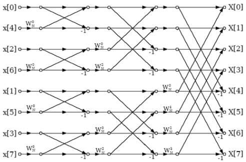
Traitement numérique du signal
Chapitre 2: Transformée de Fourier discrète

Christophe Tilmant (tilmant@isima.fr)

LASMEA/ISIMA - Université Blaise Pascal

ISIMA ZZ2 F1-F5 2009-2010



Définitions et Propriétés
Rappels

Définition

La transformée de Fourier des signaux numériques est définie par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] exp(-j2\pi f k)$$

avec $f \in \mathbb{R}$ et $X(f)$ périodique de période 1.
La transformée de Fourier inverse est définie par

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) exp(j2\pi n f) df$$

Définitions et Propriétés
Rappels

Remarque : 2 difficultés

- Ici on a définit $X(f)$ où f est une variable continue : Imcompatible avec un système numérique (ordinateur) ;
- Nombre infini d'échantillons du signal $x[n]$.

Solutions

- Remplacer la variable continue f par une variable discrète ;
- Limiter la durée du signal $x[n]$.

$\Rightarrow$La Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définitions et Propriétés
Rappels

Remarque : 2 difficultés

- Ici on a définit $X(f)$ où f est une variable continue : Imcompatible avec un système numérique (ordinateur) ;
- Nombre infini d'échantillons du signal $x[n]$.

Solutions

- Remplacer la variable continue f par une variable discrète ;
- Limiter la durée du signal $x[n]$.

$\Rightarrow$La Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définitions et Propriétés

Rappels

Remarque : 2 difficultés

- Ici on a définit $X(f)$ où f est une variable continue : Imcompatible avec un système numérique (ordinateur) ;
- Nombre infini d'échantillons du signal $x[n]$.

Solutions

- Remplacer la variable continue f par une variable discrète ;
- Limiter la durée du signal $x[n]$.

$\Rightarrow$**La Transformée de Fourier Discrète (TFD)**

Définitions et Propriétés
Discrétisation de la fréquence

Remplace la variable continue f par une variable discréte k :

$$f = k\Delta f \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Comme $X(f)$ est périodique, il suffit de discrétiser sur une seule période. On peut diviser une période en K incréments.

$$\Delta f = 1/K$$

Si l'on choisit la période qui va de $-1/2$ à $1/2$, les K valeurs de la variable discréte k sont :

$$k = -N/2, ..., N/2 - 1$$

Définitions et Propriétés
Discrétisation de la fréquence

Remplace la variable continue f par une variable discréte k :

$$f = k\Delta f \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Comme $X(f)$ est périodique, il suffit de discrétiser sur une seule période. On peut diviser une période en K incréments.

$$\Delta f = 1/K$$

Si l'on choisit la période qui va de $-1/2$ à $1/2$, les K valeurs de la variable discréte k sont :

$$k = -N/2, ..., N/2 - 1$$

Définitions et Propriétés
Discrétisation de la fréquence

Remplace la variable continue f par une variable discréte k :

$$f = k\Delta f \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Comme $X(f)$ est périodique, il suffit de discrétiser sur une seule période. On peut diviser une période en K incréments.

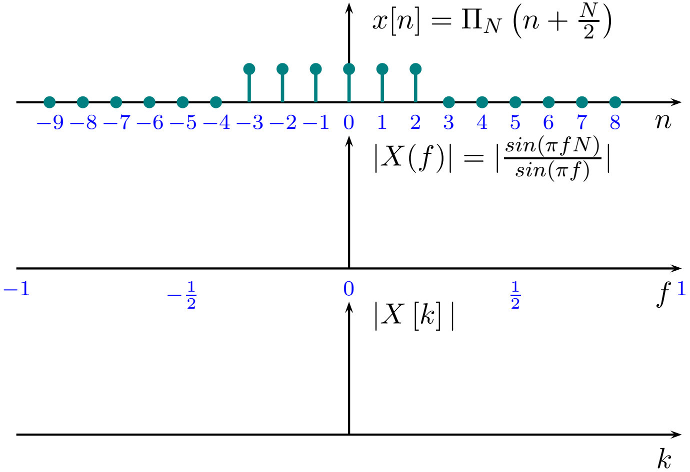
$$\Delta f = 1/K$$

Si l'on choisit la période qui va de $-1/2$ à $1/2$, les K valeurs de la variable discréte k sont :

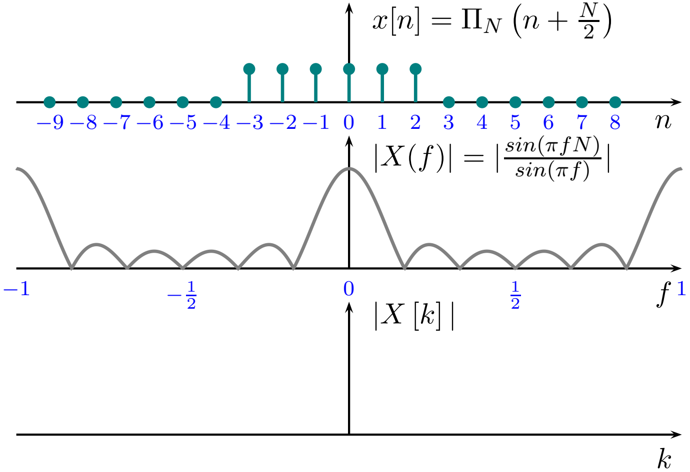
$$k = -N/2, ..., N/2 - 1$$

Définitions et Propriétés

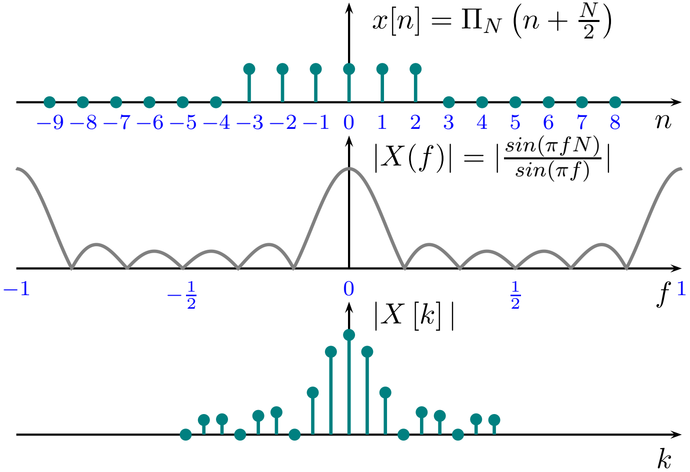
Discrétisation de la fréquence



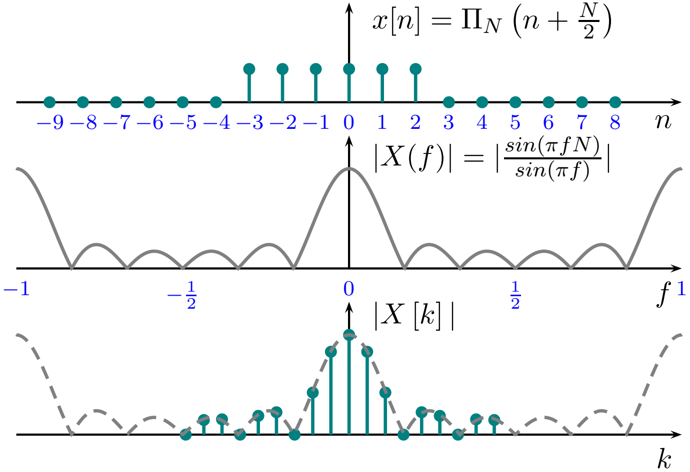
Définitions et Propriétés
Discrétisation de la fréquence



Définitions et Propriétés
Discrétisation de la fréquence



Définitions et Propriétés
Discrétisation de la fréquence



Définitions et Propriétés
Effet de la discrétisation de la fréquence

Ayant discrétisé $X(f)$, la transformée de Fourier inverse est approximée par :

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} X[k] \, exp(j2\pi \frac{nk}{K})$$

d'où $x[n] \cong \tilde{x}[n]$

$x[n] = \tilde{x}[n]$?

$\Rightarrow$Il faut déterminer la qualité de cette approximation et chercher dans quelles conditions elle devient une égalité

Définitions et Propriétés

Effet de la discrétisation de la fréquence

Ayant discrétisé $X(f)$, la transformée de Fourier inverse est approximée par :

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} X[k]\, exp(j2\pi \frac{nk}{K})$$

d'où $x[n] \cong \tilde{x}[n]$

$x[n] = \tilde{x}[n]$?

$\Rightarrow$Il faut déterminer la qualité de cette approximation et chercher dans quelles conditions elle devient une égalité

Définitions et Propriétés
Effet de la discrétisation de la fréquence

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \underbrace{\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, exp(-j2\pi\frac{k}{K}l)\right]}_{X[k]} exp(j2\pi\frac{nk}{K})$$

$\tilde{x}[n]$ répétition périodique de période K du signal $x[n]$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \tilde{x}[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[iK+n]$$

Définitions et Propriétés
Effet de la discrétisation de la fréquence

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \underbrace{\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, exp(-j2\pi \frac{k}{K} l)\right]}_{X[k]} exp(j2\pi \frac{nk}{K})$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \underbrace{\left[\frac{1}{K}\sum_{k=-K/2}^{K/2-1} exp(-j2\pi \frac{(l-n)k}{K})\right]}_{\text{vaut } 1 \text{ si } l-n=iK \text{ où } i\in\mathbb{N} \text{ et } 0 \text{ ailleurs}}$$

$\tilde{x}[n]$ répétition périodique de période K du signal $x[n]$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \tilde{x}[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[iK+n]$$

Définitions et Propriétés

Effet de la discrétisation de la fréquence

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \underbrace{\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \, exp(-j2\pi \frac{k}{K} l) \right]}_{X[k]} exp(j2\pi \frac{nk}{K})$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \underbrace{\left[\frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} exp(-j2\pi \frac{(l-n)k}{K}) \right]}_{\text{vaut } 1 \text{ si } l-n=iK \text{ où } i \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \text{ ailleurs}}$$

$\tilde{x}[n]$ répétition périodique de période K du signal $x[n]$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \tilde{x}[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[iK+n]$$

Définitions et Propriétés
Effet de la discrétisation de la fréquence

Remarques :

- Si la durée du signal $x[n]$ est limitée à K, chaque période du signal $\tilde{x}[n]$est une replique exacte de $x[n]$;
- Si la durée est supérieure à K, un recouvrement à lieu (cf. échantillonnage) ;
- Si la durée est inférieure à K, on peut le considérer comme un signal de durée K prolongé d'échantillons nuls.

$\tilde{x}[n] = x[n]$

L'approximation devient une égalité ($\tilde{x}[n] = x[n]$) pour les signaux de durée limitée.

Définitions et Propriétés

Effet de la discrétisation de la fréquence

Remarques :

- Si la durée du signal $x[n]$ est limitée à K, chaque période du signal $\tilde{x}[n]$est une replique exacte de $x[n]$;
- Si la durée est supérieure à K, un recouvrement à lieu (cf. échantillonnage) ;
- Si la durée est inférieure à K, on peut le considérer comme un signal de durée K prolongé d'échantillons nuls.

$\tilde{x}[n] = x[n]$

L'approximation devient une égalité ($\tilde{x}[n] = x[n]$) pour les signaux de durée limitée.

Définitions et Propriétés

Effet de la discrétisation de la fréquence

Remarques :

- Si la durée du signal $x[n]$ est limitée à K, chaque période du signal $\tilde{x}[n]$est une replique exacte de $x[n]$;
- Si la durée est supérieure à K, un recouvrement à lieu (cf. échantillonnage) ;
- Si la durée est inférieure à K, on peut le considérer comme un signal de durée K prolongé d'échantillons nuls.

$\tilde{x}[n] = x[n]$

L'approximation devient une égalité ($\tilde{x}[n] = x[n]$) pour les signaux de durée limitée.

Définitions et Propriétés

Effet de la discrétisation de la fréquence

Remarques :

- Si la durée du signal $x[n]$ est limitée à K, chaque période du signal $\tilde{x}[n]$est une replique exacte de $x[n]$;
- Si la durée est supérieure à K, un recouvrement à lieu (cf. échantillonnage) ;
- Si la durée est inférieure à K, on peut le considérer comme un signal de durée K prolongé d'échantillons nuls.

$\tilde{x}[n] = x[n]$

L'approximation devient une égalité ($\tilde{x}[n] = x[n]$) pour les signaux de durée limitée.

Définitions et Propriétés
Définitions

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Pour des signaux apériodiques à durée limitée N, on définit **la transformée de Fourier discrète** par la relation suivante :

$$X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] exp(-j2\pi n\frac{k}{N}) \text{ avec } k = -N/2, \dots, N/2-1$$

La transformée inverse s'écrit :

$$x[n] = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X[k] exp(j2\pi k\frac{n}{N}) \text{ pour } n = n_0, \dots, n_0+N-1$$

Définitions et Propriétés

Définitions

Ambiguité de la transformée de Fourier discrète

Si l'on dispose des coefficients $X[k]$ pour $k = -N/2, \ldots, N/2 - 1$, sans autre information, on ne peut pas décider s'il s'agit d'un signal périodique ou d'un signal à durée limitée.

Discrétisation & Périodisation

- Echantillonnage de $x(t) \Rightarrow$ Périodisation de $X(f)$;
- Echantillonnage de $X(f) \Rightarrow$ Périodisation de $x(t)$;
- **La transformée de Fourier (directe ou inverse) d'une fonction échantillonnée est périodique.**

Définitions et Propriétés

Définitions

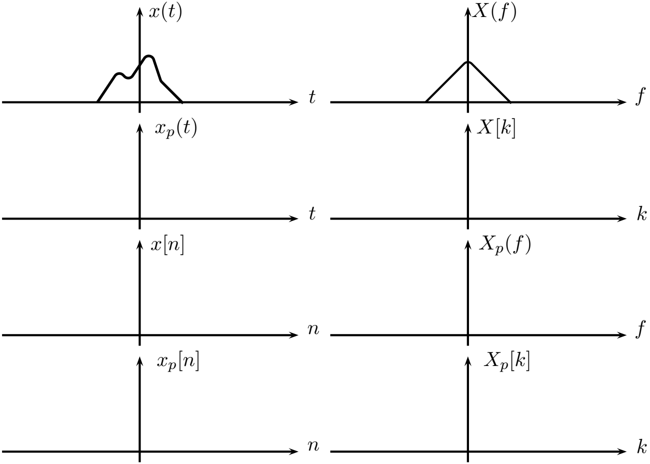
Ambiguité de la transformée de Fourier discrète

Si l'on dispose des coefficients $X[k]$ pour $k = -N/2, \ldots, N/2-1$, sans autre information, on ne peut pas décider s'il s'agit d'un signal périodique ou d'un signal à durée limitée.

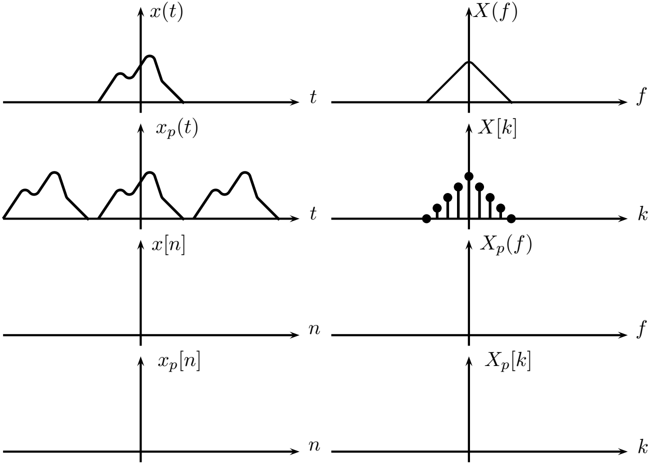
Discrétisation & Périodisation

- Echantillonnage de $x(t) \Rightarrow$ Périodisation de $X(f)$;
- Echantillonnage de $X(f) \Rightarrow$ Périodisation de $x(t)$;
- **La transformée de Fourier (directe ou inverse) d'une fonction échantillonnée est périodique.**

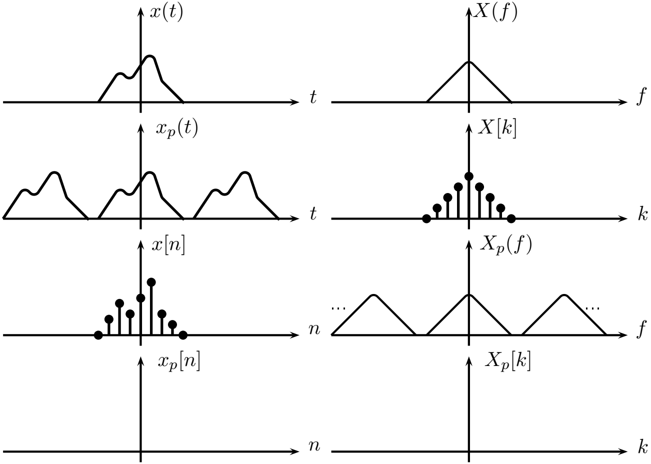
Définitions et Propriétés
Discrétisation & Périodisation



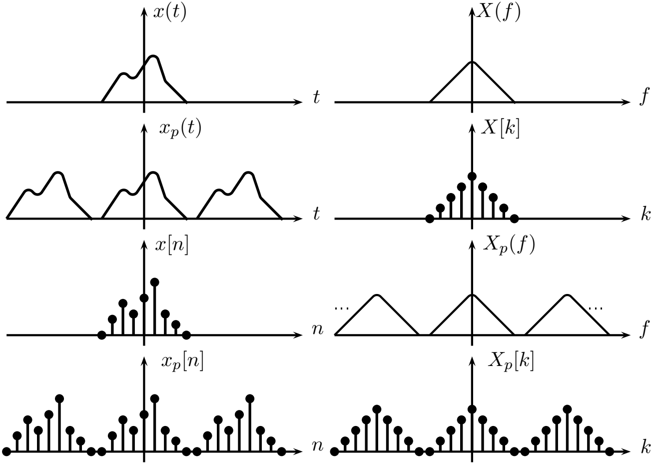
Définitions et Propriétés
Discrétisation & Périodisation



Définitions et Propriétés
Discrétisation & Périodisation



Définitions et Propriétés
Discrétisation & Périodisation



Définitions et Propriétés
Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n-n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f=0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés

Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n-n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f=0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés
Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n-n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f = 0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés
Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n - n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k - k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f = 0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés

Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n - n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k - k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f = 0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés

Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n-n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f = 0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés
Propriétés

- **Linéarité** : $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$
- **Renversement temporel** : $x[-n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[-k]$
- **Conjuguaison** : $x^*[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X^*[-k]$
- **Décalage temporel** : $x[n-n_0] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\, e^{-j2\pi\frac{n_0}{N}}$
- **Décalage fréquentiel** : $x[n]\, e^{j2\pi\frac{k_0}{N}} \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$
- **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f = 0$ des échantilllons est conservée.
- **Signaux paires** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Définitions et Propriétés

Propriétés

Convolution apériodique (ou linéaire)

Soit deux signaux discrets apériodiques. $x[n]$ de durée N défini sur $[0, N-1]$ et $y[n]$ de durée M défini sur $[0, M-1]$.
La **convolution apériodique** est défini par :

$$z[n] = x * y[n] = \sum_{l=0}^{N+M-2} x[l]y[n-l]$$

$z[n]$ est un signal discret apériodique de durée $N+M$ et défini sur $[0, N+M-1]$

Définitions et Propriétés

Propriétés

Convolution circulaire (ou cyclique)

Soit deux signaux discrets apériodiques. $x[n]$ et $y[n]$ de durée N et défini sur $[0, N-1]$.
La **convolution circulaire** est défini par :

$$\begin{aligned} z[n] &= x \circledast y[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} x[l]y[< n - l >_N] \\ &= x_p * y_p[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} x_p[l]y_p[n-l] \end{aligned}$$

où $x_p[n]$ et $y_p[n]$ sont des signaux périodique de période N et où $x[n]$ est une période de $x_p[n]$ et $y[n]$ est une période de $y_p[n]$.
$z[n]$ est un signal discret périodique de période N.

Définitions et Propriétés
Propriétés

Propriétés : Convolution apériodique

$$x[n]\,y[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} X * Y[k]$$
$$x * y[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} X[k]\,Y[k]$$

Propriétés : Convolution circulaire

$$x[n]\,y[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X \circledast Y[k]$$
$$x \circledast y[n] \overset{TFD}{\leftrightarrow} X[k]\,Y[k]$$

Définitions et Propriétés

Propriétés

Propriétés : Convolution apériodique

$$x[n]\,y[n] \overset{TF}{\longleftrightarrow} X * Y[k]$$
$$x * y[n] \overset{TF}{\longleftrightarrow} X[k]\,Y[k]$$

Propriétés : Convolution circulaire

$$x[n]\,y[n] \overset{TFD}{\longleftrightarrow} X \circledast Y[k]$$
$$x \circledast y[n] \overset{TFD}{\longleftrightarrow} X[k]\,Y[k]$$

Analyse spectrale

Limitation de durée

La transformée de Fourier décrit par N échantillons représente entièrement le signal $x[n]$ **si** sa durée est limitée à N échantillons

Question

Que faire dans le cas d'un signal à durée illimitée ?

Une réponse : manière brutale

On limite la durée du signal :

$$x_N[n] = x[n]\Pi_N[n]$$

où $x[n]$ est de durée illimitée.

Analyse spectrale
Limitation de durée

La transformée de Fourier décrit par N échantillons représente entièrement le signal $x[n]$ **si** sa durée est limitée à N échantillons

Question

Que faire dans le cas d'un signal à durée illimitée ?

Une réponse : manière brutale

On limite la durée du signal :

$$x_N[n] = x[n]\Pi_N[n]$$

où $x[n]$ est de durée illimitée.

Analyse spectrale
Limitation de durée

La transformée de Fourier décrit par N échantillons représente entièrement le signal $x[n]$ **si** sa durée est limitée à N échantillons

Question

Que faire dans le cas d'un signal à durée illimitée ?

Une réponse : manière brutale

On limite la durée du signal :

$$x_N[n] = x[n]\Pi_N[n]$$

où $x[n]$ est de durée illimitée.

Analyse spectrale
Limitation de durée

On peut généraliser la remarque précédente et introduire la notion de **fenêtre de pondération** ou **d'apodisation** :

Limitation de durée par fenêtre de pondération

Soit $x[n]$ un signal de durée illimitée. On limite sa durée par l'opération suivante :

$$x_N[n] = x[n]h_N[n]$$

où $h_N[n]$ est un signal apériodique de durée N (support borné).

Effet de la limitation de durée : convolution fréquentielle

$$X_N(f) = X * H_N(f)$$

où, $x[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f)$, $x_N[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} X_N(f)$ et $h_N[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} H_N(f)$

Analyse spectrale
Limitation de durée

On peut généraliser la remarque précédente et introduire la notion de **fenêtre de pondération** ou **d'apodisation** :

Limitation de durée par fenêtre de pondération

Soit $x[n]$ un signal de durée illimitée. On limite sa durée par l'opération suivante :

$$x_N[n] = x[n]h_N[n]$$

où $h_N[n]$ est un signal apériodique de durée N (support borné).

Effet de la limitation de durée : convolution fréquentielle

$$X_N(f) = X * H_N(f)$$

où, $x[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f)$, $x_N[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} X_N(f)$ et $h_N[n] \overset{TF}{\leftrightarrow} H_N(f)$

Analyse spectrale

Caractérisation et choix des fenêtres

L'introduction de cette fenêtre de pondération va provoquer une "distorsion" du signal $x[n]$. Le choix du motif spectral ($H_N(f)$) doit améliorer la "lisibilité" de la représentation fréquentielle.
Il faut donc caractériser ces fenêtres.

Analyse spectrale

Caractérisation et choix des fenêtres

Largeur du lobe central (résolution) : Δf

On souhaite avoir un motif $H_N(f)$ aussi "compact" que possible (au sens démotique). Il existe plusieurs définitions de la compacité : Δf : largeur à mi-hauteur du lobe central, largeur au sens de Gabor, etc, ...

Ondulation

Au vue du caractère trés oscillant de $H_N(f)$, c'est une gêne sérieuse à la lisibilité. On caractérisera la fenêtre par son ondulation :

$$\sup_{|f|>\Delta f} |H_N(f)|$$

Analyse spectrale
Caractérisation et choix des fenêtres

Largeur du lobe central (résolution) : Δf

On souhaite avoir un motif $H_N(f)$ aussi "compact" que possible (au sens démotique). Il existe plusieurs définitions de la compacité : Δf : largeur à mi-hauteur du lobe central, largeur au sens de Gabor, etc, ...

Ondulation

Au vue du caractère trés oscillant de $H_N(f)$, c'est une gêne sérieuse à la lisibilité. On caractérisera la fenêtre par son ondulation :

$$\underset{|f|>\Delta f}{sup} \; |H_N(f)|$$

Analyse spectrale

Fenêtre rectangulaire

$$h_N[n] = \Pi_N[n + \frac{N-1}{2}] \text{ avec } N \text{ impair}$$

$$H_N(f) = \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

Analyse spectrale
Fenêtre triangulaire

$$h_N[n] = 1 - \frac{|n|}{(N-1)/2} \text{ pour } n = -(N-1)/2, ..., (N-1)/2$$

$$H_N(f) = \left(\frac{\sin(\pi f (N-1)/2)}{\sin(\pi f)}\right)^2$$

Analyse spectrale

Fréquence normalisée et résolution fréquentielle

On a posé $T_e = 1$ d'où $X[k] = \sum_k x[k]e^{-2j2\pi fk}$

Donc $T_e = 1s \Rightarrow f \in [-1/2; 1/2]$Hz

Dans le cas général $\begin{array}{ccc} T_e & \Rightarrow & f \in [-1/(2T_e); 1/(2T_e)] \\ & \Rightarrow & f \in [-f_e/2; f_e/2] \end{array}$

Remarque

On pose également la notion de fréquence normalisée $\tilde{f} = \frac{f}{f_e}$ d'où $\tilde{f} \in [-1/2; 1/2]$

Résolution en fréquence

On échantillonne la transformée de Fourier avec N points d'où $\Delta n = T_e \Rightarrow \Delta k = \frac{f_e}{N}$Hz.

Interpolation fréquentielle (*zero padding*).

Analyse spectrale
Fréquence normalisée et résolution fréquentielle

On a posé $T_e = 1$ d'où $X[k] = \sum_k x[k]e^{-2j2\pi fk}$
Donc $T_e = 1s \Rightarrow f \in [-1/2; 1/2]$Hz

Dans le cas général $\begin{array}{ccl} T_e & \Rightarrow & f \in [-1/(2T_e); 1/(2T_e)] \\ & \Rightarrow & f \in [-f_e/2; f_e/2] \end{array}$

Remarque

On pose également la notion de fréquence normalisée $\tilde{f} = \frac{f}{f_e}$ d'où $\tilde{f} \in [-1/2; 1/2]$

Résolution en fréquence

On échantillonne la transformée de Fourier avec N points d'où $\Delta n = T_e \Rightarrow \Delta k = \frac{f_e}{N}$Hz.
Interpolation fréquentielle (*zero padding*).

Analyse spectrale

Fréquence normalisée et résolution fréquentielle

On a posé $T_e = 1$ d'où $X[k] = \sum_k x[k]e^{-2j2\pi fk}$
Donc $T_e = 1s \Rightarrow f \in [-1/2; 1/2]$Hz
Dans le cas général $T_e \Rightarrow f \in [-1/(2T_e); 1/(2T_e)]$
$\Rightarrow f \in [-f_e/2; f_e/2]$

Remarque

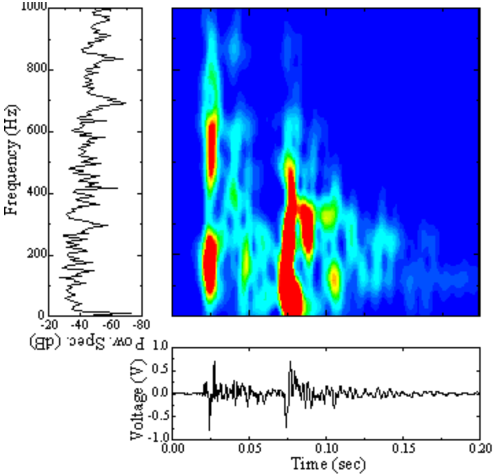
On pose également la notion de fréquence normalisée $\tilde{f} = \frac{f}{f_e}$ d'où $\tilde{f} \in [-1/2; 1/2]$

Résolution en fréquence

On échantillonne la transformée de Fourier avec N points d'où $\Delta n = T_e \Rightarrow \Delta k = \frac{f_e}{N}$Hz.
Interpolation fréquentielle (*zero padding*).

Analyse spectrale

Représentation temps-fréquence



Transformée de Fourier Rapide

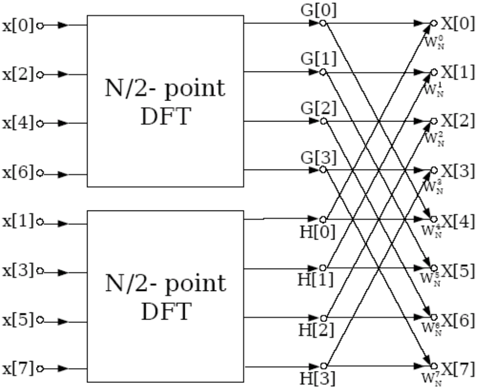
Implémentation efficace

Il existe un algorithme qui permettent de calculer la transformée d'une séquence de N échantillons avec un coût de calcul $Nlog_2(N)$ multiplications : algorithme rapide (FFT) de Cooley-Tukey.

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{l=0}^{N-1} x[l] e^{-j2\pi\frac{kl}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] W_N^{(2m+1)k} \\
&= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] W_N^{2mk} + W_N^{n} \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] W_N^{2mk}
\end{aligned}
$$

où, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Transformée de Fourier Rapide
Algorithme final



Transformée de Fourier Rapide

Algorithme final