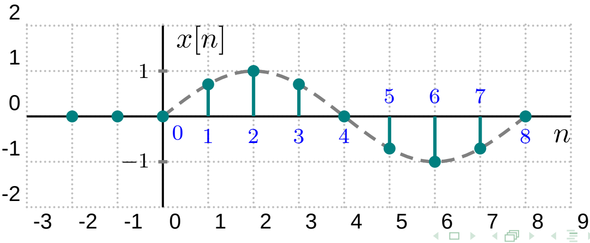
Traitement numérique du signal

Christophe Tilmant (tilmant@isima.fr)

LASMEA/ISIMA - Université Blaise Pascal

ISIMA ZZ2 F1-F5 2009-2010



Organisation du cours

Plan du cours : 4 séances de 2h de cours

1. Introduction aux systèmes numériques – Rappels
2. Représentation fréquentielle :
   Transformée de Fourier discrète
3. Outil pour l'analyse des systèmes numériques :
   Transformée en z
4. Filtrage numérique : Synthése et architecture

4 séances de TD de 2h ;
3 séances de TP de 2h ;
Evaluation par un examen sur le cours et les travaux pratiques.

1. Introduction
2. Signaux et Systèmes numériques
   - Signaux numériques - Transformée de Fourier
   - Systèmes numériques - Echantillonnage

Généralités

Définition : signal

Variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.

Définition : traitement du signal[a]

[a] définition de http://fr.wikipedia.org/wiki/Traitement_du_signal

Discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux.

Définition : numérique

Qualificatif pour toute donnée (ou signal) dont les valeurs appartiennent à un ensemble discret et fini.

Généralités

Définition : signal

Variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.

Définition : traitement du signal[a]

[a] définition de http://fr.wikipedia.org/wiki/Traitement_du_signal

Discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux.

Définition : numérique

Qualificatif pour toute donnée (ou signal) dont les valeurs appartiennent à un ensemble discret et fini.

Généralités

Définition : signal

Variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.

Définition : traitement du signal[a]

[a] définition de http://fr.wikipedia.org/wiki/Traitement_du_signal

Discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux.

Définition : numérique

Qualificatif pour toute donnée (ou signal) dont les valeurs appartiennent à un ensemble discret et fini.

Généralités
Domaines d'applications du TNS (1/6)

Applications du TNS

Le TNS est un secteur en forte croissance :

- radiotéléphonie, applications multimédia, instrumentation, géophysique, médical ...

Architecture et microprocesseur optimisés pour le TNS

Les capacités des processeurs DSP (*Digital Signal Processor*) sont de plus en plus importantes, et les prix de ces processeurs ont diminué.
On les trouve dans les modems (RTC,ADSL), les téléphones mobiles, les appareils multimédia (lecteur MP3), les récepteurs GPS...

Généralités

Domaines d'applications du TNS (1/6)

Applications du TNS

Le TNS est un secteur en forte croissance :

- radiotéléphonie, applications multimédia, instrumentation, géophysique, médical ...

Architecture et microprocesseur optimisés pour le TNS

Les capacités des processeurs DSP (*Digital Signal Processor*) sont de plus en plus importantes, et les prix de ces processeurs ont diminué.
On les trouve dans les modems (RTC,ADSL), les téléphones mobiles, les appareils multimédia (lecteur MP3), les récepteurs GPS...

Généralités
Domaines d'applications du TNS (2/6)

Audio[a]

[a] ZZ3 F5 : Compression de données

- **Techniques** : réverbération, contrôle de tonalité, écho, filtrage, compression audio (MP3...)
- **Applications** : instruments de musiques et amplificateurs, consoles de mixage, cartes pour PC, jeux et jouets, auto-radios, lecteurs de CDRom, TV, lecteurs MP3...

Généralités
Domaines d'applications du TNS (3/6)

Traitement de la parole

- **Techniques** : synthèse et reconnaissance vocale, filtrage, compression
- **Applications** : enregistreurs numériques, répondeurs-enregistreurs, boîtes vocales, systèmes de sécurité par reconnaissance vocale (biométrie), jeux et jouets (Nintendo DS)...

Généralités
Domaines d'applications du TNS (4/6)

Télécommunications

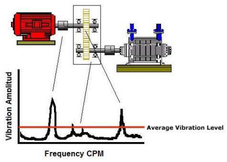
- **Techniques** : modulation et transmission, démodulation et réception, compression, commutation, routage, DTMF, encryptage, amélioration des signaux, annulation d'écho
- **Applications** : modems, fax, GSM, systèmes GPS, vidéo téléphones, faisceaux hertziens...

Généralités
Domaines d'applications du TNS (5/6)

Instrumentation et mesure[a]

[a]ZZ3 F1 : Capteurs et instrumentation

- **Techniques** : transformée de Fourier rapide (FFT), filtrage, synthèse de forme d'onde, filtrage adaptatif,
- **Applications** : tests et mesures, analyse de vibration, cartes d'entrées-sorties pour PC, automobile : injection contrôlée, ABS, générateurs d' "anti-bruit"), instruments sismiques, simulateurs de vols...



Généralités
Domaines d'applications du TNS (6/6)

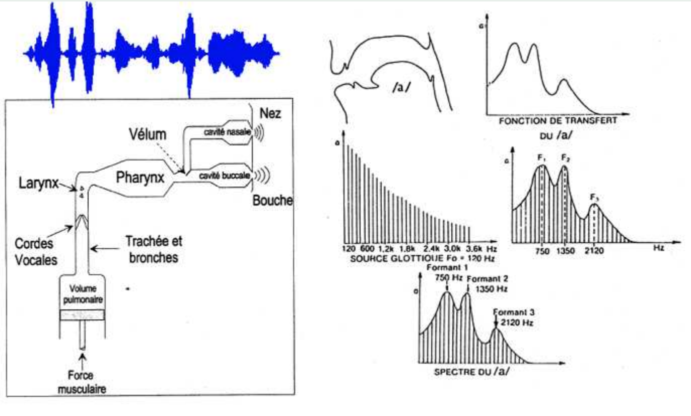
Industrie - Automatique et robotique[a]

[a] ZZ3 F1 : Régulation numérique, robotique

- **Techniques** : filtrage, FFT, PID, réduction de bruit.
- **Applications** : contrôle de vitesse de moteur, robotique, gestion de puissance, disques durs, analyseurs de vibrations...

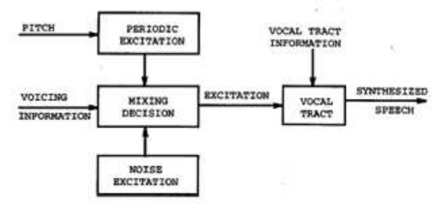
Généralités
Le TNS par l'exemple (1/2)

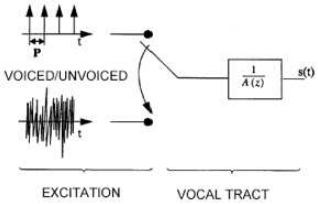
Traitement de la parole (LPC10) : Compression GSM, reconnaissance du locuteur



Généralités
Le TNS par l'exemple (1/2)

Traitement de la parole (LPC10) : Compression GSM, reconnaissance du locuteur





Généralités
Le TNS par l'exemple (2/2)

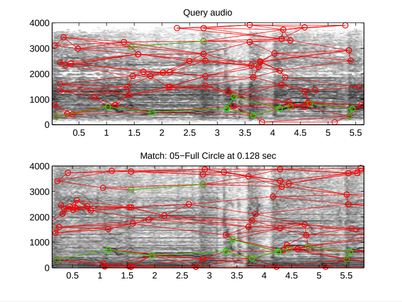
Empreinte acoustique : Shazam

Une empreinte acoustique est un résumé numérique généré à partir d'un signal audio.
Cette empreinte permet d'identifier un échantillon sonore, ou de localiser une sq́uence sonore dans une base de donnés audio.

Généralités
Le TNS par l'exemple (2/2)

Empreinte acoustique : Shazam

Une empreinte acoustique est un résumé numérique généré à partir d'un signal audio.
Cette empreinte permet d'identifier un échantillon sonore, ou de localiser une sq́uence sonore dans une base de donnés audio.



Généralités
La philosophie du traitement du signal

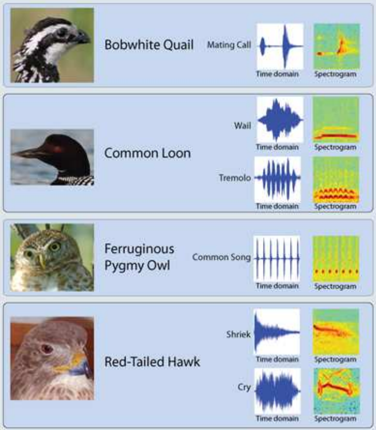
Observer autrement l'information

Le but du jeu en traitement du signal est d'observer autrement le signal sous un autre angle de vue (utilisation de transformée) afin d'extraire ou d'analyser l'information de façon plus simple.

Généralités
La philosophie du traitement du signal

Observer autrement l'information

Le but du jeu en traitement du signal est d'observer autrement le signal sous un autre angle de vue (utilisation de transformée) afin d'extraire ou d'analyser l'information de façon plus simple.

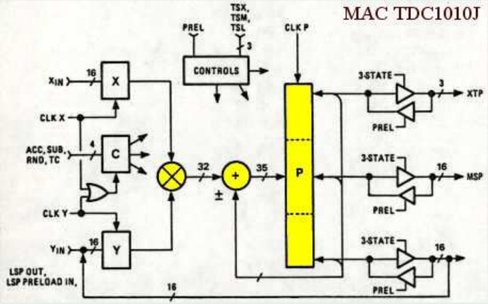


Généralités

Architecture dédiée : le DSP [a] (1/3)

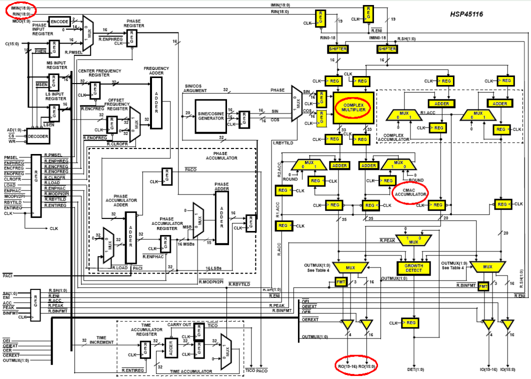
[a] ZZ2 F1 - Architecture avancée

Le MAC (multiplieur accumulateur) (années 80)



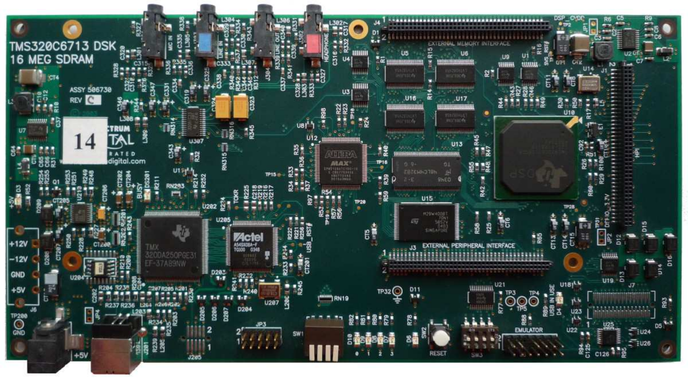
Généralités
Architecture dédiée : le DSP (2/3)

Le CMAC (multiplieur accumulateur complexe) (années 90)



Généralités
Architecture dédiée : le DSP (3/3)

Maquette des TP le TMS320C6713 (années 2000)



Généralités
TNS sans DSP

C++, java, Matlab, Simulink, LabView, ...

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités
Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (1/3)

Avantages du traitement numérique

- **Puissance de calcul** ;
- **Performances** : manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles) ;
- **Intégration** et complexité des tâches réalisées
- **Précision** pouvant être élevée (nombre de bits)
- **Stabilité** : pas de dérive (température, vieillissement)
- **Simulation ou temps réel** : des architectures et algorithmes permettent le travail en "temps réel" ;
- **Souplesse** : modification de coefficient en mémoire permet de changer de filtre.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (2/3)

Inconvénients du traitement numérique

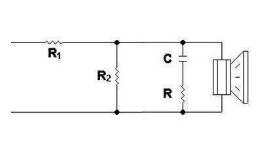
- **Limité en fréquence** : vitesse de calcul élevée si on souhaite une bande passante large ;
- **Complexité technologique** : même la réalisation de systèmes simples sera relativement complexe.

Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (2/3)

Inconvénients du traitement numérique

- **Limité en fréquence** : vitesse de calcul élevée si on souhaite une bande passante large ;
- **Complexité technologique** : même la réalisation de systèmes simples sera relativement complexe.



Généralités

Quel choix : analogique ou numérique ? (3/3)

Analogique ou numérique : comparaisons

	Analogique	Numérique
Technologie	Electronique	Informatique
Equation	différentielle	aux différences
Coefficient	Valeurs des composants	Valeurs numériques
Outil	Laplace : $H(p)$	Transformée en z : $H(z)$

1 Introduction

2 Signaux et Systèmes numériques
- Signaux numériques - Transformée de Fourier
- Systèmes numériques - Echantillonnage

Signaux numériques
Définitions et notations

Définition : signal discret

Un *signal discret* est une suite de valeurs numériques réelles ou complexe. Dans le cas réel on parle de *signal réel* et dans le cas complexe on parle de *signal complexe*.
Un *signal numérique* est un signal discret dont l'amplitude est quantifiée.

Notations

On utilisera la notation suivante $x[nT]$ où $n \in \mathbb{N}$ et T période de répétition dans le temps (*période d'échantillonnage*).

Signaux numériques
Définitions et notations

Définition : signal discret

Un *signal discret* est une suite de valeurs numériques réelles ou complexe. Dans le cas réel on parle de *signal réel* et dans le cas complexe on parle de *signal complexe*.
Un *signal numérique* est un signal discret dont l'amplitude est quantifiée.

Notations

On utilisera la notation suivante $x\left[nT\right]$ où $n \in \mathbb{N}$ et T période de répétition dans le temps (*période d'échantillonnage*).

Signaux numériques
Définitions et notations

Définition : signal discret

Un *signal discret* est une suite de valeurs numériques réelles ou complexe. Dans le cas réel on parle de *signal réel* et dans le cas complexe on parle de *signal complexe*.
Un *signal numérique* est un signal discret dont l'amplitude est quantifiée.

Notations

On utilisera la notation suivante $x\left[nT\right]$ où $n \in \mathbb{N}$ et T période de répétition dans le temps (*période d'échantillonnage*).

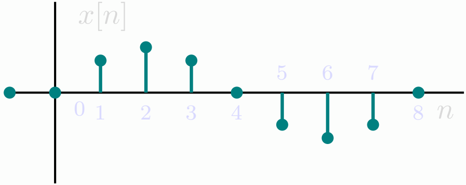
Remarque : Dans le cas de signaux continues on utilisera la notation :$x(t)$ où $t \in \mathbb{R}$

Signaux numériques
Définitions et notations

Simplification

Dans la suite on pose $T = 1$ et on manipulera $x[n]$. Cette simplification d'écriture va alléger les notations. Pour revenir au cas général, il faut multiplier l'indice par T.

Représentation graphique



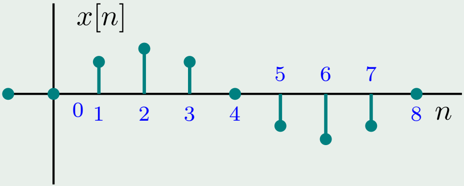
Signaux numériques

Définitions et notations

Simplification

Dans la suite on pose $T = 1$ et on manipulera $x[n]$. Cette simplification d'écriture va alléger les notations. Pour revenir au cas général, il faut multiplier l'indice par T.

Représentation graphique



Signaux numériques
Quelques signaux élémentaires

Echantillon ou impulsion

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

Saut unité

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$$

Signal rectangulaire

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Signaux numériques
Quelques signaux élémentaires

Echantillon ou impulsion

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

Saut unité

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$$

Signal rectangulaire

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Signaux numériques

Quelques signaux élémentaires

Echantillon ou impulsion

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

Saut unité

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$$

Signal rectangulaire

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Signaux numériques
Classes importantes de signaux

Signal périodique

Un *signal est périodique* de période N si :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x\left[n\right] = x\left[n+N\right]$$

Remarque : La somme de deux signaux périodiques n'est pas forcément un signal périodique. A ce moment là on parle de *signaux quasi-périodiques*.

Signal á durée limitée

Un signal est á durée limitée si il est défini pour un nombre fini N d'échantillons.

Signaux numériques
Classes importantes de signaux

Signal périodique

Un *signal est périodique* de période N si :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x[n] = x[n+N]$$

Remarque : La somme de deux signaux périodiques n'est pas forcément un signal périodique. A ce moment là on parle de *signaux quasi-périodiques*.

Si le rapport des périodes est un nombre rationnel, on parle de périodes *incommensurables*

Signal á durée limitée

Un signal est á durée limitée si il est défini pour un nombre fini N d'échantillons.

Signaux numériques

Classes importantes de signaux

Signal périodique

Un *signal est périodique* de période N si :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x\left[n\right] = x\left[n + N\right]$$

Remarque : La somme de deux signaux périodiques n'est pas forcément un signal périodique. A ce moment là on parle de *signaux quasi-périodiques*.

Signal á durée limitée

Un signal est á durée limitée si il est défini pour un nombre fini N d'échantillons.

Signaux numériques

Opérations élementaires sur des signaux

Lois de base

- **Somme** : additionner deux à deux les échantillons ;
- **Produit** : multiplier deux à deux les échantillons ;
- **Produit par une constante** : multiplication de tous les échantillons par une constante ;
- **Décalage** : $y[n] = x[n - n_0]$

Ces lois de base n'ont de sens que pour des signaux échantillonnés avec la même période d'échantillonnage.

Signaux numériques

Opérations élementaires sur des signaux

Lois de base

- **Somme** : additionner deux à deux les échantillons ;
- **Produit** : multiplier deux à deux les échantillons ;
- **Produit par une constante** : multiplication de tous les échantillons par une constante ;
- **Décalage** : $y[n] = x[n - n_0]$

Ces lois de base n'ont de sens que pour des signaux échantillonnés avec la même période d'échantillonnage.

Signaux numériques

Opérations élementaires sur des signaux

Lois de base

- **Somme** : additionner deux à deux les échantillons ;
- **Produit** : multiplier deux à deux les échantillons ;
- **Produit par une constante** : multiplication de tous les échantillons par une constante ;
- **Décalage** : $y[n] = x[n - n_0]$

Ces lois de base n'ont de sens que pour des signaux échantillonnés avec la même période d'échantillonnage.

Signaux numériques

Opérations élementaires sur des signaux

Lois de base

- **Somme** : additionner deux à deux les échantillons ;
- **Produit** : multiplier deux à deux les échantillons ;
- **Produit par une constante** : multiplication de tous les échantillons par une constante ;
- **Décalage** : $y[n] = x[n - n_0]$

Ces lois de base n'ont de sens que pour des signaux échantillonnés avec la même période d'échantillonnage.

Signaux numériques
Opérations élementaires sur des signaux

Lois de base

- **Somme** : additionner deux à deux les échantillons ;
- **Produit** : multiplier deux à deux les échantillons ;
- **Produit par une constante** : multiplication de tous les échantillons par une constante ;
- **Décalage** : $y[n] = x[n - n_0]$

Ces lois de base n'ont de sens que pour des signaux échantillonnés avec la même période d'échantillonnage.

Transformée de Fourier
Définitions et existence

Définition

La transformée de Fourier des signaux numériques est définie par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, exp(-j2\pi f k)$$

avec $f \in \mathbb{R}$

Existence

La transformée de Fourier $X(f)$ existe si :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]| < \infty$$

Transformée de Fourier
Définitions et existence

Définition

La transformée de Fourier des signaux numériques est définie par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left[k\right] exp(-j2\pi f k)$$

avec $f \in \mathbb{R}$

Existence

La transformée de Fourier $X(f)$ existe si :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|x\left[k\right]\right| < \infty$$

Transformée de Fourier

Propriétés

Périodicité

La transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal numérique est périodique de période 1.
On utilise généralement l'intervalle $[-1/2, 1/2]$

Transformée de Fourier inverse

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) exp(j2\pi nf) df$$

Remarque : Décomposition en série de Fourier.

Transformée de Fourier
Propriétés

Périodicité

La transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal numérique est périodique de période 1.
On utilise généralement l'intervalle $[-1/2, 1/2]$

Remarque : Attention on est dans le cas on a posé $T = 1$. Dans le cas général $X(f)$ est périodique de période $1/T$.

Transformée de Fourier inverse

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) exp(j2\pi nf) df$$

Remarque : Décomposition en série de Fourier.

Transformée de Fourier

Propriétés

Périodicité

La transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal numérique est périodique de période 1.
On utilise généralement l'intervalle $[-1/2, 1/2]$

Remarque : Attention on est dans le cas on a posé $T = 1$. Dans le cas général $X(f)$ est périodique de période $1/T$.

Transformée de Fourier inverse

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)exp(j2\pi nf)df$$

Remarque : Décomposition en série de Fourier.

Transformée de Fourier
Propriétés

Spectres fréquentiels

On peut écrire $X(f) \in \mathbb{C}$ sous les formes suivantes :

$$X(f) = Re\left[X(f)\right] + Im\left[X(f)\right] = |X(f)|e^{jArg[X(f)]}$$

- $|X(f)|$:spectre d'amplitude ;
- $Arg\left[X(f)\right]$:spectre de phase ;
- $|X(f)|^2$:densité spectrale d'énergie ;

Egalité de Parseval

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left[k\right]^2 = \text{Energie du signal}$$

Transformée de Fourier
Propriétés

Spectres fréquentiels

On peut écrire $X(f) \in \mathbb{C}$ sous les formes suivantes :

$$X(f) = Re\left[X(f)\right] + Im\left[X(f)\right] = |X(f)|e^{jArg[X(f)]}$$

- $|X(f)|$:spectre d'amplitude ;
- $Arg\left[X(f)\right]$:spectre de phase ;
- $|X(f)|^2$:densité spectrale d'énergie ;

Egalité de Parseval

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left[k\right]^2 = \text{Energie du signal}$$

Transformée de Fourier

Propriétés

Spectres fréquentiels

On peut écrire $X(f) \in \mathbb{C}$ sous les formes suivantes :

$$X(f) = Re\left[X(f)\right] + Im\left[X(f)\right] = |X(f)|e^{jArg[X(f)]}$$

- $|X(f)|$:spectre d'amplitude ;
- $Arg\left[X(f)\right]$:spectre de phase ;
- $|X(f)|^2$:densité spectrale d'énergie ;

Egalité de Parseval

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left[k\right]^2 = \text{Energie du signal}$$

Transformée de Fourier
Propriétés

Spectres fréquentiels

On peut écrire $X(f) \in \mathbb{C}$ sous les formes suivantes :

$$X(f) = Re\left[X(f)\right] + Im\left[X(f)\right] = |X(f)|e^{jArg[X(f)]}$$

- $|X(f)|$:spectre d'amplitude ;
- $Arg\left[X(f)\right]$:spectre de phase ;
- $|X(f)|^2$:densité spectrale d'énergie ;

Egalité de Parseval

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left[k\right]^2 = \text{Energie du signal}$$

Transformée de Fourier

Propriétés

Propriétés

- Théorème du retard : $y[n] = x[n - n_0]$ implique

$$Y(f) = exp(-j2\pi f n_0)X(f)$$

- Produit : $z[n] = x[n]\, y[n]$ implique

$$Z(f) = \int_{g_0 - 1/2}^{g_0 + 1/2} X(g)Y(f-g)dg$$

où g_0 est un paramtre quelconque.
Produit de convolution continu et périodique.

Transformée de Fourier
Commentaire

Cet outil n'est pas utilisable en pratique !

- Ici on a définit $X(f)$ où f est une variable continue : Imcompatible avec un système numérique (ordinateur) ;
- On définira dans le chapitre 2 de ce cours la *transformée de Fourier discrète* : $X[n]$

Transformée de Fourier

Corrélation des signaux

Définitions

On définit la *fonction d'intercorrélation* de $x[n]$ et de $y[n]$:

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[k+n]$$

On définit la *fonction d'autocorrélation* de $x[n]$:

$$\phi_{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[k+n]$$

Propriétés

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Transformée de Fourier

Corrélation des signaux

Définitions

On définit la *fonction d'intercorrélation* de $x[n]$ et de $y[n]$:

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[k+n]$$

On définit la *fonction d'autocorrélation* de $x[n]$:

$$\phi_{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[k+n]$$

Propriétés

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Systèmes numériques
Définition

Définition

Un système de traitement numérique est un opérateur fonctionnelle S qui agit sur l'entrée $x[n]$ et le transforme en un signal de sortie $y[n]$:

$$y[n] = S[x[n]]$$

Représentation

Systèmes numériques
Définition

Définition

Un système de traitement numérique est un opérateur fonctionnelle S qui agit sur l'entrée $x[n]$ et le transforme en un signal de sortie $y[n]$:

$$y[n] = S[x[n]]$$

Représentation

$$x[n] \longrightarrow \boxed{S[\;]} \longrightarrow y[n]$$

Systèmes numériques

Linéarité, Invariance et Causalité

Linéarité

Un système numérique est *linéaire* si :

$$S[ax_1[n] + bx_2[n]] = aS[x_1[n]] + bS[x_2[n]]$$

Invariance

Si la réponse à l'exitation $x[n]$ est $y[n]$, le système numérique linéaire est dit *invariant* si la réponse à l'exitation $x[n - n_0]$ est $y[n - n_0]$.

Causalité

Un système numérique est *causal* si la réponse ne précède jamais l'exitation : $x[n] = 0$ pour $n < n_0$ implique $y[n] = 0$ pour $n < n_0$

Systèmes numériques
Linéarité, Invariance et Causalité

Linéarité

Un système numérique est *linéaire* si :

$$S[ax_1[n] + bx_2[n]] = aS[x_1[n]] + bS[x_2[n]]$$

Invariance

Si la réponse à l'exitation $x[n]$ est $y[n]$, le système numérique linéaire est dit *invariant* si la réponse à l'exitation $x[n - n_0]$ est $y[n - n_0]$.

Causalité

Un système numérique est *causal* si la réponse ne précède jamais l'exitation : $x[n] = 0$ pour $n < n_0$ implique $y[n] = 0$ pour $n < n_0$

Systèmes numériques

Linéarité, Invariance et Causalité

Linéarité

Un système numérique est *linéaire* si :

$$S[ax_1[n] + bx_2[n]] = aS[x_1[n]] + bS[x_2[n]]$$

Invariance

Si la réponse à l'exitation $x[n]$ est $y[n]$, le système numérique linéaire est dit *invariant* si la réponse à l'exitation $x[n - n_0]$ est $y[n - n_0]$.

Causalité

Un système numérique est *causal* si la réponse ne précède jamais l'exitation : $x[n] = 0$ pour $n < n_0$ implique $y[n] = 0$ pour $n < n_0$

Systèmes numériques
Equation aux différences linéaires

Equation aux différences linéaires

Dans un système linéaire invariant, la relation entre l'entrée et la sortie s'exprime sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y\left[n-k\right] = \sum_{l=0}^{L} b_l x\left[n-l\right]$$

$$y\left[n\right] = \sum_{l=0}^{L} \frac{b_l}{a_0} x\left[n-l\right] - \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{a_0} y\left[n-k\right]$$

Systèmes numériques
Equation aux différences linéaires

Equation aux différences linéaires

Dans un système linéaire invariant, la relation entre l'entrée et la sortie s'exprime sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y\left[n-k\right] = \sum_{l=0}^{L} b_l x\left[n-l\right]$$

$$y\left[n\right] = \sum_{l=0}^{L} \frac{b_l}{a_0} x\left[n-l\right] - \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{a_0} y\left[n-k\right]$$

Systèmes numériques
Relation entrée - sortie

Produit de convolution

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[l]\, g[n-l] = x[n] * g[n]$$

Avec $g[n]$ la réponse impulsionnelle du système.

Réponse fréquentielle

La transformée de Fourier $G(f)$ de la réponse impulsionnelle $g[n]$ est appelée *réponse fréquentielle* ou *réponse harmonique*.

Systèmes numériques

Relation entrée - sortie

Produit de convolution

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[l]\, g[n-l] = x[n] * g[n]$$

Avec $g[n]$ la réponse impulsionnelle du système.

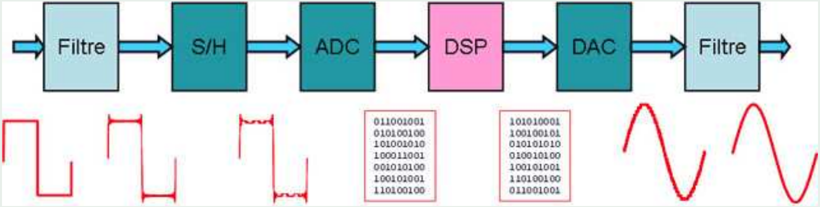
Réponse fréquentielle

La transformée de Fourier $G(f)$ de la réponse impulsionnelle $g[n]$ est appelée *réponse fréquentielle* ou *réponse harmonique*.

Echantillonnage

Généralités et Théoréme de Shannon

Chaîne de traitement du signal numérique



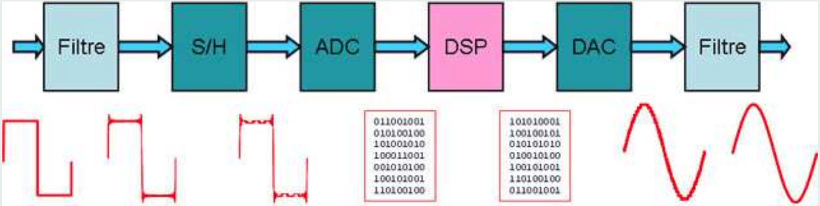
Théoréme de Shannon

Un signal $x(t)$ à bande limitée dans $[-f_0, f_0]$ peut-être reconstruit exactement à partir de ses échantillons $x[n]$, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à $2f_0$.

Echantillonnage

Généralités et Théoréme de Shannon

Chaîne de traitement du signal numérique



Théoréme de Shannon

Un signal $x(t)$ à bande limitée dans $[-f_0, f_0]$ peut-être reconstruit exactement à partir de ses échantillons $x[n]$, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à $2f_0$.

Echantillonnage
Echantillonnage id éal

Echantillonnnage idéalisé

$$x_e(t) = x_a(t)e(t) \text{ avec } \; e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Domaine fréquentiel

$$X_e(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - \frac{n}{T})$$

[1]

[1] cf TD 1

Echantillonnage
Echantillonnage id éal

Echantillonnnage idéalisé

$$x_e(t) = x_a(t)e(t) \text{ avec } e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Domaine fréquentiel

$$X_e(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - \frac{n}{T})$$

[1]

[1] cf TD 1