

## 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 随机数学与统计期中考试 (A 卷) 2022 年 11 月 13 日

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_

一. (20 分) 设事件  $A, B$  满足  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{2}{3}, P(A|B) = \frac{1}{3}$ ,

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}.$$

(1) 试求  $(X, Y)$  的联合分布律, 并问  $X, Y$  是否独立? 为什么?

(2) 试求事件  $A, B$  的相关系数  $r_{A,B}$  以及  $X, Y$  相关系数  $r_{X,Y}$ ;

(3) 试求  $E(\max(X, Y))$ .

二. (20 分) 设有  $n$  个袋子, 各袋中均装有红球  $r$  只, 黑球  $b$  只及白球  $w$  只。今从第 1 个袋子随机取一球, 放入第 2 个袋子, 然后再从第 2 个袋子随机取一球, 放入第 3 个袋子, 如此继续。令

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}; Y_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出白球,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(1) 试求  $X_1$  以及  $X_2$  的分布, 并求  $E(X_2)$ ;

(2) 试求  $P(Y_1 = 1 | X_2 = 1)$ ;

(3) 设  $r = b + w$ , 试求  $X_1$  和  $X_2$  的相关系数。

三. (20 分) 设随机变量  $X$  和  $Y$  独立同分布, 满足  $P(X = k) = \frac{1}{3}, k = 1, 2, 3$ ,

(1) 试求概率  $P(|X - E(X)| < 1)$ ;

(2) 试求概率  $P(X < Y)$ ;

(3) 记  $\xi = \begin{cases} 1, & X < Y, \\ -1, & X \geq Y. \end{cases}$  设  $\xi_1, \xi_2, \dots$  相互独立, 且均与  $\xi$  同分布, 令

$$U_n = U_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad U_0 = 0, \quad \text{试求 } P(U_4 = 1) \text{ 和 } P(U_4 = 2)。$$

四. (20 分) 设离散随机向量  $(X, Y)$  的联合分布律为  $P(X = m, Y = k) = \frac{1}{25} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ , 这里整数  $k, m$  满足  $k > m \geq 1$ ,

- (1) 试求  $X$  的边缘分布律, 并给出  $X$  的期望与方差;
- (2) 试证明: 在  $\{X = m\} (m \geq 1)$  的条件下,  $Y - m$  的条件分布为几何分布;
- (3) 试证明:  $E[Y | X] = 5 + X$ , 并求出  $Cov(X, Y)$ 。

五. (20 分) 设  $\{N_t : t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda > 0$  的 Poisson 过程,

- (1) 试求  $E[N_t | N_{t+s}]$  以及  $E[N_{t+s} | N_t]$ ,  $s, t > 0$ ;
- (2) 记  $X_\lambda = \frac{N_1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ , 试求  $X_\lambda$  的矩母函数  $M_{X_\lambda}(u)$ , 并求  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_{X_\lambda}(u)$

附加题. (5 分) 若  $X_1, X_2$  为独立的非负整数值随机变量, 随机变量  $Y \sim Ge(p)$  与  $X_1, X_2$  均独立, 试证明:  $P(Y > X_1 + X_2 | Y > X_1) = P(Y > X_2)$ .