清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　随机数学与统计　（期中卷）　2021 年 11 月 14 日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一.（20 分）设事件 A,B 满足 $P(A)=\frac{1}{4},P(A|B)=\frac{1}{2},P(B^c|A)=\frac{2}{3}$，

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$.

（1）试求 X 与 Y 的相关系数 $r_{X,Y}$；

（2）记 $Z=X^2+Y^2$，试求 Z 的矩母函数 $M_Z(u)$，并求出 Z 的期望与方差。

二.（20 分）从过去的资料中知，在产品出口的索赔事件中，有 50%是质量问题，30%是数量问题，20%是包装问题，又知在质量问题的争议中，经过协商解决的占 40%，数量问题中，经过协商解决的占 60%，包装问题中经过协商解决的占 75%。如果出了一件索赔事件，在争议中经过协商解决了，问这一事件不属于质量问题的概率是多少？

三.（20 分） 设 $X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_i & 1-p_i \end{pmatrix}$（$p_i\in(0,1), i=1,2,\cdots,n; n>3$）相互独立，

（1）若 $p_i=p(\forall i=1,2,\cdots,n)$，求 $P(X_1=1|\sum_{i=1}^{n}X_i=3)$ 及

$E(X_1|\sum_{i=1}^{n}X_i=3)$；

（2）对一般的 p_i，求 $P(X_j=1|\sum_{i=1}^{n}X_i=1)$。

四．（20 分）设随机变量 X 和 Y 独立同分布，满足 $P(X=i)=\frac{1}{2^i}, i=1,2,\cdots$，

（1）试求概率 $P(X=Y)$；

（2）记 $\xi=\begin{cases}1, & \min(X,Y)\le 1,\\ -1, & \min(X,Y)>1.\end{cases}$ 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 相互独立，且均与 ξ 同分布，令

$U_n=U_0+\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$U_0=0$，求 $P(U_6=1)$ 及 $P(U_6=-2)$。

五．（20 分）设 $\{N_t:t\ge 0\}$ 是强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，$\{\sum_{i=1}^{N_t}X_i:t\ge 0\}$ 为其对应的复合 Poisson 过程，其中 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布满足 $P(X_1=1)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$，

（1）试求 $P(N_5=5\mid N_1=1,N_2=2,N_3=3)$；

（2）记 $Z\triangleq\frac{\sum_{i=1}^{N_t}X_i}{\sqrt{\lambda t}}$，试求当强度 $\lambda\to+\infty$ 时，Z 的矩母函数 $M_Z(u)$ 的极限。

附加题.（5 分）若 X,Y 相互独立，则 $D(XY)=DXDY\Leftrightarrow EX=EY=0$。