Processus de naissance et de mort

$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i / \mu_{i+1}$ et $p0 = [1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i / \mu_{i+1}]^{-1}$

$L = E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ Nombre moyen de clients en station (Longueur)

$W = L/\lambda$ Temps moyen de séjour en station, loi de Little

M/M/1

$p_k = (1-\rho)\rho^k$ avec $\rho = \lambda/\mu$ Taux d'utilisation du serveur

$L = \rho/(1-\rho)$ et $W = (\rho/\lambda)/(1-\rho) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

M/M/1/c : capacité c, perte de clients

$p_k = \frac{\rho^k}{1 + \sum_{i=1}^{c} \rho^i}$ pour $0 \le k \le c$ et 0 sinon ; $\rho = \lambda/\mu$

$L = E[N] = \sum_{k=1}^{c} k p_k = \frac{\rho[1-(c+1)\rho^c + c\rho^{c+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{c+1})}$ et $W = L/\lambda$

Etudier le cas $\lambda = \mu$

M/M/1/c en boucle fermée

$p_k = \frac{[c!/(c-k)!]\rho^k}{\sum_{i=0}^{c} [c!/(c-i)!]\rho^i}$ pour $0 \le k \le c$ et 0 sinon ; $\rho = \lambda/\mu$

$L = E[N] = \sum_{k=1}^{c} k p_k$ et $W = L/\lambda$

M/M/s : s serveurs, µ taux de service d'un serveur

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(s\rho)^k}{k!} & 0 \le k \le s \\ p_0 \dfrac{s^s \rho^k}{s!} & k \ge s \end{cases} \quad \text{avec } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} \text{ et } p_0 = [\frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!}]^{-1}$$

$L = E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = s\rho + L_q = s\rho + \frac{\rho}{1-\rho} P(N \ge s) = s\rho + \frac{\rho (s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2} p_0$ et $W = L/\lambda$

M/G/∞

$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$

$L = E[N] = \rho = \lambda/\mu$ et $W = L/\lambda = 1/\mu$

Réseau ouvert, n stations

Construire le vecteur q et la matrice de transition P
Résoudre : $e = q + eP$.
Pour des taux constants :
Calculer $\lambda_i = \lambda\, e_i$ et $\rho_i = \lambda_i / s\mu_i$ avec μ_i taux de service d'un des s serveurs de la station i.
Les stations ont-elles un régime stable (en général $\rho_i < 1$ sauf stations sans attente...) ?
A partir de λ_i et μ_i évaluer les performances des stations puis du réseau :

$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$ et $W = L/\lambda = \sum_{i=1}^{n} e_i W_i$

Réseau fermé, n stations et K clients

Construire la matrice de transition P
Résoudre : $e = eP$ en fixant une des composantes.
Pour des taux constants :
Calculer $\rho_i = e_i / \mu_i$ avec μ_i taux de service d'un des s serveurs de la station i.
Les stations ont un régime stable en réseau fermé !
Déterminer les $C_{K+n-1}^{n-1} = \frac{(K+n-1)!}{K!\,(n-1)!}$ états : vecteurs $k = (k_1,\ldots,k_n)$.

Calculer $G(K,n) = \sum_{k \mid k_1+\ldots+k_n=K} \prod_{i=1}^{n} \rho_i^{k_i}$ avec l'algorithme de Buzen

Poser $G(0,i)=1$ $G(j,1)=\rho_1^j$ pour $1 \le j \le K$ et $1 \le i \le n$.
Calculer $G(j,i)=G(j,i-1)+\rho_i G(j-1,i)$ pour $1 \le j \le K$ et $1 \le i \le n$

Puis les probabilités $p(k) = \frac{1}{G(K,n)} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{k_i}$ pour les vecteurs k.

Pour la station i calculer $p_i(r) = \sum_{k \mid k_i=r} p(k)$ pour $0 \le r \le K$.
A partir de e_i , μ_i , $\rho_i = e_i / \mu_i$ et $p_i(r)$ évaluer les performances des stations puis du réseau :

$L_i = \sum_{r=0}^{K} r p_i(r)$ par exemple et

$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = K$ pour vérifier qu'aucun client ne s'est échappé.