清华大学本科生考试试题专用纸

期末考试课程　随机数学与统计（A 卷）　2022 年 12 月 29 日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一.（15 分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，均服从均匀分布 $U[0,1]$，

（1）试求 $P(X_1+X_2=1)$ 及 $P(X_1+X_2\le 1)$；

（2）试求 $Cov(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n+2022}X_i)$；

（3）试求 $E(X_1\,|\,X_1+X_2\le 1)$。

二.（20 分）设总体 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，$X_1,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, X_{(1)}=\min_{1\le i\le n}X_i, X_{(n)}=\max_{1\le i\le n}X_i$，

（1）试求 $P(X_1<X_2)$；

（2）试求 $\bar{X}$ 与 $X_1-\bar{X}$ 的相关系数；

（3）试问 $X_{(1)}$ 是否服从指数分布，为什么？并证明 $X_{(1)}\xrightarrow{P}0$；

（4）设 $Z=(1-e^{-\lambda X_{(n)}})^n$，试证明 $Z\sim U(0,1)$。

三.（20 分）已知随机向量 (X,Y) 在三角形区域 $D:0<y<x<1$ 内服从均匀分布，

（1）试问 X 与 Y 是否独立？说明你的理由；

（2）分别求出 $E(Y\,|\,X)$ 和 $D(Y\,|\,X)$；

（3）设 $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，试求 U 与 V 的联合分布密度；

（4）试问当常数 a,b 取何值时，$E[Y-(aX+b)]^2$ 取到最小，其最小值为多少？

四.（15 分） 若$\{B_t;t\geq 0\}$为标准 Brown 运动，$B_0=0$，

（1）记$Y=3B_1+B_2-2B_3$，试求Y的特征函数$\varphi_Y(\theta)$；

（2）记$Z=B_{\frac{1}{2}}-cB_1$，试问c为何值时，Z与B_1相互独立，为什么？

（3）试求$P(B_1+B_2\leq 1\,|\,B_3=4)$。

五.（15 分）设总体X服从两点分布$B(1,p),p\in(0,1)$，$X_1,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，

（1）试问参数p的矩估计是否为其有效估计，为什么？

（2）若参数p的先验分布为均匀分布$U(0,1)$，试求出p的 Bayes 后验期望估计$\hat{p}_B$；

（3）设样本容量$n=3$，考虑假设检验问题$H_0:p=\frac{1}{2},\quad H_1:p=\frac{3}{4}$，若取拒绝域为$W=\{(x_1,x_2,x_3):x_1+x_2+x_3\geq 2\}$，试求该检验法的势函数、犯第一类错误和犯第二类错误的概率。

六.（15 分）设$X_1,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\theta}e^{-\frac{x^2}{\pi\theta^2}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad ,\qquad \theta>0\text{为未知参数。}$$

已知$EX_1=\theta,EX_1^2=(\frac{\pi}{2})\theta^2,EX_1^4=(\frac{3\pi^2}{4})\theta^4$。

（1）试确定未知参数θ的充分完备统计量；

（2）试求参数θ^2的极大似然估计量$\hat{\theta}^2_{MLE}$，并求θ^2的 UMVUE；

（3）基于$\hat{\theta}^2_{MLE}$构造枢轴量，并求出参数θ^2的置信水平为$1-\alpha$的等尾置信区间。