随机数学与统计期中考试题（时长 90 分钟）

一. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件放入乙箱后，求：

（1）乙箱中次品件数 X 的数学期望；

（2）从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

二. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求：（1）X,Y 是否相互独立？为什么？

（2）X,Y 的相关系数 $r_{X,Y}$，以及事件 A,B 的相关系数 $r_{A,B}$

三. （1）设 X,Y,α 相互独立，且 $X,Y\sim P(\lambda),\alpha\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ q & p\end{pmatrix}$，令 $Z=\alpha X+Y$，求 Z 的分布律。

（2）设 $X_i\sim Ge(p),i=1,2$ 相互独立，求已知 $X_1+X_2=n$ 的条件下，X_1 的分布律。

四. 设 $X_i\overset{i.i.d}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1\\ p & q\end{pmatrix},S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,S_0=0$

（1） 试求 $P(S_4=2)$；

（2） $\{S_n:n\geq 0\}$ 是否为时齐的独立增量过程？并求 $Cov(S_4,S_{2020})$。

五.设 $\{N_t:t\geq 0\}$ 是强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，$\{\sum_{i=1}^{N_t}X_i:t\geq 0\}$ 为其对应的复合 Poisson 过程，其中 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布满足 $P(X_1=1)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$，

（1）试求 $P(N_5=5|N_1=1,N_2=2,N_3=3)$；

（2）记 $\dfrac{\sum_{i=1}^{N_t}X_i}{\sqrt{\lambda t}}$ 的矩母函数为 $M(u)$，试证：$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}M(u)=e^{\frac{u^2}{2}}$。

附加题：设 $X_0,X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，且 $P(X_i=k)=p_k,k=1,2,\cdots,m.$ 记 $N=\min\{n>0,X_n=X_0\}$，试求 EN。