数值分析与算法

大作业

自 05 2020011126 刘若涵

1 级数：求解巴塞尔问题

1.1 算法原理

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(8)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}$$

设计任意精度下级数求和的求解算法，再根据 $\pi=[6\,\zeta(2)]^{\frac{1}{2}}$ 或 $\pi=[9450\,\zeta(8)]^{\frac{1}{8}}$，即可实现以任意精度求解 π 的值。由于 $\zeta(2)$ 收敛较慢，我采用 $\zeta(8)$ 进行精确到 20 位小数的 π 的求解。

下面给出 $\zeta(2)$ 及 $\zeta(8)$ 的理论值求解过程。

$\frac{\sin x}{x}$ 的无穷级数展开为：

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots \qquad (1)$$

$\frac{\sin x}{x}$ 的无穷乘积展开为：

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots \qquad (2)$$

对比（1）、（2）式中二次项系数可得

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{2^2\pi^2}-\frac{1}{3^2\pi^2}-\cdots$$

则

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

对比（1）、（2）式中八次项系数可得

$$\frac{4\pi^8}{9!}=\frac{1}{1^2}\left\{\frac{\pi^6}{7!}-\frac{1}{1^2}\left[\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{1^2}\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{1^2}\right)\right]\right\}+\frac{1}{2^2}\left\{\frac{\pi^6}{7!}-\frac{1}{2^2}\left[\frac{\pi^4}{5!}-\frac{1}{2^2}\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{2^2}\right)\right]\right\}+\cdots$$

则

$$\zeta(8)=\frac{\pi^2}{3!}\zeta(6)-\frac{\pi^4}{5!}\zeta(4)+\frac{\pi^6}{7!}\zeta(2)-\frac{4\pi^8}{9!}=\frac{\pi^8}{9450}$$

1.2 误差分析

首先进行由 $\zeta(8)$ 求解 π 过程的误差分析。

根据公式

$$\pi = [9450\,\zeta(8)]^{\frac{1}{8}}$$

可得

$$\Delta\pi \le \frac{9450}{8[9450\,\zeta(8)]^{\frac{7}{8}}} \cdot \Delta\zeta(8) \le \frac{(9450)^{\frac{1}{8}}}{8} \cdot \Delta\zeta(8) < \Delta\zeta(8)$$

因此若想以 d 的精度求解 π，只需以 d 的精度求解 $\zeta(8)$ 即可。

由于后续题目的需要，在此普适地进行求解 $\zeta(x)$ 过程中的误差分析。

方法误差来源于对无穷级数的近似，假设以前 k 项的和近似无穷项的和，则方法误差为：

$$\Delta = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \le \int_{k+1}^{\infty} \frac{1}{(t-1)^x} dt = \left.\frac{(t-1)^{1-x}}{1-x}\right|_{t=k+1}^{\infty} = \frac{k^{1-x}}{x-1}\ (x > 1)$$

假设每步计算存储精度为 m，则舍入误差为：

$$\delta \le k \times \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$

本题中 x = 8，将总误差 $\frac{1}{2} \times 10^{-d}$ 平均分配到方法误差和舍入误差上。

$$\Delta \le \frac{k^{-7}}{7} \le \frac{1}{4} \times 10^{-d}$$

推出

$$k \ge (\frac{4}{7} \times 10^{d})^{\frac{1}{7}}$$

取 $k = \left\lceil (\frac{4}{7} \times 10^{d})^{\frac{1}{7}} \right\rceil$，代入

$$\delta \le k \times \frac{1}{2} \times 10^{-m} \le \frac{1}{4} \times 10^{-d}$$

推出

$$m \ge \log_{10} 2k + d$$

取 $m = \lceil \log_{10} 2k + d \rceil$。

1.3 求解结果

运行程序 code1.py，输入求解精度为 20，运行程序可得：

迭代次数 k = 665，存储精度 m = 24。

求得 $\zeta(8)$ = 1.00407735619794433938，π = 3.14159265358979323846。

2 方程求根：求解 ζ(x)

2.1 算法原理

给定任意 a > 1，以任意精度求解

$$\zeta(x)-a=0$$

由于

$$\frac{1}{x-1}=\int_1^\infty\frac{1}{t^x}dt\le\zeta(x)=\sum_{n=1}^\infty n^{-x}\le 1+\int_2^\infty\frac{1}{(t-1)^x}dt=\frac{x}{x-1}$$

则方程的根在 $[\frac{a+1}{a},\frac{a}{a-1}]$ 区间内。为加速计算，利用二分法将区间进一步缩小为 $[u,v]$，使得 $v-u\le 0.01$。

使用牛顿法在 $[u,v]$ 区间上进行方程求根, 首先验证收敛性。

令

$$f(x)=\zeta(x)-a=\sum_{n=1}^\infty n^{-x}-a$$

则

$$f(x)\in C^{(2)}[u,v]$$

$\forall x\in[u,v]$，有

$$f'(x)=\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^\infty n^{-x}ln\, n<0$$

$$f''(x)=\zeta''(x)=\sum_{n=1}^\infty n^{-x}ln^2\, n>0$$

$f(x)$ 单调递减，有 $f(u)>0$，$f(v)<0$。

选取初值 $x_0=u$，有 $f(u)f''(u)>0$。

综上，牛顿法收敛。

令

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\zeta(x)-a}{\zeta'(x)}$$

迭代公式为

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\zeta(x_n)-a}{\zeta'(x_n)}$$

以任意精度求解 $\zeta(x)$ 的方法我们已经在第一题中分析过，这里还需要实现一人一精度求取 $\zeta'(x)$、$\zeta''(x)$。

2.2 误差分析

2.2.1 ζ'(x) 误差分析

设 $\zeta'(x)$ 的求解精度为 d。

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} ln\, n$$

容易证明

$$ln\, n \le \frac{4}{x-1} \cdot n^{\frac{x-1}{10}}$$

假设以前 k 项的和近似无穷项的和，方法误差为：

$$|\Delta| = \left|-\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^x}\right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{4}{x-1} \cdot \frac{n^{\frac{x-1}{10}}}{n^x} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{4}{x-1} \cdot n^{\frac{-9x-1}{10}}$$

$$\le \frac{4}{x-1} \int_{k+1}^{\infty} (t-1)^{\frac{-9x-1}{10}} dt = \frac{4}{x-1} \cdot \left.\frac{(t-1)^{\frac{-9x+9}{10}}}{\frac{-9x+9}{10}}\right|_{t=k+1}^{\infty} = \frac{40}{x-1} \cdot \frac{k^{\frac{-9x+9}{10}}}{9x-9} \quad (x>1)$$

分配误差 $\frac{1}{4} \times 10^{-d}$，取 $k = \left\lceil \left(\frac{160}{(x-1)(9x-9)} \times 10^d\right)^{\frac{10}{9x-9}} \right\rceil$

假设每步计算存储精度为 m，则舍入误差为：

$$\delta \le k \times \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$

分配误差 $\frac{1}{4} \times 10^{-d}$，取 $m = \lceil \log_{10} 2k + d \rceil$。

2.2.2 ζ''(x) 误差分析

设 $\zeta''(x)$ 的求解精度为 d。

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} ln^2\, n$$

容易证明

$$ln\, n \le \frac{8}{x-1} \cdot n^{\frac{x-1}{20}}$$

假设以前 k 项的和近似无穷项的和，方法误差为：

$$\Delta = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{ln^2\, n}{n^x} \le \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{8}{x-1} \cdot n^{\frac{x-1}{20}}\right)^2 \frac{1}{n^x} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{64}{(x-1)^2} \cdot n^{\frac{-9x-1}{10}}$$

$$\le \frac{64}{(x-1)^2} \int_{k+1}^{\infty} (t-1)^{\frac{-9x-1}{10}} dt = \frac{64}{(x-1)^2} \cdot \left.\frac{(t-1)^{\frac{-9x+9}{10}}}{\frac{-9x+9}{10}}\right|_{t=k+1}^{\infty} = \frac{640}{(x-1)^2} \cdot \frac{k^{\frac{-9x+9}{10}}}{9x-9} \quad (x>1)$$

分配误差 $\frac{1}{4} \times 10^{-d}$，取 $k = \left\lceil \left(\frac{2560}{(x-1)^2(9x-9)} \times 10^d\right)^{\frac{10}{9x-9}} \right\rceil$

假设每步计算存储精度为 m，则舍入误差为：

$$\delta \le k \times \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$

分配误差 $\frac{1}{4} \times 10^{-d}$，取 $m = \lceil \log_{10} 2k + d \rceil$。

2.2.3 牛顿法误差分析

设方程根的真实值为 x^*，求解精度为 d。

由于 $\zeta(x)$、$\zeta'(x)$、$\zeta''(x)$ 不能精确求取，用级数法以 value_d 精度求解存在 $\pm\frac{1}{2}\times 10^{-\text{value\_d}}$ 的误差，因此进行牛顿法误差分析时还需要考虑 $\zeta(x)$、$\zeta'(x)$、$\zeta''(x)$ 不精确所带来的影响。由于 $f(x)$、$|f'(x)|$、 $|f''(x)|$ 在 $[u,v]$ 区间上单调递减，这里定义在 value_d 精度下

$$|fmax(\text{value\_d})| = max(|\zeta(u)-a|+\frac{1}{2}\times 10^{-\text{value\_d}}, |\zeta(v)-a|+\frac{1}{2}\times 10^{-\text{value\_d}}])$$

$$|dfmax(\text{value\_d})| = |\zeta'(u)|+\frac{1}{2}\times 10^{-\text{value\_d}}$$

$$|dfmin(\text{value\_d})| = |\zeta'(v)|-\frac{1}{2}\times 10^{-\text{value\_d}}$$

$$|ddfmax(\text{value\_d})| = |\zeta''(u)|+\frac{1}{2}\times 10^{-\text{value\_d}}$$

首先进行方法误差分析：

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\max_{x\in[u,v]} |\varphi'(x)| \le \frac{max(|f(u)|,|f(v)|)\cdot|f''(u)|}{|f'(v)|^2} = L$$

这里 L 的求解不需要十分精确，在不超过 1 的情况下往大放即可。不妨以精度 d 求解 $\zeta(x)$、$\zeta'(x)$、$\zeta''(x)$，取

$$L = \frac{|fmax(\text{d})|\cdot|ddfmax(\text{d})|}{|dfmin(\text{d})|^2}$$

设迭代次数为 n，累计方法误差为：

$$|x_n - x^*| \le L^n|x_0 - x^*| \le L^n(v-u) \le 0.01L^n$$

分配误差 $\frac{1}{4}\times 10^{-d}$，取 $n = \lceil \log_L(25\times 10^{-d}) \rceil$

其次进行舍入误差分析：

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

牛顿法舍入误差的产生来源有存储误差及$\zeta(x)$、$\zeta'(x)$ 的求解误差，设每步计算存储精度为 m，$\zeta(x)$、$\zeta'(x)$ 的求解精度为 d’，由于 d’ 必然大于 d，在进行 m 与 d’ 求解时不妨以精度 d 求解 $\zeta(x)$、$\zeta'(x)$、$\zeta''(x)$，则每步的舍入误差为：

$$|\Delta x_{n+1}| \le |\Delta x_n| + \left|\frac{\Delta f(x_n)}{dfmin(\text{d})}\right| + \left|\frac{fmax(\text{d})}{dfmin(\text{d})^2}\Delta f'(x_n)\right| + \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

其中

$$|\Delta f(x_n)| \le |dfmax(\mathrm{d})||\Delta x_n| + \Delta\zeta(x_n) \le |dfmax(\mathrm{d})||\Delta x_n| + \frac{1}{2}\times 10^{-d'}$$

$$|\Delta f'(x_n)| \le |ddfmax(\mathrm{d})||\Delta x_n| + \Delta\zeta'(x_n) \le |ddfmax(\mathrm{d})||\Delta x_n| + \frac{1}{2}\times 10^{-d'}$$

代入得

$$|\Delta x_{n+1}| \le (1 + \frac{|dfmax(\mathrm{d})|}{|dfmin(\mathrm{d})|} + \frac{|fmax(\mathrm{d})||ddfmax(\mathrm{d})|}{|dfmin(\mathrm{d})|^2}) \cdot |\Delta x_n|$$

$$+(\frac{1}{|dfmin(\mathrm{d})|} + \frac{|fmax(\mathrm{d})|}{|dfmin(\mathrm{d})|^2}) \cdot \frac{1}{2}\times 10^{-d'} + \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

令

$$A = 1 + \frac{|dfmax(d)|}{|dfmin(d)|} + \frac{|fmax(\mathrm{d})||ddfmax(\mathrm{d})|}{|dfmin(\mathrm{d})|^2}$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{|dfmin(\mathrm{d})|} + \frac{|fmax(\mathrm{d})|}{|dfmin(\mathrm{d})|^2}$$

累计舍入误差为：

$$|\Delta x_n| \le A^n \cdot |\Delta x_0| + \frac{1-A^n}{1-A} B \cdot \frac{1}{2}\times 10^{-d'} + \frac{1-A^n}{1-A} \cdot \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

$$= \frac{1-A^n}{1-A} B \cdot \frac{1}{2}\times 10^{-d'} + \frac{1-A^{n+1}}{1-A} \cdot \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

两项分别分配误差 $\frac{1}{8}\times 10^{-d}$

取 $d' = \left\lceil \log_{10}(4B\frac{1-A^n}{1-A}\times 10^d) \right\rceil$，$m = \left\lceil \log_{10}(4\frac{1-A^{n+1}}{1-A}\times 10^d) \right\rceil$。

2.3 求解结果

运行程序 code2.py，输入 a = 1.5，求解精度为 4，运行程序可得：

迭代次数 n = 2，存储精度 m = 6，$\zeta(x)$、$\zeta'(x)$ 的求解精度 d’ = 6。

求得 x = 2.1852851254839，取 4 位小数为 2.1853。

3 求解定积分：ζ(x) 的积分表示

3.1 算法原理

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$

直接进行数值积分求解较为困难，考虑到

$$I = \zeta(x)\Gamma(\mathrm{x})$$

$\zeta(x)$ 的求解我们已经在第一题实现，因此可将原问题转化为对 Γ(x) 的求解。

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

对于无穷上界积分，可取一个很大的数 N，以 $\int_0^N t^{x-1}e^{-t}dt$ 近似 $\Gamma(x)$ 的值，并使得误差满足条件。

令

$$f(t)=t^{x-1}e^{-t}$$

设区间数位 n，步长为 $h=\frac{N}{n}$，利用复化梯形公式进行数值积分得

$$\int_0^N f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t)dt\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(t_k)+f(t_{k+1})]$$

最后

$$I=\zeta(x)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(t_k)+f(t_{k+1})]$$

3.2 误差分析

设 I 的求解精度为 d。

首先进行 $I=\zeta(x)\Gamma(x)$ 的误差分析。设计算 I 时 $\zeta(x)$、$\Gamma(x)$ 需要的求解精度为 d’。进行 d’ 的估计时，不妨以精度 d 计算 $\zeta(x)$、$\Gamma(x)$。

$$\Delta\le\zeta(x)\Delta\Gamma(x)+\Gamma(x)\Delta\zeta(x)\le[\zeta(x)+\Gamma(x)+10^{-d}]\times\frac{1}{2}\times10^{-d'}\le\frac{1}{2}\times10^{-d}$$

取 $d'=\lceil\log_{10}(\zeta(x)+\Gamma(x)+10^{-d})\times10^{d}\rceil$。

接下来进行以精度 d’ 利用复化梯形公式求解 $\Gamma(x)$ 数值积分的误差分析。

方法误差来源于无穷积分近似及复化梯形公式本身两部分。

当 $t\ge4x^2$，$t^{x-1}\le e^{\frac{(x-1)t}{x}}$，若 $N\ge4x^2$，则以 $\int_0^N t^{x-1}e^{-t}dt$ 近似 $\Gamma(x)$ 的值带来的误差

$$\int_{N+1}^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\le\int_{N+1}^{\infty}e^{-\frac{t}{x}}dt=-xe^{-\frac{t}{x}}\Big|_{t=N+1}^{\infty}=xe^{-\frac{N+1}{x}}$$

分配误差 $\frac{1}{6}\times10^{-d'}$，取 $N=\lceil max(4x^2，xln(6x\times10^{d'})-1)\rceil$。

设区间数位 n，步长为 $h=\frac{N}{n}$，复化梯形公式方法误差

$$|R[f]|\le\frac{Nh^2}{12}max|f''(t)|=\frac{N^3}{12n^2}max|f''(t)|$$

$$f(t)=t^{x-1}e^{-t}$$

$$f'(t)=t^{x-2}e^{-t}(x-1-t)$$

$$f''(t)=t^{x-3}e^{-t}(t^2-2t(x-1)+(x-1)(x-2))$$

$$max|f''(t)| \le \left|\frac{t^{x-1}}{e^t}\right| + \left|\frac{2(x-1)t^{x-2}}{e^t}\right| + \left|\frac{(x-1)(x-2)t^{x-3}}{e^t}\right|$$
$$\le \frac{(x-1)^{x-1}}{e^{x-1}} + \frac{2(x-1)(x-2)^{x-2}}{e^{x-2}} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)^{x-3}}{e^{x-3}}$$

则

$$|R[f]| \le \frac{N^3}{12n^2}\left[\frac{(x-1)^{x-1}}{e^{x-1}} + \frac{2(x-1)(x-2)^{x-2}}{e^{x-2}} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)^{x-3}}{e^{x-3}}\right]$$

分配误差 $\frac{1}{6}\times 10^{-d'}$，取 $n = \left\lceil\sqrt{\frac{N^3}{2}\left(\frac{(x-1)^{x-1}}{e^{x-1}} + \frac{2(x-1)(x-2)^{x-2}}{e^{x-2}} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)^{x-3}}{e^{x-3}}\right)\times 10^{d'}}\right\rceil$，则 $h = \frac{N}{n}$。

假设每步计算存储精度为 m，舍入误差为：

$$\delta \le n \times 10^{-m}$$

分配误差 $\frac{1}{6}\times 10^{-d'}$，取 $m = \lceil\log_{10} 6n + d'\rceil$。

3.3 求解结果

运行程序 code3.py，输入 x = 3.5，求解精度为 4，运行程序可得：

$\zeta(x)$、Γ(x) 的求解精度 d’ = 5，积分上限 N = 51，复化梯形公式区间数 n = 172167，步长 h = 0.0002962240142，存储精度 m = 12。

求得 I = 3.744523971076，取 4 位小数为 3.7445。

4 求微分方程

4.1 算法原理

利用改进欧拉法求解微分方程

$$y'(x) = \zeta(y) = f(x,y)$$

初值为 $y(2) = 2$

改进欧拉递推公式为

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]\end{cases}$$

4.2 误差分析

设 $y(x_n)$ 的求解精度为 d。

在 $[2, x_n]$ 区间内

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |\zeta'(y)| \le |\zeta'(2)| \le M$$

$$\left|y^{(2)}(x)\right| = |\zeta'(y)| \cdot |\zeta(y)| \le |\zeta'(2)| \cdot |\zeta(2)| \le \mathrm{L}$$

$$\left|y^{(3)}(x)\right| = |\zeta''(y)| \cdot |\zeta(y)|^2 + |\zeta'(y)|^2 \cdot |\zeta(y)| \le |\zeta''(2)| \cdot |\zeta(2)|^2 + |\zeta'(2)|^2 \cdot |\zeta(2)| \le \mathrm{T}$$

求解 M、L、T 时，不妨以精度 d 计算 $\zeta(2)$、$\zeta'(2)$、$\zeta''(2)$

取

$$M = |\zeta'(2)| + \frac{1}{2} \times 10^{-d}$$

$$L = |\zeta'(2)| \cdot |\zeta(2)| + \frac{1}{2} \times 10^{-d}$$

$$T = |\zeta''(2)| \cdot |\zeta(2)|^2 + |\zeta'(2)|^2 \cdot |\zeta(2)| + \frac{1}{2} \times 10^{-d}$$

设 $f(x,y) = \zeta(y)$ 求解精度为 d’，$\Delta\zeta = \delta\zeta = \frac{1}{4} \times 10^{-d'}$，迭代次数为 n，步长 $h = \frac{x_n - 2}{n}$，改进欧拉法累计方法误差

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{n+1} \le (1+hM)\Delta_n + \frac{L}{2}h^2 + h\Delta\zeta \\ \Delta_{n+1} \le \Delta_n + \frac{h}{2}M\Delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\Delta}_{n+1} + \frac{T \cdot h^3}{12} + h\Delta\zeta \end{cases}$$

求得递推公式

$$\Delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\Delta_n + \left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + \left(h + \frac{h^2}{2}M\right)\Delta\zeta$$

整理为等比数列

$$\Delta_{n+1} + \frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + \left(h + \frac{h^2}{2}M\right)\Delta\zeta}{hM + \frac{h^2}{2}M^2} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\left(\Delta_n + \frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + \left(h + \frac{h^2}{2}M\right)\Delta\zeta}{hM + \frac{h^2}{2}M^2}\right)$$

可以认为 $\Delta_0 = 0$，则

$$\Delta_n \le \left[\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1\right]\frac{\left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + \left(h + \frac{h^2}{2}M\right)\Delta\zeta}{hM + \frac{h^2}{2}M^2}$$

分配误差

$$\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\frac{\left(\frac{LM}{4}+\frac{T}{12}\right)h^3}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\le\frac{1}{8}\times10^{-d}$$

利用二分法求得使不等式成立的最小正整数 n，进而求得 $h=\frac{x_n-2}{n}$。

假设每步计算存储精度为 m，改进欧拉法累计舍入误差

$$\begin{cases}\bar{\delta}_{n+1}\le(1+hM)\delta_n+\frac{1}{2}\cdot10^{-m}+h\delta\zeta\\ \delta_{n+1}\le\delta_n+\frac{h}{2}M\delta_n+\frac{h}{2}M\bar{\delta}_{n+1}+\frac{1}{2}\cdot10^{-m}+h\delta\zeta\end{cases}$$

求得递推公式

$$\delta_{n+1}\le\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)\delta_n+\left(1+\frac{hM}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot10^{-m}+\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\delta\zeta$$

整理为等比数列

$$\delta_{n+1}+\frac{\left(1+\frac{hM}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot10^{-m}+\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\delta\zeta}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\le\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)\left(\delta_n+\frac{\left(1+\frac{hM}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot10^{-m}+\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\delta\zeta}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\right)$$

可以认为 $\delta_0=0$，则

$$\delta_n\le\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\cdot\frac{\left(1+\frac{hM}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot10^{-m}+\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\delta\zeta}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}$$

分配误差

$$\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\cdot\frac{\left(1+\frac{hM}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot10^{-m}}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\le\frac{1}{8}\times10^{-d}$$

求得 $m=\left\lceil\log_{10}\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\cdot\frac{\left(1+\frac{hM}{2}\right)}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\cdot4\times10^d\right\rceil$。

$$\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\frac{\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\Delta\zeta}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}=\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\cdot\frac{\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\delta\zeta}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}$$

分配误差

$$\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\frac{\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)(\Delta\zeta+\delta\zeta)}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}$$

$$=\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\frac{\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)\cdot\frac{1}{2}\times 10^{-d'}}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\le\frac{1}{4}\times 10^{-d}$$

求得 $d'=\left\lceil\log_{10}\left[\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^n-1\right]\cdot\frac{\left(h+\frac{h^2}{2}M\right)}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\cdot 2\times 10^d\right\rceil$。

4.3 求解结果

运行程序 code4.py，输入 x = 3.5，求解精度为 4，运行程序可得：

M = 0.9375770382976，L = 1.5422747909779，T = 6.828848487683，迭代次数 n = 1678，步长 h =0.0011918951132301，$\zeta(y)$ 求解精度 d’ = 6，存储精度 m = 9。

求得 y(4) =4.4051087201，取 4 位小数为 4.4051