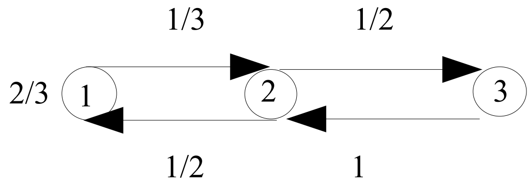
Modélisation partiel du 13/02/2006

Problème 1

1-



2- Classe : {1, 2, 3}

3- Oui car la chaîne de Markov a un espace des états fini (nombre fini d'états).

4- Oui car il n'y a qu'une seule classe récurrente.

5- $\pi=\pi P$ ou somme des entrées = somme des sorties pour chaque noeud k

$$\sum_{i\neq k}\pi_i p_{ik}=\pi_k\sum_{i\neq k}p_{ki}$$

avec $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ et $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

résultat $\pi=(1/2,1/3,16)$

6- D'après le théorème 1 la chaîne de Markov converge.

$$P:\begin{pmatrix}+&+&0\\+&0&+\\0&+&0\end{pmatrix}\qquad P^2:\begin{pmatrix}+&+&+\\+&+&0\\+&0&+\end{pmatrix}\qquad P^4:\begin{pmatrix}+&+&+\\+&+&+\\+&+&+\end{pmatrix}$$

Pour le théorème 2 on calcule $det(P-xI)$ en développant par rapport à la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix}2/3-x&1/3&0\\1/2&-x&1/2\\0&1&-x\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2/3-x&0\\1/2&1/2\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}2/3-x&1/3\\1/2&-x\end{vmatrix}=-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

Le polynôme caractéristique est divisible par x-1 car 1 est toujours racine (1 valeur propre de P).
Une division euclidienne par x-1 donne

$$-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=(x-1)(-x^2-x/3+1/3)=(1-x)(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}-x)(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}-x)$$

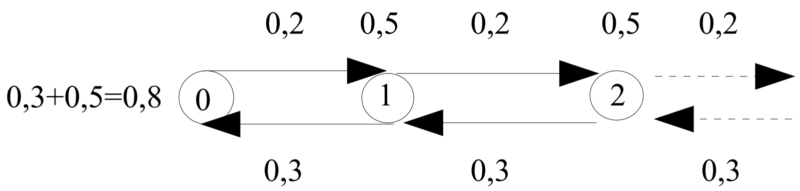
et la valeur absolue des deux dernières racines vérifie

$$0<\frac{2}{6}=\frac{-1+\sqrt{9}}{6}<\frac{-1+\sqrt{13}}{6}<\frac{1+\sqrt{13}}{6}<\frac{1+\sqrt{16}}{6}=\frac{5}{6}<1$$ donc la chaîne de Markov converge.

7- C'est la distribution stationnaire de la question 5 et P* a toutes ses lignes égales à ce vecteur de probabilités.

Problème 2

1-



Le nombre d'états est infini.

2- Oui, X_{n+1} (futur) ne dépend que de X_n (présent) et non du passé X_{n-p} ($p > 0$).

3- A l'équilibre les sorties compensent les entrées (ici $p(k)=\pi_k$ vecteur de probabilités stationnaires)

$$\begin{Bmatrix}0{,}2\,p(0)=0{,}3\,p(1)\\(0{,}2+0{,}3)\,p(k)=0{,}2\,p(k-1)+0{,}3\,p(k+1)\end{Bmatrix}$$ pour $k > 0$

$$\begin{Bmatrix}p(1)=\frac{2}{3}p(0)\\3\,p(k+1)-5\,p(k)+2\,p(k-1)=0\end{Bmatrix}$$

4- Equation caractéristique $3x^2-5x+2=0$ racines 2/3 et 1 donc

$p(k)=a(2/3)^k+b\,1^k=a(2/3)^k+b$

Modélisation partiel du 13/02/2006

5- Les $p(k)$ sont des probabilités donc

$\sum_{k=0}^{\infty} p(k)=1$ série convergente, ce qui implique $\lim_{k\to\infty} p(k)=0$ et $b = 0$

mais aussi

$$1=\sum_{k=0}^{\infty} p(k)=a\sum_{k=0}^{\infty}(2/3)^k=a\frac{1}{1-2/3}=3a$$

donc $a = 1/3$ et

$p(k)=1/3(2/3)^k$ avec $p(0)=1/3$ et $p(1)=1/3(2/3)=2/9$

les équations initiales sont vérifiées.

6- Rendre l'état 3 absorbant et calculer n_0

$$\left\{\begin{matrix} n_0=1+0{,}8\,n_0+0{,}2\,n_1 \\ n_1=1+0{,}3\,n_0+0{,}5\,n_1+0{,}2\,n_2 \\ n_2=1+0{,}2\,n_1+0{,}5\,n_2 \end{matrix}\right\}$$ puis résolution avec la triangularisation de Gauss

$$\left\{\begin{matrix} 0{,}2\,n_0-0{,}2\,n_1=1 \\ -0{,}3\,n_0+0{,}5\,n_1-0{,}2\,n_2=1 \\ -0{,}2\,n_1+0{,}5\,n_2=1 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 2\,n_0-2\,n_1=10 \\ +4\,n_1-4\,n_2=50 \\ -2\,n_1+5\,n_2=10 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} n_0-n_1=5 \\ n_1-n_2=25/2 \\ 3\,n_2=35 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} n_0=175/6 \\ n_1=145/6 \\ n_2=35/3 \end{matrix}\right\}$$

7- Rendre les états 0 et 3 absorbants et calculer b_{20}

$$\left\{\begin{matrix} b_{20}=0{,}5\,b_{20}+0{,}3\,b_{10} \\ b_{10}=0{,}3+0{,}5\,b_{10}+0{,}2\,b_{20} \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 3\,b_{10}=5\,b_{20} \\ 5\,b_{10}=3+2\,b_{20} \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} b_{10}=5/3\,b_{20} \\ 25/3\,b_{20}=3+2\,b_{20} \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} b_{10}=5/3\,b_{20} \\ 19/3\,b_{20}=3 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_{10}=15/19 \\ b_{20}=9/19 \end{matrix}\right\} \text{ et } \left\{\begin{matrix} b_{13}=4/19 \\ b_{23}=10/19 \end{matrix}\right\}$$

Problème 3

1- Le nombre de pannes N suit une loi de Poisson de durée 2

$P(N>3) = 1- [P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) + P(N=3)]$

$P(N>3) = 1- [e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} + 4/3\ e^{-2}] = 1- [19/3]\ e^{-2} \approx 0{,}15$

2- L'instant T de la première panne suit une loi exponentielle

$P(T \le t \mid t \le 3) = P(T \le t \text{ et } t \le 3) / P(t \le 3)$ en considérant 1 panne sur $[0,t]$ et 0 sur $[t,3]$

$= (e^{-\lambda t}\ \lambda t\ e^{-\lambda(3-t)}) / (3\lambda\ e^{-3\lambda}) = t / 3$ c'est la fonction de répartition $F(t)$.

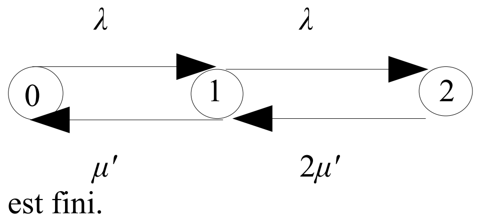
Pour obtenir la densité il faut dériver $F(t)$, on a $f(t) = 1/3$.

La distribution de T est uniforme sur $[0,3]$

Problème 4

On considère que les arrivées et les services suivent des lois exponentielles. La station est une M/M/2/2 donc $\lambda(0) = \lambda(1) = \lambda$ et 0 sinon ; $\mu(1) = \mu'$, $\mu(2) = 2\mu'$, processus de naissance et de mort.

1- Diagramme simplifié sans boucle, $o(\Delta t)$ ni Δt



Le nombre d'états est fini.

2- Supposons l'équilibre atteint, les probabilités $p(k) = \pi_k$ sont constantes

$$\left\{\begin{matrix} \lambda\,p(0)=\mu'\,p(1) \\ (\lambda+\mu')\,p(1)=\lambda\,p(0)+2\mu'\,p(2) \\ 2\mu'\,p(2)=\lambda\,p(1) \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \lambda\,p(0)=\mu'\,p(1) \\ 2\mu'\,p(2)=\lambda\,p(1) \\ p(0)+p(1)+p(2)=1 \end{matrix}\right\}$$

Modélisation partiel du 13/02/2006

$$\left\{\begin{array}{c} p(1)=p(0)\lambda/\mu' \\ p(2)=p(0)(\lambda/\mu')^2/2 \\ p(0)=1/(1+\lambda/\mu'+(\lambda/\mu')^2/2) \end{array}\right\} \quad \text{pour } \lambda=\mu' \quad \left\{\begin{array}{c} p(1)=2/5 \\ p(2)=1/5 \\ p(0)=2/5 \end{array}\right\}$$

4- Pas de condition de stabilité car la capacité est limitée (donc pas de débordement et les probabilités $p(k)$ sont toujours définies).

5- $L = p(1) + 2\,p(2)$, remarquons qu'il n'y a pas d'attente.

6- Les états 0 et 1 autorisent l'arrivée d'un nouvel appel et donc son traitement.
La probabilité de rejet est donc $p(2) = 1 - [p(0) + p(1)]$

Problème 5

Résolu en cours.