Exercice 7

Soit un tétraèdre régulier dont les sommets sont numérotés de 1 à 4. Un scarabée qui se trouve initialement en 1 se déplace pendant chaque unité de temps le long d'une arête. Arrivé en un sommet, il choisit avec la même probabilité l'une des trois arêtes pour continuer sa promenade.

a) Montrer que la promenade du scarabée peut être décrite par une chaîne de Markov. Donner la matrice de transitions.

b) Quel est le temps moyen nécessaire pour atteindre le sommet 4 pour la première fois (rendre l'état 4 absorbant) ?

c) Quelle est la probabilité d'atteindre le sommet 4 s'il y a de la colle au sommet 2 ?

Correction

a) Le futur ne dépend que du présent et non du passé donc le processus est une chaîne de Markov.

4 états : 1 à 4

P matrice stochastique de transition à termes constants (chaîne de Markov homogène).

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Placer un piège en 4 (état 4 absorbant) et calculer n_1, n_2 et n_3.

$$P'=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n_1=1+\frac{1}{3}n_2+\frac{1}{3}n_3 \\ n_2=1+\frac{1}{3}n_1+\frac{1}{3}n_3 \\ n_3=1+\frac{1}{3}n_1+\frac{1}{3}n_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -n_1+\frac{1}{3}n_2+\frac{1}{3}n_3=-1 \\ \frac{1}{3}n_1-n_2+\frac{1}{3}n_3=-1 \\ \frac{1}{3}n_1+\frac{1}{3}n_2-n_3=-1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -n_1+\frac{1}{3}n_2+\frac{1}{3}n_3=-1 \\ 0n_1-\frac{8}{9}n_2+\frac{4}{9}n_3=\frac{-4}{3} \\ 0n_1+\frac{4}{9}n_2-\frac{8}{9}n_3=\frac{-4}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -n_1+\frac{1}{3}n_2+\frac{1}{3}n_3=-1 \\ 0n_1-\frac{8}{9}n_2+\frac{4}{9}n_3=\frac{-4}{3} \\ 0n_1+0n_2-\frac{12}{9}n_3=\frac{-12}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -n_1+\frac{1}{3}n_2+\frac{1}{3}n_3=-1 \\ 0n_1-2n_2+n_3=-3 \\ 0n_1+0n_2+n_3=3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} n_1=1+\frac{1}{3}n_2+\frac{1}{3}n_3=3 \\ n_2=(3+n_3)/2=3 \\ n_3=3 \end{Bmatrix}$$

ou encore remarquer que les trois variables vérifient la même équation donc sont égales

$$n=1+\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}n \quad \text{et} \quad n=3$$

c) Placer un piège en 2 (états 2 et 4 absorbants) et calculer b_{ij}.

$$P''=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} b_{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b_{32} \\ b_{32}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b_{12} \\ b_{14}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b_{34} \\ b_{34}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b_{14} \end{Bmatrix} \text{ par substitution } \begin{Bmatrix} b_{12}=\frac{1}{2} \\ b_{32}=\frac{1}{2} \\ b_{14}=\frac{1}{2} \\ b_{34}=\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

d) La chaîne converge-t-elle (pas d'état absorbant) ?

P^2 = matrix([1/3,2/9,2/9,2/9],[2/9,1/3,2/9,2/9],[2/9,2/9,1/3,2/9],[2/9,2/9,2/9,1/3])

$$P^2=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{+ partout (th. 1)}$$

et le théorème 2 est applicable :
valeurs propres [1,-1/3] et multiplicité [1,3].
La chaîne converge.

e) Vecteur d'état limite (= vecteur stationnaire)?

$\pi^* = \pi^* P$ équations de balance

$\pi^* = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

$$P^*=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{matrice limite}$$

On vérifie avec P^{10}
(%i21) P^^10*1.0;
(%o21) matrix(
[0.25001270131586, 0.24999576622805, 0.24999576622805, 0.24999576622805],
[0.24999576622805, 0.25001270131586, 0.24999576622805, 0.24999576622805],
[0.24999576622805, 0.24999576622805, 0.25001270131586, 0.24999576622805],
[0.24999576622805, 0.24999576622805, 0.24999576622805, 0.25001270131586])

Programme Maxima
```
P:1/3*matrix(
 [0,1,1,1],
 [1,0,1,1],
 [1,1,0,1],
 [1,1,1,0]);
P.P;
charpoly(P, x), expand;
factor(%);
eigenvalues(P);
eigenvectors(P);
P^^10*1.0;
```