ h è loc. continua. $\square$

Prop. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile sse $\exists$ $\underline{n} : S \to \mathbb{R}^3$ continua t.c. $\|\underline{n}(p)\| = 1$ e $\mathrm{span}(\underline{n}(p)) = (T_p S)^\perp$ $\forall p \in S$.



($\Longrightarrow$) basta porre $\underline{n}(p) = n_{\underline{x}}(p)$ dove $\underline{x} : U \to S$ una qls. param. reg. con $p \in S$. Questa data è una buona def., dal momento che param. intersecanti sono compatibili avendo funz. di transizione con Jacobiano a determinante positivo (vd. penultima proposizione). Inoltre $\underline{n}$ è loc. continua $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ $\underline{n}$ è continua.

($\Longleftarrow$) Sia $p \in S$ e sia x_p una param. reg. da $D_\varepsilon(0)$ a un int. di p. Se $n_{x_p}(p) = \underline{n}(p)$, si sceglie $y_p \triangleq x_p$; se invece $n_{x_p}(p) = -\underline{n}(p)$, si sceglie $y_p \triangleq [(s,t) \mapsto x_p(s,t)]$. In ogni caso $n_{y_p}(p) = \underline{n}(p)$ per costruzione. Osserviamo allora che $\forall (s,t) \in D_\varepsilon(0)$, $n_{y_p}(y_p(s,t)) = \underline{n}(y_p(s,t))$:

$f : D_\varepsilon(0) \to \{\pm 1\}$ t.c. $f(s,t) = n_{y_p}(y_p(s,t)) \cdot \underline{n}(y_p(s,t))$ è continua e dunque deve essere costante dacché $\{-1\}$ e $\{+1\}$ sono due comp. conn. distinte di $\{\pm 1\}$.
Allora $f(s,t) = f(y_p^{-1}(p)) = 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $n_{y_p}(y_p(s,t)) = \underline{n}(y_p(s,t))$.

Dunque $\{y_p\}_{p \in S}$ è il ricoprimento cercato: le param. sono compatibili dacché condividono la stessa normale $\underline{n}$ (vd. penultima proposizione). □

$\rightsquigarrow$ da quest'ultima prop. si deduce subito che, se $a \in \mathbb{R}$ è regolare per $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^∞ e $f^{-1}(a) \neq \emptyset$, $f^{-1}(a)$ è orientabile — infatti $\underline{n}(p) = \nabla_p f / \|\nabla_p f\|$ è continua e ortogonale a $f^{-1}(a)$:

se $\underline{x} : U \to S$ è una param. reg. intorno a $p \in S$, si ha $(f \circ \underline{x})(s,t) = a \Longrightarrow \nabla_p f \cdot [x_s \ x_t]_p = 0$ (con $p = \underline{x}(s_0,t_0)$)
$\Longrightarrow$ $\nabla_p f \cdot \underline{x}_s = \nabla_p f \cdot \underline{x}_t = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $\nabla_p f \in T_p S^\perp$.