homework 7

刘若涵 2020011126

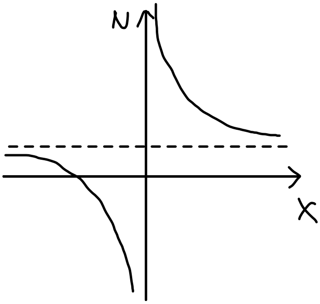
7.3 (a) 由系统的单值奇函数特性，$A_1(X)=0$，只需计算 $B_1(X)$

$0<\omega t<\pi$ 时，$y(t)=kx(t)+M=kX\sin\omega t+M$

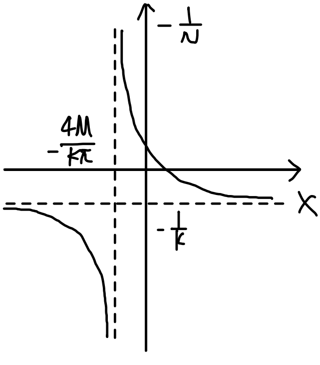
$\pi<\omega t<2\pi$ 时，$y(t)=kX\sin\omega t-M$

$$B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t\,d\omega t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(kX\sin\omega t+M)\sin\omega t\,d\omega t+\frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}(kX\sin\omega t-M)\sin\omega t\,d\omega t$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}kX\sin^2\omega t\,d\omega t+\frac{2}{\pi}M\int_0^{\pi}\sin\omega t\,d\omega t$$
$$=\frac{2}{\pi}kX\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\omega t}{2}d\omega t+\frac{4M}{\pi}$$
$$=kX+\frac{4M}{\pi}$$

$$N(X)=\frac{B(X)}{X}=k+\frac{4M}{\pi X}$$



$$-\frac{1}{N(X)}=\frac{-\pi X}{k\pi X+4M}$$



(b) 非线性函数为单值奇函数 $A_1(X)=0$

(1) $\Delta \geq 1$ 时 $N(X)=0$

(2) $0 \leq \Delta < 1$

$\omega t \in [0, \arcsin\frac{\Delta}{X}]$ 时，$y(t)=0$

$\omega t \in [\arcsin\frac{\Delta}{X}, \pi - \arcsin\frac{\Delta}{X}]$ 时，$y(t)=kX\sin\omega t$

$\omega t \in [\pi - \arcsin\frac{\Delta}{X}, \pi]$ 时，$y(t)=0$

$\omega t \in [\pi, 2\pi]$ 时，与 $[0,\pi]$ 对称可求

$$B_1(X) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t \, d\omega t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\arcsin\frac{\Delta}{X}}^{\pi-\arcsin\frac{\Delta}{X}} kX\sin^2\omega t \, d\omega t - \frac{1}{\pi}\int_{\pi+\arcsin\frac{\Delta}{X}}^{2\pi-\arcsin\frac{\Delta}{X}} kX\sin\omega t \, d\omega t$$

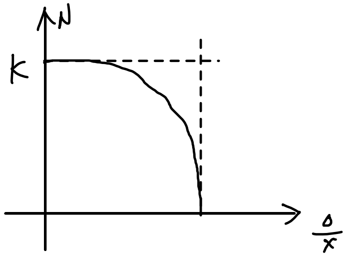
$$= \frac{kX}{\pi}\left[\pi - 2\arcsin\frac{\Delta}{X} + \sin\left(2\arcsin\frac{\Delta}{X}\right)\right]$$

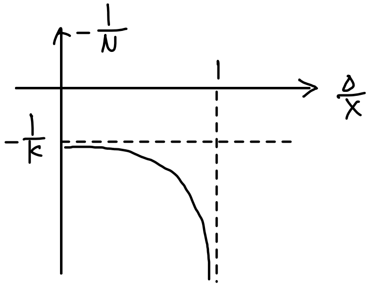
$$= \frac{kX}{\pi}\left(\pi - 2\arcsin\frac{\Delta}{X} + 2\frac{\Delta}{X}\frac{\sqrt{X^2-\Delta^2}}{X}\right)$$

$$= kX - \frac{2kX}{\pi}\arcsin\frac{\Delta}{X} + \frac{2k\Delta}{\pi X}\sqrt{X^2-\Delta^2}$$

$$N(X) = k - \frac{2k}{\pi}\arcsin\frac{\Delta}{X} + \frac{2k}{\pi}\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

以 $\frac{\Delta}{X}$ 为自变量作图如下.





7.5 (1) 求非线性系统描述函数 $N(X)$.

非线性函数为滞环, $N(X)$ 为半波对称

$\omega t \in [0, \arcsin\frac{0.2}{X}]$ $\quad y(t) = -1$

$\omega t \in [\arcsin\frac{0.2}{X}, \pi + \arcsin\frac{0.2}{X}]$ $\quad y(t) = 1$

$\omega t \in [\pi + \arcsin\frac{0.2}{X}, 2\pi]$ $\quad y(t) = -1$

$$A_1(X) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos\omega t \, d\omega t$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\arcsin\frac{0.2}{X}} \cos\omega t \, d\omega t + \int_{\arcsin\frac{0.2}{X}}^{\pi} \cos\omega t \, d\omega t\right.$$

$$= -\frac{4}{5\pi X}$$

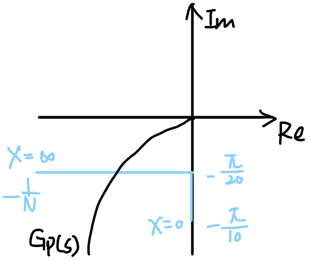
$$B_1(X) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t \, d\omega t$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\arcsin\frac{0.2}{X}} \sin\omega t \, d\omega t + \int_{\arcsin\frac{0.2}{X}}^{\pi} \sin\omega t \, d\omega t\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sqrt{1-\frac{0.04}{X^2}}$$

$$N(X) = \frac{B_1(X)}{X} + j\frac{A_1(X)}{X} = \frac{4}{\pi X}\sqrt{1-\frac{0.04}{X^2}} - j\frac{4}{5\pi X^2}$$

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi}{4}\sqrt{X^2-0.04} - j\frac{\pi}{20}$$



$G_p(s)$ 与 $-\frac{1}{N}$ 有交点，系统不稳定

会形成稳定的自持振荡

(2) $$\mathrm{Im}[G_p(j\omega)] = \mathrm{Im}\left[\frac{10}{j\omega(j\omega+1)}\right] = -\frac{10}{\omega^3+\omega} = -\frac{\pi}{20}$$

$$\Rightarrow \omega = 3.909$$

此时 $$\mathrm{Re}[G_p(j\omega)] = \mathrm{Re}\left[\frac{10}{j3.909(j3.909+1)}\right] = -\frac{10}{3.909^2+1}$$

$$= -0.614 = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{N}\right)$$

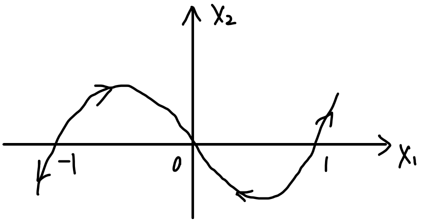
$$\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{N(X)}\right] = -\frac{\pi}{4}\sqrt{X^2-0.04} = -0.614$$

$$\Rightarrow X = 0.807$$

7.13 (1) $x_1 = x \quad x_2 = \dot{x}$ 相轨迹为 $x_2 = -x_1 + x_1^3$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 = -x_1 + x_1^3 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(-x_1 + x_1^3) = -x_2 + 3x_1^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 奇点为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(-1,0)$



由相轨迹图可知

若初始状态 $x_0 < -1$ 则 $t \to \infty$ 时 $x \to -\infty$ 不稳定

若 $-1 < x_0 < 1$ 则 $t \to \infty$ 时 $x \to 0$ 稳定

若 $x_0 > 1$ 则 $t \to \infty$ 时 $x \to +\infty$ 不稳定

$x_0 = \pm 1$ 时 临界稳定

(2) $\frac{dx}{dt} = -x + x^3 \Rightarrow x = 0$ 或 ± 1 或 $\pm\sqrt{\frac{1}{1-e^{2t+C(x_0)}}}$

故 $x=0$ $x=\pm 1$ 是平衡点，与相平面分析一致

对于 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{1-e^{2t+C(x_0)}}}$

① $x_0 > 1$ 时 $C<0$ 则 $\exists t>0$ s.t. $x \to \infty$ 即系统不稳定

② $x_0 < -1$ 时 $C<0$ 则 $\exists t>0$ s.t. $x \to \infty$ 即系统不稳定

③ $-1 < x_0 < 1$ 时 $x \to 0$ 系统稳定

综上，微分方程时间解结果与相平面分析相同

7.18 (1) $e=-c$ $c=\frac{5}{s^2}(e-m)$ 即 $\ddot{e}+5e-5m=0$

其中 $m=\begin{cases}1 & \dot{c}>1\\ \dot{c} & -1<\dot{c}<1\\ -1 & \dot{c}<-1\end{cases}$

故有 $\begin{cases}\ddot{e}+5e-5=0 & \dot{e}<-1\\ \ddot{e}+5\dot{e}+5e=0 & -1<\dot{e}<1\\ \ddot{e}+5e+5=0 & \dot{e}>1\end{cases}$

① $\dot{e}<-1$ 时 $\frac{de}{dt}=\dot{e}$ $\frac{d\dot{e}}{dt}=5-5e$ $\Rightarrow$ $\frac{d\dot{e}}{de}=\frac{5-5e}{\dot{e}}$

$\dot{e}d\dot{e}+5(e-1)de=0$

积分得 $\frac{\dot{e}^2}{10}+\frac{(e-1)^2}{2}=C_1$ C_1 与 $e,\dot{e}$ 的初值有关

故在 $e<-1$ 区域相轨迹为椭圆的一部分

② $\dot{e}>1$ 时 $\dot{e}d\dot{e}+5(e+1)de=0$

$\Rightarrow$ $\frac{\dot{e}^2}{10}+\frac{(e+1)^2}{2}=C_2$

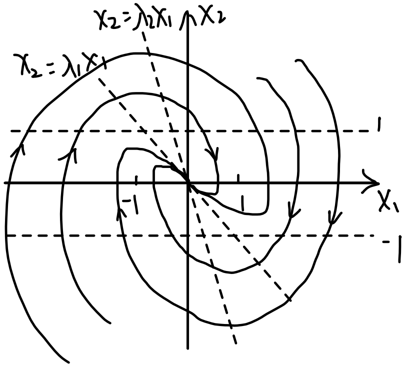
③ $-1<\dot{e}<1$ 时 $x_1=e$, $x_2=\dot{e}$

$f_1=x_2$ $f_2=-5x_1-5x_2$ 奇点为 $(0,0)$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -5\end{pmatrix}$$

$a=b=5$ $\lambda^2+5\lambda+5$ $\Rightarrow$ $\lambda_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}<0$

故 $(0,0)$ 是稳定节点



(2) $r=vt$ 时 $\dot{e}=v-\dot{c}$

又由(1)得

$$\begin{cases} \ddot{e}+5e-5=0 & \dot{e}<v-1 \\ \ddot{e}+5\dot{e}+5e-5v=0 & v-1<\dot{e}<v+1 \\ \ddot{e}+5e+5=0 & \dot{e}>v+1 \end{cases}$$

① 当 $\dot{e}<v-1$ 时 $\frac{(e-1)^2}{2}+\frac{\dot{e}^2}{10}=C_1'$

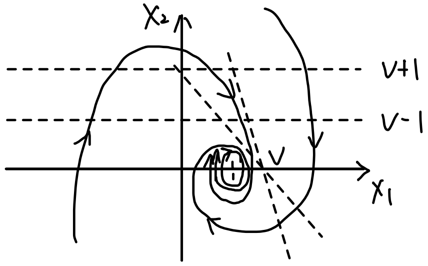
② 当 $\dot{e}>v+1$ 时 $\frac{(e+1)^2}{2}+\frac{\dot{e}^2}{10}=C_2'$

③ $v-1<\dot{e}<v+1$ 时

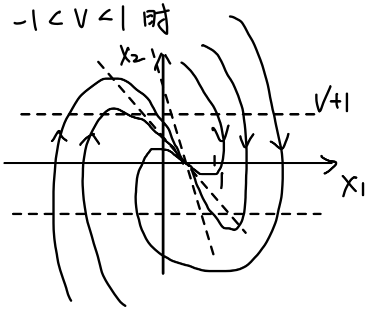
$f_1=x_2$ $f_2=-5x_1-5x_2+5v$ 奇点 $(v,0)$

特征方程同(1) $(v,0)$为稳定节点 $\lambda_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

① $v>1$ 时 $v-1>0$



② $-1 < V < 1$ 时



③ $V < -1$ 时