Exercice 8

Dans une station-service équipée d'une seule pompe, on a observé que le nombre de voitures arrivant au cours du nième intervalle de temps $[n\text{-}1, n]$ est une variable aléatoire Y_n de distribution

$P[Y_n = 0] = 0.4$

$P[Y_n = 1] = 0.4$

$P[Y_n = 2] = 0.2$

pour $n \geq 1$.

On suppose que chaque service dure exactement une unité de temps. Les services commencent (si au moins une voiture est présente) aux instants 1, 2, ... La station dispose de deux places d'attente. Soit X_n le nombre de voitures qui se trouvent dans la station immédiatement après l'instant n.

a) Montrer que la séquence $\{X_n \; ; \; n \geq 0\}$ forme une chaîne de Markov et construire son graphe de transitions.

b) Pendant quel pourcentage de temps la station est-elle en moyenne inoccupée ?

c) Si X_0=0, quelle sera la durée moyenne n_0 jusqu'à ce que les deux places soient occupées pour la première fois ? (rendre un état absorbant).

Indications

a) Le futur ne dépend que du présent et non du passé et P est une matrice stochastique.

Preuve : Il y a 0, 1 ou 2 voitures dans la station.

$P_{00} = 0.4 \quad P_{01} = 0.4 \quad P_{02} = 0.2$

$P_{10} = 0.4 \quad P_{11} = 0.4 \quad P_{12} = 0.2$

$P_{20} = 0 \quad P_{21} = 0.4 \quad P_{22} = 0.4{+}0.2 = 0.6$

b) P^2 a toutes ses composantes strictement positives donc La chaîne de Markov converge.

On peut étudier le comportement stationnaire a l'aide de la limite du vecteur de probabilité d'état.

$$\begin{Bmatrix} 0.4\pi_2+0.0\pi_3=(0.4+0.2)\pi_1 \\ 0.4\pi_1+0.4\pi_3=(0.4+0.2)\pi_2 \\ 0.2\pi_1+0.2\pi_2=0.4\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -0.6\pi_1+0.4\pi_2+0.0\pi_3=0 \\ 0.4\pi_1-0.6\pi_2+0.4\pi_3=0 \\ 0.2\pi_1+0.2\pi_2-0.4\pi_3=0 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -3\pi_1+2\pi_2+0\pi_3=0 \\ 2\pi_1-3\pi_2+2\pi_3=0 \\ \pi_1+\pi_2-2\pi_3=0 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{Bmatrix}$$

Remarquons $E_2 = E_3 - E_1$

$$\begin{Bmatrix} -3\pi_1+2\pi_2+0\pi_3=0 \\ \pi_1+\pi_2-2\pi_3=0 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 3\pi_1=2\pi_2 \\ \pi_1+\pi_2=2\pi_3 \\ 3\pi_3=1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \pi_1=2/3\,\pi_2 \\ (2/3+1)\pi_2=2/3 \\ \pi_3=1/3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \pi_1=2/3\,\pi_2=4/15 \\ \pi_2=2/5 \\ \pi_3=1/3 \end{Bmatrix}$$

$$\pi=(4/15, 2/5, 1/3)$$

Probabilité d'être inoccupée $\pi_1=4/15$ il y a 0 voiture dans la station (idem pourcentage d'oisiveté).

c) Rendre le troisième état absorbant.

$$\begin{Bmatrix} n_1=1+0.4\,n_1+0.4\,n_2 \\ n_2=1+0.4\,n_1+0.4\,n_2 \end{Bmatrix} \qquad n_1=n_2=5$$

On peut traiter le même problème avec 1 place de service et 2 places d'attente.

Exercice 9
Soit

$$P=\begin{Bmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4\\ 2/3 & 0 & 1/3\\ 3/5 & 1/5 & 1/5\end{Bmatrix}$$

la matrice de transition d'une chaîne de Markov possédant les états 1, 2 et 3.
a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une chaîne de Markov.
b) Construire son graphe.
c) Calculer le régime permanent.
d) Rendre l'état 3 absorbant et calculer $P(N_1 = k)$ où $k = 1, 2, 3$ ainsi que n_i ($i = 1, 2$).

Indications
a) Le futur ne dépend que du présent et non du passé et P est une matrice stochastique.
b) simple
c) P^2 a tous ses éléments >0 donc il y a convergence.
Valeurs propres :
-(sqrt(21)+9)/60,(sqrt(21)-9)/60,1
-0.2263762615826 ; -0.073623738417403 ; 1
Equations de balance

$$\begin{Bmatrix}2/3\,\pi_2+3/5\,\pi_3=(1/4+1/4)\pi_1\\ 1/4\,\pi_1+1/5\,\pi_3=(2/3+1/3)\pi_2\\ 1/4\,\pi_1+1/3\,\pi_2=(3/5+1/5)\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}2/3\,\pi_2+3/5\,\pi_3=1/2\,\pi_1\\ 1/4\,\pi_1+1/5\,\pi_3=\pi_2\\ 1/4\,\pi_1+1/3\,\pi_2=4/5\,\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}1/2\,\pi_1-2/3\,\pi_2-3/5\,\pi_3=0\\ 1/4\,\pi_1-\pi_2+1/5\,\pi_3=0\\ 1/4\,\pi_1+1/3\,\pi_2-4/5\,\pi_3=0\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}1/4\,\pi_1-\pi_2+1/5\,\pi_3=0\\ 1/4\,\pi_1+1/3\,\pi_2-4/5\,\pi_3=0\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\\ \pi_1-4\,\pi_2+4/5\,\pi_3=0\\ \pi_1+4/3\,\pi_2-16/5\,\pi_3=0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\\ -5\,\pi_2-1/5\,\pi_3=-1\\ 1/3\,\pi_2-21/5\,\pi_3=-1\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\\ -5\,\pi_2+1/5\,\pi_3=-1\\ -316/5\,\pi_3=-16\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\pi_1=1-\pi_2-\pi_3=1-15/79-20/79=44/79\\ pi_2=(1-1/5*20/79)/5=15/79\\ \pi_3=20/79\end{Bmatrix}$$

$\pi=(44/79, 15/79, 20/79)$ et P* a ses lignes égales au vecteur précédent.

d)

$$P'=\begin{Bmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4\\ 2/3 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}\quad \text{on a}\quad \pi(1)=\pi(0)*P'$$

Utiliser la formule pour les n_i.