边等周问题

L. H. Harper

1　基本定义

一个图（Graph）$G = (V, E, \partial)$ 由顶点集 V、边集 E 和标识每一条边对应一对顶点（可以相同）的边界函数 $\partial\colon E \to \binom{v}{1} \cup \binom{v}{2}$ 构成。图经常用图表（Diagram）来表示，其中顶点对应图表中的点，边对应图表中连接一对点的曲线。对任意的图 G 和 $S \subseteq V$，我们定义：

$$\Theta(S) = \{e \in E \mid \partial(e) = \{v, w\}, v \in S, w \notin S\}$$

并称之为 S 的边界（Edge-boundary）。那么对于一个给定的图 G 和 $k \in \mathbb{Z}^+$，边等周问题（Edge-Isoperimetric Problem, EIP）是对于所有的 $S \subseteq V$ 并且 $|S| = k$，找出最小的 $|\Theta(S)|$。注意 $|\Theta(S)|$ 是不变量（Invariant），即如果 $\phi\colon G \to H$ 表示一个图同构，那么对于 $\forall S \subseteq V_G$，都有 $|\Theta(\phi(S))| = |\Theta(S)|$。因此，在一个自同构下等价的顶点子集有相同的边界。

自环，即只对应一个顶点的边，与 EIP 无关，因此我们将忽略它们。我们大多数的图（但并非全部）是简单图（Ordinary Graph），即不含自环和多重边。一个简单图的表示可以缩短至 (V, E)，其中 $E \subseteq \binom{v}{2}$，∂ 则是隐含的。

2　例子

2.1　K_n，n-完全图

K_n 有 n 个顶点且 $E = \binom{v}{2}$，即每一对不同顶点之间都有一条边。对于每一个 $S \subseteq V$ 且 $|S| = k$，$|\Theta(S)| = |S \times (V - S)| = k(n-k)$。因此 K_n 的 EIP 很简单：任意一个 k-集都是解。

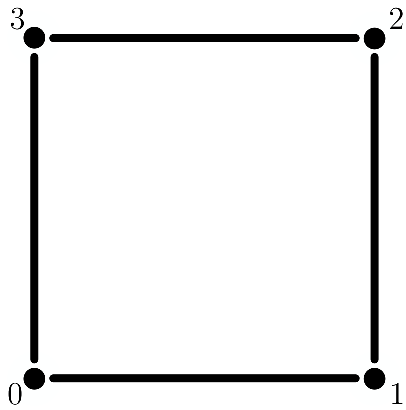

图 1: $\mathbb{Z}_4$ 的图表

2.2 $\mathbb{Z}_n$，n-环

对于 $\mathbb{Z}_n$，有 $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 和 $E = \{\{i, j\} \mid i-j \equiv \pm 1 \pmod{n}\}$。因此，$\mathbb{Z}_3 = K_3$，$\mathbb{Z}_4$ 的图表见图 1。

现在我们从下面的一般性说明（这些说明在后面也会有用），来推导 $\mathbb{Z}_4$ 以及 $\mathbb{Z}_n$ 上 EIP 的解：

(1) (a) 对于 $|S| = k = 0$，在任意的图里都只有一个子集，即空集 $\emptyset$。因此 $\min_{|S|=0} |\Theta(S)| = |\Theta(\emptyset)| = 0$。

(b) 对于 $k = |V| = n$，也只有一个子集，即 V。因此 $\min_{|S|=n} |\Theta(S)| = |\Theta(V)| = 0$。

(2) 一个图被称为 δ 度正则图（Regular of Degree δ），当它的每个顶点都正好对应 δ 条边。在一个正则图中，如果 $|S| = k = 1$ 那么 $\Theta(S) = \delta$，因此任意单点集都是一个解集。$\mathbb{Z}_n$ 是 2 度正则图；然而对于 $n = 4$ 且 $k = 2$ 的情况，有两个集合并不在 $\mathbb{Z}_n$ 的对称性下等价：$\{0, 1\}$ 和 $\{0, 2\}$。所有其他的 2-集都与这两者中的一个等价。$|\Theta(\{0, 1\})| = 2$，$|\Theta(\{0, 2\})| = 4$，因此 $\min_{|S|=2} |\Theta(S)| = 2$。

(3) 对于 $\forall G$ 和 $\forall S \subseteq V$，有

$$\Theta(V-S) = \Theta(S)$$

因此对于 $k > \frac{1}{2}|V|$，$\min_{|S|=k} |\Theta(S)| = \min_{|S|=n-k} |\Theta(S)|$，其中 $n = |V|$。这样我们就完成了 $\mathbb{Z}_4$ 上 EIP 的解，见下表总结。

k	0	1	2	3	4
$\min_{\|S\|=k} \|\Theta(S)\|$	0	2	2	2	0

(4) 令

$$E(S) = \{e \in E \mid \partial(e) = \{v, w\}, v \in S, w \in S\}$$

$E(S)$ 被称为 S 的导出边（Induced Edges）。对于一个图，导出边问题（Induced Edge Problem）是对于所有的 $S \subseteq V$ 并且 $|S| = k$，找出最大的 $|E(S)|$。

引理 1. *如果图 $G = (V, E, \partial)$ 是一个 δ 度正则图，那么对于 $\forall S \subseteq V$，都有*

$$|\Theta(S)| + 2|E(S)| = \delta|S|$$

证明. $\delta|S|$ 表示 S 对应的边数，然而出现在 $E(S)$ 中的边被计算了两次。 □

推论 1. *如果 G 是一个正则图，那么 $S \subseteq V$ 是导出边问题的一个解当且仅当它同时也是 EIP 的解。而且，对于 $\forall k$，$\min_{|S|=k} |\Theta(S)| = \delta k - 2\max_{|S|=k} |E(S)|$。*

那么对于正则图，EIP 和导出边问题是等价的，我们将视它们为可等价互换的问题。通常 EIP 出现在实际应用中，而导出边问题则更易证明。EIP 还存在第三种自然变体：对于 $S \subseteq V$，令

$$\partial^*(S) = \{e \in E \mid \partial(e) \cap S \neq \emptyset\}$$

即 S 中的点对应的边的集合。

练习 1. *对于正则图，证明计算*

$$\min_{\substack{S \subseteq V \\ |S|=k}} |\partial^*(S)|$$

与 EIP 等价 [1]。

回想一下，一棵树（Tree）是连通无环图。一个无环图也被称为森林（Forest），因为它是树——其连通分支的并集。

[1]练习的解答见第 5.2 小节，下同。

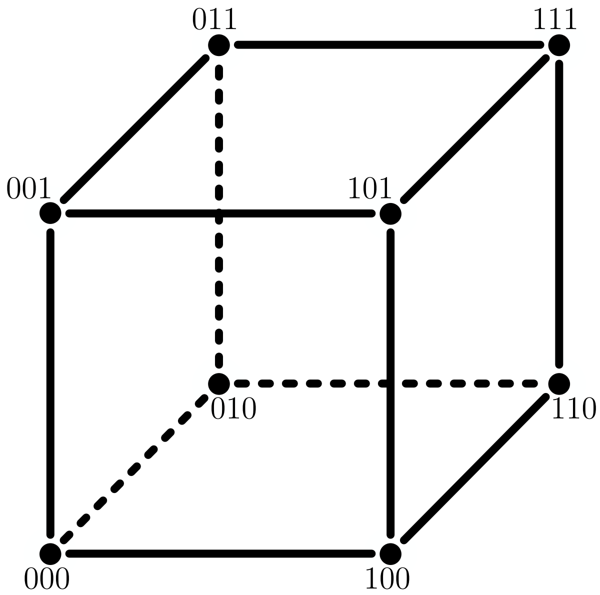

图 2: Q_3 的图表

引理 2. *有 n 个顶点的树的边数为 $n-1$。有 n 个顶点的森林的导出边数则是 $n-t$，其中 t 为其连通分支数。*

$\mathbb{Z}_n$ 的任意适当的子集 S 都可以导出一个无环图，因此 $\max_{|S|=k}|\Theta(S)|$ 会出现于当 S 是一个连通的集合，即区间时。因而，如果 $0<k<n$，$\min_{|S|=k}|\Theta(S)|=2k-2(k-1)=2$。

2.3 Q_d，d 阶立方

d 阶立方 Q_d 有顶点集 $\{0,1\}^d$，即 $\{0,1\}$ 的 d 倍笛卡尔积。因此 $n=|V_{Q_d}|=2^d$。Q_d 中的两个顶点（0 和 1 构成的 d 元组）对应一条边，当且仅当它们正好有一位不相同。

练习 2. *找出 $m=|E_{Q_d}|$ 对应的公式。*

Q_1 和 K_2 同构，Q_2 和 $\mathbb{Z}_4$ 同构，这些都已经可以通过 EIP 得到解决。一个 3 阶立方有 8 个顶点，12 条边，以及 6 个平面。Q_3 的图表事实上是一个 3 阶立方的投影，见图 2。

我们可以用在前两个例子中发展出来的简便工具来解决 Q_3 上的 EIP。首先观察到 Q_3 有围长（最短回路的长度）为 4：因为 3 阶立方的对称群是

传递的，所以任意顶点都和其他顶点一样。从一个顶点出发勾勒出路径，我们可以看到不存在长度为 3 的闭合回路。因此对于 $1 \le k \le 3$，根据引理 1 和引理 2，我们有

$$\begin{aligned}\min_{|S|=k} |\Theta(S)| &= 3k - 2\max_{|S|=k} |E(S)| \\ &= 3k - 2(k-1) = k+2\end{aligned}$$

对于 $k=4$，要么 S 导出一个回路，在这种情况下是一个 4-环，并且 $|\Theta(S)| = 4$；要么 S 导出一个无环图，并且根据上述可以得到 $|\Theta(S)| \ge 6$。对于 $k > 4 = \frac{8}{2}$，我们根据下面这个式子得到解

$$\min_{|S|=k} |\Theta(S)| = \min_{|S|=8-k} |\Theta(S)|$$

最后的解见下表总结。

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\min_{\lvert S\rvert=k} \lvert\Theta(S)\rvert$	0	3	4	5	4	5	4	3	0

为了将这个 EIP 的解推广到 Q_d（$d > 3$），我们需要利用一些关于立方的简单结论，这些结论的证明将被留作练习。一个 d 阶立方的 c 阶子立方（c-subcube of the d-cube）是 Q_d 的子图，导出自一个包含所有在 $(d-c)$ 个坐标下有相同（固定）值的顶点的集合。

练习 3. 证明 d 阶立方的任意 c 阶子立方与 c 阶立方同构。

练习 4. 计算 d 阶立方有多少个 c 阶子立方？

一个 d 阶立方的 c 阶子立方的邻居（Neighbor）是在 $(d-c)$ 个固定坐标下有正好一个坐标不同的任意 c 阶子立方。

练习 5. 证明一个 c 阶子立方的所有邻居都互不相交。

练习 6. 证明一个 c 阶子立方的两个不同邻居（的顶点）之间没有边相连。

练习 7. 计算 d 阶立方的一个 c 阶子立方有多少个邻居？

Q_d 上的 EIP 最初由数据传输上的问题推动。W. H. Kautz [1]、E. C. Posner 和本书作者的研究引发了一种猜测：字典序编号方式（Lexicographic Numbering），即对于 $x \in V_{Q_d}$，

$$lex(x) = 1 + \sum_{i=1}^{d} x_i 2^{i-1}$$

它的起始部分是解集，然而这要如何证明？一个显而易见的尝试方法是对维度 d 使用归纳法。数学归纳法有一个看似自相矛盾的属性，它往往更容易证明一个更强的定理，因为一旦最初的情况得到验证，人们就可以假设该定理对归纳参数的较低值为真，以便建立下一次归纳。因此一个较强的假设可以产生一个更简单的证明。在本例中，该策略引发了这种推测——以下归纳步骤会生成 所有解集：

(1) 首先从空集 $\emptyset$ 开始。

(2) 对于已经构建好的集合 $S \subset V_{Q_d}$，选择任意一个 $x \in V_{Q_d} - S$ 来扩充 S，使得导出边数的增量最大，即

$$|E(S \cup \{x\})| - |E(S)|$$

添加任意 $x \in V_{Q_d}$ 都可使 $\emptyset$ 的增量最大，因为 $|E(\{x\})| - |E(\emptyset)| = 0$。$\{x\}$ 的增量则必须是 x 的相邻顶点。那么对于 $k > 2$ 的 k-集，情况又该如何呢？答案是如果 $k = 2^c$，那么该集合必然是 c 阶子立方。我们刚刚已经验证了 $c = 0$ 和 1 的情况。假设这对 $0, 1, \ldots, c-1$ 都成立，为了扩充一个 2^{c-1}-集，即一个 $(c-1)$ 阶子立方，我们只能选择一个使 $|E(S)|$ 增量为 1 的顶点，即一个相邻的 $(c-1)$ 阶子立方中的任意顶点。从一个相邻的子立方中选出一个顶点后，我们必须继续从同一个子立方中选顶点，直到用尽它所有的顶点，这是因为所选择的子立方中总会存在一个顶点使得 $|E(S \cup \{x\})| - |E(S)| \geq 2$，而其他子立方中的任意顶点都有 $|E(S \cup \{x\})| - |E(S)| \leq 2$。当我们用尽所有相邻的 $(c-1)$ 阶子立方时，我们就得到了一个 c 阶子立方。

总体而言，令

$$k = \sum_{i=1}^{K} 2^{c_i}, 0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < {c_K}^2$$

为 k 的二进制表示形式（注意 $K = \lfloor \log_2 k \rfloor$ [3]）。如果 $S \subseteq V_{Q_d}$ 是一个互不相交的子立方的并集，其中每个 c_i 阶子立方（$1 \le i \le K$）都满足：对于其他所有 c_i 阶子立方（$j > i$），该 c_i 阶子立方处在该 c_j 阶子立方的一个邻居中，那么 S 就被称为立方集（Cubal Set）。立方集正好是依次使内部边数增量最大化所构造出来的集合。如果 S 是立方集且 $|S| = k$，那么（见练习 1）

$$|E(S)| = \sum_{i=1}^{K}(K-i)2^{c_i} + c_i 2^{c_i - 1}$$

注意对于一个 k-立方集 $S \subseteq V_{Q_d}$，$|E(S)|$ 并非由 d 决定，而仅仅由 $k = |S|$ 决定。这个函数很重要，我们把它记为 $E(k)$。$E(k)$ 有一个分形性质，见下面这个递推式：如果 $2^{d-1} \le k < 2^d$，那么

$$E(k+1) - E(k) = E(k - 2^{d-1} + 1) - E(k - 2^{d-1}) + 1$$

这遵循 k-立方集的递归结构。从 k 中减去最大的 2 的幂——2^{d-1}，对应从 S 中去掉最大的子立方。这个子立方为集合中每一个余下的顶点提供了一个邻居。

练习 8. 证明如果 $S \subseteq V_{Q_d}$ 是立方集，那么它的补集 $V_{Q_d} - S$ 也是立方集。

练习 9. 证明任意两个 k-立方集都同构，即存在一个 d 阶立方的自同构能把一个（k-立方集）映射到另一个。

定理 1. $S \subseteq V_{Q_d}$ 在基数为 k 时有最大的 $|E(S)|$，当且仅当 S 是立方集。

引理 3. （*Bernstein [2]*）对于 $\forall d$ 和 $\forall k, t > 0$ 使得 $k + t < 2^d$，都有

$$E(t) < E(k+t) - E(k) < E(2^d) - E(2^d - t)$$

引理 *3* 的证明. 对 d 进行归纳：当 $d = 2$ 时成立；假设 $d - 1 \ge 2$ 时也成立，考虑下面三种情况：

---

[2]这里 $c_K \le \lfloor \log_2 k \rfloor$。

[3]该处有错误，应为 $K \le \lceil \log_2 k \rceil$。

(1) 如果 $k \geq 2^{d-1}$，那么有

$$
\begin{aligned}
E(k+t)-E(k) &= \sum_{i=1}^{t} E(k+i)-E(k+i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \left[E(k+i-2^{d-1})-E(k+i-2^{d-1}-1)+1\right] \\
&= E(k+t-2^{d-1})-E(k-2^{d-1})+t
\end{aligned}
$$

并且两个不等式都遵循归纳假设。

(2) 如果 $k+t \leq 2^{d-1}$，那么左边的不等式遵循归纳假设；右边的不等式遵循上述恒等式，因而也遵循归纳假设。

(3) 如果 $k < 2^{d-1} < k+t$，那么

$$
\begin{aligned}
E(k+t)-E(k) &= \left[E(k+t)-E(2^{d-1})\right] + \left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\
&> \left[E(k+t-2^{d-1})\right] + \left[E(t)-E(t-(2^{d-1}-k))\right]
\end{aligned}
$$

分别根据情况 1 和 2 [4]

$$
= E(t)
$$

练习 10. *完成情况 3 的证明（右边的不等式）。*

□

定理 1 的证明. 我们已经注意到所有的 k-立方集都有相同的导出边数，即 $E(k)$，因此我们只需证明所有的最优集都是立方集。先前我们对 d 进行归纳，并已证明了当 $d=1,2$ 时为真。现在假设当维度 $d>2$ 时也为真。对于给定的 k（$0<k<n=2^d$）并用上述 2 的幂的和来表示（所以 $K<d$），令 $S \subseteq V_{Q_d}$ 为 $|S|=k$ 时的最优集。如果我们根据第 d 位坐标，把 Q_d 划分为两个 $(d-1)$ 阶子立方 $Q_{d,0}=\{x \in V_{Q_d} \mid x_d=0\}$ 和 $Q_{d,1}=\{x \in V_{Q_d} \mid x_d=1\}$，那么我们也得到了 S 的划分，即 $S_0=S \cap Q_{d,0}$ 和 $S_1=S \cap Q_{d,1}$。令 $|S_0|=k_0$，

[4] 该处证明不完整，详见第 5.1 小节。

$|S_1| = k_1$，我们不妨假设 $k_0 \geq k_1$。如果 $k_1 = 0$，定理遵循归纳假设，因此就假设 $k_1 > 0$。因为 $E(S)$ 中的边的端点要么都在 S_0 中，要么都在 S_1 中，要么一个在 S_0 中，一个在 S_1 中，所以

$$|E(S)| \leq \max_{|S|=k_0} |E(S)| + \max_{|S|=k_1} |E(S)| + k_1$$

如果 S_1 是基数为 k_1 的立方集，那么根据归纳，我们有 $|E(S_1)| = E(k_1) = \max_{|S|=k_1} |E(S)|$。$S_1$ 在 $Q_{d,0}$ 中的邻居与 S_1 同构，因此也是立方集。根据立方集的递归构造，$\exists S_0 \subseteq Q_{d,0}$ 且 $|S_0| = k_0$，它是立方集，并且包含 S_1 的邻居。因此我们可以取到 $|E(S)|$ 的上界，而且每个取到上界的集合都必须是两个立方集的并集。令 $k_0 = \sum_{i=1}^{K_0} 2^{c_{i,0}}, 0 \leq c_{1,0} \leq c_{2,0} \leq \cdots \leq c_{K_0,0}$，$k_1$ 与其类似。因为 $k_0 + k_1 = k$，所以只有三种可能的情况：

(1) $c_{K_0,0} = c_K$：那么我们可以假设 $S_0 - Q_{c_{K_0,0}}$ 和 S_1 处在 $Q_{c_{K_0,0}}$ 的两个不同的邻居中，因此 S 不是立方集。根据练习 5 可知 $S_0 - Q_{c_{K_0,0}}$ 中的顶点和 S_1 中的顶点没有边相连。令 $k_0^{'} = k_0 - 2^{c_{K_0}} > 0$，我们有 $k_0^{'} + k_1 \leq 2^{c_{K_0}}$。如果我们去掉 S_1 并添加相同数量的顶点至 S_0，以此来修改 S，那么引理 3 表明 $|E(S)|$ 会增大。这便与 S 是最优的相矛盾。

(2) $c_{K_0,0} = c_K - 1$ 且 $c_{K_1,1} = c_K - 1$：$Q_{c_{K_0,0}}$ 和 $Q_{c_{K_1,1}}$，这两个 (c_K-1) 阶子立方是邻居，因此构成了一个 c_K 阶子立方。$S_0 - Q_{c_{K_0,0}}$ 和 $S_1 - Q_{c_{K_1,1}}$ 每一个都处在相邻的 (c_K-1) 阶子立方中，这两个子立方构成了一个与第一个相邻的 c_K 阶子立方。根据归纳假设，S 肯定是立方集。

(3) $c_{K_0,0} = c_K - 1$ 且 $c_{K_1,1} < c_K - 1$：与情况 1 同理，我们假设 $S_0 - Q_{c_{K_0,0}}$ 和 S_1 处在 $Q_{c_{K_0,0}}$ 的两个不同的邻居中，因此它们之间没有边相连。令 $k_0^{'} = k_0 - 2^{c_{K_0}} > 0$，我们有

$$\begin{aligned} k_0^{'} + k_1 &= k_0 - 2^{c_{K_0}} + k_1 \\ &= k - 2^{c_K - 1} \\ &\geq 2^{c_K} - 2^{c_K - 1} \\ &= 2^{c_K - 1} \end{aligned}$$

如果我们从 S_1 中去掉 $2^{c_{K_0}} - k_0'$ 个顶点并把它们补充到包含 $S_0 - Q_{c_{K_0},0}$ 的那个集合中，使其成为 $Q_{c_{K_0},0}$ 的邻居，以此来修改 S，那么引理 3 表明这会使 $|E(S)|$ 增大，再一次与 S 是最优的相矛盾。

□

3 布局问题上的应用

组合等周问题频繁地出现在通信工程、计算机科学、物理科学和数学本身这些领域。我们不希望在这里涵盖所有的应用，但会给出一个具有代表性的样例。我们选择专注于布局问题，它们出现在电气工程中，当一个人把一些电气回路的布线图在机箱上“勾画出来”，即把每一个元件和线放置在机箱上。布线图本质上就是一个图，其中电气元件成了顶点，连接它们的线成了边。对于机箱上的顶点和边的任意给定布局，都存在一定的成本或者说性能度量，我们则希望对其进行优化。

3.1 线长问题

假设我们想把元件（图 $G = (V, E, \partial)$ 中的顶点）放置在一个线形的机箱上，每一个都与先前的那个元件相距一个单位，以这样的方式来最小化连接它们的线的总长度。精确地来说，我们将 G 的一种顶点编号方式（Vertex-numbering）定义为一个一对一的函数

$$\eta\colon E \to \{1, 2, \ldots, n\},\ \text{其中}\ n = |V|$$

η 的值域中的整数可根据线形机箱上的位置来区分。那么 η 的总线长（Wire-length）则是

$$wl(\eta) = \sum_{\substack{e \in E \\ \partial(e) = \{v,w\}}} |\eta(v) - \eta(w)|$$

对于一个图 $G = (V, E, \partial)$ 来说，

$$wl(G) = \min\{wl(\eta) \mid \eta\ \text{是}\ G\ \text{的一种顶点编号方式}\}$$

记住，一个有 n 个顶点的图有 $n!$ 种顶点编号方式。

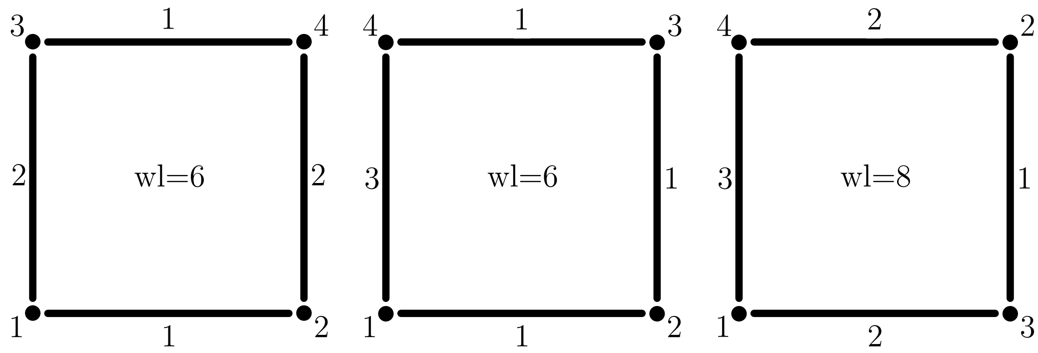

图 3: Q_2 的编号方式

3.1.1 例子

平方的图有 $4! = 24$ 种顶点编号方式，但它同时还有 8 种对称情况。任意两种对称的编号方式都有相同的线长。图 3 的三种编号方式代表了 $24/8 = 3$ 种编号方式的等价类。前两种编号方式有最小的线长 wl，第三种则有最大的。因此 $wl(Q_2) = 6$。然而 $wl(Q_3)$ 就没有那么容易得出了，因为 Q_3 有 $8! = 40320$ 种编号方式以及 48 种对称情况。虽然 $40320/48 = 840$ 也并不是那么大，但是要如何才能系统地生成这 840 种编号方式等价类的代表呢？我们现在来看看如何解决这些明显的困难。

为了最小化一个和，譬如 wl，一个显而易见的策略是分别最小化每一个加数。这些最小值的和就成了和的最小值的下界，并且我们可以期望这会是一个不错的下界，甚至是精确的。然而这并不适用于 $wl(\eta)$ 的定义，因为对于每一条边 $e \in E$，$\partial(e) = \{v, w\}$，都有

$$\min_{\eta} |\eta(v) - \eta(w)| = 1$$

3.1.2 wl 的另一种表示形式

对于给定的一个编号方式 η 和一个整数 k，$0 \leq k \leq n$，令

$$S_k(\eta) = \eta^{-1}(\{1, 2, \ldots, k\}) = \{v \in V \mid \eta(v) \leq k\}$$

即编号方式 η 下的前 k 个顶点的集合。那么下面我们就得到了线长的另一种表示形式。

引理 4.

$$wl(\eta) = \sum_{k=0}^{n} |\Theta(S_k(\eta))|$$

证明. 注意 $S_0(\eta) = \eta^{-1}(\emptyset) = \emptyset$。令

$$\chi(e,k) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \partial(e) = \{v,w\}, \eta(v) \le k < \eta(w) \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} wl(\eta) &= \sum_{\substack{e \in E \\ \partial(e)=\{v,w\}}} |\eta(v) - \eta(w)| = \sum_{e \in E} \sum_{k=0}^{n} \chi(e,k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{e \in E} \chi(e,k) = \sum_{k=0}^{n} |\Theta(S_k(\eta))| \end{aligned}$$

□

练习 11. （*Steiglitz–Bernstein [3]*）假设线形机箱实际上是一条实线，上面有 n 个位置 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 用来放置元件。布局 η 将顶点 $v \in V$ 放置在位置 $s_{\eta(v)}$ 上，证明 η 有总线长为

$$wl(\eta) = \sum_{k=0}^{n} (s_{k+1} - s_k) |\Theta(S_k(\eta))|$$

线长的这种作为一个和的新表示形式给了我们它的另一个下界。

推论 2. 对于任意的图 G，

$$\begin{aligned} wl(G) &= \min_{\eta} wl(\eta) = \min_{\eta} \sum_{k=0}^{n} |\Theta(S_k(\eta))| \\ &\ge \sum_{k=0}^{n} \min_{\eta} |\Theta(S_k(\eta))| = \sum_{k=0}^{n} \min_{|S|=k} |\Theta(S)| \end{aligned}$$

定理 2. 对于 $G = (V, E, \partial)$ 的任意顶点编号方式 η，如果它的所有初始段 $S_k(\eta)$（$0 \le k \le n$）都是 G 上 *EIP* 的解，那么它本身就是 G 上线长问题的一个解。

推论 3. $\mathbb{Z}_n$ 的编号方式 $\eta_0(i) = 1 + i$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 上线长问题的一个解，并且

$$\begin{aligned} wl(\mathbb{Z}_n) &= \sum_{k=0}^{n} \min_{|S|=k} |\Theta(S)| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 = 2(n-1) \end{aligned}$$

定义 1. 如果 $\{T_i\}_{i=1}^{n}$ 是一个完全有序集合的序列，那么它们乘积的字典序 $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ 是一个由 $x < y$ 定义的全序，$x < y$ 成立当 $\exists m$ 使得 $x_1 = y_1$，$x_2 = y_2$，……，$x_{m-1} = y_{m-1}$ 且 $x_m < y_m$。一个集合的任意全序都对应一个编号方式，其中集合的第一个（最小的）元素编号为 1，第二个编号为 2，以此类推。0 和 1 构成的 d 元组（Q_d 的顶点）上的字典序对应的编号方式是 $lex(x) = 1 + \sum_{i=1}^{d} x_i 2^{i-1}$

推论 4. Q_d 的字典序编号方式是 Q_d 上线长问题的一个解。

练习 12. 证明 $wl(Q_d) = 2^{d-1}(2^d - 1)$。

练习 13. 对于练习 *11* 中的更一般的线形机箱，证明 lex 同时也是它的 Q_d 上线长问题的一个解。

3.2 4 阶德布鲁因图

德布鲁因图是一个有向图（Directed Graph, Digraph），即存在两个边界函数 $\partial_{\pm} \colon E \to V$ 分别标识每一条边的头和尾。有向图的图表中的每条边一般都有一个箭头指向它的头。d 阶德布鲁因图（the deBruijn Graph of Order d）DB_d 有与 Q_d 相同的顶点集（0 和 1 构成的所有 d 元组的集合），而它的边集则完全不同。E_{DB_d} 是 0 和 1 构成的所有 $(d+1)$ 元组的集合，并且

$$\begin{aligned} \partial_{-}(x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}) &= (x_1, x_2, \ldots, x_d) \\ \partial_{+}(x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}) &= (x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}) \end{aligned}$$

关于德布鲁因图的更多信息，请参考 [4]。DB_4 的图表见图 4。

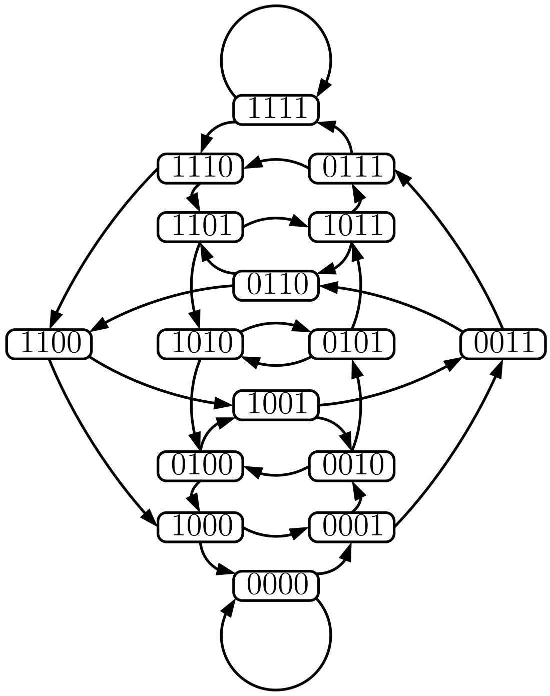

图 4: 4 阶德布鲁因图

对于一个编号方式 η，它的作为边界的和的线长表示形式，及其在求解 $\mathbb{Z}_n$ 和 Q_d 上的线长问题上的应用，表明了一种可最小化任意图的线长的启发式方法：给顶点编号为 $1, 2, \ldots, k-1, k, \ldots, n$，从而最小化

$$|\Theta(S_k(\eta))| - |\Theta(S_{k-1}(\eta))|$$

即每增加一个顶点所带来的边际增量。把这个启发式方法应用到 $\underline{DB_4}$（去掉自环和边的方向的 DB_4）上，我们就得到了编号方式 η_0，见图 5。

下表列出了 k 的取值范围在 0 到 16 时 $|\Theta(S_k(\eta_0))|$ 的值：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\|\Theta(S_k(\eta_0))\|$	0	2	4	4	6	6	6	6	6	6	8	6	6	4	4	2	0

从这可以看出 $S_{10}(\eta_0)$ 不是 EIP 的解。事实上并不存在一个所有的初始段都是 EIP 的解的编号方式，因为如果存在的话，它就会产生于我们用来构造 η_0 的这个过程中。然而，我们可以断言，对于 $k \neq 10$，$S_k(\eta_0)$ 是 EIP 的

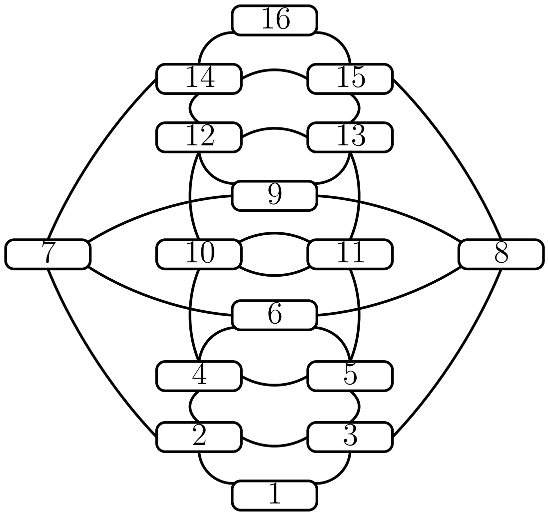

图 5: 编号方式 η_0 下 $\underline{DB_4}$ 的图表

解。因此那个推导出定理 2 的不等式可以给出

$$wl(\underline{DB_4}) > \sum_{k=0}^{n} \min_{|S|=k} |\Theta(S)| = 2 \times 34 + 6 = 74$$

而

$$wl(\eta_0) = 76$$

因为对于每一个顶点 $v \in V_{\underline{DB_4}}$，度数 $\delta(v)$ 都是偶数，并且对于所有的 $S \subseteq V_{\underline{DB_4}}$，

$$|\Theta(S)| = \sum_{v \in S} \delta(v) - 2|E(S)|$$

也是偶数（引理 1 中的恒等式的泛化），所以对于任意 $\underline{DB_4}$ 的编号方式 η，我们都有 $wl(\eta) \geq 76$，因此 η_0 是它的线长问题的一个解。

练习 14. 找出 $\underline{DB_4}$ 上 所有 EIP 的解集，其中 $k \leq 8$（无需证明）。

3.3 划分问题

$G = (V, E, \partial)$ 的一个划分（Partition）是一个集合 $\pi \subseteq 2^V$ 满足

(1) $\forall B \in \pi$，$B \neq \emptyset$；

(2) $\forall A, B \in \pi$，要么 $A = B$，要么 $A \cap B = \emptyset$；

(3) $\bigcup_{B\in\pi} B = V$。

$B \in \pi$ 被称为划分的一个块（Block）。一个划分 π 被认为是均匀的（Uniform），当 $\forall A, B \in \pi$，$||A|-|B|| \leq 1$。如果 $|\pi| = p$，那么这就等价于

$$\forall B \in \pi, \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq |B| \leq \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil, \text{ 其中 } n = |V|$$

事实上，如果 j 是 n 除以 p 的余数（即 $n \equiv j \pmod p$，$0 \leq j < p$），那么 G 的任意均匀 p-划分都有 j 个 $\lceil \frac{n}{p} \rceil$-块和 $(p-j)$ 个 $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$-块。

一个划分 π 的边界（Edge-boundary）是

$$\begin{aligned}\Theta(\pi) &= \{e \in E \mid \partial(e) = \{v, w\}, v \in A, w \in B, A \neq B\} \\ &= \bigcup_{B\in\pi} \Theta(B)\end{aligned}$$

注意后一种表示形式中的并集不是互不相交的，而是任意 $e \in E$ 且 $\partial(e) = \{v, w\}$ 都正好被包含了两次，一次来自包含 v 的块，另一次来自包含 w 的块。

G 的边界划分问题（Edge-boundary Partition Problem）是对于 G 的所有均匀 p-划分 π，找出最小的 $|\Theta(\pi)|$。G 可以被当做一个要布局在 p 块芯片上的布线图，其中的元件要尽可能平均地分布在这些芯片上。问题则是给芯片分配元件，使得连接不同芯片上元件的线数最小。边界划分问题的一个变体是边宽划分问题（Edge-width Partition Problem），即对于 G 的所有均匀 p-划分 π，找出最小的 $\max_{B\in\pi} |\Theta(B)|$。

引理 5. *如果 $n \equiv j \pmod p$，$0 \leq j < p$，那么*

$$\min_{\substack{|\pi|=p \\ \pi \text{ 均匀}}} |\Theta(\pi)| \geq \frac{1}{2}\left(j \min_{|B|=\lceil \frac{n}{p} \rceil} |\Theta(B)| + (p-j) \min_{|B|=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} |\Theta(B)| \right)$$

同样还有

$$\min_{|\pi|=p} \max_{B\in\pi} |\Theta(B)| \geq \max\left\{ \min_{|B|=\lceil \frac{n}{p} \rceil} |\Theta(B)|, \min_{|B|=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} |\Theta(B)| \right\}$$

证明. 如果 π_0 是一个最优均匀 p-划分，那么

$$\begin{aligned}
\min_{|\pi|=p} |\Theta(\pi)| &= |\Theta(\pi_0)| \\
&= \frac{1}{2} \sum_{B\in\pi_0} |\Theta(B)| \\
&\qquad\qquad \text{因为每一条边 } e \in \Theta(\pi_0) \text{ 都被计算了两次} \\
&\geq \frac{1}{2} \left(j \min_{|B|=\lceil \frac{n}{p} \rceil} |\Theta(B)| + (p-j) \min_{|B|=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} |\Theta(B)| \right)
\end{aligned}$$

□

3.3.1 例子

(1) 对于 $\mathbb{Z}_n$，我们得到

$$\begin{aligned}
\min_{|\pi|=p} |\Theta(\pi)| &\geq \frac{1}{2} \left(j \min_{|B|=\lceil \frac{n}{p} \rceil} |\Theta(B)| + (p-j) \min_{|B|=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} |\Theta(B)| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(j \cdot 2 + (p-j) \cdot 2 \right) = p
\end{aligned}$$

同样还有

$$\begin{aligned}
\min_{|\pi|=p} \max_{B\in\pi} |\Theta(B)| &\geq \max \left\{ \min_{|B|=\lceil \frac{n}{p} \rceil} |\Theta(B)|, \min_{|B|=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} |\Theta(B)| \right\} \\
&= \max\{2, 2\} = 2
\end{aligned}$$

这些下界可以在把 $\mathbb{Z}_n$ 均匀地划分为 p 个区间时取到，因此 $\mathbb{Z}_n$ 上的边界和边宽划分问题都得到了解决。

(2) 对于 Q_d，$p = 2^a$ 是 2 的幂，$\lceil \frac{n}{p} \rceil = \frac{2^d}{2^a} = 2^{d-a} = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$，因此我们得到

$$\begin{aligned}
\min_{|\pi|=p} |\Theta(\pi)| &\geq \frac{1}{2} \left(j \min_{|B|=\lceil \frac{n}{p} \rceil} |\Theta(B)| + (p-j) \min_{|B|=\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} |\Theta(B)| \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2^a \min_{|B|=2^{d-a}} |\Theta(B)| = \frac{1}{2} \cdot 2^a \cdot (d-a) 2^{d-a} \\
&= (d-a) 2^{d-1}
\end{aligned}$$

同样不出意料地，这个下界，以及与边宽对应的那个下界，可以在把 Q_d 划分为 $(d-a)$ 阶子立方时取到。不过令人惊讶是，根据 Bezrukov [6] 的观察，对于 p 的其他（也许是全部）的值，这些下界依然是精确的。

定理 3. *$\forall d > a$，都存在一个均匀 (2^a+1)-划分，能把 Q_d 划分为立方集。*

练习 15. *在阅读下面的证明之前，先证明 $a = 1$ 时的特例。*

证明. 我们从 Q_d 中的一个 $\lfloor \frac{2^d}{2^a+1} \rfloor$-立方集 B_1 开始。因为所有的 k-立方集都在图同构下等价（见练习 9），我们不妨令 $B_1 = S_k(lex)$，其中 $k = \lfloor \frac{2^d}{2^a+1} \rfloor$。因为 $\lfloor \frac{2^d}{2^a+1} \rfloor < 2^{d-a}$，所以 B_1 是 Q_d 的 $(d-a)$ 阶子立方的子集，它的最后 a 位坐标均为固定值 0。这些固定坐标的 2^a 个值每一个都给出 B_1 的一份拷贝，因此都是立方集。以这些固定坐标的字典序把它们标号为 $B_1, B_2, \ldots, B_{2^a}$。再把元素 $S_{k+1}(lex) - S_k(lex)$ 加入到 B_1，把对应的元素加入到 $B_2, \ldots, B_j$，其中 $j \equiv 2^d \pmod{2^a+1}$。那么这些前 j 个块就成了 $S_{k+1}(lex)$ 的拷贝。我们断言

$$\bigcup_{i=1}^{2^a} B_i$$

是立方集：它包括一个 $(a_i + a)$ 阶子立方的并集，其中每一个的指数满足 $\sum 2^{a_i} = k$ 并且每一个 $(a_i + a)$ 阶子立方都处在所有更大的子立方的邻居中。它还包括一个 b_l 阶子立方的并集，其中每一个的指数满足 $\sum 2^{b_l} = j$，$b_1 < b_2 < \cdots$。因为所有的 b_l 阶子立方都处在一个 a 阶子立方中，它处在所有的 $(a_i + a)$ 阶子立方的一个邻居中，所以这个断言得到了证明。因此，根据练习 8，$B_{2^a+1} = V_{Q_d} - \bigcup_{i=1}^{2^a} B_i$ 是一个大小为 $\lfloor \frac{2^d}{2^a+1} \rfloor$ 的立方集，从而

$$\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_{2^a}, B_{2^a+1}\}$$

是所求的划分。 □

引理 6. *如果存在一个均匀 p-划分能把 Q_d 划分为立方集，那么也存在一个均匀 $2p$-划分能把 Q_{d+1} 划分为立方集。*

证明. 留作练习。 □

Bezrukov [6] 继续用类似的方法证明了对于固定的 p，当 $d \to \infty$ 时，存在一个均匀 p 划分能把 Q_d 划分为渐进最优集。

4 评论

> 一个人总是要不断超越自我，否则还要天堂做什么？(Robert Browning)

当我在写给本章奠定基础的论文 [5] 的时候，我还只是一个初期的研究生。当时的我毫无疑问超越了自我，甚至也许足以让 Browning 也赞同这个说法。很幸运，我并不需要等到上了天堂才有机会弥补我的不足。在我的论文发表两年后，Bernstein 发表了一篇后续论文 [2]，指出我忽视了一种情况（定理 1 论据中的情况 3）并填补了这个空缺。当时 Bernstein 的补丁（引理 3）看似复杂得令人失望，现在，有了将近四十年该教材的使用经验，我了解到 Bernstein 的引理正是当时所需的。它不仅涵盖了遗漏的情况 3，还将情况 1 中含糊不清的论据替换为一个清晰明确的说法，同时还包含着更深刻的见解。

寻找最优均匀 2-划分的问题是 EIP 的一个很吸引人的特例，它在文献中有许多不同的名称，比如“图二分”或者“最小平衡割”。

我们所谓的线长问题出现在许多不同的应用中，因此在文献中也有不同的名称。我们之所以称之为“线长”是因为它既简洁又具有描述性。$\mathbb{Z}_n$ 上线长问题的解由 Lehman [7] 发表于 1963 年。它的应用是显示如何用 n 个不同重量但由均匀的弹簧相连的珠子来构造一个手镯，以便最小化基本频率。Q_d 上线长问题的解的原始应用 [5] 是将数据从集合 $\{1, 2, ..., 2^d\}$ 编码到 0 和 1 的 d 元组，以便在一个有噪声（二元对称）但任意位发生错误概率都较低的信道上传输时最小化平均绝对误差。这类线长问题的原始实例是 4 阶德布鲁因图 [8]，它出现在解码电路的布线图中。最小化线长意味着最小化自感。

Q_d 上的线长问题，即在本章出现的一个应用，实际上曾是我的工作的出发点。我在喷气推进实验室（JPL）的老板 Ed Posner 向我提出了这个问题。然而他所想的应用并不是最小化线长，而是最小化在二元对称的信道上传输线性数据时的平均绝对误差。当时 JPL 的摄像机正在传输第一份月球表面的近拍图像。图像的像素是灰度，有 64 级，从白到黑。它们被编码为 0 和 1 的 6 元组，用以传输到地球，然后再被解码为灰度并重组为图像。问题是由于发送器仅被最低限度供电，在传输过程中一个 0 会偶尔变成一

个 1，或者相反。这最终就会导致一个错误的灰度（取决于编码）并且恶化收到的图像。当时面临的挑战是要证明工程师使用的编码，即字典序编码（编号方式），能最小化平均绝对误差。

作为一名本科生，在解决问题上我深深折服于 G. Polya 的著作 [9]。Polya 的论题是解决问题是可以学习的，尤其是存在有效的策略可以有意识地施加于上。其中之一便是将一个猜想 A 归约为——假定是更简单的——猜想 B 和 C 的结合。我在致力于解决 Posner 的问题上遵循了 Polya 的建议，这就导致产生了第 3.1 小节里的思路。当我看到 Posner 的猜测可归约为字典序编号方式的初始段解决了 EIP 这一猜想，并且这个猜想似乎适用于对 d 进行归纳时，我很自信我有了重大发现。自从认识到 Polya 的方法对我自己如此有帮助，我就一直在向年轻的数学家们推荐它。

能够给出 Q_d 上 EIP 的所有解集是一个偶然的错误。在那时我以为这对于归纳证明的逻辑来说是必要的。现在回想起来，情况显然并非如此，但它确实导致了一个更强有力的结果，使得这个结果能被更加灵活地应用起来。注意 Bezrukov 在边界划分问题上的应用就利用了这种灵活性，然而这是发生在这篇文章 [5] 发表的 33 年后了。

5 译者后记

5.1 错误与指正

在仔细阅读引理 3 的证明以及该证明的来源——Bernstein 的论文 [2] 后，我（译者，下同）惊奇地发现虽然 Bernstein 为 Harper 的定理 1 打上了补丁，然而该补丁依然有纰漏之处：该证明的第 3 部分并未考虑 $t \geq 2^{d-1}$ 的情况，即当 $k < 2^{d-1} < k + t$ 时，

$$E(2^{d-1}) - E(k) > E(t) - E(t - (2^{d-1} - k))$$

仅对 $t < 2^{d-1}$ 成立。下面的补充证明由我的导师给出。

引理 3 情况 3 的补充证明. 如果 $k < 2^{d-1} < k+t$ 且 $t \geq 2^{d-1}$，那么

$$\begin{aligned} E(k+t)-E(k) &= \left[E(k+t)-E(2^{d-1})\right]+\left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\ &= \left[E(k+t-2^{d-1})+k+t-2^{d-1}\right]+\left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\ &= \left[E(k+t-2^{d-1})-E(k)\right]+E(2^{d-1})+k+t-2^{d-1} \\ &> E(t-2^{d-1})+E(2^{d-1})+t-2^{d-1}+k \\ &= E(t)+k > E(t) \end{aligned}$$

□

5.2 练习解答

练习 1. 对于正则图，证明计算

$$\min_{\substack{S\subseteq V\\|S|=k}} |\partial^*(S)|$$

与 *EIP* 等价。

证明. 根据 $\partial^*(S)$ 的定义，我们有

$$|\partial^*(S)| = |\Theta(S)| + |E(S)|$$

所以对于 δ 度正则图，根据引理 1 我们可以得到

$$|\partial^*(S)| = \delta|S| - |E(S)|$$

即对于 $\forall k$，$\min_{|S|=k}|\partial^*(S)| = \delta k - \max_{|S|=k}|E(S)|$。因此，对于正则图，计算

$$\min_{\substack{S\subseteq V\\|S|=k}} |\partial^*(S)|$$

与导出边问题等价，从而与 EIP 等价。 □

练习 2. 找出 $m = |E_{Q_d}|$ 对应的公式。

解答. 将两个 Q_{d-1} 中的对应点一一相连即可构成一个 Q_d，因此有

$$m = |E_{Q_d}| = \begin{cases} 2\left|E_{Q_{d-1}}\right| + 2^{d-1} & d > 0 \\ 0 & d = 0 \end{cases}$$

可以得到

$$m = |E_{Q_d}| = d \cdot 2^{d-1}, d \geq 0$$

练习 3. 证明 d 阶立方的任意 c 阶子立方与 c 阶立方同构。

证明. 根据子立方的定义，d 阶立方的一个 c 阶子立方的顶点集有 $(d-c)$ 个固定坐标的值相同。因此其中的两个顶点是否有边相连仅由剩下的 c 个坐标决定，即两个顶点对应一条边当且仅当剩下的 c 个坐标中正好有一位不相同。令 Q_d^c 表示 d 阶立方的一个 c 阶子立方，我们可以构造一个双射函数 $\phi\colon Q_d^c \to Q_c$，对于 $\forall x \in V_{Q_d^c}$，$\phi(x)$ 是将 x 的 $(d-c)$ 个固定坐标移除后得到的 0 和 1 的 c 元组。显而易见，对于 $\forall x, y \in V_{Q_d^c}$，$x$ 和 y 对应一条边当且仅当 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 对应一条边，即 ϕ 是 Q_d^c 到 Q_c 的一个图同构。 □

练习 4. 计算 d 阶立方有多少个 c 阶子立方？

解答. 首先我们从 d 个坐标中选出 $(d-c)$ 个固定坐标，有 $\binom{d}{d-c}$ 种选法。接下来我们为这 $(d-c)$ 个固定坐标确定一个值（0 或 1），构成一个 c 阶子立方，有 2^{d-c} 种选法。因此一个 d 阶立方有 $\binom{d}{d-c} \cdot 2^{d-c}$ 个 c 阶子立方。

练习 5. 证明一个 c 阶子立方的所有邻居都互不相交。

证明. 令 Q_d^c 表示 d 阶立方的任意一个 c 阶子立方，$Q_d^{c,i}$ 表示 Q_d^c 的一个邻居，它的 $(d-c)$ 个固定坐标中第 i 位与 Q_d^c 不同（$1 \leq i \leq d-c$）。则 Q_d^c，以及 Q_d^c 的任意两个不同邻居 $Q_d^{c,a}$ 和 $Q_d^{c,b}$（不妨假设 $a < b$）的顶点集可表示为

$$\begin{aligned} V_{Q_d^c} &= \{x \in V_{Q_d} \mid x_{p_1} = v_1, x_{p_2} = v_2, \ldots, x_{p_{d-c}} = v_{d-c}\} \\ V_{Q_d^{c,a}} &= \{x \in V_{Q_d} \mid \ldots, x_{p_a} = 1 - v_a, \ldots, x_{p_b} = v_b, \ldots\} \\ V_{Q_d^{c,b}} &= \{x \in V_{Q_d} \mid \ldots, x_{p_a} = v_a, \ldots, x_{p_b} = 1 - v_b, \ldots\} \end{aligned}$$

其中对于 $\forall i \in \{1, 2, \ldots, d-c\}$，$v_i \in \{0, 1\}$，$p_i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ 且互不相同。很显然，若 $\exists x$ 同时满足 $x \in V_{Q_d^{c,a}}$ 和 $x \in V_{Q_d^{c,b}}$，那么 x_{p_a} 和 x_{p_b} 的取值将无法得到满足。因此 $V_{Q_d^{c,a}} \cap V_{Q_d^{c,b}} = \emptyset$。 □

练习 6. 证明一个 c 阶子立方的两个不同邻居（的顶点）之间没有边相连。

证明. Q_d^c、$Q_d^{c,a}$ 和 $Q_d^{c,b}$ 的记号同上一证明。由上一证明可知，对于 $\forall x \in V_{Q_d^{c,a}}$ 和 $\forall y \in V_{Q_d^{c,b}}$，

$$\begin{cases} x_{p_a} \neq y_{p_a} \\ x_{p_b} \neq y_{p_b} \end{cases}$$

因此 x 和 y 之间没有边相连。 □

练习 7. 计算 d 阶立方的一个 c 阶子立方有多少个邻居?

解答. 根据邻居的定义，d 阶立方的一个 c 阶子立方有 $(d-c-1)$ 个邻居。

练习 8. 证明如果 $S \subseteq V_{Q_d}$ 是立方集，那么它的补集 $V_{Q_d}-S$ 也是立方集。

证明. 假设 $V_{Q_d}-S$ 不是立方集，即若把 $V_{Q_d}-S$ 视为互不相交的子立方的并集，则至少存在一个 c_i 阶子立方 $Q_d^{c_i}$ 和一个 c_j 阶子立方 $Q_d^{c_j}$ 满足 $c_i \leq c_j$，且 $Q_d^{c_i}$ 不处在 $Q_d^{c_j}$ 的任意邻居中。那么 S 中必然存在一个 c_j 阶子立方 $Q_d^{c_j}{'}$，它是 $Q_d^{c_j}$ 的邻居，但不为 $Q_d^{c_i}$ 提供邻居。如果我们把 $Q_d^{c_i}$ 归入 S，把 $Q_d^{c_j}{'}$ 中与 $Q_d^{c_i}$ 对应的顶点归入 $V_{Q_d}-S$，那么 $Q_d^{c_i}$ 将为 S 提供更多的内部边，这便与 S 是立方集相矛盾。因此 $V_{Q_d}-S$ 也是立方集。 □

练习 9. 证明任意两个 k-立方集都同构，即存在一个 d 阶立方的自同构能把一个（k-立方集）映射到另一个。

证明. 令 S_1, S_2 表示 d 阶立方的任意两个 k-立方集，$|S_1| = |S_2| = k$。根据练习 8，$V_{Q_d} - S_1$ 和 $V_{Q_d} - S_2$ 是 $(2^d - k)$-立方集。我们把 S_1, S_2 和 $V_{Q_d} - S_1, V_{Q_d} - S_2$ 都表示成互不相交的子立方的并集

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{K} V_{Q_d^{c_i,1}}$$

$$S_2 = \bigcup_{i=1}^{K} V_{Q_d^{c_i,2}}$$

$$V_{Q_d} - S_1 = \bigcup_{i=1}^{K'} V_{Q_d^{c_i,3}}$$

$$V_{Q_d} - S_2 = \bigcup_{i=1}^{K'} V_{Q_d^{c_i,4}}$$

由于 k 和 2^d-k 的二进制表示形式都是唯一的，我们可以很容易地知道 S_1 中的子立方和 S_2 中的子立方一一对应，$V_{Q_d}-S_1$ 和 $V_{Q_d}-S_2$ 同理。

接下来我们构造一个映射 $\phi\colon Q_d \to Q_d$，满足

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,K\}, \phi(Q_d^{c_i,1}) = Q_d^{c_i,2}$$
$$\forall i \in \{1,2,\ldots,K'\}, \phi(Q_d^{c_i,3}) = Q_d^{c_i,4}$$

显而易见，ϕ 是一个双射函数，因此是一个 Q_d 上的自同构。 □

练习 10. *完成引理 3 情况 3 的证明（右边的不等式）。*

证明. 同样分两种情况：

(1) 当 $t < 2^{d-1}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
E(k+t)-E(k) &= \left[E(k+t)-E(2^{d-1})\right] + \left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\
&= \left[E(k+t-2^{d-1})+k+t-2^{d-1}\right] + \left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\
&= \left[E(k+t-2^{d-1})-E(k)\right] + E(2^{d-1})+k+t-2^{d-1} \\
&< E(2^{d-1})-E(2^{d-1}-t)+t+k-2^{d-1} \\
&= E(2^d)-E(2^d-t)+k-2^{d-1} \\
&< E(2^d)-E(2^d-t)
\end{aligned}$$

(2) 当 $t \geq 2^{d-1}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
E(k+t)-E(k) &= \left[E(k+t)-E(2^{d-1})\right] + \left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\
&= \left[E(k+t-2^{d-1})+k+t-2^{d-1}\right] + \left[E(2^{d-1})-E(k)\right] \\
&= \left[E(k+t-2^{d-1})-E(k)\right] + E(2^{d-1})+k+t-2^{d-1} \\
&< E(2^{d-1})-E(2^d-t)+E(2^{d-1})+k+t-2^{d-1} \\
&= 2E(2^{d-1})+k+t-2^{d-1}-E(2^d-t) \\
&< 2E(2^{d-1})+2^{d-1}-E(2^d-t) \\
&= E(2^d)-E(2^d-t)
\end{aligned}$$

□

练习 11. 假设线形机箱实际上是一条实线，上面有 n 个位置 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 用来放置元件。布局 η 将顶点 $v \in V$ 放置在位置 $s_{\eta(v)}$ 上，证明 η 有总线长为

$$wl(\eta) = \sum_{k=0}^{n}(s_{k+1} - s_k)|\Theta(S_k(\eta))|$$

证明. 与引理 4 类似，令

$$\chi(e,k) = \begin{cases} s_{k+1} - s_k & \text{如果 } \partial(e) = \{v,w\}, \eta(v) \le k < \eta(w) \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} wl(\eta) &= \sum_{\substack{e\in E \\ \partial(e)=\{v,w\}}} |\eta(v) - \eta(w)| = \sum_{e\in E}\sum_{k=0}^{n}\chi(e,k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{e\in E}\chi(e,k) = \sum_{k=0}^{n}(s_{k+1} - s_k)|\Theta(S_k(\eta))| \end{aligned}$$

□

练习 12. 证明 $wl(Q_d) = 2^{d-1}(2^d - 1)$。

证明. 我们对 d 进行归纳。

(1) 首先我们已经有 $wl(Q_2) = 6 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$ 满足该等式。

(2) 现在我们假设 $d - 1 \ge 2$ 时该等式成立，即 $wl(Q_{d-1}) = 2^{d-2}(2^{d-1} - 1)$。根据推论 4，我们不妨采用字典序编号方式 lex。将 Q_{d-1} 扩展至 Q_d 很简单，我们只需要将另一个 Q_{d-1} 中的顶点按照相同的顺序依次编号为 $2^{d-1} + 1, \ldots, 2^d$，再把两个 Q_{d-1} 的对应顶点用边相连，即 $lex^{-1}(1)$ 对应 $lex^{-1}(2^{d-1} + 1)$，……，$lex^{-1}(2^{d-1})$ 对应 $lex^{-1}(2^d)$。因此我们有

$$\begin{aligned} wl(Q_d) &= 2wl(Q_{d-1}) + \left(2^{d-1} + 1 - 1\right) + \cdots + \left(2^d - 2^{d-1}\right) \\ &= 2wl(Q_{d-1}) + 2^{d-1} \cdot 2^{d-1} \\ &= 2^{d-1}(2^{d-1} - 1) + 2^{d-1} \cdot 2^{d-1} \\ &= 2^{d-1}(2^d - 1) \end{aligned}$$

$\square$

练习 13. 对于练习 *11* 中的更一般的线形机箱，证明 lex 同时也是它的 Q_d 上线长问题的一个解。

证明. 对于任意的图 G，

$$\begin{aligned} wl(G) = \min_{\eta} wl(\eta) &= \min_{\eta} \sum_{k=0}^{n} (s_{k+1} - s_k)|\Theta(S_k(\eta))| \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \min_{\eta} (s_{k+1} - s_k)|\Theta(S_k(\eta))| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (s_{k+1} - s_k) \min_{\eta} |\Theta(S_k(\eta))| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (s_{k+1} - s_k) \min_{|S|=k} |\Theta(S)| \end{aligned}$$

根据推论 4，对于 $S \subseteq V_{Q_d}$ 和 $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$，都有

$$\min_{|S|=k} |\Theta(S)| = |\Theta(S_k(lex))|$$

因此我们有

$$wl(Q_d) \geq \sum_{k=0}^{n} (s_{k+1} - s_k)|\Theta(S_k(lex))|$$

即 lex 是该更一般的线形机箱的 Q_d 上线长问题的一个解。 $\square$

练习 14. 找出 $\underline{DB_4}$ 上所有的 *EIP* 的解集，其中 $k \leq 8$（无需证明）。

解答. 当 $k = 0$ 时，解集为 $\emptyset$。下面讨论 $k > 0$ 的情况，顶点均用 4 元组的十进制来表示。

(1) 当 $k = 1$ 时，解集有

$$\{0\},\{15\}$$

(2) 当 $k = 2$ 时，解集有

$$\{0, 1\},\{14, 15\},$$
$$\{0, 8\},\{7, 15\}$$

(3) 当 $k=3$ 时，解集有

$$\{0,1,8\},\{7,14,15\}$$

(4) 当 $k=4$ 时，解集有

$$\{0,1,2,8\},\{7,13,14,15\},$$
$$\{0,1,3,8\},\{7,12,14,15\},$$
$$\{0,1,4,8\},\{7,11,14,15\},$$
$$\{0,1,8,12\},\{3,7,14,15\}$$

(5) 当 $k=5$ 时，解集有

$$\{0,1,2,4,8\},\{7,11,13,14,15\}$$

(6) 当 $k=6$ 时，解集有

$$\{0,1,2,4,8,9\},\{6,7,11,13,14,15\}$$

(7) 当 $k=7$ 时，解集有

$$\{0,1,2,3,4,8,9\},\{6,7,11,12,13,14,15\},$$
$$\{0,1,2,4,8,9,12\},\{3,6,7,11,13,14,15\}$$

(8) 当 $k=8$ 时，解集有

$$\{0,1,2,3,4,8,9,12\},\{3,6,7,11,12,13,14,15\}$$

练习 15. 证明 $\forall d>1$，都存在一个均匀 3-划分，能把 Q_d 划分为立方集。

证明. 与定理 3 相同。 □

练习 16. 给出引理 *6* 的证明。

证明. 给定 Q_d 的一个均匀 p-划分 $\pi=\{B_1,B_2,\dots,B_p\}$，我们可以轻松地构造出一个 Q_{d+1} 的均匀 $2p$-划分 $\pi'=\{B_1,B_2,\dots,B_p,B_{p+1},\dots,B_{2p}\}$，其中 $B_{p+1},\dots,B_{2p}$ 分别是 $B_1,\dots,B_p$ 的拷贝。 □

参考文献

[1] W. H. Kautz, *Optimized data encoding for digital computers*, Convention Record I. R. E., 1954, pp. 47-57

[2] A. J. Bernstein, *Maximally connected arrays on the n-cube*, SIAM J. Appl. Math., vol. 15, pp. 1485–1489, 1967

[3] K. Steiglitz, A. J. Bernstein, *Optimal binary coding of ordered numbers*, J. SIAM, vol. 13, pp. 441-443, 1965

[4] S. W. Golomb, *Shift Register Sequences*, Aegean Park Press, 1982

[5] L. H. Harper, *Optimal assignments of numbers to vertices*, J. SIAM, vol. 12, pp. 131-135, 1964

[6] S. L. Bezrukov, *On k-partitioning the n-cube*, Proc. International Conference on Graph Theory Concepts in Computer Science, Como, Italy, 1997

[7] A. Lehman, *A result on rearrangements*, Israel J. Math, vol. 1, pp. 22-28, 1963

[8] L. H. Harper, *Chassis layout and isoperimetric problems*, Jet Propulsion Lab. SPS, vol. 11, pp. 37-66, 1970

[9] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 vols.), Princeton University Press, 1954