

2022–2023 秋季学期 数值分析与算法 课程作业

第七章 线性方程组的数值解

1、设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算 $\text{cond}(A)_\infty$ 和 $\text{cond}(B)_2$ 。

2、已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$ ，若 A 可以分解为 $A = LL^T$ ，其中 L 是对角元素为正数的

下三角形矩阵，试求 a 的取值范围；若 $a = 1$ ，求 L 。

3、分析方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

雅可比迭代法及高斯-塞德尔迭代法的收敛性。

4、设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，若用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} - b), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

迭代求解，问 α 取什么范围的值能使迭代收敛。

5、针对线性方程组 $Ax = b$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，构造求解该方程组的迭代算

法 $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + f$ 。若 b 有误差，请分析它对 x 的影响。

6、 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，试设计迭代法来求解 $Ax = f$ ，其中 $f =$

$(1, 0, \dots, 0, -1)^T$ 。要求 x 在每个分量上的计算结果误差小于 10^{-10} 。注意：应考虑在计算过程中有存储误差（即舍入误差）。