# 清华大学本科生考试试题专用纸

**期中考试课程　随机数学与统计　（A 卷）　2021 年 4 月 18 日**

**学号：__________　姓名：__________　班级：__________**

一．（15 分）设 $A$ 和 $B$ 相互独立，$P(A^cB^c)=\dfrac{1}{9}$ 且 $P(AB^c)=P(A^cB)$；令

$$X=\begin{cases}1, & \text{如果 事件}A\text{与}B\text{同时发生；}\\ -1, & \text{其他.}\end{cases},$$

$P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$.

（1） 试求概率 $P(A\mid X=1)$ 与 $P(A\mid X=-1)$；

$=1$　$=\frac{2}{5}$

（2） 试求 $EX$ 与 $DX$.

$-\frac{1}{9}$　$\frac{80}{81}$

二．（15 分）设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立同分布，且

$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p, (0<p<1)$，记 $Z=\begin{cases}1, & X+Y=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$2pq$　$2pq(1-2pq)$

（1） 求 $Z$ 的概率分布,并求 $EZ$ 与 $DZ$；

$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-2pq & 2pq\end{pmatrix}$

（2） 求 $X,Z$ 的相关系数 $r_{X,Z}$；$r_{X,Z}=\dfrac{1-2p}{\sqrt{2(1-2pq)}}$

（3） 问 $p$ 取何值时，$X$ 与 $Z$ 相互独立，说明你的理由。

| X\Z | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $q^2$ | $pq$ |
| 1 | $p^2$ | $pq$ |

$\frac{1}{2}$.　两点分布，独立=不相关.

三．（20 分）连续地做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果。已知当第 $k$ 次试验成功时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 $\dfrac{1}{2}$；当第 $k$ 次试验失败时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 $\dfrac{3}{4}$。如果第一次试验成功的概率为 $\dfrac{1}{2}$，

$p_k=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_{k-1}$　$k\geq 2$.

（1）试写出第 $n$ 次试验成功的概率 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 所满足的递推表达式；$p_1=\frac{1}{2}$.

（2）若记 $X$ 为首次获得成功时所需的试验次数，求 $X$ 的概率分布；

$P(X=1)=\frac{1}{2}$

$P(X=k)=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}$　$k\geq 2$.

（3）求 $X$ 的矩母函数 $M_X(u)$，并求 $EX$。

$\frac{1}{2}e^u+\dfrac{3e^{2u}}{8-2e^u}$.　$EX=M_X'(0)=\frac{5}{3}$.

四.（15 分） 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，满足 $P(X_1=2)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$，

记 $A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ , $n\geq 1$ （假定 $A_0=0$），

（1） 试求 $E(A_n)$ 与 $D(A_n)$； $EX_i=\frac{1}{2}$. $DX_i=\frac{9}{4}$ . $E(A_n)=\frac{1}{2}$. $D(A_n)=\frac{9}{4n}$

（2） 试求概率 $P(A_3=1)$； $P(A_n=k)$? 非标准R.W. $X_i \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}$ . $Y_i=\frac{X_i+1}{3} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$

$\frac{3}{8}$

$A_n=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}x_i=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}(3Y_i-1)=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{\infty}Y_i-1$.

（3） 试求 $Cov(A_k,A_m)$（其中 $m>k>0$）。

$P(A_n=k)=$ . .

独立增量过程，

协方差取小的方差

$\frac{9}{4m}$

五.（20 分）

（1）$X_i\sim B(n_i,p)$ $(i=1,2)$ 相互独立，问 $X_1\,|\,X_1+X_2=n$（$0\leq n\leq n_1+n_2$）服从什么分布，并求 $E(X_1\,|\,X_1+X_2)$；

$\frac{P(X_1=k,X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=\frac{C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}\sim Hge$.

$E(X_1|X_1+X_2=n)=n\frac{n_1}{n_1+n_2}$

$E(X_1|X_1+X_2)=\frac{n_1}{n_1+n_2}(X_1+X_2)$

（2）$X_i\sim Ge(p)$ $(i=1,2)$ 相互独立，问 $X_1\,|\,X_1+X_2=n$ $(n\geq 2)$ 服从什么分布，并求 $E(X_1\,|\,X_1+X_2)$。 $\frac{P(X_1=k|X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=\frac{1}{n-1}$. 均匀分布.

六.（15 分）某商场经过调研，发现男女顾客到达商场的规律分别服从每分钟 1 人和 2 人的 Poisson 过程，且男女顾客的到达过程相互独立，试求（单位为分钟）：

（1）已知在 $(0,t]$ 时间内有 4 人到达商场的条件下，在 $(0,t]$ 时间内到达的男顾客人数的期望；

$X_t|X_t+Y_t=n\sim B(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$. $\therefore E(X_t|X_t+Y_t=4)=\frac{4}{3}$. $n\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

（2）已知在 $(0,t]$ 时间内有 4 人到达商场的条件下，在 $(0,\frac{1}{2}t]$ 时间内恰有 3 位女顾客到达的概率。