



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI, CONSTANTINE 1  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre : .....  
Série : .....

## MEMOIRE DE MASTER

Domaine : SCIENCES DE LA MATIERE  
Filière : PHYSIQUE  
Spécialité : PHYSIQUE ENERGETIQUE ET ENERGIES RENOUVELABLES

THEME :

Approche Numérique de la convection naturelle d'un  
fluide newtonien au sein d'une cuve semi-elliptique  
saturée par un milieu poreux

Soutenue le : 15/06/2023

Par

Nom et Prénom de l'Etudiant

**SAHLI CHAOUKI**

Devant le jury

Président : **Pr. Bellel Nadir** - Prof. Université frères Mentouri, Constantine1

Rapporteur : **Pr. Djeddar Mahfoud** - Prof. Université frères Mentouri, Constantine1

Examineur : **Dr. Maïfi Lyes** - Prof. Université frères Mentouri, Constantine1

# Table des matières

## Table des matières

Table des matières.....	2
Nomenclature.....	3
Remerciements.....	1
Introduction.....	2
Chapitre I : Généralités et Revue bibliographique.....	3
I-1) Définitions et généralités : .....	4
I-2) Revue d'études traitant un thème similaire : .....	9
Chapitre II : Approche Théorique.....	10
II-1) Bilans de Masse, quantité de mouvement et d'énergie : .....	10
II-2) Adimensionnalisation du modèle : .....	13
Chapitre III : Formulation Numérique.....	16
III-1) La méthode des volumes finis : .....	16
III-2) Discrétisation de l'équation de la chaleur : .....	18
III-3) Discrétisation des conditions aux limites de l'équation de la chaleur : .....	24
III-4) Discrétisation de l'équation de mouvement : .....	24
III-5) Discrétisation des conditions aux limites de l'équation de mouvement : .....	25
III-6) Discrétisation des composantes de la vitesse adimensionnelle : .....	25
III-7) Etapes du calcul et algorithme : .....	26
Chapitre IV : Résultats et interprétation .....	28
IV-1) Interprétation et commentaires (1 <sup>ère</sup> Partie) : .....	32
IV-2) Interprétation et commentaires (2 <sup>ème</sup> Partie) : .....	39
Conclusion .....	40
A) Les Coordonnées Elliptiques : .....	41
A-1) Définition : .....	41
A-2) Excentricité : .....	43
A-3) Démonstrations : .....	43
Références Bibliographique.....	45
Résumé.....	49

# Nomenclature

$a$	Diffusivité thermique ( $m^2.s^{-1}$ )
$A$	Demi grand axe d'une ellipse (m)
$B$	Demi petit axe d'une ellipse (m)
$C$	Constante représentant la distance entre le foyer d'une ellipse et l'origine du repère. (m)
$c_p$	Chaleur massique à pression constante ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )
$Da$	Nombre de Darcy
$D_h$	Longueur caractéristique. (m)
$e_2$	Excentricité de l'ellipse représentant la paroi inférieure de la cuve.
$Gr$	Nombre de Grashof
$g$	Accélération de la force de pesanteur ( $m.s^{-2}$ )
$H$	Coefficient métrique adimensionnel
$h$	Coefficient métrique dimensionnel (m)
$K$	Perméabilité du milieux poreux ( $m^2$ )
$Nu_{moy}$	Nombre de Nusselt moyen
$P$	Pression (Pa)
$Pr$	Nombre de Prandtl
$q$	La densité de flux thermique ( $W.m^{-2}$ )
$Ra$	Nombre de Rayleigh
$Ra_m$	Nombre de Darcy-Rayleigh modifié
$T$	Température du fluide à un point compris dans le système. (K)
$T_0$	Température de référence (K)
$u$	Composante de la vitesse selon l'axe x ( $m.s^{-1}$ )
$v$	Composante de la vitesse selon l'axe y ( $m.s^{-1}$ )
$\vec{V}$	Vecteur vitesse ( $m.s^{-1}$ )
$V_\eta$	Composante de la vitesse suivant $\eta$ ( $m.s^{-1}$ )
$V_\theta$	Composante de la vitesse suivant $\theta$ ( $m.s^{-1}$ )
$\beta$	Coefficient d'expansion volumique thermique du fluide ( $K^{-1}$ )
$\lambda_m$	Conductivité thermique du fluide ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide ( $m^2.s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique du fluide ( $kg.m^{-3}$ )
$\rho_0$	Masse volumique du fluide à la température de référence ( $kg.m^{-3}$ )
$\psi$	Fonction de courant ( $m^2.s^{-1}$ )

# Remerciements

En cette étape cruciale de mon parcours académique, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenu(e) et accompagné(e) tout au long de la réalisation de mon mémoire de fin d'étude.

Je tiens tout d'abord à remercier mon professeur encadrant, Monsieur M. Djeddar, pour son expertise, son soutien et ses précieux conseils tout au long de ce processus. Votre disponibilité et votre engagement ont été essentiels pour orienter mes recherches et m'aider à avancer dans la bonne direction.

Mes sincères remerciements vont également à tous mes professeurs, qui ont contribué à mon épanouissement académique tout au long de ces années d'études. Vos enseignements, votre encadrement et votre dévouement ont joué un rôle fondamental dans ma formation et dans la réalisation de ce mémoire.

Enfin j'aimerais adresser mes remerciements à mes parents, et mon frère, qui ont été mes piliers de soutien durant ces longues années d'études, sans oublier mes amis Rachid, Selim et Ahmed pour leurs encouragements, et tout le soutien moral qu'ils ont pu m'apporter durant ces dernières années.

# Introduction

Le phénomène complexe de la convection naturelle des fluides dans des milieux poreux, à susciter beaucoup d'intérêts par les chercheurs ces dernières années, dû au rôle crucial qu'il joue dans plusieurs domaines scientifique et industrielle tel que, la récupération du pétrole des nappes souterraines, la géothermie, la géologie, les échangeurs de chaleur ou l'amélioration des matériaux filtrants, les études menées avait pour but d'élargir les connaissances sur ce phénomène physique et améliorer l'efficacité ainsi que le rendement énergétique des systèmes contenant des matériaux poreux.

Dans ce mémoire, on s'est intéressés au développement la convection naturelle d'un fluide newtonien s'écoulant dans une cuve horizontale en forme de demi-ellipse, saturée par un milieu poreux. L'étude est réalisée dans un cas ou la paroi inférieure de la cuve est chauffée, pour des nombres de Darcy-Rayleigh modifié allant de 10 à 320 et des excentricités ( $e_2$ ) de la paroi inférieure prenant des valeurs entre 0.25 et 0.95.

Le premier chapitre, établi des définitions importantes pour mieux cerner le thème de l'étude, ainsi qu'une revue de quelques travaux réalisés sur de diverses configurations de forme elliptiques avec d'autres conditions aux limites.

Dans le second chapitre, on définit le modèle physique et mathématique avec les conditions aux limites pour notre cas d'étude.

Quant au troisième chapitre, il est consacré au développement d'une formulation numérique du problème, en établissant la forme discrétisée des équations de conservation, grâce aux méthodes des volumes finis pour l'équation de la chaleur et la méthode des différences finies pour celle décrivant le mouvement, il comprend aussi les étapes du calcul et l'algorithme nécessaire à la résolution du système d'équations discrétisées.

Le quatrième chapitre porte les résultats de la résolution numérique des équations précédentes pour différentes excentricités et nombres de Darcy-Rayleigh modifié, ainsi qu'une interprétation et des commentaires sur ces derniers.

En finalise le mémoire par une conclusion résumant les résultats obtenus et les perspectives pour ce domaine.

On retrouve en annexe un rappel des coordonnées elliptiques.

# Chapitre I :

## Généralités et Revue bibliographique

La convection naturelle dans les cavités remplies d'un milieu poreux a suscité un vif intérêt en recherche et reste un domaine d'actualité. Les études dans ce domaine comprennent des expérimentations, des solutions analytiques, mais la modélisation numérique est souvent l'outil essentiel pour les prédictions. Une revue complète des travaux disponibles sur ce sujet a été réalisée par Borjes [1] ainsi que par Nield et Bejan[2].

Les travaux de recherche précédemment publiés ont mis en évidence, à la fois par des expériences et des approches théoriques, la diversité et la complexité du problème de la convection naturelle. Différents régimes d'écoulement ont été pris en compte, incluant des écoulements stationnaires, instationnaires, laminaires ou turbulents, ainsi que divers modèles théoriques et méthodes numériques de résolution. Une variété de géométries a également été considérée, qu'elles soient régulières ou non, telles que des cavités parallélépipédiques, cylindriques, sphériques ou semi-elliptiques, etc. De plus, plusieurs solutions ont été trouvées, allant des écoulements monocellulaires aux écoulements bicellulaires ou multicellulaires.

Le but de ce chapitre est de définir les principes fondamentaux à l'étude d'un problème de convection naturelle d'un fluide newtonien dans un milieu poreux, ainsi que l'exposition de quelques études établis par plusieurs chercheurs traitant le même sujet, pour avoir une idée sur les avancées réalisées dans le thème des transferts thermique par convection naturelle dans les milieux poreux.

## I-1) Définitions et généralités :

### I-1-1) Le fluide Newtonien :

Un fluide newtonien est un type de fluide dont le comportement est décrit par la loi de Newton de la viscosité, qui établit une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement (force par unité de surface) et le taux de déformation (variation de la vitesse par rapport à la distance) du fluide. Autrement dit, la viscosité du fluide newtonien est constante et indépendante du taux de déformation. Les exemples de fluides newtoniens comprennent l'eau, l'air, l'huile minérale, etc. Cette propriété rend le comportement des fluides newtoniens relativement facile à prévoir et à modéliser mathématiquement.

### I-1-2) Les milieux poreux :

Les milieux poreux sont des matériaux qui présentent une structure complexe et comportent des espaces vides ou des pores interconnectés Bear [3]. Ces pores peuvent être de différentes tailles et formes, ce qui permet la circulation et l'échange de fluide à travers le matériau. Les milieux poreux sont présents dans de nombreux domaines, tels que les sols, les roches, les mousses, les filtres et les matériaux poreux artificiels.

La définition de ces milieux peut varier légèrement selon le domaine d'application. En géologie, les milieux poreux sont souvent définis comme des formations géologiques qui contiennent de l'eau ou des fluides, avec des pores de taille variable qui permettent le stockage et le déplacement des fluides. Dans le domaine de l'ingénierie des matériaux, les milieux poreux peuvent être des matériaux poreux artificiels créés pour des applications spécifiques, tels que les catalyseurs ou les matériaux d'isolation thermique.

Les propriétés des milieux poreux, telles que la perméabilité, la porosité et la conductivité thermique, sont des paramètres clés qui déterminent leur comportement en termes de transfert de fluide, de transport de chaleur et de transfert de masse Dullien[4].

La perméabilité mesure la capacité d'un milieu poreux à permettre le flux de fluide à travers ses pores, tandis que la porosité indique la fraction de volume occupée par les pores. La conductivité thermique est la capacité d'un matériau à conduire la chaleur à travers ses pores.

On trouve ci-dessous plus de détails sur ces propriétés :

La perméabilité ( $K$ ) :

La perméabilité d'un milieu poreux, notée  $K$ , est une mesure de sa capacité à permettre le passage des fluides à travers ses pores. Elle est principalement influencée par la géométrie de la matrice solide, en particulier par la porosité. Un milieu poreux est considéré comme plus perméable lorsque ses pores sont interconnectés.

La détermination de la perméabilité  $K$  est généralement réalisée par des mesures expérimentales, en utilisant la loi de Darcy qui régit le mouvement des fluides dans les milieux poreux. De nombreuses études ont été menées pour caractériser la perméabilité dans différents types de milieux. Par exemple, la perméabilité du gravier se situe généralement entre  $10^{-7}$  et  $10^{-9} m^2$ , tandis que celle de l'argile stratifiée se situe entre  $10^{-13}$  et  $10^{-16} m^2$ .

Une approche courante pour évaluer la perméabilité  $K$  est d'utiliser des géométries particulières du milieu poreux, en utilisant le paramètre  $\varepsilon$  et une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore.

Parmi les méthodes de calcul de la perméabilité, la relation de Kozeny [5], Carman[6] est souvent utilisée. Cette relation fournit une estimation satisfaisante de la perméabilité  $K$  dans le cas d'un empilement de grains de formes similaires et dont la distribution des tailles des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne  $D$ . La relation est donnée par :

$$K = \frac{D^3 \varepsilon^3}{36 C_0 (1 - \varepsilon)^2}$$

Où  $C_0$  est un coefficient de forme, prenant des valeurs entre 3.6 et 5. Pour des grains sphériques,  $C_0$  est égal à 4.8 et  $D$  représente le diamètre des sphères et  $\varepsilon$  représente la porosité du milieu.

D'autres relations et modèles existent pour estimer la perméabilité dans des configurations plus complexes ou pour des matériaux spécifiques. Ces approches permettent de mieux comprendre les mécanismes de transfert dans les milieux poreux et de prédire leur comportement hydraulique.

La porosité ( $\varepsilon$ ) :

La porosité d'un milieu poreux est une mesure de la fraction d'espace vide ou de pores présents dans le matériau par rapport à son volume total. Elle représente la capacité du milieu à stocker des fluides ou à permettre leur circulation à travers les espaces vides.

$$\varepsilon = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume totale du milieu}}$$



Cette définition et celle de la porosité totale, car elle prend en compte tous les espaces vide même ce qui ne sont pas interconnectés, ce qui est moins précis pour connaître la porosité réelle du milieu, cette définition est utilisée pour notre étude car pour avoir une valeur de la porosité plus précise il faut connaître en détails la structure du milieu étudié.

La valeur de  $\varepsilon$  est comprise entre 0 et 1. pour 0 on a un Volume solide plein et si elle prend la valeur de 1 on obtient un milieu totalement vide.

Voici quelques exemples de la porosité de matériaux qu'on peut trouver dans la nature :

Matériaux	Porosité	Matériaux	Porosité
Fibre de verre	0.88-0.93	Sable	0.37-0.5
Poudre d'ardoise noir	0.57-0.66	Poudre de cuivre	0.09-0.34
Filtre de cigarette	0.17-0.49	Terre	0.43
Brique	0.12	Granulé de pierres	0.44-0.45

La caractérisation des milieux poreux et la compréhension de leur comportement sont des sujets de recherche actifs. Différentes techniques expérimentales et numériques sont utilisées pour étudier les propriétés des milieux poreux, telles que la tomographie à rayons X, la porosimétrie, la perméabilité et les tests de conductivité thermique, Blunt [7]. Les résultats de ces études sont utilisés pour développer des modèles mathématiques et des simulations numériques afin de prédire le comportement des milieux poreux dans des applications spécifiques.

### I-1-1) Le Transfert thermique par Convection :

Selon Yunus A.Cengel [8], c'est un type de transfert de chaleur qui opère entre une surface solide et un fluide (liquide ou gaz) en mouvement.

La convection combine les effets de transfert par conduction ainsi que de déplacement du fluide.

Plus le mouvement du fluide est rapide, plus le transfert par convection est élevé.

En absence de mouvement du fluide, le transfert thermique entre la surface solide et le fluide est considéré par conduction pure.

On distingue trois types de transfert thermique par convection :

- Convection Forcée. (Mouvement du fluide due à une différence de pression (pompe, ventilateur, soufflerie..)
- Convection Naturelle. (Provoqué par des différences de masse volumique, résultant d'un écart de température dans le fluide.)
- Convection Mixte.

### I-1-3) Le modèle de Darcy :

Le modèle de Darcy, introduit par Henry Darcy en 1856, est une formulation mathématique largement utilisée pour décrire les écoulements dans les milieux poreux Darcy [9].

Ce modèle est basé sur plusieurs hypothèses importantes. Tout d'abord, il suppose que le milieu poreux est saturé, c'est-à-dire que tous les espaces interstitiels sont remplis de fluide (Darcy, 1856). Cette saturation est généralement vérifiée dans de nombreux milieux naturels et artificiels, tels que les sols, les roches et les matériaux poreux utilisés dans les applications industrielles.

Le modèle de Darcy postule également que les écoulements dans les milieux poreux sont dominés par les forces visqueuses plutôt que par les forces inertielles. Cela signifie que les variations de vitesse et de pression dans le milieu poreux sont principalement influencées par les propriétés visqueuses du fluide et par la géométrie du milieu poreux lui-même.

Mathématiquement, le modèle de Darcy est décrit par l'équation de Darcy, qui relie la vitesse d'écoulement du fluide à la perte de charge à travers le milieu poreux.

L'équation de Darcy s'exprime comme suit :

$$\vec{V} = -K \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\mu}$$

Où  $\vec{V}$  est la vitesse d'écoulement du fluide,  $K$  est la perméabilité du milieu poreux,  $\vec{\nabla} P$  est le gradient de pression à travers le milieu et  $\mu$  la viscosité du fluide (Bear, 1972).

### I-1-4) La formulation de vorticité - fonction de courant :

La formulation vorticité fonction de courant est une approche mathématique utilisée pour décrire les écoulements fluides en termes de la vorticité ( $\omega$ ) et de la fonction de courant ( $\psi$ ). Cette méthode est basée sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

La vorticité ( $\omega$ ) est une grandeur vectorielle qui mesure la rotation locale d'un fluide à un point donné. Elle est définie comme le rotationnel du champ de vitesse ( $V$ ) du fluide, ce qui peut être écrit comme :

$$\omega = \vec{\nabla} \times V$$

La fonction de courant ( $\Psi$ ) est une grandeur scalaire qui est utilisée pour décrire l'écoulement d'un fluide sans rotation locale. Elle satisfait l'équation de continuité, qui est donnée par :

$$\nabla^2 \psi = 0$$

En utilisant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, on peut exprimer la vorticité en fonction de la fonction de courant. Pour un écoulement bidimensionnel incompressible, les équations de conservation s'écrivent comme suit :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la fonction de courant, les composantes de la vitesse ( $u$  et  $v$ ) peuvent être exprimées en termes de la fonction de courant :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans les équations de conservation, on obtient une équation pour la vorticité en fonction de la fonction de courant :

$$\nabla^2 \omega = \nabla^2 \left( \nabla \times \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} i - \frac{\partial \psi}{\partial x} j \right) \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

Cette équation montre que  $\omega$  est nulle pour un écoulement décrit par une fonction de courant. Ainsi, la vorticité est concentrée uniquement dans les zones où la fonction de courant varie. Les lignes de courant ( $\psi = \text{constante}$ ) correspondent donc aux lignes parallèles aux champs des vecteurs vitesses pour  $\omega = 0$ .

La formulation vorticité fonction de courant permet de simplifier les équations de conservation et de fournir une description plus concise et élégante des écoulements tourbillonnaires.

## I-2) Revue d'études traitant un thème similaire :

De nombreux travaux ont été réalisés sur la convection naturelle dans des cavités de différentes géométries. Pour les cavités demi-cylindriques, Karki et Sathyamurthy [10] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire en considérant trois zones chauffées différemment le long de l'axe axial de la cavité. Khat et Retiel [11], dans leur thèse récente, ont examiné la convection naturelle thermique et double diffusive dans une cavité demi-cylindrique horizontale, en variant les valeurs du nombre de Rayleigh thermique de  $10^3$  à  $10^6$ .

En ce qui concerne les cavités demi-elliptiques, peu de travaux ont été réalisés. Bouras Taloub et Beghidja [12] ont étudié l'influence du nombre de Rayleigh thermique (de  $10^3$  à  $5 \times 10^5$ ) sur la convection naturelle dans une cavité demi-elliptique horizontale fermée. Ils ont maintenu un gradient de température entre les parois supérieure et inférieure et ont utilisé la méthode de volume fini pour obtenir des résultats numériques. Leur étude visait à examiner le transfert de chaleur et les schémas d'écoulement du fluide. Ils ont constaté que le transfert de chaleur augmentait avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, tout en observant l'influence de ce dernier sur la structure de l'écoulement et la distribution de la température.

Des solutions exactes ont été développées par PHILIP [13] pour étudier la convection libre dans des cavités poreuses de différentes formes, avec de faibles nombres de Rayleigh. Les cavités sont soumises à un gradient de température uniforme perpendiculaire au champ gravitationnel. Cette étude démontre que l'orientation de la cavité n'a pas d'influence sur l'écoulement. Les solutions exactes sont présentées en détail pour les cavités rectangulaires et elliptiques avec un rapport arbitraire entre leur grand et petit axe, ainsi que pour les cavités triangulaires équilatérales. Le nombre de Rayleigh critique, à partir duquel l'analyse peut être appliquée, est d'environ 1 pour les cavités avec le grand axe à l'horizontal, et d'environ la racine carrée de  $\lambda$  pour les cavités avec le grand axe à la verticale.

J.P Caltagirone [14] a réalisé l'une des premières études sur un espace annulaire horizontal rempli d'une matière fibreuse et granulaire qui s'est penché sur l'écoulement d'un fluide dans l'espace entre deux cylindres concentriques remplies par un milieu poreux, il a observé un écoulement bidimensionnel stationnaire pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 65, où deux cellules symétriques se sont développées.

# Chapitre II :

## Approche Théorique

### II-1) Bilans de Masse, quantité de mouvement et d'énergie :

Pour arriver à résoudre tout problème de transfert de chaleur on doit établir un modèle mathématique comprenant des hypothèses simplificatrices, la forme des équations de conservations, ainsi que les conditions aux limites propres à notre système.

On commence d'abord, par proposer des hypothèses afin de délimiter et simplifier notre étude.

#### II-1-1) Définition et Hypothèses simplificatrices :

On suppose que le fluide Newtonien est incompressible, et le milieu poreux ou il se propage comme isotrope.

L'étude est faite pour un cas bidimensionnel, où nous faisons l'hypothèse de l'approximation de Boussinesq. Cette approximation consiste à considérer les variations de la masse volumique ( $\rho$ ) comme négligeables dans tous les termes des équations de mouvement, à l'exception du terme de pesanteur. Les variations de masse volumique dues à des variations de température, supposées linéaires, sont responsables de la convection naturelle. Ces variations sont alors décrites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

Et puisqu'on s'intéresse à la convection naturelle, on négligera les effets de transfert thermique par rayonnement.

#### II-1-2) Forme vectorielle des équations de conservation :

-Équation de conservation de la masse : (équation de continuité)

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (\text{II.1})$$

-Équation de mouvement : (loi de Darcy)

$$\vec{V} = \frac{K}{\mu} \times (-\nabla P + \rho \cdot \vec{g}) \quad (\text{II.2})$$

-Équation de la chaleur :

$$(\rho \cdot c)_f \cdot (\vec{V} \cdot \vec{V})T = \lambda_m \cdot \nabla^2 T \quad (\text{II.3})$$

II-1-3) Les équations de conservation en coordonnées cartésiennes :

-Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.4})$$

-Équation de mouvement : (loi de Darcy)

$$u = -\frac{K}{\mu} \times \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{II.5})$$

$$v = -\frac{K}{\mu} \cdot \left[ \frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 \cdot g [1 - \beta(T - T_0)] \right] \quad (\text{II.6})$$

-Équation de la chaleur :

$$\left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\lambda_m}{(\rho \cdot c_p)_f} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Avant de passer à l'étape de la transformation des équations ci-dessus en coordonnées elliptiques, il est utile de combiner les deux équations ((II.5) et (II.6)) des composantes de la vitesse  $\vec{V}$  en une seule équation représentant le mouvement, suivant les étapes ci-dessous :

On dérive l'équation (II.5) par rapport à y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{K}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (\text{II.8})$$

Et l'équation (II.6) par rapport à x :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) - (\rho_0 \cdot g \cdot \beta) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (\text{II.9})$$

Ensuite on élimine les termes de pression en soustrayant l'équation (II.8) de (II.9) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K \cdot \rho_0 \cdot g \cdot \beta}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Enfin on suppose une fonction de courant  $\psi$  tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En remplaçant ces deux termes dans l'équation précédente on obtient la forme finale de l'équation de mouvement :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{K \cdot \rho_0 \cdot g \cdot \beta}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{II.10})$$

II-1-4) Les équations de conservation en coordonnées Elliptiques :

-Équation de conservation de la masse : (équation de continuité)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h \cdot V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h \cdot V_\theta) = 0 \quad (\text{II.11})$$

-Équation de mouvement : (loi de Darcy)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = \frac{K \cdot \rho_0 \cdot g \cdot \beta}{\mu} \cdot \left[ \left( -\frac{C \cdot \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} + \right. \\ \left. \left( \frac{C \cdot \cosh \eta \cdot \sin \theta}{C^2 (\cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta + \sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta)} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

-Équation de la chaleur :

$$V_\eta \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_m}{(\rho \cdot c_p)_f} \cdot \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{II.13})$$

II-1-5) Conditions aux limites :

Les conditions aux limites de notre étude, sont de type Dirichlet où la température de la paroi supérieure ( $\eta_1$ ) et inférieure ( $\eta_2$ ) sont  $T_f$  et  $T_c$  respectivement.

On remarque aussi que :  $T_f < T_c$

## II-2) Adimensionnalisation du modèle :

Cette étape nous permet d'avoir un modèle mathématique avec des variables sans dimensions ce qui est très utile pour simplifier et généraliser les résultats de l'étude et ainsi pouvoir utiliser cette interprétation pour d'autres cas comportant un problème de convection similaire.

On pose les quantités adimensionnelles suivantes :

$$D_h = C$$

$$H = \frac{h}{D_h}$$

$$V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{a} \quad ; \quad V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{a}$$

$$\psi^+ = \frac{\psi}{a}$$

La diffusivité thermique :  $a = \frac{\lambda_m}{(\rho \cdot c_p)_f}$

La température adimensionnelle :  $T^+ = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}$

Le nombre de Grashof :  $Gr = \frac{g \beta D_h^3}{\nu^2} \cdot \Delta T$

Le nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\nu}{a}$

La viscosité cinématique :  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$

Le nombre de Rayleigh-Darcy modifié :  $Ra_m = Da \times Ra$

Le nombre de Rayleigh :  $Ra = Gr \cdot Pr$

Et  $Da = \frac{K}{D_h^2}$



En remplaçant ces termes dans les équations (II.11), (II.12), (II.13) on obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H.V_{\eta}^{+}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H.V_{\theta}^{+}) = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\left( \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \theta^2} \right) = Ra_m \cdot H^2 \left[ \left( -\frac{C \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \frac{\partial T^{+}}{\partial \eta} + \left( \frac{C \cosh \eta \cdot \sin \theta}{C^2 (\cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta + \sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta)} \right) \frac{\partial T^{+}}{\partial \theta} \right] \quad (\text{II.15})$$

$$HV_{\eta}^{+} \frac{\partial T^{+}}{\partial \eta} + HV_{\theta}^{+} \frac{\partial T^{+}}{\partial \theta} = \left[ \frac{\partial^2 T^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^{+}}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{II.16})$$

II-2-1) Conditions aux limites Adimensionnelle :

-Pour la paroi supérieure ( $\eta_1$  et  $T_f$ ) :

$$V_{\eta}^{+} = V_{\theta}^{+} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta} = 0$$

$$T_f^{+} = 0$$

-Pour la paroi inférieure ( $\eta_2$  et  $T_c$ ) :

$$V_{\eta}^{+} = V_{\theta}^{+} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta} = 0$$

$$T_c^{+} = 1$$

## 2-2) Valeur Local du nombre de Nusselt :

L'introduction du nombre de Nusselt permet de déterminer les taux de transfert de chaleur au sein de la cuve.

La forme générale de ce nombre s'écrit comme suit :

$$Nu = \frac{qa}{\lambda \Delta T}$$

$q$  : densité de flux de chaleur

$\Delta T$  : écart de température entre  $T_c$  et  $T_f$

Pour :  $q = -\lambda \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta}$

Et en introduisant  $T^+$ , la valeur locale du nombre de Nusselt s'écrit :

$$Nu = -\frac{1}{h} \frac{\partial T^+}{\partial \eta}$$

## II-2-3) Nombre de Nusselt Moyen :

La relation suivante permet d'exprimer le nombre de Nusselt moyen :

$$Nu_{moy} = -\frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu d\theta$$

# Chapitre III :

## Formulation Numérique

Après avoir obtenu le modèle mathématique décrivant la convection naturelle dans un milieu poreux, en tenant compte des conditions mentionnées précédemment, On peut maintenant se lancer dans la partie la plus enthousiasmante de cette étude qui est la résolution de ce système d'équations couplées.

Étant donné la difficulté à obtenir des solutions analytiques, il est préférable d'adopter des méthodes numériques pour atteindre des solutions approchées. En ce qui concerne les problèmes de transfert thermique similaires à notre étude, S.V. Patankar [15] et E.F. Nogotov [16] ont démontré l'utilité de la méthode des volumes finis et celle des différences centrées pour approcher les solutions des équations de type parabolique et elliptique respectivement.

Nous utiliserons donc la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation (II.16) de notre modèle, tandis que l'équation (II.15), de type elliptique, sera résolue à l'aide de la méthode des différences centrées.

### III-1) La méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis est une approche numérique utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) qui décrivent le comportement d'un système physique. Elle est particulièrement adaptée à la résolution des problèmes de transfert de masse, de chaleur et de quantité de mouvement.

Le principe de la méthode des volumes finis repose sur la discrétisation du domaine d'étude en volumes finis, également appelés cellules ou éléments de contrôle. Le domaine est divisé en un maillage constitué de ces cellules, et chaque cellule est associée à un ensemble de nœuds ou de points centraux.

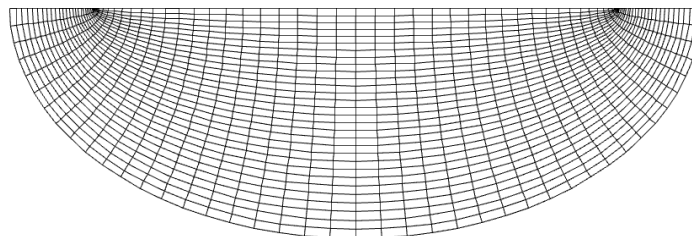


Fig.1 Maillage du domaine physique

La méthode des volumes finis se base sur deux principes fondamentaux :

- Conservation de la quantité : Elle garantit l'équilibre des flux entrants et sortants à travers les faces des volumes, assurant ainsi la conservation globale de la quantité physique.
- Approximation par intégrales locales : Les équations aux dérivées partielles sont intégrées sur chaque volume pour obtenir une approximation locale de la solution.

Une fois le domaine discrétisé et les équations intégrées sur chaque nœud, un système d'équations algébriques est obtenu. Ce système peut être résolu numériquement pour obtenir une approximation de la solution du problème original.

Cette méthode présente des avantages significatifs. Elle tient compte des variations locales des propriétés du système, ce qui la rend adaptée à la résolution de problèmes complexes avec des géométries irrégulières. De plus, elle conserve les propriétés de conservation inhérentes au système physique étudié.

### III-1-1) Maillage et volumes de contrôles :

On divise la forme elliptique de la cuve selon les directions  $\eta$  et  $\theta$  en un ensemble de volume finis tel que  $dV = \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot H^2 \cdot 1$

Le point P représente le centre d'un volume typique et les lettres e, w, n, s désignent respectivement les interfaces "est", "ouest", "nord", "sud" du volume.

Un volume intérieur est entouré de quatre volumes de contrôles qui contiennent dans leurs centres les nœuds E, W, N, S où sont stockées les variables (température, pression, masse ...).

Pour discrétiser les équations différentielles de notre modèle, il suffit de les intégrer dans le volume typique défini précédemment.

Les nœuds E et S sont pris dans le sens positif des coordonnées  $\theta$  et  $\eta$  respectivement, tandis que les nœuds W et N sont pris dans les directions négatives de  $\theta$  et  $\eta$  respectivement.

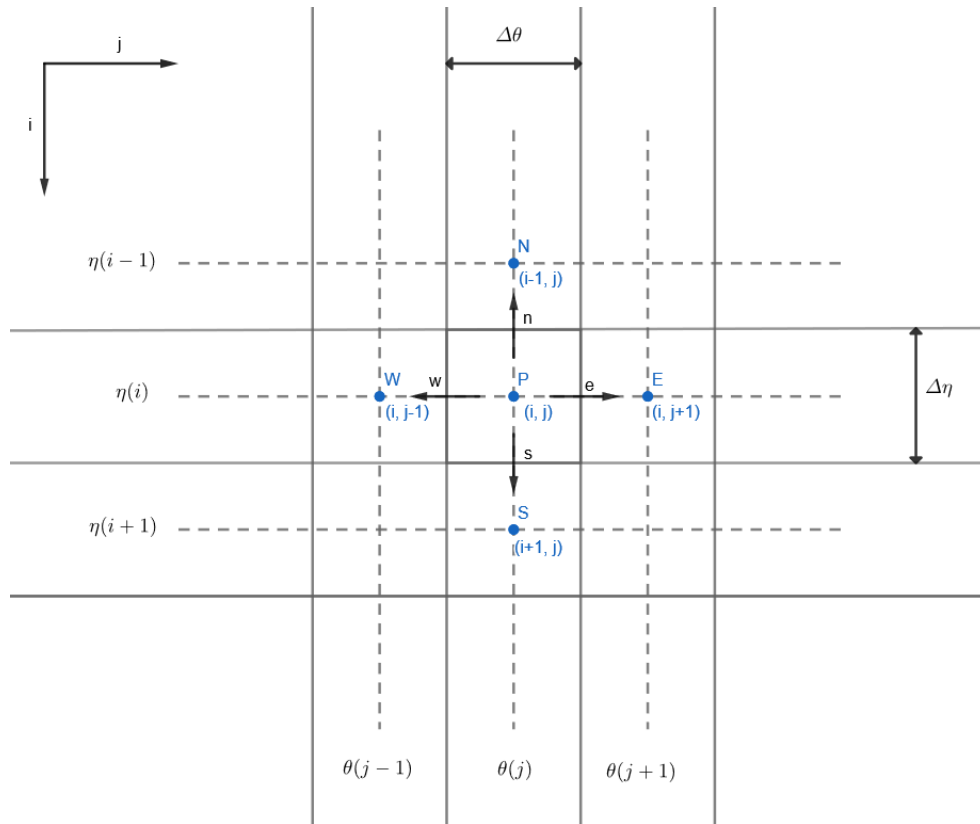


Fig.2 Représentation du volume de contrôle

### III-2) Discrétisation de l'équation de la chaleur :

Afin de discrétiser la forme adimensionnelle de l'équation de la chaleur sur le maillage décrit précédemment, On fait appel au schéma Power Law qui selon S.V. Patankar est le schéma idéal pour les problèmes de convection-diffusion.

La forme générale d'une équation différentielle décrivant un problème de convection-diffusion est comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \text{div}(\rho v\varphi) = \text{div}(\Gamma \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) + S \quad (\text{III.1})$$

Où :

$\Gamma$  : la conductivité thermique

$S$  : le terme source

$\varphi$  : variable dépendante (Température, vitesse, ...)

En développant l'équation pour le cas de notre étude on arrive à la forme suivante :

$$\frac{\partial j_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} = S \quad (\text{III.2})$$

Pour :

$$j_\eta = HV_\eta^+ \cdot \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (\text{III.3})$$

$$j_\theta = HV_{\eta\theta}^+ \cdot \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (\text{III.4})$$

Et :  $\varphi = T^+ \quad ; \quad \Gamma = 1 \quad ; \quad S = 0$

En intégrant cette équation sur le volume de contrôle ( $dV = \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot H^2 \cdot 1$ ) on trouve :

$$\iint_{wn}^{es} \frac{\partial j_\eta}{\partial \eta} d\eta d\theta + \iint_{wn}^{es} \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} d\eta d\theta = j_s - j_n + j_e - j_w = 0 \quad (\text{III.5})$$

Ensuite on intègre l'équation de continuité sur ce même volume ce qui nous donne l'équation suivante :

$$F_s - F_n + F_e - F_w = 0 \quad (\text{III.6})$$

Où :

$$\begin{cases} F_s = (H \cdot V_\eta^+)_s \cdot \Delta\theta \\ F_n = (H \cdot V_\eta^+)_n \cdot \Delta\theta \\ F_e = (H \cdot V_\theta^+)_e \cdot \Delta\eta \\ F_w = (H \cdot V_\theta^+)_w \cdot \Delta\eta \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

En multipliant cette équation par :  $T_P^+$  et en la soustrayant de l'équation de la chaleur intégrée précédemment On obtient :

$$(j_s - F_s \cdot T_P^+) - (j_n - F_n \cdot T_P^+) + (j_e - F_e \cdot T_P^+) - (j_w - F_w \cdot T_P^+) = 0 \quad (\text{III.8})$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} (j_s - F_s \cdot T_P^+) &= a_S(T_P^+ - T_S^+) \\ (j_n - F_n \cdot T_P^+) &= a_N(T_N^+ - T_P^+) \\ (j_e - F_e \cdot T_P^+) &= a_E(T_P^+ - T_E^+) \\ (j_w - F_w \cdot T_P^+) &= a_W(T_W^+ - T_P^+) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Les expression des coefficients  $a$  sont :

$$a_E = D_e \cdot A(|P_e|) + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w \cdot A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (\text{III.10})$$

$$a_S = D_s \cdot A(|P_s|) + [-F_s, 0]$$

$$a_N = D_n \cdot A(|P_n|) + [F_n, 0]$$

On suppose que les pas d'intégration sont égaux aux pas de calcul du maillage  $\delta\eta = \Delta\eta$  et  $\delta\theta = \Delta\theta$ , et donc les termes diffusifs  $D$  sont définis par les relations :

$$D_e = \frac{\Gamma_e \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \quad ; \quad D_s = \frac{\Gamma_s \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \quad ; \quad D_n = \frac{\Gamma_n \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \quad \text{et} \quad \Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_s = \Gamma_n = 1$$

Pour le Schéma Power-Law la fonction  $A(|P|)$  prend la valeur suivante :

$$A(|P|) = |0, (1 - 0.1|P|)^5| \quad (\text{III.11})$$

Où  $P$  représente le nombre de Peclet défini par les relations suivantes :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

En remplaçant les termes  $D$  dans les expressions précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = F_e \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w = F_w \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_s = F_s \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_n = F_n \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

Tous ces termes maintenant définis, La forme discrétisée de l'équation de la chaleur est la suivante :

$$a_P T_P^+ = a_S T_S^+ + a_N T_N^+ + a_E T_E^+ + a_W T_W^+ \quad (\text{III.13})$$

Pour :  $a_P = a_S + a_N + a_E + a_W$

On peut maintenant introduire la fonction de courant adimensionnelle  $\psi^+$ , et les termes convectifs deviennent :

$$\begin{cases} F_s = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s \cdot \Delta \theta \\ F_n = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n \cdot \Delta \theta \\ F_e = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e \cdot \Delta \eta \\ F_w = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w \cdot \Delta \eta \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

La fonction de courant variant selon les interfaces du volumes de contrôle défini dans la figure, selon la méthode de E.F. NOGOTOV On choisit un nœud au centre des interfaces (e, w, s, n), la figure suivante représente la fonction de courant à l'interface « e » :

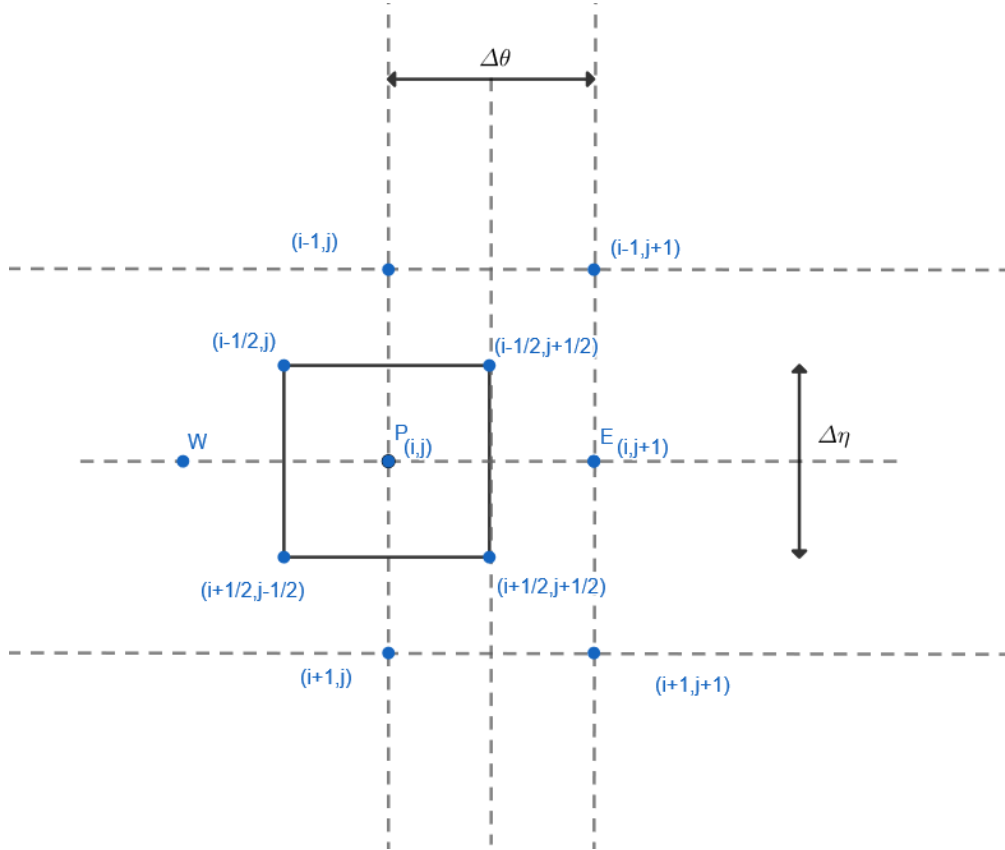


Fig.3 Représentation du volume de contrôle pour l'intégration de la fonction de courant



Ensuite on suppose que :

$$\psi_s^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i + 1, j)}{2}$$

$$\psi_n^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i - 1, j)}{2}$$

$$\psi_e^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j + 1)}{2}$$

$$\psi_w^+ = \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j - 1)}{2}$$

Alors :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j+1}{2}\right)}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e &= \frac{1}{\Delta \eta} \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{4} \\ &\quad - \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j+1)}{4} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{4\Delta \eta} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j+1))$$

En remplaçant dans  $F_e$  :

$$F_e = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j+1))$$

Ensuite :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j-1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\eta}\right)_w = \frac{1}{\Delta\eta} \left( \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i+1,j-1) + \psi^+(i,j) + \psi^+(i,j-1)}{4} - \frac{\psi^+(i,j-1) + \psi^+(i,j) + \psi^+(i-1,j) + \psi^+(i-1,j-1)}{4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\eta}\right)_w = \frac{1}{4\Delta\eta} (\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i+1,j-1) - \psi^+(i-1,j) - \psi^+(i-1,j-1))$$

Donc :

$$F_w = \frac{1}{4} (\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i+1,j-1) - \psi^+(i-1,j) - \psi^+(i-1,j-1))$$

Par la suite :

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta}\right)_s = \frac{\psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i+1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta}\right)_s = \frac{1}{\Delta\theta} \left( \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i+1,j+1) + \psi^+(i,j) + \psi^+(i+1,j)}{4} - \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i,j) + \psi^+(i,j-1) + \psi^+(i+1,j-1)}{4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta}\right)_s = \frac{1}{4\Delta\theta} (\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i+1,j+1) - \psi^+(i,j-1) - \psi^+(i+1,j-1))$$

Alors :

$$F_s = \frac{1}{4} (\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i+1,j+1) - \psi^+(i,j-1) - \psi^+(i+1,j-1))$$

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta}\right)_n = \frac{\psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j+1}{2}\right) - \psi^+\left(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2}\right)}{\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial\theta}\right)_n = \frac{1}{\Delta\theta} \left( \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i-1,j+1) + \psi^+(i,j) + \psi^+(i-1,j)}{4} - \frac{\psi^+(i-1,j) + \psi^+(i,j) + \psi^+(i,j-1) + \psi^+(i-1,j-1)}{4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{4\Delta\theta} (\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1))$$

$$\text{Donc : } F_n = \frac{1}{4} (\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1) - \psi^+(i-1, j-1))$$

Finalement la forme discrétisée de l'équation de la chaleur pour les nœuds P, S, N, E, et W désignée respectivement par  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i, j-1)$ , s'écrit sous la forme :

$$a_P T_P^+ = a_S T_{(i+1,j)}^+ + a_N T_{(i-1,j)}^+ + a_E T_{(i,j+1)}^+ + a_W T_{(i,j-1)}^+ \quad (\text{III.15})$$

III-3) Discrétisation des conditions aux limites de l'équation de la chaleur :

- La paroi supérieure :

$$T^+(1, j) = 0$$

- La paroi inférieure :

$$T^+(NI, j) = 1$$

III-4) Discrétisation de l'équation de mouvement :

Pour discrétiser cette équation de forme elliptique, on applique la méthode des différences finies aux dérivées secondes de la fonction de courant adimensionnelle et aux dérivées de la température, en suivant un schéma centré ce qui nous donne les formes suivantes :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2}\right)_{i,j} = \frac{\psi^+(i+1,j) - 2\psi^+(i,j) + \psi^+(i-1,j)}{\Delta\eta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) - 2\psi^+(i,j) + \psi^+(i,j-1)}{\Delta\theta^2} \quad (\text{III.16})$$

$$\left(\frac{\partial T^+}{\partial \eta}\right)_{i,j} = \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} \quad (\text{III.17})$$

$$\left(\frac{\partial T^+}{\partial \theta}\right)_{i,j} = \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \quad (\text{III.18})$$

En remplaçant ces équations dans l'équation de mouvement, On obtient :

$$\frac{\psi^+(i+1,j)-2\psi^+(i,j)+\psi^+(i-1,j)}{\Delta\eta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1)-2\psi^+(i,j)+\psi^+(i,j-1)}{\Delta\theta^2} =$$

$$Ra_m \cdot H^2 \left[ \left( -\frac{C \cdot \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \frac{T^+(i+1,j)-T^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} + \left( \frac{C \cdot \cosh \eta \cdot \sin \theta}{C^2 (\cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta + \sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta)} \right) \frac{T^+(i,j+1)-T^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right]$$

En isolant le terme  $\psi^+(i,j)$  on trouve :

$$\psi^+(i,j) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\Delta\theta^2} \right)^{-1} \cdot \left[ \frac{\psi^+(i+1,j)+\psi^+(i-1,j)}{\Delta\eta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1)+\psi^+(i,j-1)}{\Delta\theta^2} - \right.$$

$$\left. Ra_m \cdot H^2 \left[ \left( -\frac{C \cdot \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \frac{T^+(i+1,j)-T^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} + \left( \frac{C \cdot \cosh \eta \cdot \sin \theta}{C^2 (\cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta + \sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta)} \right) \frac{T^+(i,j+1)-T^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right] \right]$$

(III.19)

III-5) Discrétisation des conditions aux limites de l'équation de mouvement :

- La paroi supérieure :

$$\psi^+(1,j) = 0$$

- La paroi inférieure :

$$\psi^+(NI,j) = 0$$

III-6) Discrétisation des composantes de la vitesse adimensionnelle :

On utilise la méthode des différences finis avec un schéma centrées afin d'obtenir la forme discrétisées des composantes de la vitesse, qui sont donc de la forme suivante :

$$V_\eta^+(i,j) = \frac{1}{H(i,j)} \cdot \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[ \frac{\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right]$$

$$V_\theta^+(i,j) = \frac{1}{H(i,j)} \cdot \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right]$$

### III-7) Etapes du calcul et algorithme :

Afin de résoudre les systèmes d'équations discrétisées, on doit faire appel à une méthode itérative comportant des coefficients de sous-relaxation pour éviter la divergence lors du calcul numérique, les deux formules utilisées sont les suivantes :

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - G_T)T^n + \left(\frac{G_T}{a_P}\right) \cdot [a_S T_{(i+1,j)}^n + a_N T_{(i-1,j)}^n + a_E T_{(i,j+1)}^n + a_W T_{(i,j-1)}^n]$$

(III.19)

$$\psi^{n+1}(i, j) = (1 - G_M)\psi^n(i, j) + \frac{G_M}{2} \left( \frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{\Delta\theta^2} \right)^{-1} \cdot \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j)}{\Delta\eta^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1)}{\Delta\theta^2} - \right. \\ \left. Ra_m \cdot H^2 \left[ \left( -\frac{C \cdot \sinh \eta \cdot \cos \theta}{c^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \frac{T^+(i+1,j) - T^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} + \left( \frac{C \cdot \cosh \eta \cdot \sin \theta}{c^2 (\cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta + \sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta)} \right) \frac{T^+(i,j+1) - T^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right] \right]$$

(III.20)

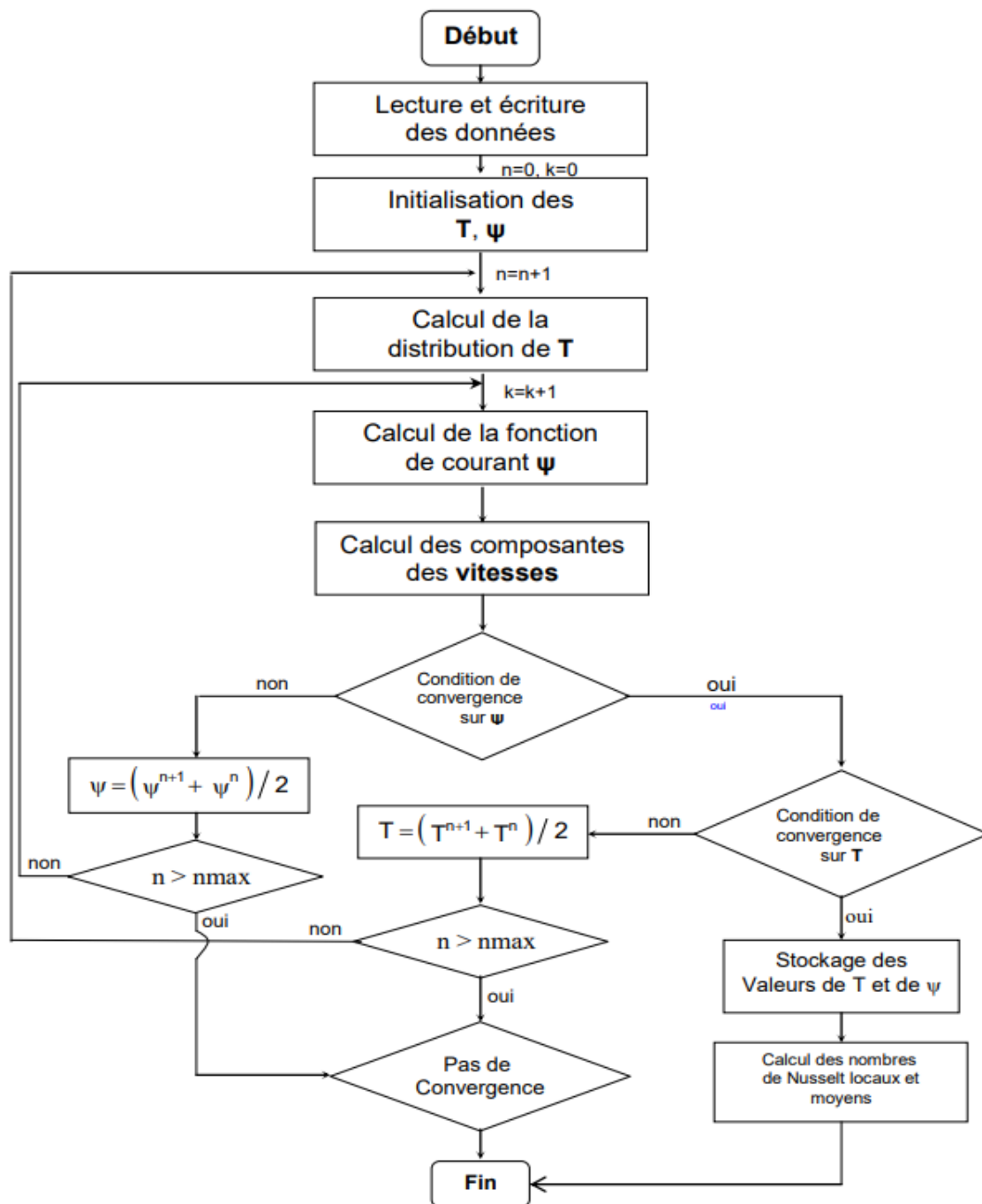
Où  $G_M$  et  $G_T$  sont des facteurs de relaxation, dont les valeurs dépendent de la valeur du nombre de Darcy-Rayleigh modifié.

Les étapes suivies pour la résolution des systèmes d'équations définis précédemment sont les suivantes :

1. Initialisation des valeurs des variables présentes au niveau des nœuds du maillage
2. Calcul des valeurs de la température jusqu'à ce que la variation de  $T^+$  ne dépasse pas la valeur du critère de convergence :

$$\left| \frac{\max T^{n+1} - \max T^n}{\max T^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

3. Calcul des valeurs de la fonction de courant jusqu'à ce que la variation de  $\psi^+$  ne dépasse pas le même critère de convergence choisi pour la température.
4. Calcul des composantes de la vitesse adimensionnelle.
5. Stockage des valeurs de la fonction de courant et de la température.



# Chapitre IV :

## Résultats et interprétation

Après avoir défini le model mathématiques ainsi que les méthodes numériques nécessaires pour arriver à résoudre un tel problème de transfert thermique, on arrive à la partie la plus intéressante qui est le fruit de tout le travail réalisé dans les chapitres précédents.

On s'intéressera à l'étude de deux paramètres influençant le profil de la température et de la fonction de courant dans l'enceinte semi-elliptique, ces paramètres sont : le nombre de Darcy-Rayleigh (Rayleigh Modifié)  $Ra_m$  et l'excentricité de la paroi inférieure indiqué par  $e_2$ .

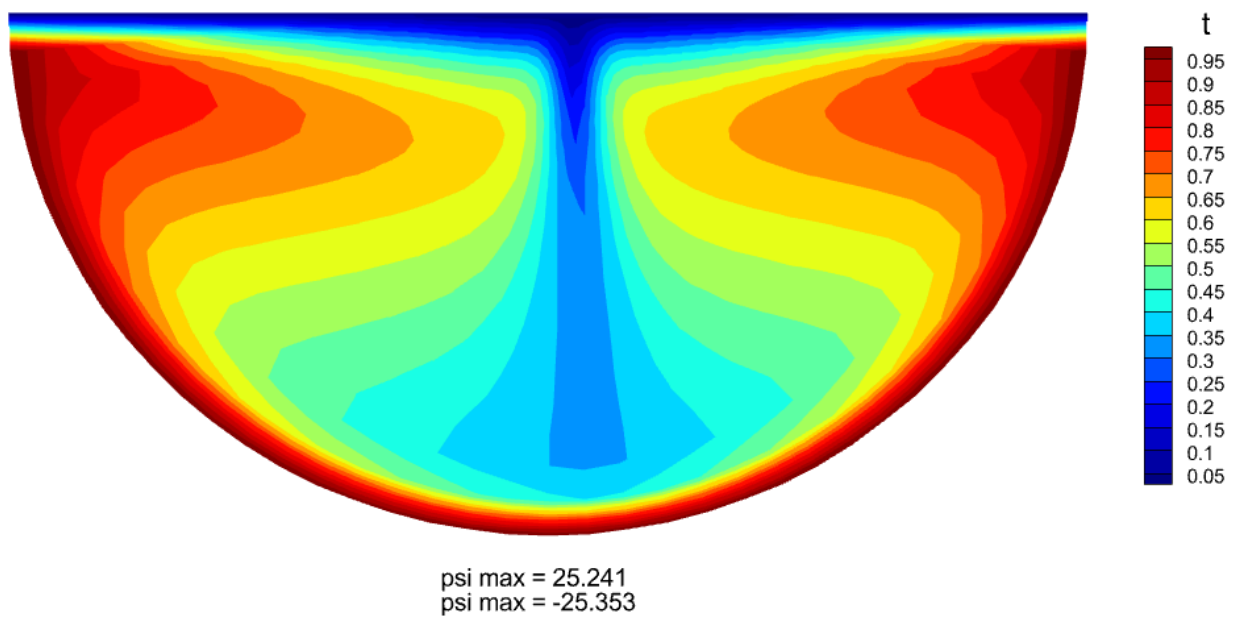
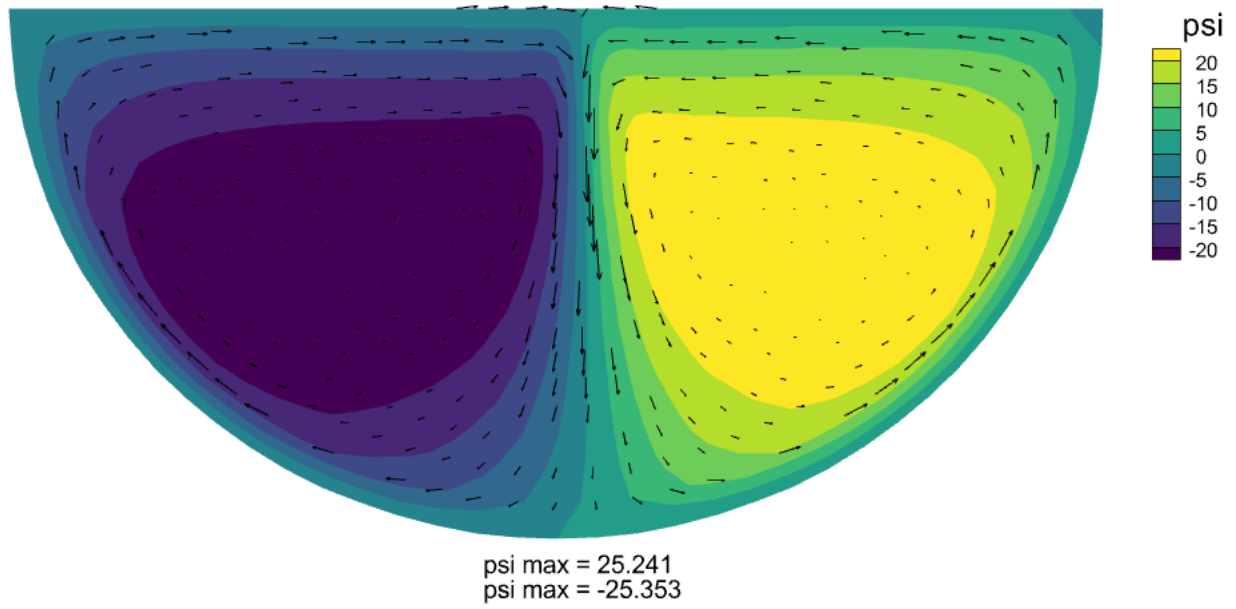
Dans la 1<sup>ère</sup> partie, on étudie les résultats pour la variation l'excentricité  $e_2$  en gardant un nombre de Rayleigh modifié constant tel que :  $Ra_m = 320$  et les paroi inférieurs ayant les excentricités suivantes :

- $e_2 = 0.25$
- $e_2 = 0.5$
- $e_2 = 0.75$
- $e_2 = 0.9$
- $e_2 = 0.95$

La 2<sup>ème</sup> partie représente l'étude des résultats de la variation du nombre de Darcy-Rayleigh modifié pour une valeur constante de l'excentricité de la paroi inférieur  $e_2 = 0.75$  et pour les nombres de Rayleigh modifié suivants :

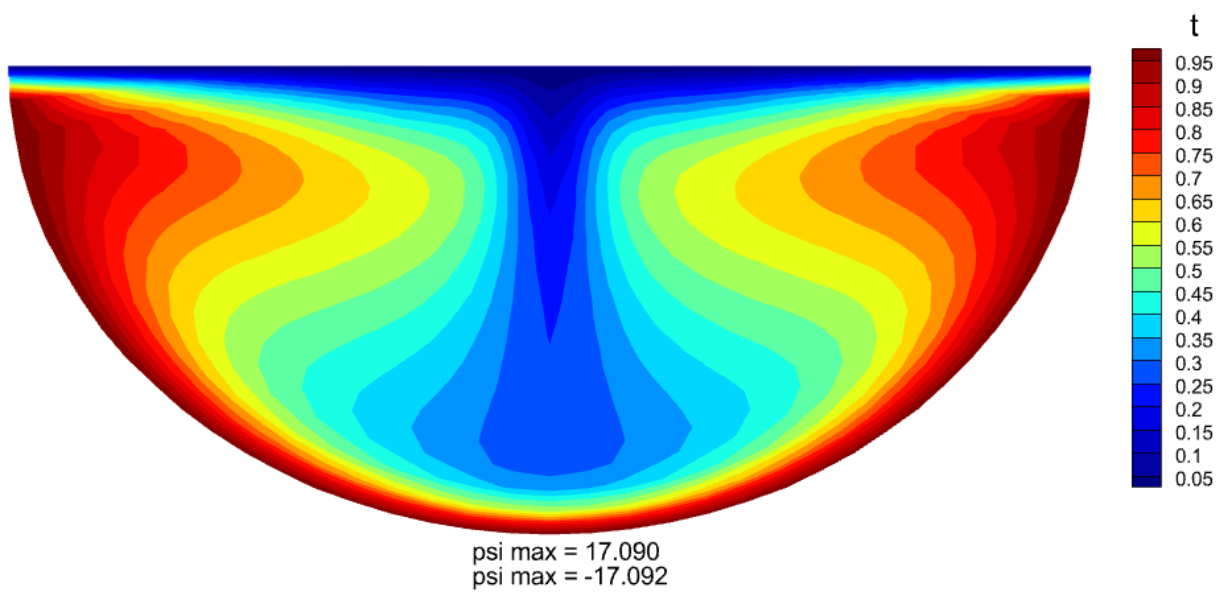
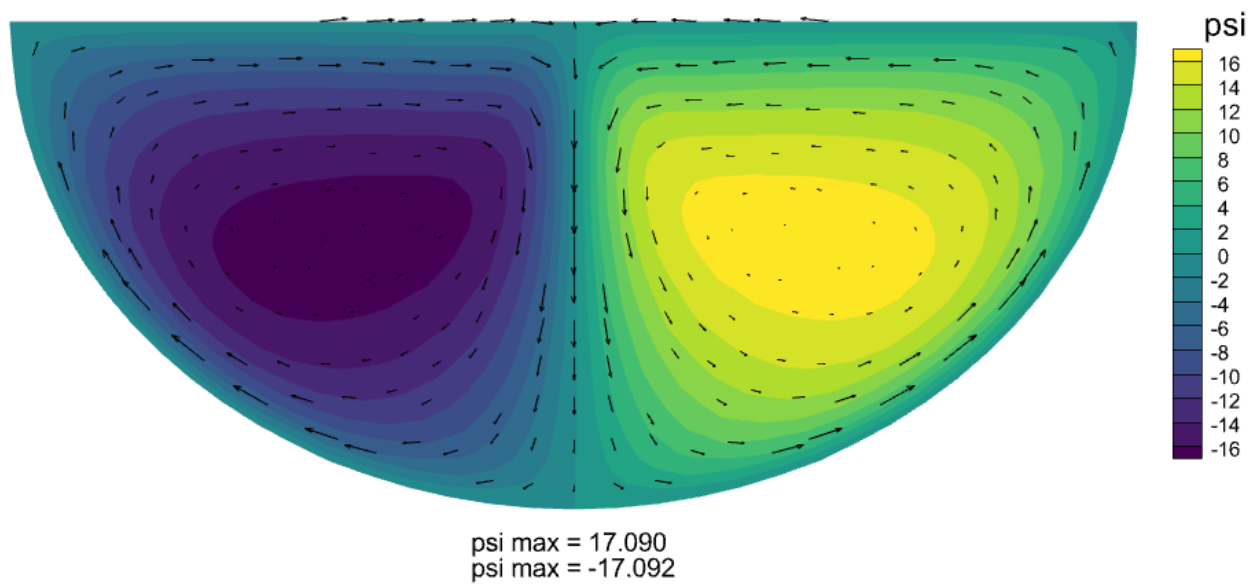
- $Ra_m = 10$
- $Ra_m = 20$
- $Ra_m = 40$
- $Ra_m = 80$
- $Ra_m = 160$
- $Ra_m = 320$

Pour l'excentricité  $e_2 = 0.25$  :

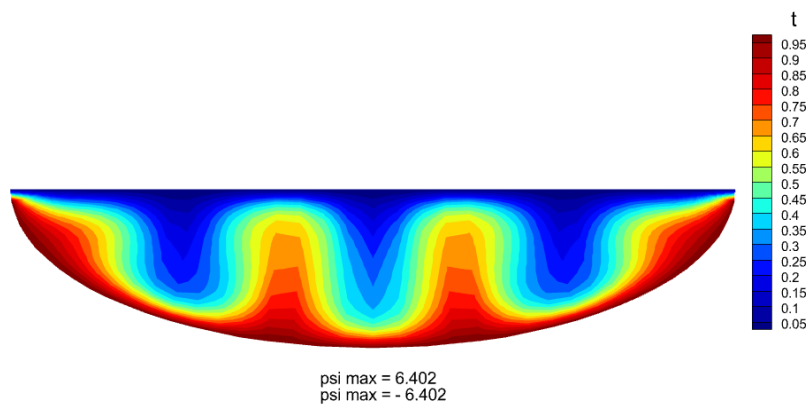
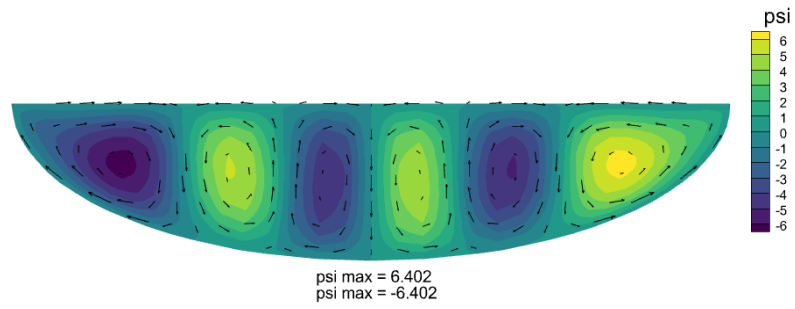




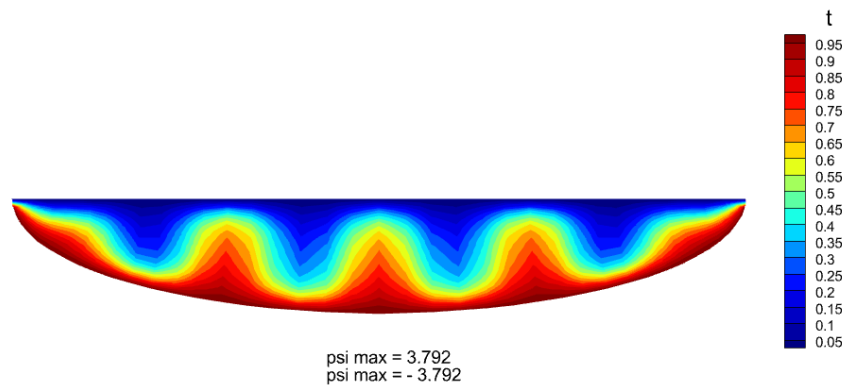
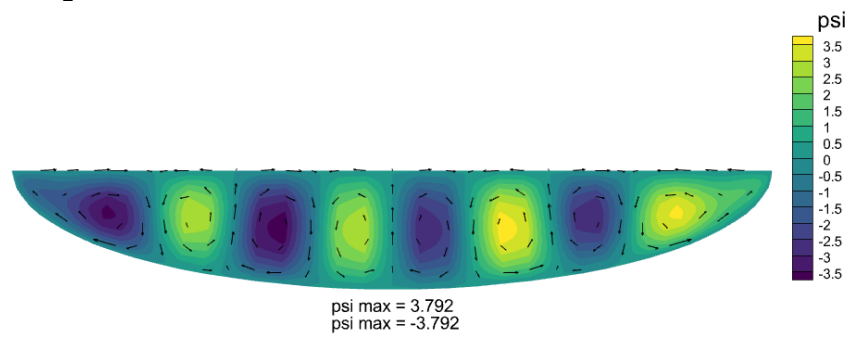
Pour l'excentricité  $e_2 = 0.5$  :



Pour l'excentricité  $e_2 = 0.9$  :



Pour l'excentricité  $e_2 = 0.95$  :



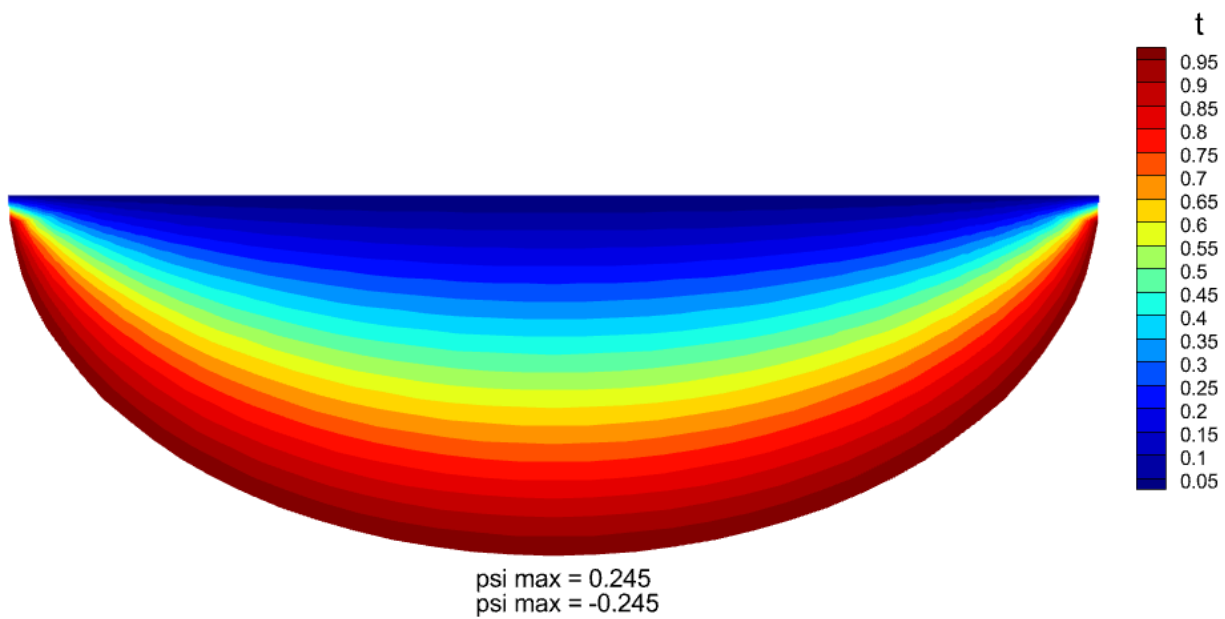
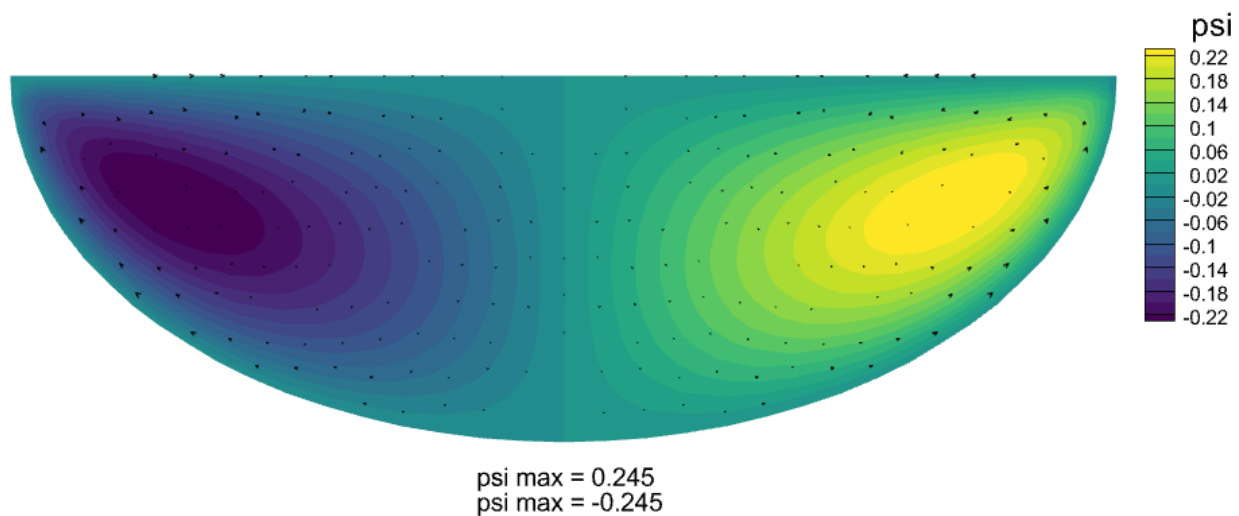
#### IV-1) Interprétation et commentaires (1<sup>ère</sup> Partie) :

Les figures précédentes représentent les profils de la fonction de courant et de la température pour différentes valeurs de l'excentricité de la paroi inférieur de la cuve, on remarque pour les deux premiers cas ( $e_2 = 0.25$  et  $e_2 = 0.5$ ) la formation de deux cellules symétriques par rapport au plan verticale, les lignes de courant de la cellule gauche tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que celle de droite se déplacent dans le sens opposé.

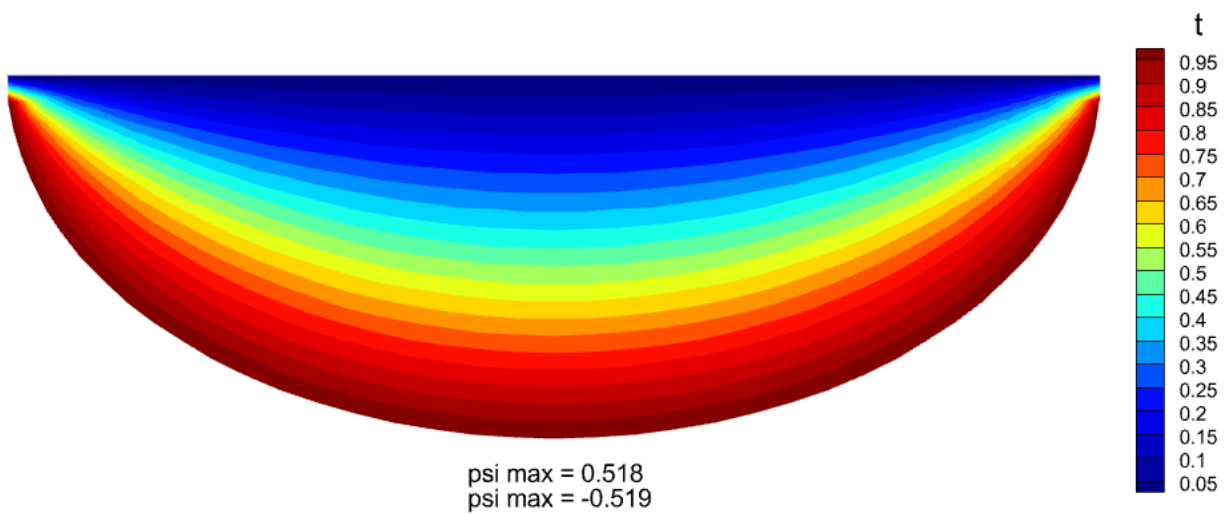
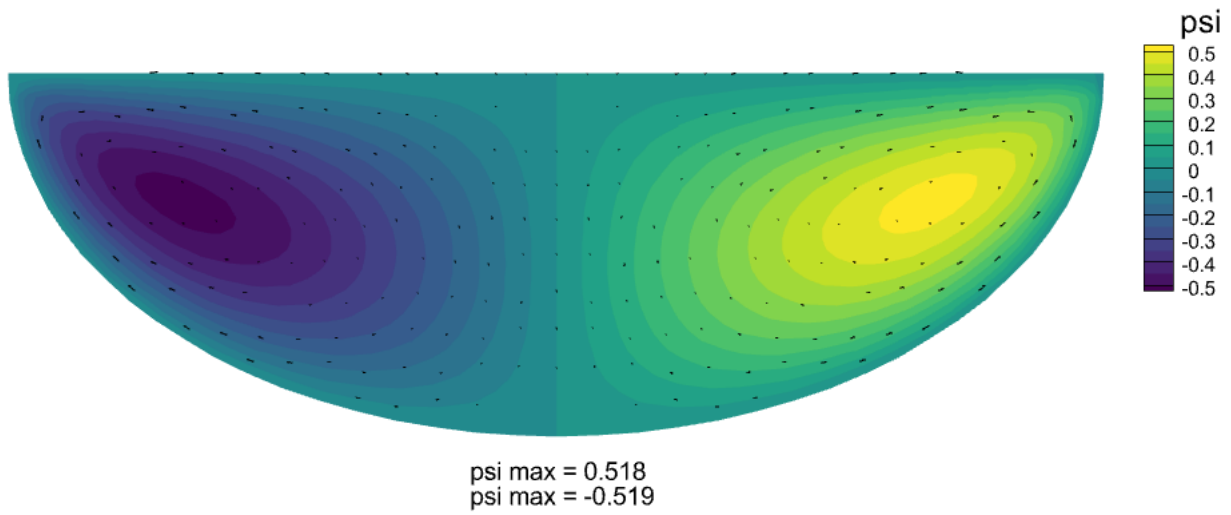
Quant aux cuves avec les excentricités ( $e_2 = 0.9$  et  $e_2 = 0.95$ ), on peut voir au centre de la cuve le développement de multiples cellules symétriques se déplaçant dans des sens opposées l'une par rapport à l'autre, et la présence de bifurcations aux extrémités gauche et droite de la cuve.

Les valeurs  $\psi_{max}$  de indiquent clairement que le mouvement est plus intense dans les deux premiers cas ( $e_2 = 0.25$  et  $e_2 = 0.5$ ) ce qui veut dire un transfert thermique par convection beaucoup plus élevée dans les deux premières cuves, cela est dû au fait qu'il y est plus d'espace entre les deux parois et donc le fluide peut se déplacer plus librement.

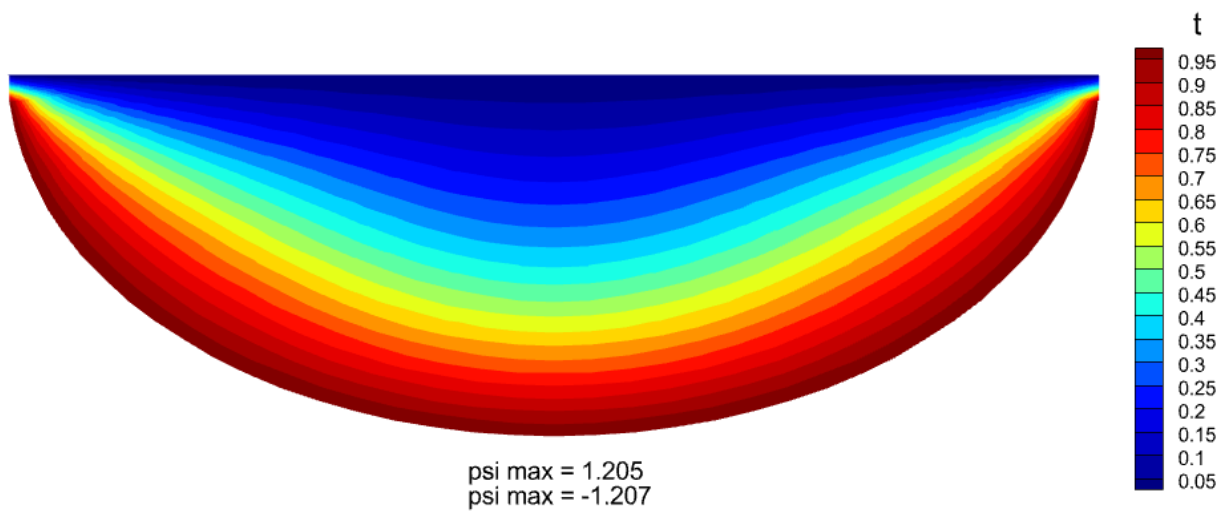
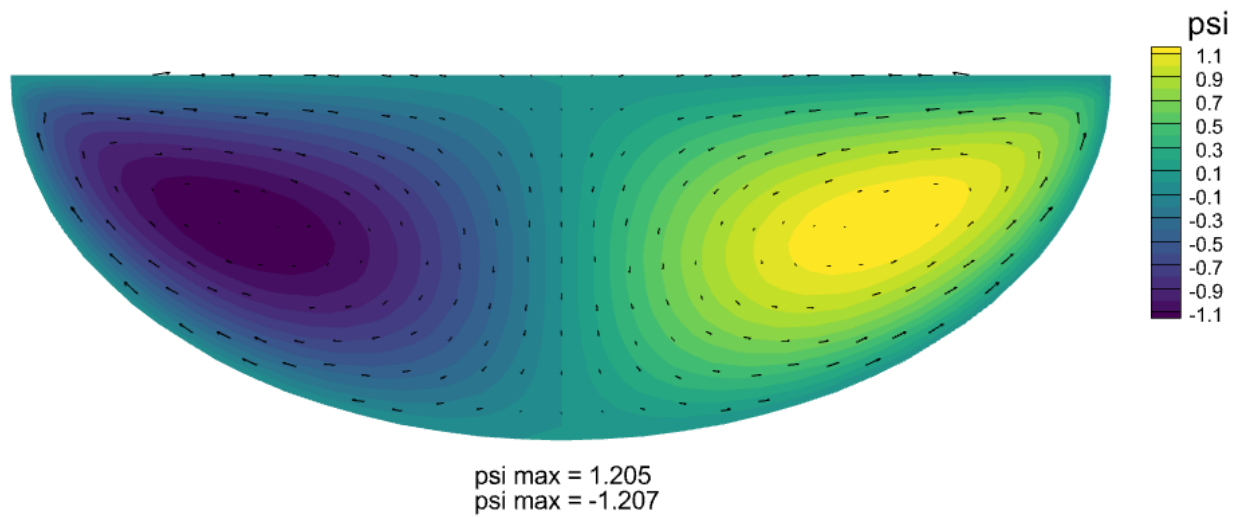
Pour des nombres de Darcy-Rayleigh différents et une excentricité  $e_2 = 0.75$  :  
 $Ra_m = 10$  :



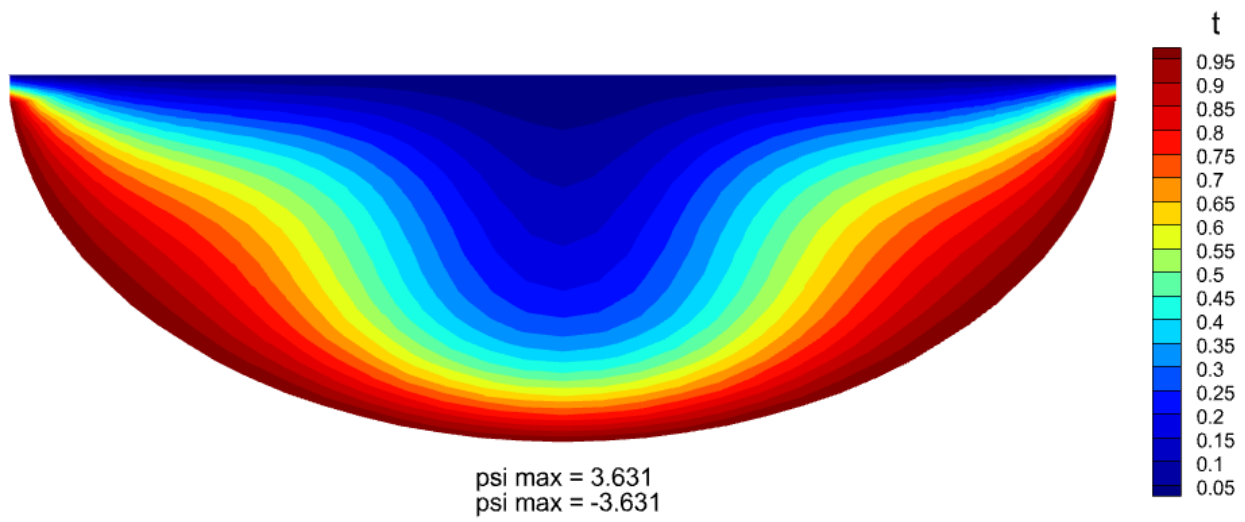
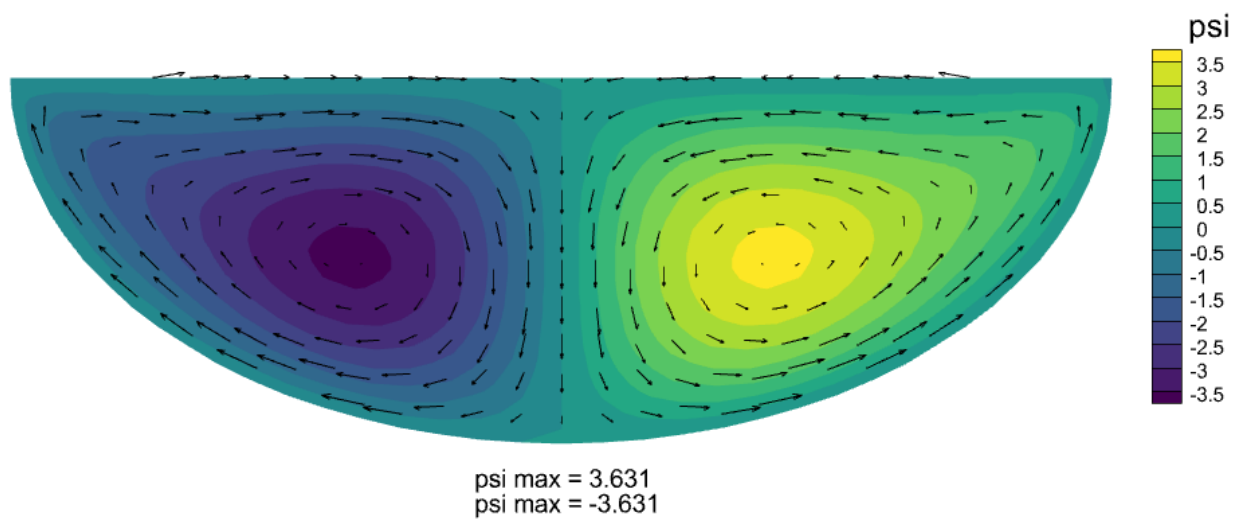
Pour  $Ra_m = 20$  :



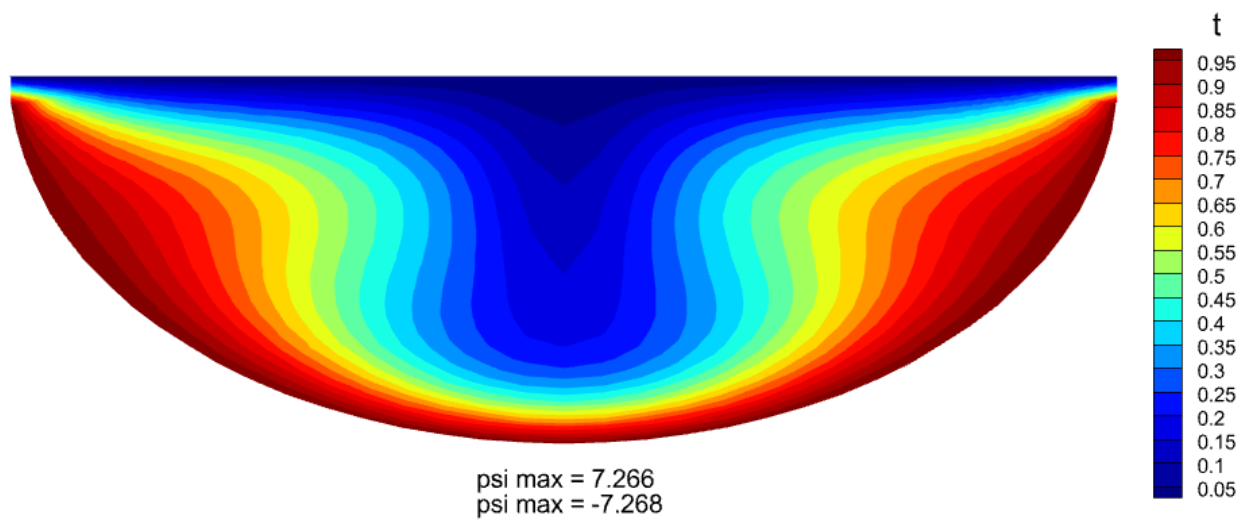
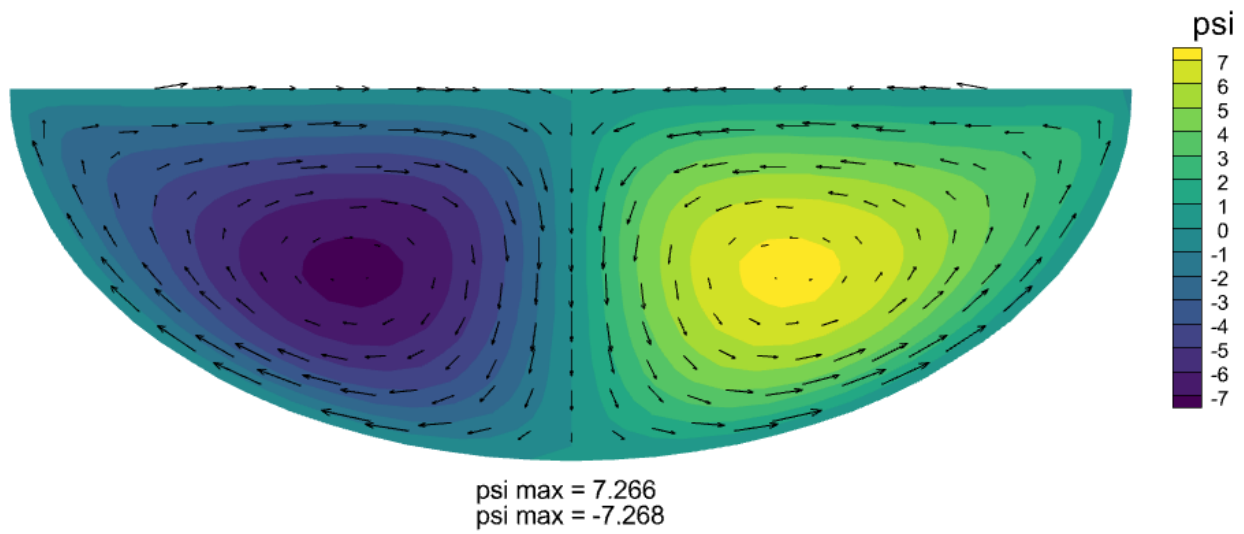
Pour  $Ra_m = 40$  :



Pour  $Ra_m = 80$  :

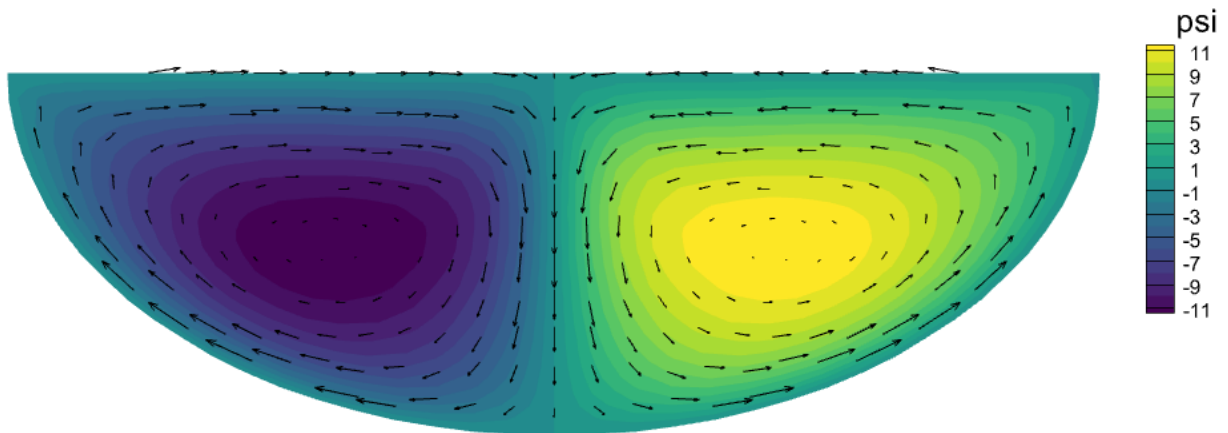


Pour  $Ra_m = 160$  :

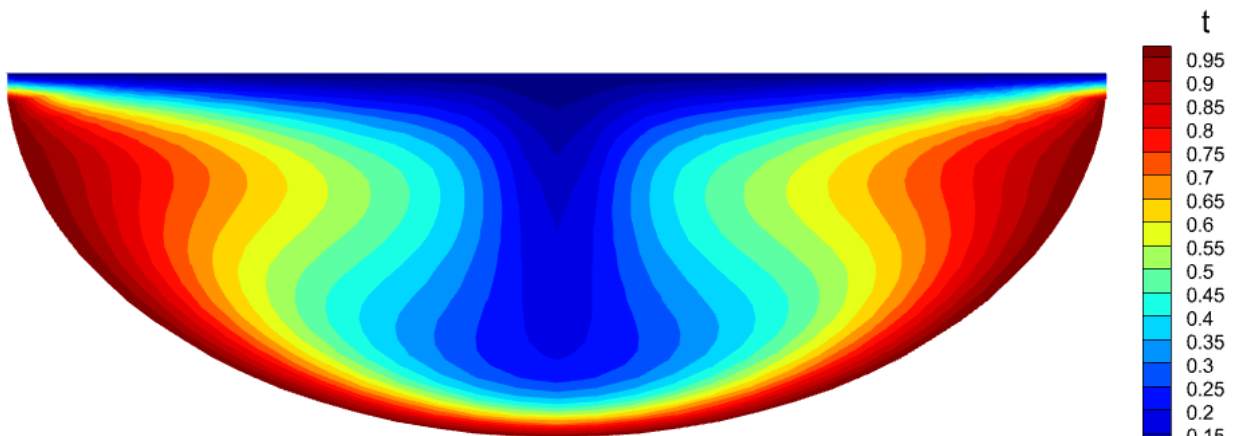




Pour  $Ra_m = 320$  :



psi max = 11.900  
psi max = -11.903



psi max = 11.900  
psi max = -11.903

#### IV-2) Interprétation et commentaires (2<sup>ème</sup> Partie) :

En ce qui concerne le mouvement, on peut voir la formation de deux cellules symétriques par rapport au plan verticale avec des lignes de courants se déplaçant dans le sens horaire pour la cellule de gauche et dans le sens opposé pour la cellule de droite, et cela pour tous les nombre de Rayleigh modifié choisis.

Mais l'on remarque que plus le nombre de Darcy-Rayleigh augmente et plus le mouvement du fluide devient intense :

Pour les  $Ra_m = 10$ ,  $Ra_m = 20$  et  $Ra_m = 40$  les valeurs de  $\psi_{max}$  sont très faibles avec une légère augmentation de  $\psi_{max}$  mais le fluide reste tout de même quasiment statique. On remarque le début de l'intensification du mouvement du fluide à partir de  $Ra_m = 80$  Pour des valeurs de  $\psi_{max} = 3.631$  une valeur qui se développe au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh modifié augmente atteignant un  $\psi_{max} = 11.900$  pour le nombre  $Ra_m = 320$  où on peut voir un mouvement du fluide très intenses et des cellules symétriques bien définis.

Quant à l'influence du nombre de Rayleigh modifié sur les profils de températures, On peut voir que la distribution des couches isothermes est plus ou moins parallèles pour les  $Ra_m = 10$ ,  $Ra_m = 20$  et donc on peut dire que le transfert thermique est par conduction et quasi-conduction pour  $Ra_m = 40$ .

Mais à partir du  $Ra_m = 80$  on remarque le début d'une déformation des courbes isothermes, suivant la direction du mouvement du fluide, qui se réchauffe aux bords de la paroi inférieur chaude et se déplace pour réchauffer les le reste du fluide froid qui se trouve au bord de la paroi supérieur, traduisant ainsi le début du transfert par convection libre, où pour les valeur  $Ra_m = 160$   $Ra_m = 320$  il est plus important et traduit par la déformation des courbes isothermes au centre de la cuve.

# Conclusion

On a mené une étude numérique de la convection naturelle d'un fluide incompressible qui s'écoule au sein d'une cuve semi-elliptique horizontale rempli d'un milieu poreux, pour un cas bidimensionnel stationnaire, avec des parois supérieure et inférieures ayant respectivement des températures relatives froide et chaude.

Pour établir les équations de conservations décrivant ce modèle physique, on s'est reposé sur l'approximation de Boussinesq, et la formulation de vorticité - fonction de courant.

On a ensuite formulé numériquement ce modèle en faisant appel à la méthode des volumes finis, en discrétisant l'équation de la chaleur grâce au schéma « Power Law » recommandé pour les transferts thermiques par convection – diffusion et la méthode des différences finis avec un schéma centré pour l'équation de mouvement, ensuite on a pu effectuer le processus de calcul en utilisant la méthode itérative de Gauss Seidel pour résoudre le système d'équations discrétisées, afin d'aboutir à la distribution de température et de la fonction de courant ainsi que le champ des vecteurs vitesses.

Les résultats ont été obtenus pour deux cas de figures dans le 1<sup>er</sup> on a choisi d'étudier pour un nombre de Darcy-Rayleigh modifié  $Ra_m = 320$  l'influence que pouvait avoir la variation de l'excentricité ( $e_2$ ) sur le transfert thermique par convection et l'écoulement du fluide dans la cuve, dont on a conclu que plus l'excentricité était faible (paroi inférieure se rapprochant de la forme d'un demi-cercle) plus il y avait d'espace entre les deux parois, et donc le fluide se déplacé plus librement ce qui intensifie les effets de la convection thermique dans l'enceinte.

Dans la 2<sup>nd</sup>e partie on a trouvé des résultats intéressants pour une excentricité constante  $e_2 = 0.75$  et plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh modifié (10,20,40,80,160,320) où on a remarqué l'intensification du mouvement du fluide en fonction de la croissance du nombre de Darcy-Rayleigh modifié, et une distribution des isothermes allant de parallèles pour les faibles nombres de Rayleigh (approximé à une conduction pure), à une distribution comprenant des déformations au centre de la cuve.

Cela nous indique que l'augmentation du nombre de Darcy-Rayleigh modifié est responsable de l'intensification de la convection naturelle.

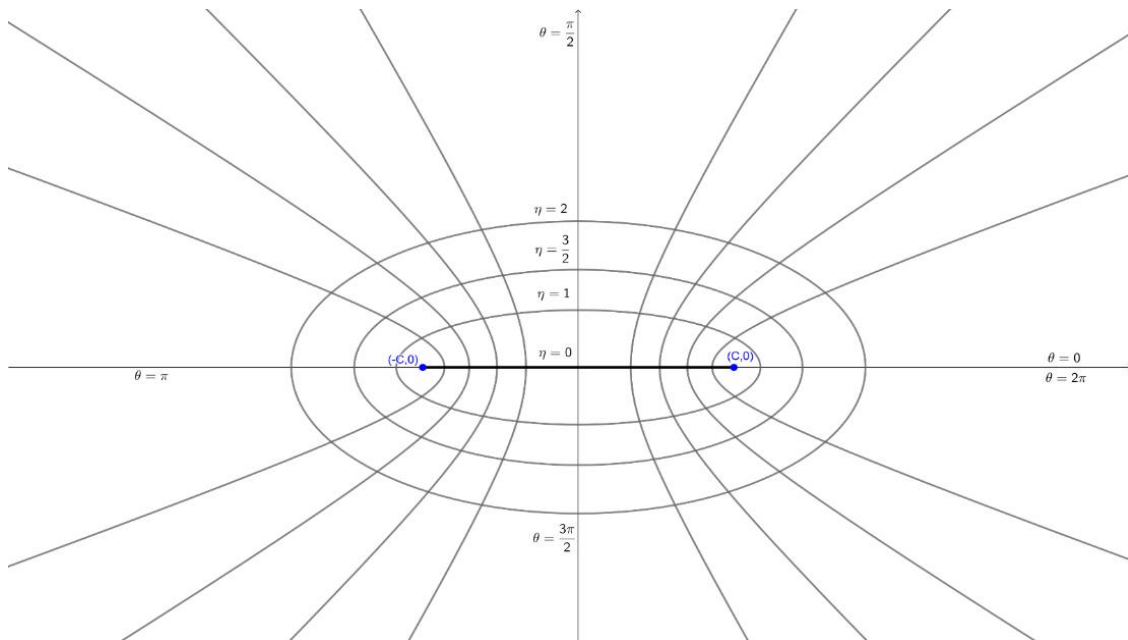
D'autres perspectives intéressantes et complémentaire à ce mémoire serait l'étude du même problème pour des conditions aux limites différentes, ou bien d'opter pour une cuve en forme annulaire, en variant le type de fluide afin de comparer les résultats.

# Annexe

## A) Les Coordonnées Elliptiques :

### A-1) Définition :

En géométrie, le système de coordonnées elliptiques [17] [18] [19] est un système orthogonal à deux dimensions utilisant des lignes de coordonnées représentant des ellipses et des hyperboles confocales. Les deux foyers  $F_1$  et  $F_2$ , situés respectivement à  $-C$  et  $C$  sur l'axe des  $x$  du système de coordonnées cartésiennes, sont généralement considérés comme fixes. On peut observer un système de coordonnées elliptiques sur le plan  $(x, y)$  dans la figure suivante :



Il existe une relation entre Les coordonnées elliptiques  $(\eta, \theta)$  et les coordonnées cartésiennes telle que :

$$\begin{cases} x = C \cdot \cosh \eta \cdot \cos \theta \\ y = C \cdot \sinh \eta \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (A.1)$$

Où  $\eta$  est un nombre réel positif et  $\theta \in [0, 2\pi]$

Les relations précédentes sont obtenues en partant d'une variable complexe qui se traduit par la relation suivante :

$$x + i y = C \cdot \cosh w$$

Où :

$$w = \eta + i \theta$$

Sous forme exponentielle :  $\cosh w = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{(e^\eta \cdot e^{i\theta}) + (e^{-\eta} \cdot e^{-i\theta})}{2}$

Le développement des termes exponentiels, nous donne :

$$\cosh w = \cosh \eta \cdot \cos \theta + i(\sinh \eta \cdot \sin \theta)$$

En remplaçant cette forme dans la première équation on obtient :

$$x + i y = C(\cosh \eta \cdot \cos \theta + i \sinh \eta \cdot \sin \theta)$$

En identifiant la partie réelle  $x$  et la partie imaginaire  $y$  on trouve :

$$x = C \cdot \cosh \eta \cdot \cos \theta$$

$$y = C \cdot \sinh \eta \cdot \sin \theta$$

A partir du système d'équations démontré ci-dessus et la relation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

On peut démontrer que l'équation d'une ellipse est satisfaite pour des valeurs constantes de  $\eta$  comme suit :

Du système d'équations on obtient :

$$\cos \theta = \frac{x}{C \cdot \cosh \eta} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{y}{C \cdot \sinh \eta}$$

Donc :  $\cos^2 \theta = \frac{x^2}{C^2 \cdot \cosh^2 \eta} \quad ; \quad \sin^2 \theta = \frac{y^2}{C^2 \cdot \sinh^2 \eta}$

En remplaçant dans la relation trigonométrique, on obtient :

$$\frac{x^2}{C^2 \cdot \cosh^2 \eta} + \frac{y^2}{C^2 \cdot \sinh^2 \eta} = 1$$

Cette équation décrit une famille d'ellipses de demi-grand axe :  $A = C \cdot \cosh \eta$

Et de demi-petit axe :  $B = C \cdot \sinh \eta$

Par un raisonnement similaire et en partant de l'équation :

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

On trouve que pour des valeurs constantes de  $\theta$  l'équation suivante représentant des hyperboles est satisfaite :

$$\frac{x^2}{C^2 \cdot \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{C^2 \cdot \sin^2 \theta} = 1$$

## A-2) Excentricité :

La formule de l'excentricité est donnée par :  $e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$  pour  $0 < e < 1$

On peut écrire une formule reliant  $\eta$  à l'excentricité  $e$  comme suit :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1 - e^2} + 1}{1 - \sqrt{1 - e^2}} \right)$$

## A-3) Démonstrations :

### A-3-1) Analyse vectorielle en coordonnées elliptique :

Dans un système de coordonnées elliptique les coefficients métriques sont :

$$\begin{cases} h = h_\eta = h_\theta = C \sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta} \\ h_z = 1 \end{cases}$$

Et les formules du gradient de la divergence et le laplacien s'écrivent respectivement :

$$\vec{\nabla} \varphi = \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \vec{i} + \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \vec{j}$$

Pour un champ de vecteurs  $F$  :

$$\vec{\nabla} \cdot F = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h \cdot F_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h \cdot F_\theta) \right]$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]$$

### A-3-2) Equations de conservation en coordonnées elliptique :

Les équations de continuité (II.11) et de la chaleur (II.13) peuvent être déduite directement grâce aux formules de gradient et de divergence énoncés précédemment.

-Equation de mouvement :

En coordonnées elliptiques les termes à gauche de l'équation de mouvement (II.10) s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] \quad (A.1)$$

Il faut suivre les étapes ci-dessous pour écrire le terme  $\frac{\partial T}{\partial x}$  à droite de l'équation en fonction des coordonnées elliptiques :

On doit trouver les inconnues  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  dans l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

Les dérivées totales de  $\eta$  et  $\theta$  sont :

$$\begin{cases} d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \\ d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On peut écrire les dérivées totales de  $x$  et  $y$  comme suit :

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

En remplaçant les expressions de  $x$  et  $y$  dans le système (A.4), on trouve que :

$$\begin{aligned} d\eta &= \left( \frac{C \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) dx + \left( \frac{C \cosh \eta \cdot \sin \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) dy \\ d\theta &= \left( \frac{C \cosh \eta \cdot \sin \theta}{-C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) dx + \left( \frac{C \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) dy \end{aligned}$$

Par identification avec le système (A.3) on trouve  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  qu'on peut ensuite remplacer dans l'équation (A.2) pour trouver le terme  $\frac{\partial T}{\partial x}$  en fonction des coordonnées elliptiques :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \left( \frac{C \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left( \frac{C \cosh \eta \cdot \sin \theta}{-C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \quad (\text{A.5})$$

En remplaçant (A.5) et (A.1) dans l'équation (II.10), on arrive à l'équation de mouvement en coordonnées elliptique (II.12) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) &= \frac{K \cdot \rho_0 \cdot g \cdot \beta}{\mu} \cdot \left[ \left( - \frac{C \cdot \sinh \eta \cdot \cos \theta}{C^2 (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta)} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{C \cdot \cosh \eta \cdot \sin \theta}{C^2 (\cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta + \sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta)} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

# Références Bibliographique

1. S. Bories, Natural convection in Porous Media, in Advances in Transport in Porous Media (Edited by J. Bear and M. Y. Corapcioglu). Martinus Nijhoff, Dordrecht (1987).
2. Donald A. Nield, Adrian Bejan (auth.) - Convection in Porous Media-Springer International Publishing (2017)
3. Bear, J. (1972). Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier Publishing Co.
4. Dullien, F. A. (1992). Porous media, fluid transport and pore structure. Académie press, inc, 2e édition. 574 p.
5. Kozeny J (1927). Ueber kapillare Leitung des Wassers im Boden. Sitzungsber Akad. Wiss.136 : 271-306
6. Carman, P. C. (1937). Fluid flow through granular beds. Transactions. -Institution of chemical engineers, vol. 15, p. 150-166.
7. Blunt, M. J. (2017). Multiphase Flow in Permeable Media: A Pore-Scale Perspective Cambridge University Press.
8. Yunus A. Çengel - Heat Transfer\_ A Practical Approach-McGraw-Hill (2002)
9. Darcy H (1856). Les Fontaines Publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris
10. K.C. Karki and P.S. Sathyamurthy", laminar mixed convection in a horizontal semicircular duct with axially nonuniform thermal boundary condition on the flat wall", Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol.25, pp. 171-189, (1994).
11. M.A. Khiat, N. RETIEL et L. ADJLOUT. « Etude numérique de la convection thermosolutale dans une cavité demi-cylindrique horizontale ». Thèse de Magister, Univ.Mostaganem. Algérie. (2003)
12. Abdelkarim Bouras, Djedid Taloub, Abdelhadi Beghidja, Zied Driss. Laminar Natural Convection Study in a Horizontal Half- Elliptical Enclosure Using Heater on Horizontal Wall, Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences, Vol. 53, Issue 2, pp. 223-233. (2019)
13. Philip, J. R. Free convection at small Rayleigh number in porous cavities of rectangular, elliptical, triangular and other cross-sections, Int. J. Heat and Mass Transfer, 25, pp. 1503-1509 (1982)



14. J.P. Caltagirone, Thermoconvective instabilities in a Porous Medium bounded by two concentric horizontal cylinders, J. Fluid Mech.vol 76, pp. 337-362 (1976).
15. Patankar, Suhas V - Numerical heat transfer and fluid flow-Taylor & Francis Group (1980)
16. E.F. Nogotov, Applications of Numerical Heat transfer, McGraw-Hill book company, New York, (1978)
17. « Coordonnées elliptiques », dans Michiel Hazewinkel, Encyclopædia of Mathematics, Springer, (ISBN 978-1556080104, lire en ligne [\[archive\]](#))
18. Korn GA et Korn TM. (1961) *Manuel mathématique pour les scientifiques et les ingénieurs*, McGraw-Hill.
19. Weisstein, Eric W. « Coordonnées cylindriques elliptiques ». De MathWorld — Une ressource Web Wolfram

## ملخص

**العنوان: دراسة رقمية لنموذج حمل حراري طبيعي داخل خزان شبه إهليلجي مملوء بمائع نيوتوني مشبع بوسط مسامي**

نهدف إلى دراسة التوجيه الطبيعي الرقمي لمائع نيوتوني غير قابل للضغط، في حالة تدفق رقائقي وثابت، داخل خزان شبه بيضوي يشبع بواسطة وسط مسامي. يتم الاحتفاظ بالجدران الداخلية والخارجية للخزان عند درجات حرارة ثابتة. باستخدام قانون دارسي، وتقريب بوسينك، وصيغة التدوير-دالة التيار، نعبر عن معادلات استمرارية الحركة والحرارة في نظام إحداثيات إهليلجي. نحل النموذج الرياضي باستخدام طريقة الحجوم المحدودة. يتم تقديم وتفسير النتائج المتحققة، التي تفحص توزيع الخطوط الأيزوثيرمية وخطوط التيار، مع مراعاة العوامل الهندسية وعدد رايلي-دارسي المعدل.

**المفاتيح:** التوجيه الطبيعي، وسط مسامي، قانون دارسي، تقريب بوسينك، إحداثيات إهليلجية، أحجام نهائية، مائع نيوتوني

# Abstract

**Title:** Numerical approach of the natural convection of a Newtonian fluid within a semi-elliptical tank saturated by a porous medium

We aim to numerically study the natural convection of an incompressible Newtonian fluid, under laminar and steady-state conditions, within a semi-elliptical tank saturated with a porous medium. The internal and external walls of the tank are maintained at constant temperatures. By employing Darcy's law, the Boussinesq approximation, and the vorticity-stream function formulation, we express the continuity, momentum, and heat equations in an elliptical coordinate system. The mathematical model is solved using the finite volume method. The obtained results, which investigate the distribution of isotherms and streamlines, are presented and interpreted while considering geometric factors and the modified Rayleigh-Darcy number.

**Keywords :** natural convection, porous medium, Darcy's law, Boussinesq approximation, elliptic coordinates, finite volumes, Newtonian fluid.

# Résumé

Nous visons à étudier numériquement la convection naturelle d'un fluide newtonien incompressible, en régime laminaire et permanent, au sein d'une cuve semi-elliptique saturée par un milieu poreux. Les parois internes et externes de la cuve sont maintenues à des températures constantes. En utilisant la loi de Darcy, l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant, nous exprimons les équations de continuité de quantité de mouvement et de chaleur dans un système de coordonnées elliptiques. Nous résolvons le modèle mathématique en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus, qui examinent la distribution des isothermes et des lignes de courant, sont présentés et interprétés en tenant compte des facteurs géométriques et du nombre de Rayleigh-Darcy modifié.

**Mots-clés :** convection naturelle, milieu poreux, loi de Darcy, approximation de Boussinesq, coordonnées elliptiques, volumes finis, fluide newtonien