Лабораторная работа №2.

Решение систем линейных уравнений.

Везде далее рассматриваем решение системы линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

или в матричном виде: $AX = B$, где на матрицу А будем накладывать определенные условия.

Из курса линейной алгебры вам известны методы точного нахождения решения системы (1): метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы.

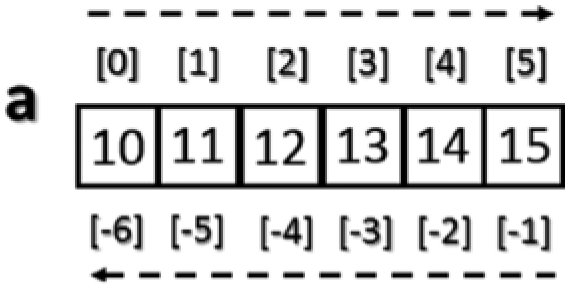
В большинстве случаев решение линейной системы уравнений «руками» представляет определенные вычислительные сложности и становится труднореализуемо при большом количестве неизвестных. В данном курсе вы познакомитесь с численными методами решения линейных систем.

2.1 Срезы матриц.

Первым делом познакомимся с различными программными реализациями умножения векторов и матриц. Напомню, что в NumPy матрица реализована как двумерный массив ndarray. Ndarray является многомерным однородным массивом с заранее заданным количеством элементов. Однородный — потому что практически все объекты в нем одного размера или типа. Количество размерностей и объектов массива определяются его размерностью (shape), кортежем N-положительных целых чисел. Они указывают размер каждой размерности. Размерности определяются как оси. Размер массивов NumPy фиксирован, а это значит, что после создания объекта его уже нельзя поменять. Это поведение отличается от такового у списков Python, которые могут увеличиваться и уменьшаться в размерах.

Подробнее о массивах смотри https://pythonru.com/biblioteki/biblioteka-numpy-ndarray-sozdanie-massiva-i-tipy-dannyh

При работе с индексами массивов всегда используются квадратные скобки ([ ]). С помощью индексирования можно ссылаться на отдельные элементы, выделяя их или даже меняя значения. При создании нового массива шкала с индексами создается автоматически.



Для получения доступа к одному элементу на него нужно сослаться через его индекс.

```
>>> a = np.arange(10, 16)
>>> a
array([10, 11, 12, 13, 14, 15])
>>> a[4]
14
```

Для выбора нескольких элементов в квадратных скобках можно передать массив индексов.

Двухмерные массивы, матрицы, представлены в виде прямоугольного массива, состоящего из строк и колонок, определенных двумя осями, где ось 0 представлена строками, а ось 1 — колонками. Таким образом, индексация происходит через пару значений; первое — это значение ряда, а второе — колонки. И если нужно получить доступ к определенному элементу матрицы, необходимо все еще использовать квадратные скобки, но уже с двумя значениями.

В зависимости от части массива, которую необходимо извлечь, нужно использовать синтаксис среза; это последовательность числовых значений, разделенная двоеточием (:) в квадратных скобках.

Чтобы лучше понять синтаксис среза, необходимо рассматривать и случаи, когда явные числовые значения не используются. Если не ввести первое число, NumPy неявно интерпретирует его как 0 (то есть, первый элемент массива). Если пропустить второй — он будет заменен на максимальный индекс, а если последний — представлен как 1. То есть, все элементы будут перебираться без интервалов.

```
>>> a[::2]
array([10, 12, 14])
>>> a[:5:2]
array([10, 12, 14])
>>> a[:5:]
array([10, 11, 12, 13, 14]
```

В случае с двухмерными массивами срезы тоже работают, но их нужно определять отдельно для рядов и колонок. Например, если нужно получить только первую строку:

```
array([[10, 11, 12],
       [13, 14, 15],
       [16, 17, 18]])
>>> A[0,:]
array([10, 11, 12])
```

Как видно по второму индексу, если оставить только двоеточие без числа, будут выбраны все колонки. А если нужно выбрать все значения первой колонки, то необходимо писать обратное.

```
>>> A[:,0]
array([10, 13, 16])
```

Если же необходимо извлечь матрицу меньшего размера, то нужно явно указать все интервалы с соответствующими индексами.

2.2 Умножение матриц.

Операция умножения матриц вам хорошо известна из курса линейной алгебры. Умножение матрицы A на матрицу B возможно только в случае, когда количество столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы B. Элемент cij новой матрицы получается как умножение i-той строки матрицы A на j-тый столбец матрицы B.

Возможно несколько реализаций матричного умножения: в скалярном виде, в векторном и в матричном.

Скалярный вид: $c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, где матрица A имеет размер nxk, матрица B имеет размер kxm.

Алгоритм умножения матриц в скалярном виде (поэлементный) представлен в приложенном файле.

```
Скалярный вид умножения матриц.
```

```
n = 3
k = 4
m = 5
A =  np.random.randint(0,11,(n, k))
B = np.random.randint(0,11,(k, m))
C = np.zeros((n,m), dtype = int)
```

```
for i in range(n):
    for j in range(m):
        for p in range(k):
            C[i,j] = C[i,j] + A[i,p]*B[p,j]
```

Однако такое решение является достаточно медленным.

Векторные операции существенно увеличивают скорость вычислений.

Алгоритм умножения матриц в векторном виде позволяет сразу находить произведение i-той строки матрицы A на j-тый столбец матрицы B.

Векторный вид: $c_{ij} = A(i,:) \cdot B(:, j)$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.

Напомню, что в этом случае операция умножения – это уже скалярное умножение из модуля NumPy (.dot)

Мы можем использовать также матричное умножение. В нашем случае будем «собирать» матрицу C по строкам (для нахождения i-той строки матрицы C умножим i-тую строку матрицы A на матрицу B)

Матричный вид: C(i, :) = A(i, :)·B .

Можно также «собрать» матрицу C по столбцам.

2.2 Решение треугольных систем линейных уравнений.

Вернемся к решению системы (1). Наиболее просто она решается, когда матрица A приведена к треугольному виду с единицами по главной диагонали (к унитреугольному виду). Напомню, что матрицу A всегда можно привести к подобному виду, если определитель матрицы A не равен 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Решение системы прямой подстановкой:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 - a_{21}x_1 \\ \dots \\ x_i = b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k \end{cases}$$

Алгоритм решения в векторном виде приведен в приложенном файле:

```
A = np.array([[1, 0, 0], [3, 1, 0], [-4, 5, 1]], int) # Матрица (левая часть системы)
B = np.array([2, 4, 3], int) # Вектор (правая часть системы)
x = np.zeros((3,1), int)

x[0] = B[0]

for i in range(1,3):
    x[i] = B[i] - np.dot(A[i, :i], x[ :i])


print(x)
```

В цикле умножаем элементы i-той строки матрицы A до главной диагонали на часть вектора x.

Также возможно решение без введения переменной x, хранящей решение системы.

2.2 Приведение матрицу A к LU виду.

LU разложение – это представление матрицы A в виде произведения двух матриц: L – нижняя унитреугольная, U – верхняя треугольная. LU-разложение используется для решения систем линейных уравнений, обращения матриц и вычисления определителя. LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима (невырождена), и все ведущие (угловые) главные миноры матрицы A невырождены.

Допустим, нам удалось найти матрицы L и U такие, что A = LU. Очевидно, это возможно только в случае невырожденной матрицы A. Тогда $a_{11} = l_{11} \cdot u_{11}$.

Предположим, что $a_{11} = 0$, но тогда $l_{11} = 0$ или $u_{11} = 0$, что означает равенство нулю первой строки матрицы L или первого столбца матрицы U, из чего следует их вырожденность.

Итак, далее считаем, что $a_{11} \neq 0$. Представим матрицу A как блочную матрицу: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ v & A' \end{pmatrix}$, где w – вектор-строка $w = (a_{12}, \ldots a_{1n})$ размера 1x(n-1), v – вектор-столбец $v = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ размера (n-1)x1, A' - матрица (минор) размера (n-1)x(n-1). Аналогичным образом представим матрицы L и U:

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_L & L' \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & w_U \\ 0 & U' \end{pmatrix}$. Тогда:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_L & L' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & w_U \\ 0 & U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & w_u \\ v_L \cdot a_{11} & v_L \cdot w_U + L' \cdot U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ v & A' \end{pmatrix}.$$

Заметим, что умножение $v_L \cdot w_U$ - это умножение столбца размера (n-1)x1на строку размера 1x(n-1), что влечет получение матрицы размера (n-1)x(n-1).

Итак, получили формулы нахождения матриц L и U:

$$w_U = w$$
$$v_L = v / a_{11} \quad (\textit{деление вектора} - \textit{столбца на число}$$
$$L' \cdot U' = A' - \frac{v \cdot w}{a_{11}}$$

Итак, нахождение LU разложения для матрицы A сведено к нахождению LU разложения для матрицы $L' \cdot U'$ размера (n-1)x(n-1).

Выражение $A' - \frac{v \cdot w}{a_{11}}$ называется дополнением Шура элемента a_{11} в матрице A.

Приведем алгоритм нахождения LU –разложения.

```python
#алгоритм с вики
U = np.zeros((n,n), float)
L = np.identity(n, float)

for i in range(n):
    for j in range(n):
        if i<=j:
            U[i,j] = A1[i,j] -  np.dot(L[i, :i], U[ :i, j])
        if i>j:
            L[i,j] = (A1[i,j] -  np.dot(L[i, :j], U[ :j, j]) )/ U[j,j]
```

2.3 Применение LU разложения.

Решение систем линейных уравнений

Полученное LU-разложение матрицы A (матрица коэффициентов системы) может быть использовано для решения семейства систем линейных уравнений с различными векторами b в правой части:

Ax=b

Если известно LU-разложение матрицы A=LU, исходная система может быть записана как:

LUx=b.

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система

Ly=b.

Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система

Ux=y.

Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

Обращение матриц

Обращение матрицы A эквивалентно решению линейной системы

AX=E,

где X — неизвестная матрица, E — единичная матрица. Решение X этой системы является обратной матрицей A^{-1}.

Систему можно решить описанным выше методом LU-разложения.

Вычисление определителя матрицы

Имея LU-разложение матрицы A=LU,

можно непосредственно вычислить её определитель,

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = l_{11} \cdot \ldots \cdot l_{nn} \cdot u_{11} \cdot \ldots u_{nn}$$

Вопросы к лабораторной работе

1. Знать определение умножения матриц
2. Определение линейной системы уравнений.
3. Методы решения систем – метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы.
4. Верхнетреугольная, нижнетреугольная, унитреугольная матрицы.
5. Определение LU разложения.
6. Идея поиска LU разложения.

Рекомендации по выполнению лабораторной работы.

В 3 задании рекомендуется использовать функции np.tril и np.triu.

#np.triu   и np.tril - для создания треугольных матриц

numpy.tril(m, k=0) – возвращает копию массива m, с элементами выше k-той диагонали равными нулю. По умолчанию k=0 (главная диагональ), k<0 диагональ ниже главной, k>0 диагональ выше главной диагонали.

np.triu

В 3 задании для решения использовать или алгоритм прямой подстановки, приведенной в исходном файле, или разработать свой алгоритм прямой подстановки для верхнетреугольной матрицы и для не унитреугольной матрицы.

Функцию solve использовать для проверки своего решения.

В 4 задании обязательно отдельно выводить матрицы L и U, а также проверить правильность их нахождения.

В 4 задании рекомендуется выполнить следующие действия.

1. Ввести свои данные
2. Найти для матрицы A LU разложение.
3. Проверить правильность полученного LU разложения
4. Решить систему L(UX)= B , где UX положить за неизвестный вектор Y (то есть решить систему LY = B) методом прямой подстановки, приведенной в моем файле.
5. Решить систему UX = Y собственным разработанным алгоритмом.
6. Проверить функцией solve найденный вектор X.

Задание к лабораторной работе 2.

Вариант1.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-3,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 2,3,4,5 строк и 7,8,9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел из интервала (2,3) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3$$
$$5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$$
$$7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8$$
$$14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$$

Вариант2.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 10 . Найти скалярное произведение 4 строки на 5 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из интервала [2,7) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу С 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4$$
$$5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5$$
$$5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3$$
$$6.8x_1 = 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3$$

Вариант3.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,2] размера 11 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,6,7 строк и 7,8,9, 10,11 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу А 5 порядка, вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7$$
$$6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5$$
$$14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6$$
$$8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7$$

Вариант4.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала (-1,1) размера 10 . Найти скалярное произведение 2 строки на 7 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из [3,10] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$
\begin{aligned}
3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 &= 2.8 \\
8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 &= -4.7 \\
6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 &= 7.7 \\
17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 &= 13.5
\end{aligned}
$$

Вариант 5.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [0,8] размера 6 . Создать две новые матрицы: первая – из двух последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 2x6), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 6x2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$
\begin{aligned}
15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 &= -2.4 \\
8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 &= 5.6 \\
6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 &= 7.7 \\
14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 &= 23.4
\end{aligned}
$$

Вариант6.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-7,-2] размера 9 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,4 строк и 2,3,8, 9 столбцов. Использовать срезы матрицы.

2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5$$
$$2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5$$
$$5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6$$
$$6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$$

Вариант7.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 8 . Найти скалярное произведение 3 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из отрезка [-2,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = 14.4$$
$$23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$$
$$6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$$
$$5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3$$

Вариант8.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-4,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1-5 строк и 2-4,9,10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный

алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.

3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу А 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.3$$
$$3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$$
$$3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9$$
$$10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$$

Вариант 9.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала (-1,1) размера 8 . Найти скалярное произведение 1 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из [-6,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу А 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$
$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$
$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$
$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 10.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,5] размера 7 . Создать две новые матрицы: первая – из трех последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 3х7), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 7х2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$
$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$
$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$
$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$

Вариант11.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-3,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 2,3,4,5 строк и 7,8,9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел из интервала (2,3) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3$
$5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$
$7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8$
$14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$

Вариант 12.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 10 . Найти скалярное произведение 4 строки на 5 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из интервала [2,7) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу С 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4$
$5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5$
$5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3$
$6.8x_1 = 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3$

Вариант 13.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,2] размера 11 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,6,7 строк и 7,8,9, 10,11 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу А 5 порядка, вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$
\begin{aligned}
&5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7\\
&6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5\\
&14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6\\
&8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7
\end{aligned}
$$

Вариант 14.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала (-1,1) размера 10 . Найти скалярное произведение 2 строки на 7 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из [3,10] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу А 7 порядка, вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$
\begin{aligned}
&3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 2.8\\
&8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7\\
&6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7\\
&17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5
\end{aligned}
$$

Вариант 15.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [0,8] размера 6 . Создать две новые матрицы: первая – из двух последних

строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 2x6), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 6x2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 4 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4$$
$$8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6$$
$$6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7$$
$$14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4$$

Вариант 16.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-7,-2] размера 9 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,4 строк и 2,3,8, 9 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5$$
$$2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5$$
$$5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6$$
$$6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$$

Вариант 17.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 8 . Найти скалярное произведение 3 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из отрезка [-2,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1)

записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу С 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = 14.4$$
$$23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$$
$$6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$$
$$5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3$$

Вариант 18.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-4,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1-5 строк и 2-4,9,10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу А 5 порядка, вектор В произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.3$$
$$3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$$
$$3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9$$
$$10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$$

Вариант 19.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала (-1,1) размера 8 . Найти скалярное произведение 1 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из [-6,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу А 7 порядка, вектор В произвольный. Решить систему AX = B.

4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$
$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$
$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$
$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 20.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,5] размера 7 . Создать две новые матрицы: первая – из трех последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 3x7), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 7x2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 4 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$$
$$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$$
$$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$$
$$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$$

Вариант21.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-3,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 2,3,4,5 строк и 7,8,9, 10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел из интервала (2,3) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$4.4x_1 - 2.5x_2 + 19.2x_3 - 10.8x_4 = 4.3$$
$$5.5x_1 - 9.3x_2 - 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$$
$$7.1x_1 - 11.5x_2 + 5.3x_3 - 6.7x_4 = -1.8$$
$$14.2x_1 + 23.4x_2 - 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$$

Вариант 22.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 10 . Найти скалярное произведение 4 строки на 5 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из интервала [2,7) подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу С 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу А 5 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$8.2x_1 - 3.2x_2 + 14.2x_3 + 14.8x_4 = -8.4$$
$$5.6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6.4x_4 = 4.5$$
$$5.7x_1 + 3.6x_2 - 12.4x_3 - 2.3x_4 = 3.3$$
$$6.8x_1 = 13.2x_2 - 6.3x_3 - 8.7x_4 = 14.3$$

Вариант 23.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,2] размера 11 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,6,7 строк и 7,8,9, 10,11 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу А 5 порядка, вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение

$5.7x_1 - 7.8x_2 - 5.6x_3 - 8.3x_4 = 2.7$
$6.6x_1 + 13.1x_2 - 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5$
$14.7x_1 - 2.8x_2 + 5.6x_3 - 12.1x_4 = 8.6$
$8.5x_1 + 12.7x_2 - 23.7x_3 + 5.7x_4 = 14.7$

Вариант 24.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала (-1,1) размера 10 . Найти скалярное произведение 2 строки на 7 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из [3,10] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу А 7 порядка, вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение
   $3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 - 15.5x_4 = 2.8$
   $8.3x_1 - 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7$
   $6.4x_1 - 8.5x_2 - 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7$
   $17.1x_1 - 8.3x_2 + 14.4x_3 - 7.2x_4 = 13.5$

Вариант 25.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [0,8] размера 6 . Создать две новые матрицы: первая – из двух последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 2x6), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 6x2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу С по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу А 4 порядка (не унитреугольную), вектор В произвольный. Решить систему АХ = В.
4. Решить систему, используя LU разложение
   $15.7x_1 + 6.6x_2 - 5.7x_3 + 11.5x_4 = -2.4$
   $8.8x_1 - 6.7x_2 + 5.5x_3 - 4.5x_4 = 5.6$
   $6.3x_1 - 5.7x_2 - 23.4x_3 + 6.6x_4 = 7.7$
   $14.3x_1 + 8.7x_2 - 15.7x_3 - 5.8x_4 = 23.4$

Вариант 26.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-7,-2] размера 9 . Найти и вычислить минор 4 порядка, расположенный на пересечении 1,2,3,4 строк и 2,3,8, 9 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2) используя матричный алгоритм, записав матрицу C по столбцам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$4.3x_1 - 12.1x_2 + 23.2x_3 - 14.1x_4 = 15.5$$
$$2.4x_1 - 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 = 2.5$$
$$5.4x_1 + 8.3x_2 - 7.4x_3 - 12.7x_4 = 8.6$$
$$6.3x_1 - 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$$

Вариант 27.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из (2,4) размера 8 . Найти скалярное произведение 3 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из отрезка [-2,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав скалярный алгоритм умножения матриц 2) записав векторный алгоритм, записав матрицу C 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнетреугольную матрицу A 5 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$14.4x_1 - 5.3x_2 + 14.3x_3 - 12.7x_4 = 14.4$$
$$23.4x_1 - 14.2x_2 - 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$$
$$6.3x_1 - 13.2x_2 - 6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$$
$$5.6x_1 + 8.8x_2 - 6.7x_3 - 23.8x_4 = 7.3$$

Вариант 28.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-4,3] размера 10 . Найти и вычислить минор 5 порядка, расположенный на

пересечении 1-5 строк и 2-4,9,10 столбцов. Использовать срезы матрицы.
2. Создать две матрицы из случайных вещественных чисел подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) записав векторный алгоритм умножения матриц 2) записав матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную верхнюю унитреугольную матрицу A 5 порядка, вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 + 10x_2 - 1.3x_3 + 2.1x_4 = 3.3$$
$$3.1x_1 + 1.7x_2 - 2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$$
$$3.3x_1 - 7.7x_2 + 4.4x_3 - 5.1x_4 = 1.9$$
$$10x_1 - 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$$

Вариант 29.

1. Создать квадратную матрицу из случайных вещественных чисел из интервала (-1,1) размера 8 . Найти скалярное произведение 1 строки на 8 столбец. Использовать срезы матриц.
2. Создать две матрицы из случайных целых чисел из [-6,6] подходящего размера. Найти их произведение тремя способами: 1) скалярный алгоритм умножения матриц 2) векторный алгоритм, 3) проверив с помощью функции np.dot.
3. Создать произвольную нижнюю унитреугольную матрицу A 7 порядка, вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$1.7x_1 - 1.8x_2 + 1.9x_3 - 57.4x_4 = 10$$
$$1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.5x_3 - 1.7x_4 = 19$$
$$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$$
$$7.1x_1 - 1.3x_2 - 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$$

Вариант 30.

1. Создать квадратную матрицу из случайных целых чисел из [-5,5] размера 7 . Создать две новые матрицы: первая – из трех последних строк исходной матрицы (должна получиться матрица размера 3x7), вторая – из двух первых столбцов матрицы (матрица размера 7x2).
2. Выполнить умножение матриц из предыдущего пункта тремя способами: 1) используя векторный алгоритм умножения матриц 2)

используя матричный алгоритм, записав матрицу C по строкам 3) проверив с помощью функции np.dot.

3. Создать произвольную верхнетреугольную матрицу A 4 порядка (не унитреугольную), вектор B произвольный. Решить систему AX = B.
4. Решить систему, используя LU разложение

$$6.1x_1 + 6.2x_2 - 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$$
$$1.1x_1 - 1.5x_2 + 2.2x_3 - 3.8x_4 = 4.2$$
$$5.1x_1 - 5.0x_2 + 4.9x_3 - 4.8x_4 = 4.7$$
$$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 - 2.1x_4 = 2.2$$