III PROCESSUS DE POISSON
1 Introduction, définition

•Le processus de **Poisson** correspond à **l'arrivée au hasard** d'entités en un endroit donné

•$\boldsymbol{N(t)}$ le **nombre d'événements** se produisant dans **l'intervalle de temps** $[0, t]$
$\{N(t);\ t \geq 0\}$ est un **processus de comptage**

•$\boldsymbol{T_n}$ la **durée** séparant le (n-1)-ième du n-ième **événement** (n = 2, 3...)
durée d'attente dans l'état n-1

Une relation fondamentale

$S_n = T_1 + T_2 + ...+ T_n$

S_n **temps écoulé** jusqu'au n-ième événement

Equivalence des événements

"$N(t) \leq n$ " et "$S_{n+1} > t$ "

"$N(t) \geq n$ " et "$S_n \leq t$ "

$$
\begin{aligned}
P(N(t) = n) &= P(S_{n+1} > t \text{ et } S_n \leq t) \\
&= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)
\end{aligned}
$$

2 Définitions et propriétés principales

$\{N(t);\ t \geq 0\}$ est un **processus de Poisson** ssi

Cl. $N(t)$ est **homogène dans le temp**s

$P(N(s+t)-N(s) = k) = P(N(t) = k) = p_k(t)$;

$s > 0,\ t > 0$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$

C2. $N(t)$ est à **accroissements indépendants**

$P(N(s+t)-N(s) = k, N(s) = j) =$

$P(N(s + t)-N(s) = k) \times P(N(s) = j) = p_k(t)p_j(s)$

$s > 0,\ t > 0$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$

C3. $p_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t)\,(k \geq 2) \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t)\,(k = 1) \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)\,(k = 0) \end{cases}$

λ nombre moyen d'événements par unité de temps

Propriétés principales

Théorème : Si un processus de comptage $\{N(t);\, t \geq 0\}$ satisfait aux conditions **C1**, **C2** et **C3**, alors

$P(N(t) = k) = p_k(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$; $t > 0$ et $k = 0, 1\ldots$

$E[N(t)] = \lambda t$, $Var[N(t)] = \lambda t$

Relations du régime transitoire, aucun régime stationnaire car $\forall k\ p_k(t) \to 0$ quand $t \to \infty$

Un processus de comptage satisfaisant **C1**, **C2** et la conclusion du théorème, est un processus de Poisson.

T_n suit une loi exponentielle

Graphe de transition

Pour ne pas surcharger le graphe des transitions on supprime le terme $+ o(\Delta t)$

Pratiquement, on utilise un graphe réduit comprenant que les transitions entre deux états différents et les probabilités de transitions sont remplacées par les taux de transition

3 Processus de Poisson / loi exponentielle

Intervalle entre deux événements

$\{N(t);\, t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ et T_n la durée séparant le (n-l)-ième et le n-ième événement.

Théorème : Les temps d'attente T_n d'un **processus de Poisson** de paramètre λ sont des variables aléatoires indépendantes et distribuées identiquement selon une **loi exponentielle** de paramètre λ.