# Assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel con scelta (ZFC)

L'alfabeto del linguaggio consiste di una successione infinita di variabili che rappresentano gli insiemi, dei connettivi logici $\neg$ ("non"), $\vee$ ("o"), $\wedge$ ("e"), dei quantificatori $\forall$ ("per ogni"), $\exists$ ("esiste"), del simbolo di uguaglianza $=$, del simbolo di appartenenza a un insieme $\in$ e delle parentesi tonde ( e ).

Con questo alfabeto, si dicono formule ben formate le formule atomiche $x = y$ e $x \in y$, dove $x$ e $y$ sono metavariabili, e per ricorsione le formule $\exists x\, \varphi$, $\forall x\, \varphi$, $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \phi)$, $(\varphi \vee \psi)$, dove $\varphi$ e $\psi$ sono a loro volta formule ben formate.

Impieghiamo $(a \to b)$ ("$a$ implica $b$") come abbreviazione per $(\neg a \vee b)$, così come $(a \leftrightarrow b)$ ("$a$ se e solo se $b$") per $(a \to b \wedge b \to a)$. Per chiarezza ammettiamo come abbreviazione anche $(\varphi)$ per $\varphi$.

### Assioma dell'estensionalità (ZF1)

Se due insiemi $x$ e $y$ hanno gli stessi elementi, allora sono lo stesso insieme.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

### Assioma dell'insieme vuoto (ZF2)

Esiste un insieme privo di elementi.

$$\exists x \neg \exists y (y \in x).$$

### Assioma della coppia (ZF3)

Dati due insiemi $x$, $y$, esiste un insieme contenente esattamente $x$ e $y$, ovverosia $\{x, y\}$.

$$\forall x \forall y \exists z \forall k (k \in z \leftrightarrow (k = x \vee k = y)).$$

### Assioma delle parti (ZF4)

Dato un insieme $x$, esiste l'insieme dei sottinsiemi di $x$, ovverosia l'insieme delle parti $\mathcal{P}(x)$.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall k (k \in z \to k \in x)).$$

### Assioma dell'unione (ZF5)

Dato un insieme $x$, esiste l'insieme che contiene esattamente gli elementi degli elementi di $x$, ovverosia l'insieme $\bigcup x$.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists k (k \in x \wedge z \in k)).$$

### Assioma dell'infinito (ZF6)

Esiste un insieme a cui appartiene l'insieme vuoto, e a cui appartiene $a \cup \{a\}$ se $a$ gli appartiene.

$$\exists x(\exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in y)) \wedge \forall a(a \in x \to \exists b(b \in x \wedge \forall c(c \in b \leftrightarrow (c \in a \vee c = a))))).$$

### Schema di assiomi di separazione (ZF7)

Data una formula $\Psi(z, u_1, \ldots, u_n)$ dipendente dalla variabile $z$ libera e da $u_1$, ..., $u_n$ eventualmente libere, esiste per ogni insieme $x$ il sottinsieme $\{z \in x \mid \Psi(z, u_1, \ldots, u_n)\}$.

$$\forall u_1 \ldots \forall u_n \left[\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \Psi(z, u_1, \ldots, u_n)))\right].$$

### Schema di assiomi di rimpiazzamento (ZF8)

Data una formula funzionale $\Psi(x, y, u_1, \ldots, u_n)$ dipendente dalle variabili $x$ e $y$ libere e da $u_1$, ..., $u_n$ eventualmente libere, esiste per ogni insieme $x$ l'insieme $\{y \mid \exists z\,(z \in x \wedge \Psi(z, y, u_1, \ldots, u_n))\}$.

$$\begin{aligned}\forall u_1 \ldots \forall u_n \big[\forall x \forall y \forall z((\Psi(x, y, u_1, \ldots, u_n) \wedge \Psi(x, z, u_1, \ldots, u_n)) \to y = z) \to \\ \forall a \exists b \forall c(c \in b \leftrightarrow \exists d(d \in a \wedge \Psi(d, c, u_1, \ldots, u_n)))\big].\end{aligned}$$

### Assioma di buona fondazione (ZF9)

Ogni insieme non vuoto $x$ contiene un elemento $y$ disgiunto da $x$.

$$\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists z(z \in x \wedge \forall a \neg(a \in x \wedge a \in z))).$$

### Assioma di scelta (AC)

Data una famiglia $x$ di insiemi non vuoti a due a due disgiunti esiste un insieme $e$ tale per cui l'intersezione $e \cap f$ contiene esattamente un elemento per ogni $f \in x$.

$$\begin{aligned}\forall x((\forall y(y \in x \to \exists z(z \in y)) \wedge \forall a \forall b((a \in x \wedge b \in x \wedge \neg(a = b)) \to \\ \neg\exists d(d \in a \wedge d \in b))) \to \exists e \forall f(f \in x \to \\ \exists g(g \in e \wedge g \in f \wedge \forall h((h \in e \wedge h \in f) \to h = g)))).\end{aligned}$$