

# Risoluzione tracce di Fondamenti di automatica II

Prof. Lino-Maione

Marco Q.

2 marzo 2013

# Indice

1	Appello del 18.07.03	3
2	Appello del 19.07.03	6
3	Appello del 08.04.04	11
4	Appello del 17.04.04 [G]	16
5	Appello del 15.07.04	19
6	Appello del 09.09.04	21
7	Appello del 20.09.05[v]	24
8	Appello del 15.02.06	29
9	Appello del 21.09.10	33
10	Appello del 05.07.12 [i]	36
11	Appello del 03.09.12 [i]	39
12	Appello del 26.09.12 [i]	43
13	Appello del 27.11.12 [i]	47
14	Appello del 12.02.13	48
15	Appello del 26.02.13 [i]	53
	Indice analitico	55

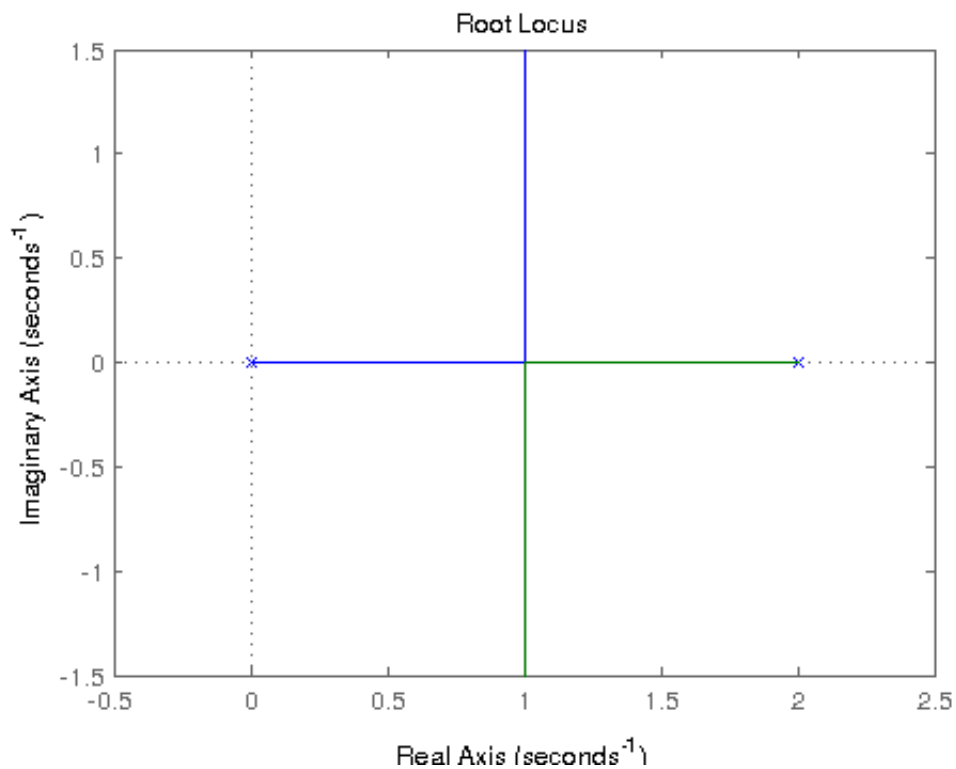
# 1 Appello del 18.07.03

## Quesito A

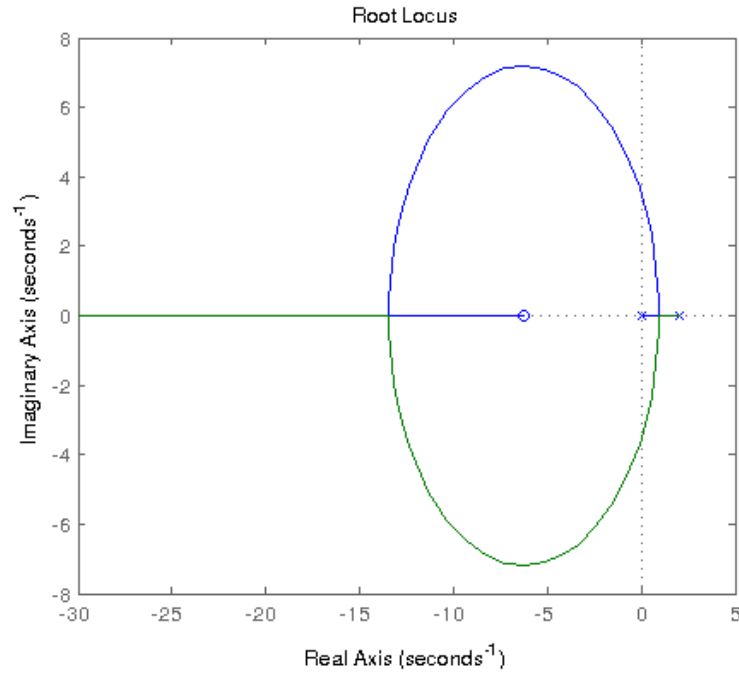
Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{1}{s(s-a)}$ . Si indichi, scegliendo tra un regolatore P, PD e PI quello in grado di garantire:

***Che il sistema sia stabile, del secondo ordine***

Come si può intuire dal luogo delle radici della f.d.t. in anello aperto, il regolatore P non è in grado di soddisfare questi requisiti:



La f.t.d. in anello chiuso, infatti, ha sempre poli a parte reale positiva per qualsiasi valore del guadagno. Aggiungendo uno zero a parte reale negativa, il luogo delle radici diventa:



E si è pertanto in grado di soddisfare i requisiti di stabilità.

Per quanto detto, il regolatore in grado di assolvere questo compito è quello PD.

**Che i poli della f.d.t. del sistema in anello chiuso siano complessi coniugati con  $\delta = 0.7$  e  $\omega_n = 10$ .**

L'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso è quindi  $p(s) = s^2 + s(K_p T_d - a) + K_p$ .

Imponendo le condizioni si ha:

$$\begin{cases} K_p T_d - a = 2\delta\omega_n \\ K_p = \omega_n^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_d = \frac{17+a}{100} \\ K_p = 100 \end{cases}$$

### Quesito B

Si consideri un sistema in anello chiuso con  $G_c(j\omega) = k_p = 4$  e  $G_p(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^3}$ .

**Si determini il margine di guadagno**

$$\begin{aligned} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= -3 \arctan(\omega) = -\pi \leftrightarrow \omega = \omega_{cp} = \sqrt{3} \\ |G_p(j\omega_{cp})G_c(j\omega_{cp})| &= \frac{4}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{2} \rightarrow k_c = 2 \simeq 6dB. \end{aligned}$$

**Il margine di fase**

$$\begin{aligned} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 1 \rightarrow 4 = \sqrt{(1+\omega^2)^3} \\ \omega &= \sqrt{16^{1/3} - 1} \rightarrow \omega_c \simeq 1.23 \text{ (scarto soluzioni negative/complesse coniugate).} \\ \angle G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c) &= -3 \arctan(\omega_c) \simeq -2.66 \\ M\phi &= 0.48 \end{aligned}$$

**Si dica se il sistema è asintoticamente stabile, instabile o semplicemente stabile.**

Il sistema è stabile.

**Quesito C**

Sia ora  $G_p(j\omega) = \frac{e^{-jt_0\omega}}{j\omega}$  e  $G_c(j\omega) = k_p$ .

**Per  $k_p > 0$  si determini il margine di fase**

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \leftrightarrow \omega = \omega_{cp} = k.$$

$$\angle G_p(j\omega_{cp})G_c(j\omega_{cp}) = -t_0k - \frac{\pi}{2}$$

$$M\phi(t_0, k) = -t_0k + \frac{\pi}{2}.$$

**Con  $k_p = 2$  si determini il margine di fase per  $t_0 = 0.2; t_0 = 0.5; t_0 = 1$**

$$M\phi(0.2, 2) = \frac{\pi}{2} - 0.2 \cdot 2 = 1.17$$

$$M\phi(0.5, 2) = \frac{\pi}{2} - 0.5 \cdot 2 = 0.57$$

$$M\phi(1, 2) = \frac{\pi}{2} - 2 = -0.42$$

## 2 Appello del 19.07.03

### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+20)(s+100)}$ . Si scelga un regolatore PD  $G_c = K_p + K_0 s$  in modo che:

**La f.d.t. in anello chiuso abbia una dinamica del 2° ordine.**

Poiché ci sono 3 poli, per avere una dinamica del secondo ordine sfruttando il regolatore per cancellare il polo sito in  $s_3 = -20 + j0$ . Impongo quindi  $G_c = K_p(1 + \frac{K_0}{K_p}s) \rightarrow \frac{K_p}{K_0} = 20 \rightarrow K_0 = 0.05 \cdot K_p$ .

**La costante di smorzamento valga  $\delta = 0.7$  e il tempo di assestamento al 2% nella risposta al gradino sia inferiore a 0.12 secondi**

La f.d.t. del sistema in anello chiuso è ora:

$$G(s) = \frac{G_c(s) \cdot G_p(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_p(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 100s + K_p}.$$

Imponendo la prima condizione ottengo:

$$\begin{cases} 100 = 2\delta\omega_n \\ \omega_n^2 = K_p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = 71.54 \\ K_p = 5102 \end{cases}$$

Essendo il tempo di assestamento al 2%  $\frac{4}{\delta\omega_n} = T_{a2\%} = 0.08$  anche la seconda specifica è verificata.

In definitiva, la f.d.t. del controllore risulta essere:  $G_c = 5102(1 + 20s)$

**Si determinino gli errori di posizione e velocità**

L'errore di posizione del sistema in anello chiuso è:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = s \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{5102}{s^2 + 100s + 5102} \right) = 0.$$

L'errore di velocità è:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{5102}{s^2 + 100s + 5102} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{5102}{s^2 + 100s + 5102} \right) = \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{k}{s(s-1)}$ ,  $G_c(s) = 1$ .

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist (Considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k}{s(s-1)} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{k}{j\omega(1-j\omega)} = -\frac{k}{(1+\omega^2)} + j \cdot \frac{k}{\omega(1+\omega^2)}$$

1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k < 0, & -\frac{1}{2}\pi \\ k > 0, & -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2) \cdot \pi + \varphi_0 = \begin{cases} k < 0, & -\pi + \pi = 0 \\ k > 0, & -\pi + \pi - \pi = -\pi \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = -k \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = +\infty \end{cases}$$

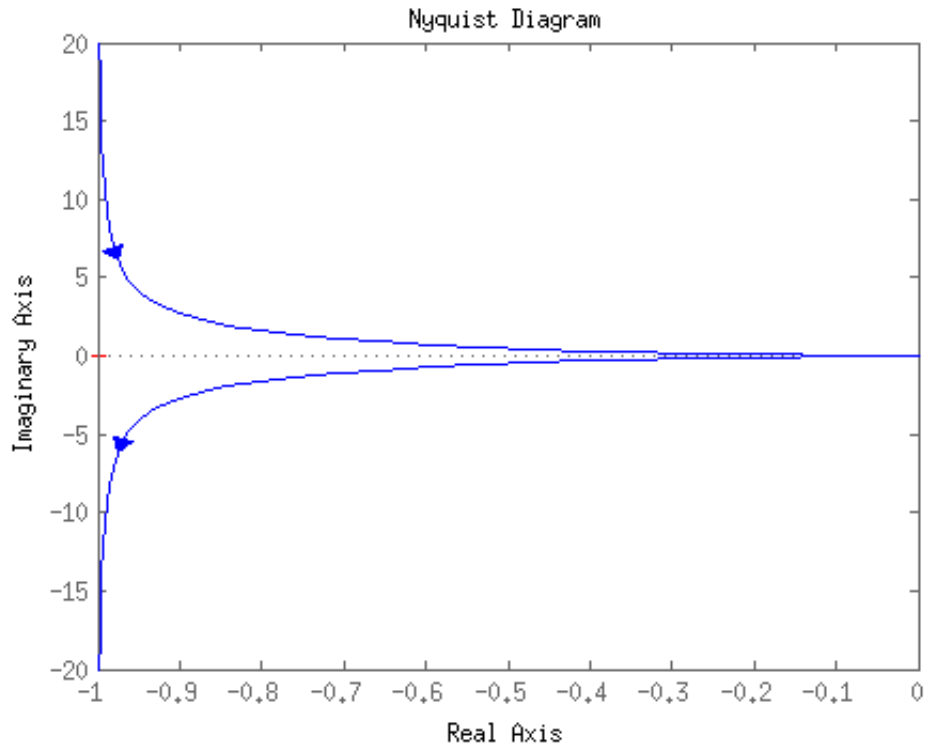
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 0^+$$

$$\Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) = \frac{1}{2}\pi$$

2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

L'equazione  $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0$  e l'equazione  $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0$  non ammettono soluzioni per nessun valore finito di  $\omega$ .

3. DISEGNO (PER  $k = 1$ )



**Si studi la stabilità per  $k > 0$  e si indichino il numero di radici nel semipiano complesso a destra dell'asse immaginario.**

Il sistema in anello aperto è instabile con un polo a parte reale positiva. Pertanto, poiché il grafico di Nyquist circonda una sola volta in senso orario il punto critico  $-1 + j0$ , il sistema è instabile per qualsiasi valore finito di  $k$  e possiede due poli a parte reale positiva.

**Si consideri ora un controllore con la seguente f.d.t.:  $G_c(s) = 1 + T_0 s$  con  $T_0 = 2$ . Si tracci nuovamente il diagramma polare di Nyquist.**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k(1+2s)}{s(s-1)} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{k(1+2j\omega)}{j\omega(1-j\omega)} = -k \frac{3}{(1+\omega^2)} + jk \frac{1-2\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}$$

### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

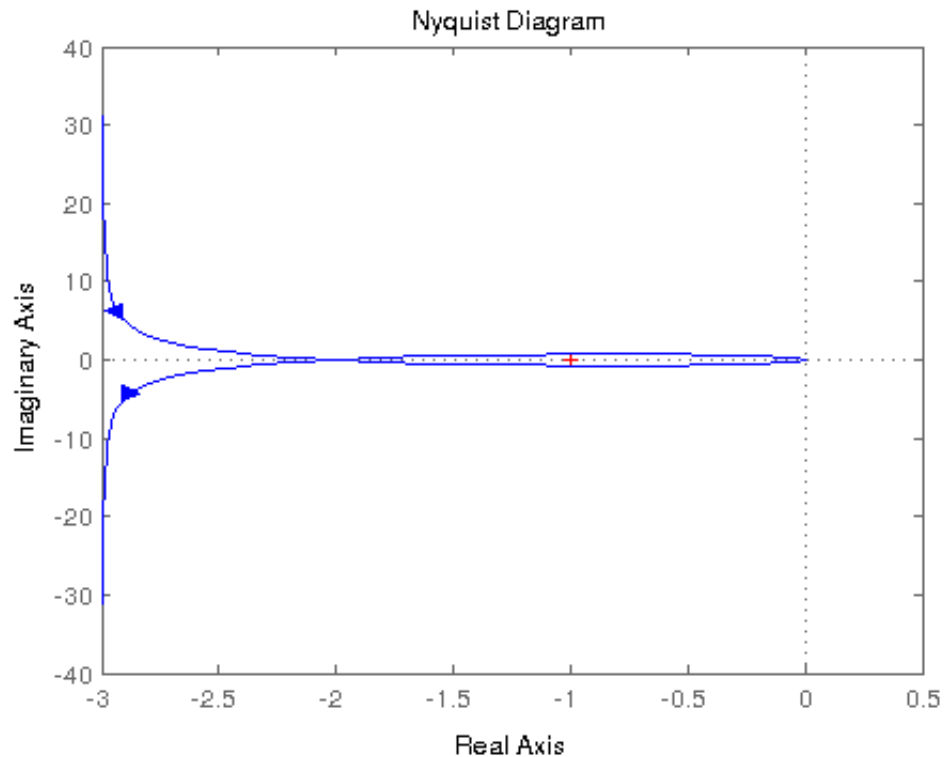
$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k > 0 & -\frac{3}{2}\pi \\ k < 0 & -\frac{7}{2}\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2 - n_2)\pi + \varphi_0 = \begin{cases} k > 0 & -\frac{\pi}{2} \\ k < 0 & \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = -3 \cdot k \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = \text{sign}(k) \cdot \infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0^+ \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \pi \end{aligned}$$

### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari:  
non esistono valori finiti di  $\omega$ .
- b) Intersezione con l'asse dei numeri reali:  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\omega^2 = 0$   
 $\omega_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\Re\{G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)\} = -2 \cdot k$

### 3. DISEGNO





**Si determinino i valori  $k$  (se ve ne sono) per i quali il sistema è stabile.**

Il sistema è stabile per  $k < 1/2$ .

### Quesito C

Sia ora  $G_c(s) = 5$  e  $G_p(s) = \frac{e^{-3s}}{(1+5s)^3}$ .

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist (Considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \left. \frac{5 \cdot e^{-3s}}{(1+5s)^3} \right|_{s=j\omega} = \frac{5}{(1+5j\omega)^3} \cdot e^{-3j\omega}.$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} + \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle e^{-3j\omega} = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m - n) \frac{\pi}{2} - (m_2 - n_2)\pi + \varphi_0 + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle e^{-3j\omega} = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 5 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \end{aligned}$$

2. INTERSEZIONI

$$\angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow \omega + \arctan(5\omega) = \frac{\pi}{3}$$

Posto  $p(\omega) = \omega + \arctan(5\omega) - \frac{\pi}{3}$ , osservo che:

$$p(0) = -\frac{\pi}{3}$$

$$p(1) = 1.32$$

Essendo la funzione monotona crescente, nell'intervallo  $[0, 1]$  dev'esserci necessariamente una soluzione:

$$p(0.5) = 0.64$$

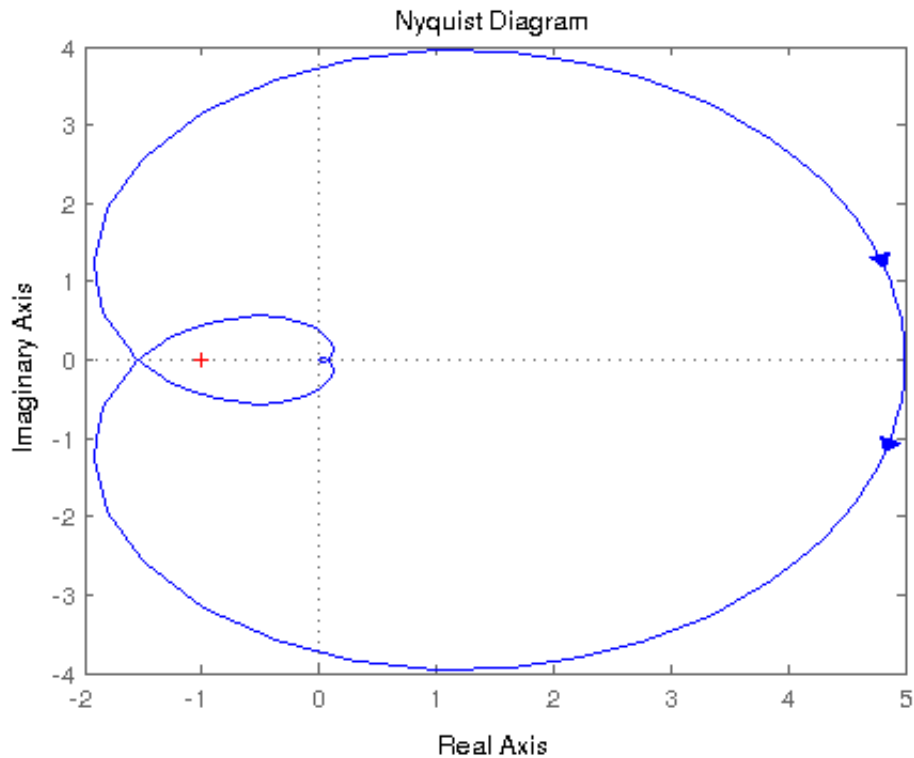
$$p(0.25) = 0.098$$

$$p(0.22) = 0.005$$

Considero come soluzione dell'equazione il valore  $\omega_{cp} = 0.22$ .

$$\Re\{G_p(j\omega_{cp})G_c(j\omega_{cp})\} \simeq -1.5$$

3. DISEGNO



**Si determini il margine di fase**

$$5 = (1 + 25\omega^2)^{3/2} \Leftrightarrow \omega_c = 0.28$$

$$M\phi = \pi + \angle G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c) = -3\omega_c - 3\arctan(5\omega_c) + \pi = -0.53$$

**Si discuta la stabilità**

Il sistema non è stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

### 3 Appello del 08.04.04

#### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_c(j\omega) = 1$  e  $G_p(j\omega) = \frac{200(s-0.5)}{s(s-10)(s+200)}$

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist (Considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{200(s-0.5)}{s(s-10)(s+200)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{0.05(1-2j\omega)}{j\omega(1-0.1j\omega)(1+0.005j\omega)} = -\frac{0.05(1.905+0.001\omega^2)}{(1+0.01\omega^2)(1+2.5\cdot 10^{-5}\omega^2)} - j\frac{0.05(1+0.1905\omega^2)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+2.5\cdot 10^{-5}\omega^2)}$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -0.09525 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

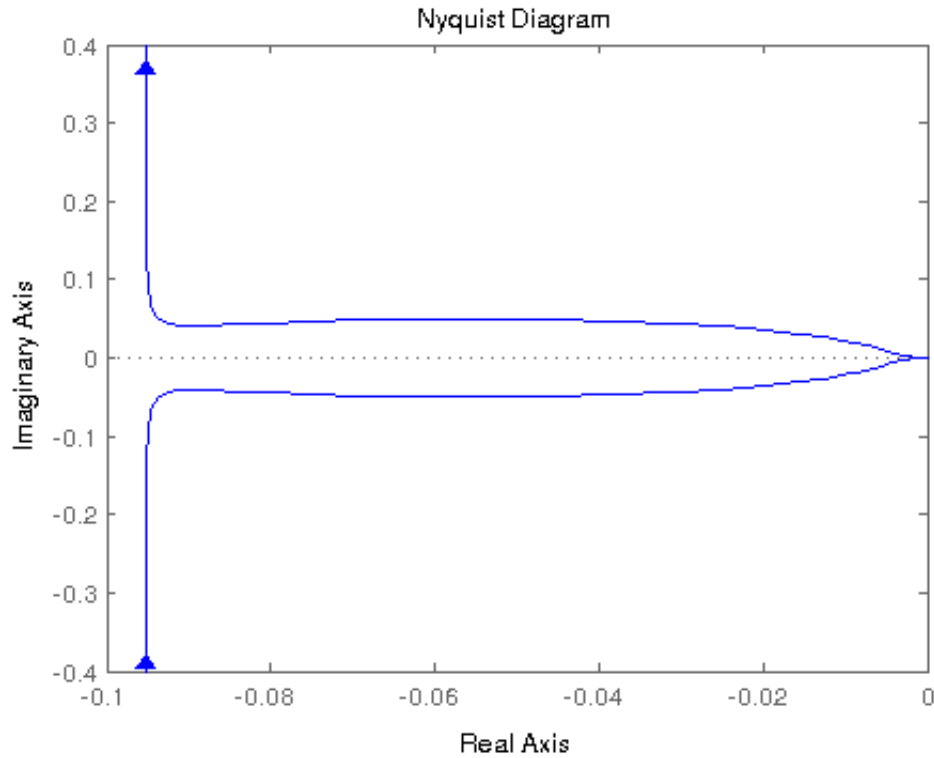
#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI<sup>1</sup>

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow 1 + 0.1905\omega^2 = 0$   
 $\omega_{1/2} = 2.29j$   
La soluzione non è accettabile ( $\omega$  non è reale).
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow 1.905 + 0.001\omega^2 = 0$   
 $\omega_{1/2} = \pm 43.65j$   
La soluzione non è accettabile ( $\omega$  non è reale).

#### 3. DISEGNO

---

<sup>1</sup>Si può intuire che non ci sono intersezioni anche dal comportamento asintotico.



**Si inserisca il controllore  $G_c(j\omega) = k$  e si studi la stabilità dell'anello di controllo per  $k \in (0, +\infty)$  con il criterio di Nyquist**

Per tali valori di  $k$ , il diagramma di Nyquist non circonda il punto critico  $-1 + j0$ . Essendo il sistema in anello aperto instabile con un polo a parte reale positiva, il sistema in anello chiuso è instabile con un polo a parte reale positiva.

### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_c(s) = 1$  e  $G_p(s) = \frac{0.5e^{-Ts}}{s(s+0.5)}$

**Con  $T = 5s$  si verifichi se il sistema, chiuso in retroazione unitaria, è stabile o meno. Nel caso esso sia stabile, si determini il margine di fase**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{e^{-5j\omega}}{j\omega(1+2j\omega)} = \frac{\sin(-5\omega) - 2\omega \cos(-5\omega)}{\omega(1+4\omega^2)} - j \frac{\cos(-5\omega) + 2\omega \sin(-5\omega)}{\omega(1+4\omega^2)}$$

$$\angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow 5\omega + \arctan(2\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Posto  $p(\omega) = 5\omega + \arctan(2\omega) - \frac{\pi}{2}$  osservo che:

$$p(0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$p(1) = 4.54$$

Essendo la funzione monotona strettamente crescente, nell'intervallo  $[0, 1]$  ci sarà una (ed una sola) soluzione dell'equazione.

$$p(0.5) = 1.71$$

$$p(0.25) = 0.14$$

$$p(0.2289) = 0.003$$

Considero il valore  $\omega_{pc} = 0.2289$  soluzione dell'equazione.

Per tale valore sarà:

$$|G_p(j\omega_{pc})G_c(j\omega_{pc})| = 3.97$$

Il margine di guadagno è pertanto:  $MG = 0.25$ , il sistema è instabile.

**Si determini il valore di  $T$  superato il quale il sistema diventa instabile**

Considero la parte razionale del guadagno di anello:

$$|G_{pr}(j\omega)G_{cr}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow 1 = \omega\sqrt{4\omega^2 + 1}$$

$$\omega_c = 0.625$$

$$\angle G_{pr}(j\omega_c)G_{cr}(j\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(2\omega_c) = -2.46r$$

$$M\phi = 0.67r$$

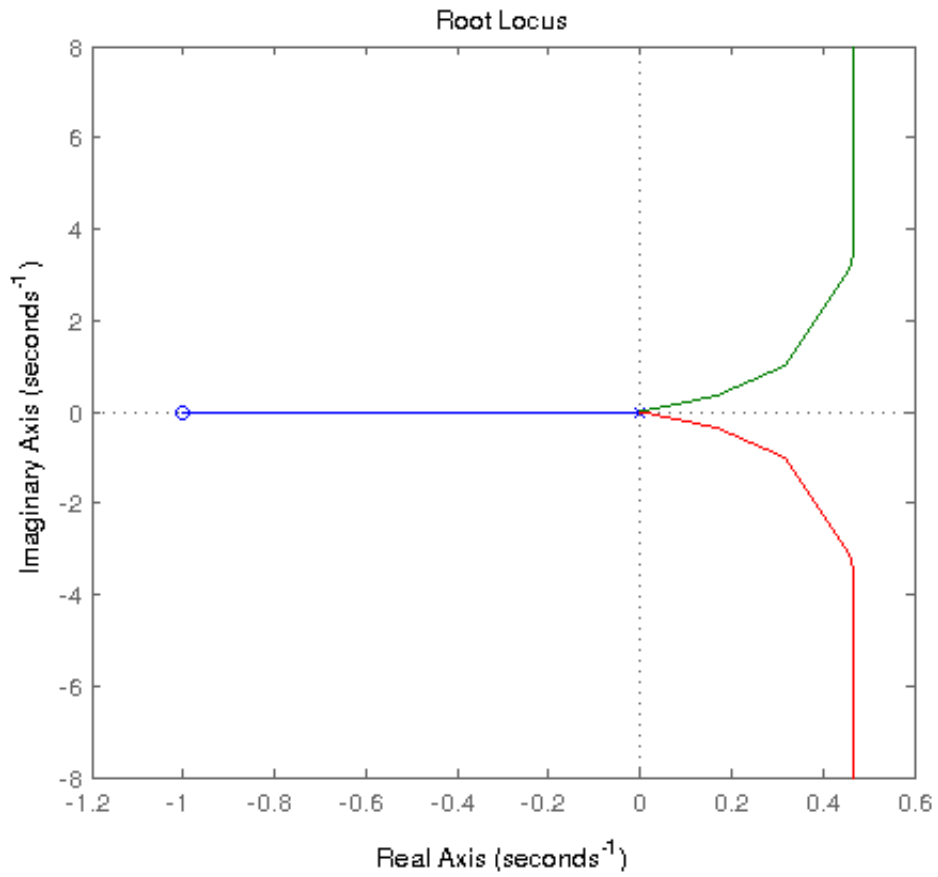
Il massimo valore di  $T$  è pertanto  $T_{max}\omega_c = 0.67 \Leftrightarrow T_{max} = 1.08$

### **Quesito C**

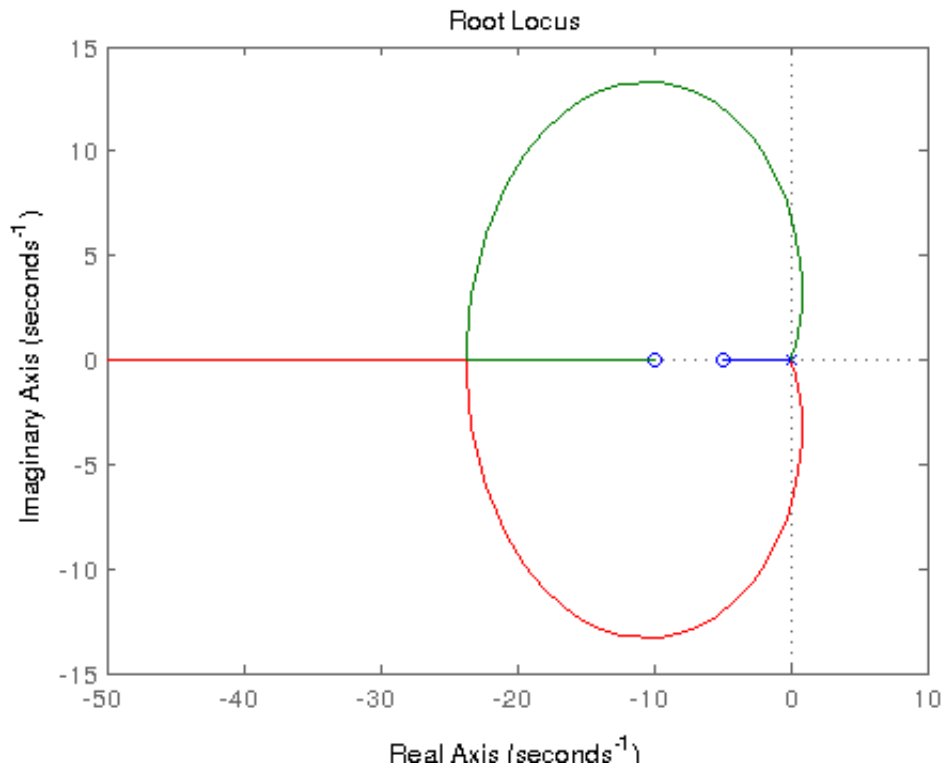
Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{1}{s^2}$

**Si scelga tra i controllori  $P$ ,  $PI$ ,  $PID$  quello in grado di garantire stabilità asintotica**

Il regolatore  $P$  è da scartare poiché il l.d.r. del sistema si troverebbe interamente sull'asse immaginario e sarebbe impossibile garantire stabilità asintotica. Introducendo uno zero e un polo nell'origine (controllore  $PI$ ) a sinistra dell'asse immaginario, il l.d.r. diventa:



e quindi non è ancora in grado di garantire la stabilità. In presenza di un controllore PID, ovvero di due zeri a parte reale negativa e un ulteriore polo nell'origine, il luogo delle radici sarà:



Con questo controllore è possibile pertanto rendere asintoticamente stabile il sistema.

***Si determinino i parametri del regolatore scelto al punto precedente, in modo che il sistema in anello chiuso abbia due radici complesse dominanti sulla terza. In particolare, il rapporto tra il valore assoluto della radice reale e quello delle radici complesse sia pari a 5. Stabilita la dominanza, si scelga il valore dei parametri in modo che la risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione abbia una sovralongazione del 10% ed un tempo di assestamento al 2% pari a 3s.***

L'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso dovrà essere:

$$p(s) = (s + p_i)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2) \text{ in cui si deve imporre: } \frac{p_i}{\delta\omega_n} = 5.$$

Per garantire una sovralongazione percentuale del 10% si dovrà imporre:

$$10 = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{1-\delta^2} = \frac{\ln^2(0.1)}{\pi^2}.$$

$$\delta = 0.8.$$

$$\text{Per garantire un } T_a = 3 \text{ s si dovrà imporre: } \omega_n = \frac{4}{3\delta} = 1.7$$

In definitiva l'equazione sarà:  $(s + 6.8)(s^2 + 2.72s + 2.89)$ . Da essa è possibile risalire ai valori dei coefficienti.

## 4 Appello del 17.04.04 [G]

### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{(s+1)^2}{4s^3} G_c(s) = 1$ .

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist (considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{(s+1)^2}{4s^3} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3} = -\frac{1}{2\omega^2} + j\frac{1-\omega^2}{4\omega^3} =$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= +\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= \frac{\sqrt{2}}{4} \quad 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \pi \end{aligned}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

a) Intersezione con l'asse dei numeri reali

$$\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \omega_{1/2} = \pm 1$$

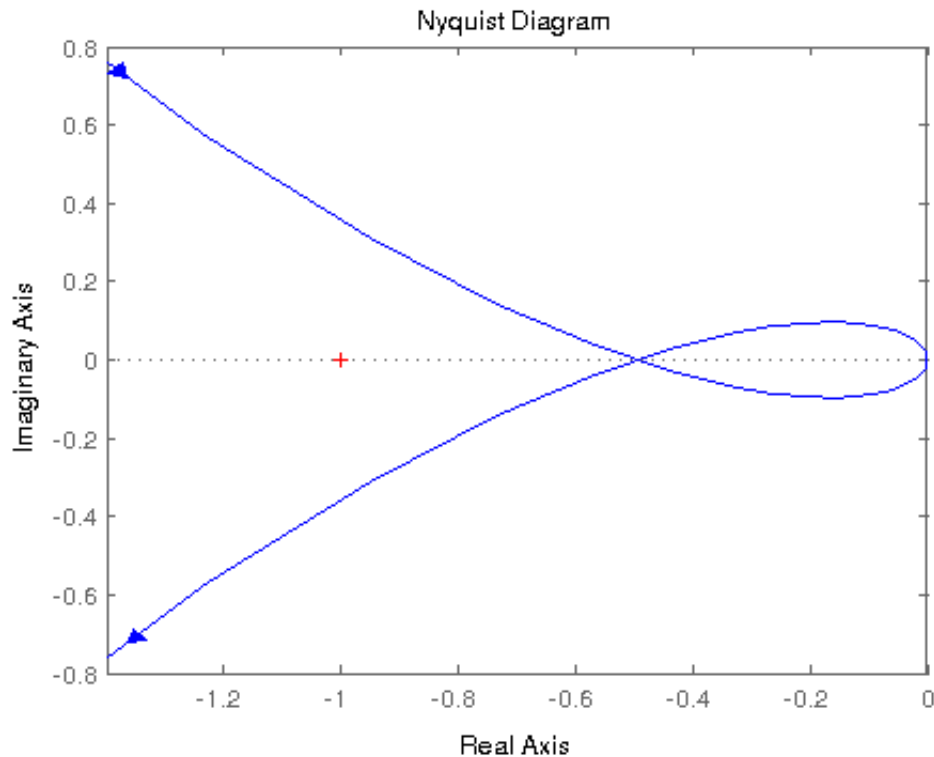
$$\Re\{G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)\} = -\frac{1}{2}$$

b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari

$\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione

#### 3. DISEGNO (PER $k = 1$ )





**Si inserisca il controllore  $G_c = k$  e si studi la stabilità con il criterio di Nyquist**

$k < 2$ : il diagramma circonda una volta in senso orario il punto critico  $-1 + j0$ . Il sistema è instabile, due poli a parte reale positiva e un polo a parte reale negativa

$k = 2$ : sistema marginalmente stabile, due poli a parte reale nulla e un polo a parte reale negativa

$k > 2$ : il diagramma circonda una volta in senso orario e una volta in senso antiorario il punto critico  $-1 + j0$ . Il sistema è asintoticamente stabile, 3 poli a parte reale negativa

**Quesito B <sup>1</sup>**

**Quesito C**

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega}$  e  $G_c(j\omega) = k$ .

**Posto  $T=1$  si determinino i valori di  $K$  per i quali il sistema chiuso in retroazione unitaria sia stabile.**

$$\begin{aligned} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= -\pi \Leftrightarrow \omega = \omega_{cp} = \frac{\pi}{2}. \\ |G_p(j\omega_{cp})G_c(j\omega_{cp})| &= \frac{k}{2}\pi \\ \frac{k}{2}\pi < 1 &\Leftrightarrow k < \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Nota: L'appello originario conteneva immagini che non sono state digitalizzate.

**Posto  $k = 1$  si determini il valore limite di  $T$  superato il quale il sistema è instabile.**

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_c = 1$$

$$\angle G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c) = -T\omega_c - \frac{\pi}{2} = -T - \frac{\pi}{2}$$

$$M\phi = -T + \frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow T > \frac{\pi}{2}$$

## 5 Appello del 15.07.04

### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{5}{(1+5s)^3} e^{-2s} \Big|_{s=j\omega}$   $G_c(j\omega) = 1$ .

**Si determini il margine di fase**

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow 5 = (1 + 25\omega^2)^{3/2}$$

$$\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{5^{2/3}-1}{25}}$$

$$\angle G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c) = -2\omega_c - 3 \arctan(5\omega_c) = -3.4$$

$$M\phi = -0.25$$

### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_c(j\omega) = k$  e  $G_p(j\omega) = \frac{1}{5s-1} \Big|_{s=j\omega}$

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist (considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k}{5j\omega-1} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{k}{(1-5j\omega)} = -\frac{k}{(1+25\omega^2)} - jk\frac{5\omega}{(1+25\omega^2)}$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k > 0 & -\pi \\ k < 0 & 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = \begin{cases} k > 0 & -\frac{\pi}{2} \\ k < 0 & -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = +k = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = -k^+ \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 0$$

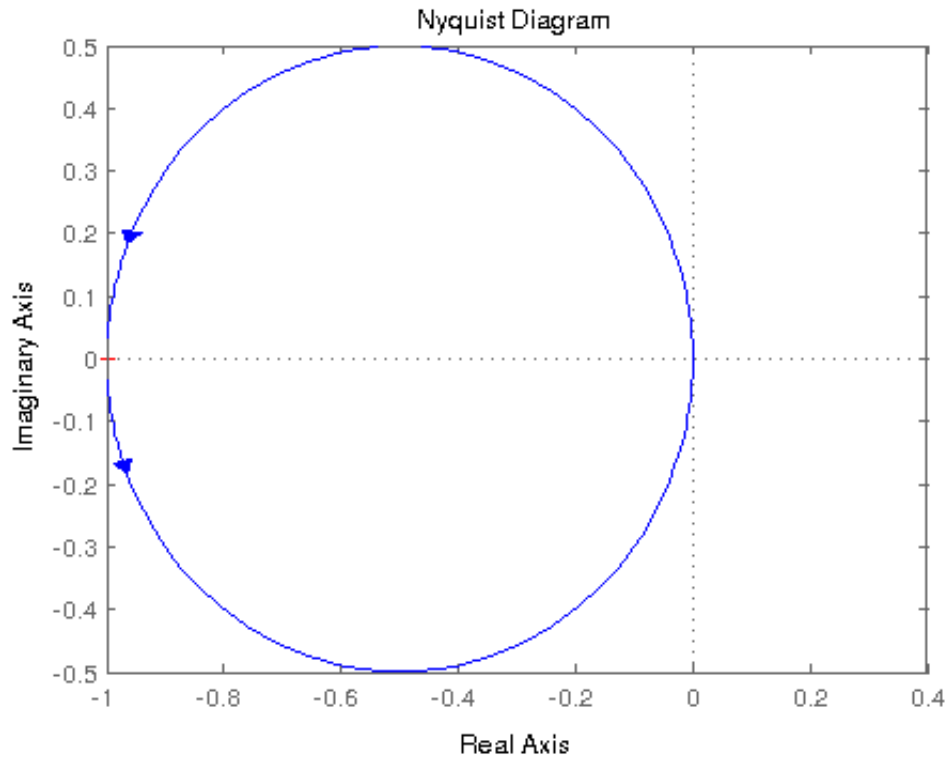
$$\Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) = \frac{\pi}{2}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfanno l'equazione

- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione

3. DISEGNO (PER  $k = 1$ )



**Si studi la stabilità del sistema in anello chiuso al variare di  $k$ , per  $k > 0$**

$k > 1$ , il sistema è stabile con un polo a parte reale negativa

$k < 1$ , il sistema è instabile con un polo a parte reale positiva

$k = 1$ , il sistema è marginalmente stabile con un polo nell'origine.

### Quesito C

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{5e^{-0.02j\omega}}{(1+0.1s)(1+0.5s)}$ .

**Si progetti il controllore  $G_c(j\omega) = \frac{K_c(1+T_ns)}{T_ns}$  con il metodo del "modulo ottimo"**

Considero il sistema approssimato:

$$G_p(j\omega) = \frac{5e^{-0.02j\omega}}{(1+0.1s)(1+0.5s)} \simeq \frac{5}{(1+0.1s)(1+0.5s)(1+0.02s)} \simeq \frac{5}{(1+0.3s)(1+0.02s)}.$$

Scelgo la costante  $T_n$  in modo da eliminare il polo sito in  $s_1 = -0.02$ :  $T_n = 0.02$ .

Di conseguenza  $\frac{T_n}{K_c} = 2 \cdot 0.3 \cdot 5 = K_c \Leftrightarrow K_c = 0.0067$

## 6 Appello del 09.09.04

### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{1+0.5s}{s^2}$ ,  $G_c(s) = k$ .

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist per  $k = 1$  (Considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{1+0.5s}{s^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1+0.5j\omega}{(j\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2} - j\frac{0.5}{\omega}$$

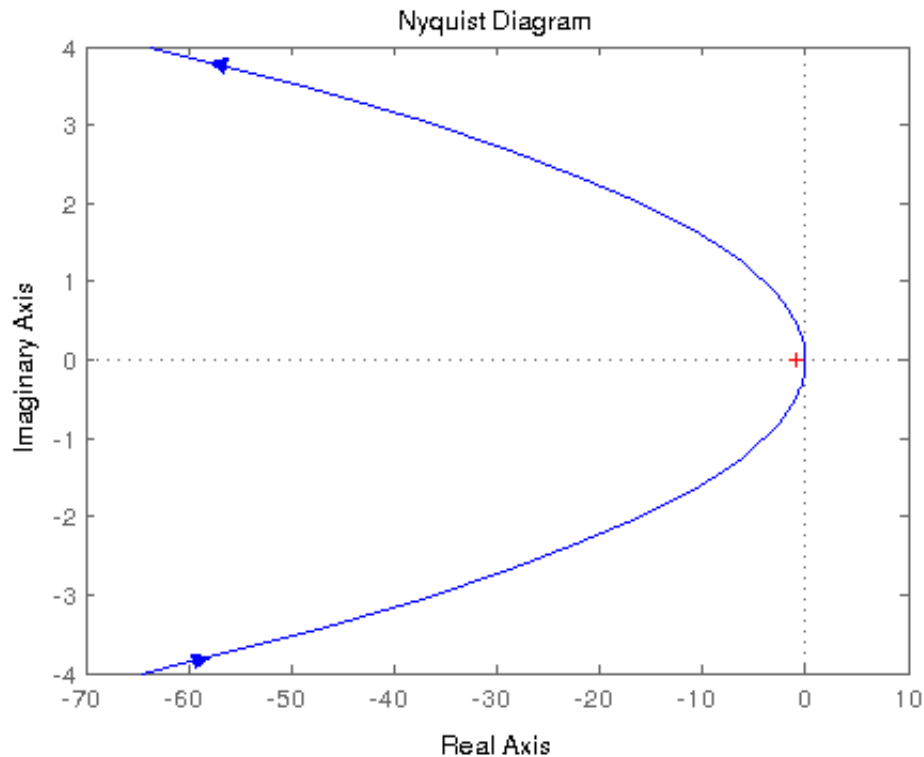
#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m - n) \frac{\pi}{2} - (m_2 - n_2)\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
Non ci sono intersezioni per valori finiti di  $\omega$
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
Non ci sono intersezioni per valori finiti di  $\omega$

#### 3. DISEGNO (PER $k = 1$ )



**Si discuta la stabilità per  $k > 0$**

Il sistema è stabile per ogni  $k$ .

### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{10}{s(1+2s)}$  e  $G_c = K_p$ .

**Si determini analiticamente il valore di  $K$  in corrispondenza del quale  $MF=0.785\text{rad}$**

Il guadagno di anello è:  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{10k}{j\omega(1+2j\omega)}$ .

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow 10k = \omega \cdot \sqrt{1+4\omega^2} \rightarrow 100k^2 = \omega^2(1+4\omega^2) \rightarrow \omega^2 + 0.25\omega^2 - 25k^2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{-0.125 + \sqrt{0.015625 + 25k^2}}$$

$$M\phi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan(2\sqrt{-0.125 + \sqrt{0.015625 + 25k^2}}) = 0.785$$

$$k = \pm 0.070795203$$

### Quesito C

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{10}{(1+5s)^3}$  e  $G_c = K_p$ .

**Si determini il valore di guadagno critico e la relativa pulsazione di oscillazione**

Il sistema chiuso in retroazione ha f.d.t.:  $G_0(s) = \frac{10 \cdot K_p}{10 \cdot K_p + (1+5s)^3} = \frac{10 \cdot K_p}{125s^3 + 75s^2 + 15s + 10 \cdot K_p + 1}$ .

Studio l'equazione caratteristica con il metodo di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 4 & 125 & 15 \\ 3 & 75 & 10K_p + 1 \\ 2 & 4 - 5K_p & \\ 1 & \frac{K_p^2 - 0.7 \cdot K_p - 0.08}{5K_p - 4} & \end{array}$$

Il guadagno critico si ha per  $K_p = 0.8$ . Per tale valore di  $K_p$  posso considerare l'equazione ausiliaria associata:

$$75z^2 + 9 = 0 \rightarrow z_{1/2} = \pm 0.35j \rightarrow \omega_n = 0.35 \text{ rad/sec} \rightarrow T_c = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n} = 18.13$$

**Si tari il regolatore con la regola di Ziegler-Nichols**

$$K = 0.6 \cdot K_p = 0.48$$

$$T_i = 0.5 \cdot T_c = 9.07$$

$$T_d = 0.12 \cdot T_c = 2.17$$

Il controllore avrà quindi la seguente f.d.t.:

$$K + \frac{K}{T_i s} + K T_D s = 0 \rightarrow 0.48 + \frac{0.05}{s} + 1.032s = \frac{0.97}{s}(s^2 + 0.48s + 0.05) \simeq \frac{0.97}{s}(s + 4.5)^2$$

## 7 Appello del 20.09.05[v]

### Quesito A

Si considerino le due funzioni di risposta armonica:

$$G_1(j\omega) = \frac{10}{s^2(s+2)} \Big|_{s=j\omega}, G_2(j\omega) = 10 \frac{s+1}{s^2(s+2)} \Big|_{s=j\omega}$$

### Si traccino i diagrammi di Nyquist

Diagramma di  $G_1(j\omega)$ .

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{10}{s^2(s+2)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{5}{(j\omega)^2(1+0.5j\omega)} = -\frac{5}{\omega^2(1+0.25\omega^2)} + j\frac{1.25}{\omega(1+\omega^2)}$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2 - n_2)\pi + \varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= +\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione

#### 3. DISEGNO (PER $k = 1$ )



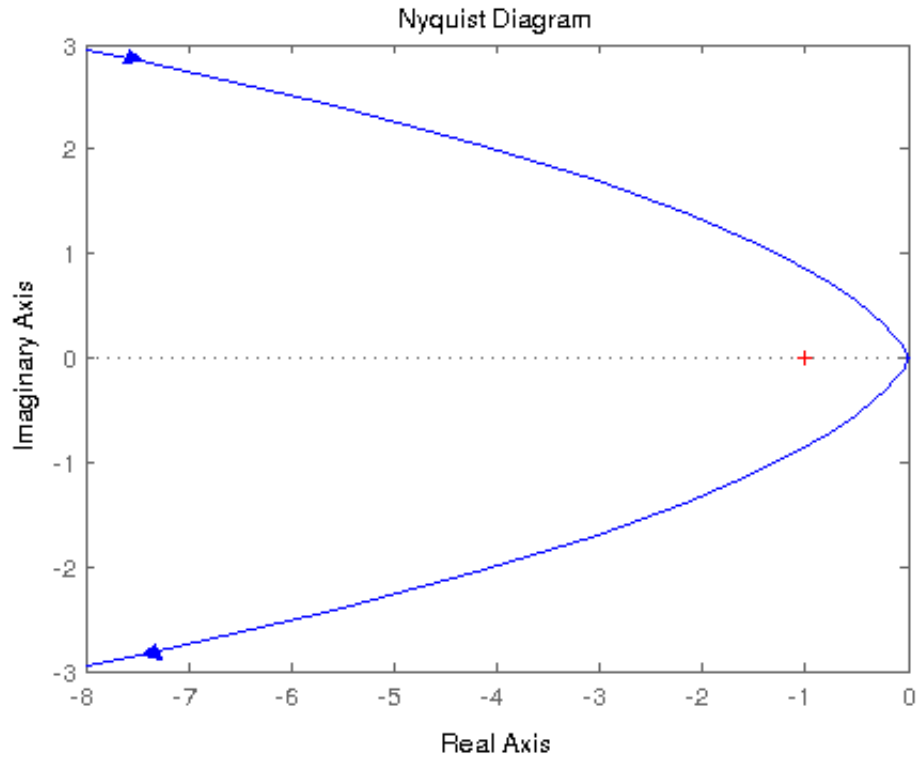


Diagramma di  $G_2(j\omega)$ .

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = 10 \frac{s+1}{s^2(s+2)} \Big|_{s=j\omega} = 5 \frac{1+j\omega}{(j\omega)^2(1+0.5j\omega)} = -5 \frac{1+0.5\omega^2}{\omega^2(1+0.25\omega^2)} - j \frac{2.5}{\omega(1+0.25\omega^2)}$$

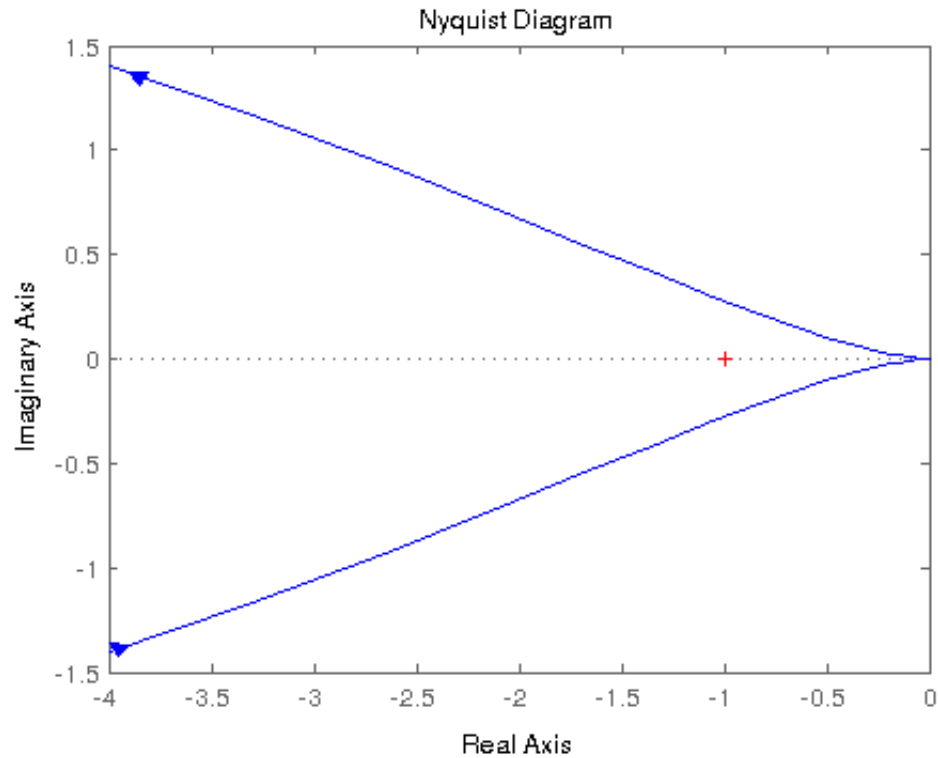
#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2 - n_2)\pi + \varphi_0 = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = -\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= 0 \end{aligned}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione

3. DISEGNO (PER  $k = 1$ )

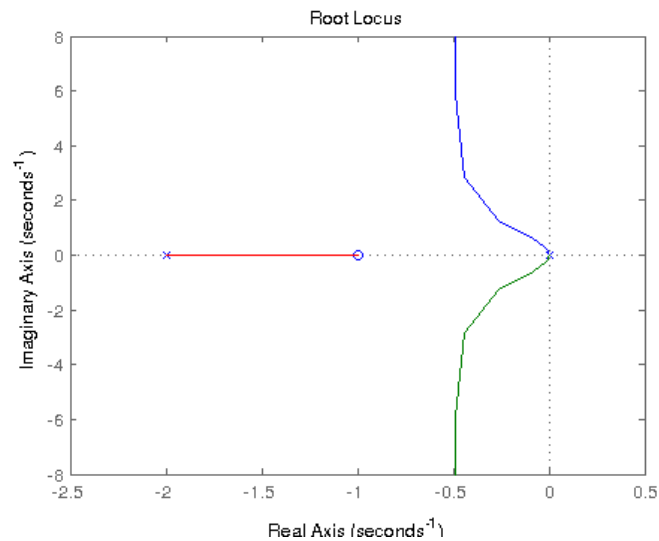
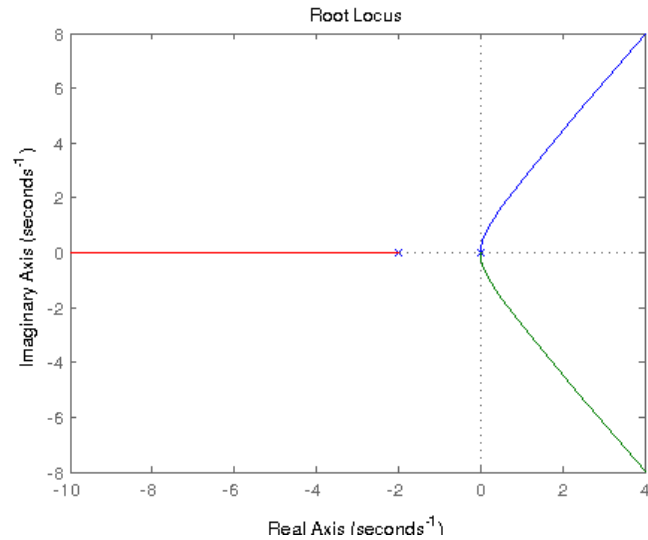


***Si studi la stabilità di entrambi i sistemi, in anello chiuso, con il criterio di Nyquist***

Nel primo caso il diagramma circonda due volte in senso orario il punto critico  $-1 + j0$ . Non avendo il sistema in anello aperto poli a parte reale positiva, il sistema in anello chiuso risulta instabile con due poli a parte reale positiva.

Nel secondo caso il diagramma non circonda il punto critico  $-1 + j0$ , pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

**Si verifichi il risultato con il luogo delle radici**



### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{e^{-t_0 s}}{s(s+1)} \Big|_{s=j\omega}$ .

**Si determini il più grande valore di  $t_0$  per il quale il sistema è ancora stabile.**

Calcolo il margine di fase:

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow 1 = \omega^2(\omega^2 + 1)$$

$$z^2 + z - 1 = 0$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = 0.79$$

$$\angle G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c) = -t_0\omega_c - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_c) = -t_0 \cdot 0.79 - 2.24$$

$$M\phi = -t_0 \cdot 0.79 + 0.90 > 0 \Leftrightarrow t_0 < \frac{0.90}{0.79} = 1.15.$$

Per  $t_0 = 1.15$  il sistema è marginalmente stabile, per valori superiori il sistema è instabile.

### Quesito C

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{1}{(s+0.25)(s+1)} \Big|_{s=j\omega}$ . Sia  $G_{c1}(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$  e  $G_{c2}(s) = k_p + k_d s$ .

**Si determini, tra i due, il controllore che permette di ottenere un errore di velocità finito.**

Affinché il sistema in anello chiuso abbia un errore di velocità finito, il sistema in anello aperto dev'essere di tipo 1. Il controllore in questione è pertanto  $G_{c1}(s)$ .

**Con il controllore scelto si stabiliscano le condizioni da imporre sui parametri (positivi) affinché il sistema in retroazione sia sempre stabile quali che siano i valori da essi assunti.**

L'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso è:  $4s^3 + 5s^2 + (1 + 4k_p)s + 4k_i = 0$ .

La studio con il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 1 + 4k_p \\ 3 & 5 & 4k_i \\ 2 & 5 + 20k_p - 4k_i & \\ 1 & 4k_i(5 + 20k_p - 4k_i) & \end{array}$$

Affinché la prima riga non presenti variazioni di segno, dev'essere:  $k_p > \frac{4k_i - 5}{20}$ .

**Si determinino i valori dei parametri in modo che la dinamica del sistema in anello chiuso sia del secondo ordine e che il tempo di assestamento al 2% non superi gli 8 secondi.**

Affinché il sistema in anello chiuso abbia una dinamica del secondo ordine, scelgo di eliminare il polo in  $-0.25$ .

Impongo  $\frac{k_i}{k_p} = 0.25$ .

Affinché il tempo di assestamento al 2% non superi gli 8 secondi dev'essere verificata la condizione:  $\delta\omega_n < \frac{4}{T_a} = 0.5$ . Scelgo  $\delta\omega_n = 0.5$ .

L'equazione caratteristica sarà pertanto  $s^2 + s + \omega_n^2 = s^2 + s + k_i$ .

Impongo  $k_i = 1$ , di conseguenza sarà:  $k_p = 4k_i = 4$ .

Il controllore sarà, in definitiva:  $G_c(j\omega) = 4 + \frac{1}{s}$ .

Il guadagno di anello sarà  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{1}{s(s+1)}$ .

## 8 Appello del 15.02.06

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k(s+1)}{s^2} \Big|_{s=j\omega}$ .

### Quesito A

**Posto**  $k = 1$ , si tracci il diagramma polare di Nyquist (considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k(s+1)}{s^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k(j\omega+1)}{(j\omega)^2} = -\frac{k}{\omega^2} - j\frac{k}{\omega}$$

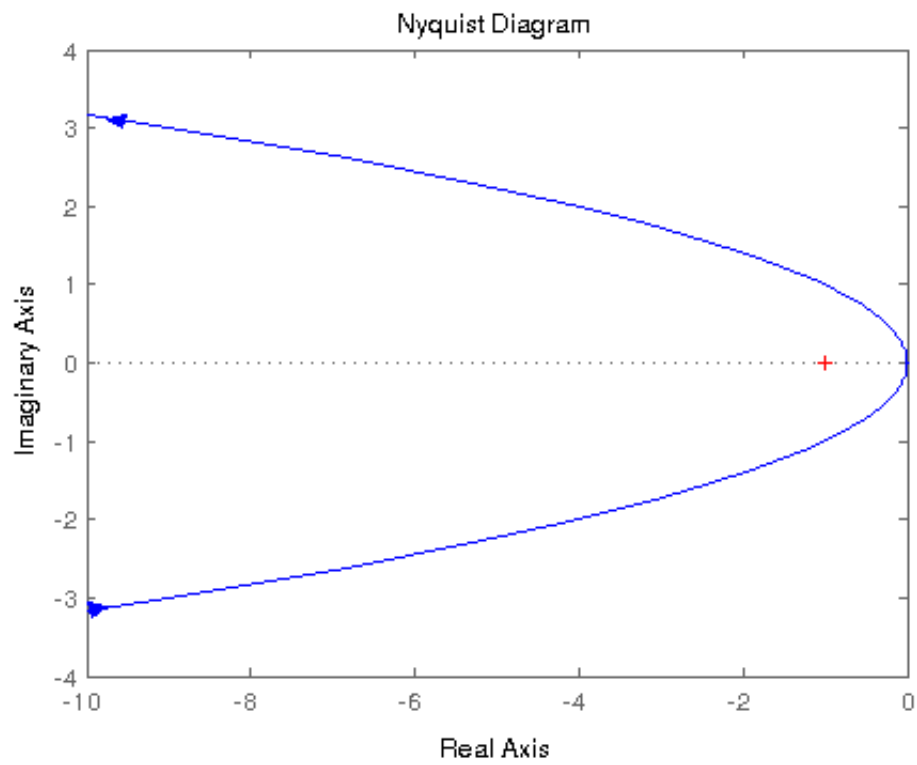
#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k > 0 & -\pi \\ k < 0 & -2\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = \begin{cases} k > 0 & -\frac{\pi}{2} \\ k < 0 & -\frac{3}{2}\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = -\text{segn}(k) \cdot \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = -\text{segn}(k) \cdot \infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfanno l'equazione
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfanno l'equazione

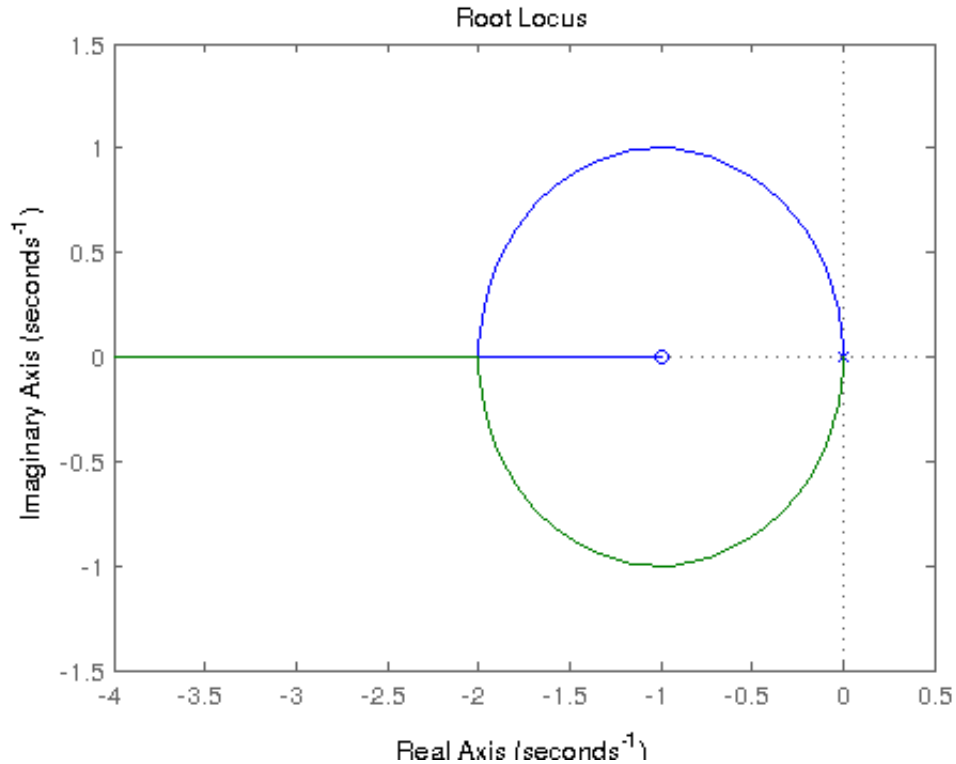
#### 3. DISEGNO (PER $k = 1$ )



**Si studi la stabilità con il criterio di Nyquist**

Il sistema è stabile con due poli a parte reale negativa.

**Si verifichi il risultato ottenuto con il luogo delle radici**



### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k}{(s^2+2s+2)(s+2)} \Big|_{s=j\omega}$ .

**Si determini il margine di guadagno ed il periodo critico di oscillazione**

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4+k \\ 20-k & (20-k)(4+k) \end{vmatrix}$$

Per  $k = 20$  è possibile scrivere l'equazione ausiliaria associata:  $p_a(s) = 4s^2 + 24 = s^2 + 6 = 0$ .

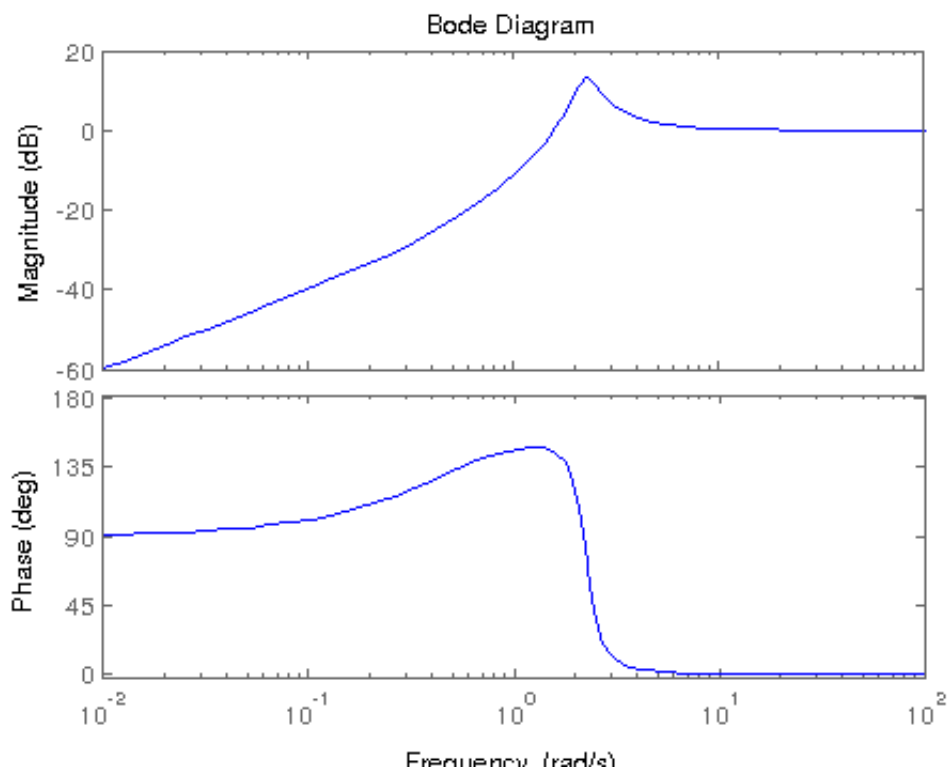
$$s = s_{1/2} = \pm j\sqrt{6}.$$

Il guadagno critico è quindi  $k_c = 20$ , il periodo critico di oscillazione è invece  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$ .

### Quesito C

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+2j\omega)}$ .

**Si traccino i diagrammi di bode della funzione sensitività.**



#### Quesito D

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{10}{s(1+5s)} \Big|_{s=j\omega}$ .

**Si progetti un regolatore proporzionale-integrale con il metodo dell'ottimo simmetrico. Se possibile si cerchi di assicurare un margine di fase di 45°.**

$$a = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \simeq 2.41$$

$$T_i = a^2 \cdot T_e \simeq 29.14$$

$$K = \frac{1}{k \cdot T_e \cdot a} \simeq 0.008$$



## 9 Appello del 21.09.10

### Quesito A

Sia dato un sistema in retroazione unitaria con f.d.t. del plant  $G_p(s) = \frac{1}{s^2(5s+1)}$   
 $G_c(s) = k$ .

*Si tracci il diagramma polare di Nyquist (Considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).*

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k}{s^2(5s+1)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{(j\omega)^2(1+5j\omega)} = -\frac{k}{\omega^2(1+25\omega^2)} + j\frac{5k}{\omega(1+25\omega^2)}$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

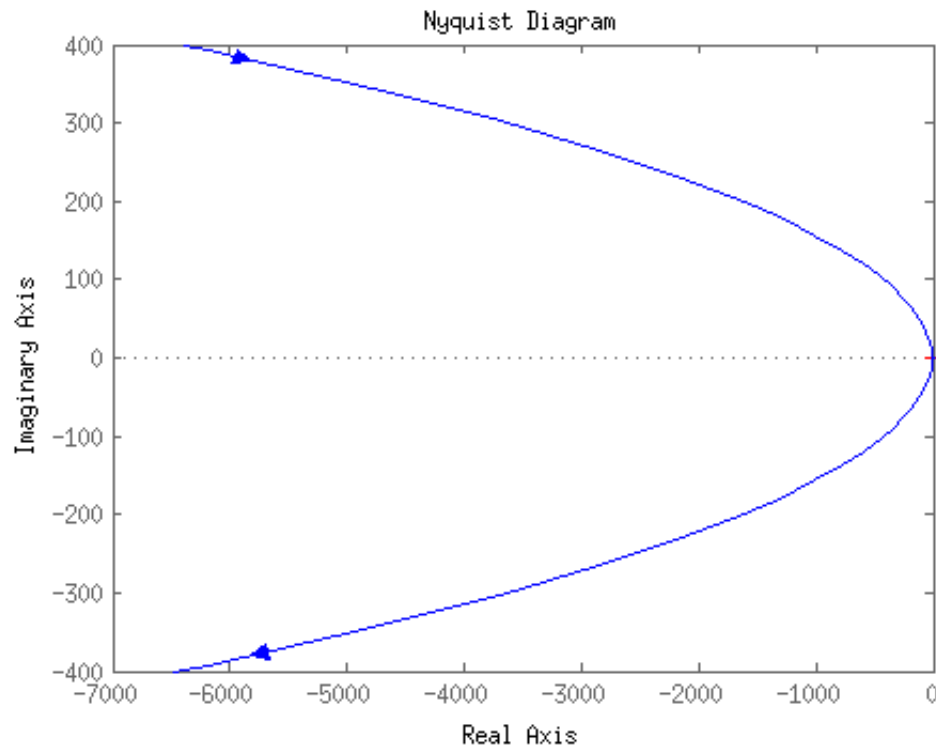
$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k > 0, & -\pi \\ k < 0, & -2\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = \begin{cases} k > 0, & -\frac{3}{2}\pi \\ k < 0, & -\frac{5}{2}\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -\text{sign}(k) \cdot \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= \text{sign}(k) \cdot \infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0^+ \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= -\frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

#### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

$\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddi e l'equazione

$\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddi e l'equazione

#### 3. DISEGNO



**Si studi la stabilità del sistema in anello chiuso se  $K \in \{-\infty, +\infty\}$ .**

Per  $k > 0$  è instabile con due poli a parte reale positiva e un polo a parte reale negativa.  
Per  $k < 0$  è instabile con un polo a parte reale positiva e due poli a parte reale negativa.

### Quesito B

Sia ora  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+10\delta)}$ ,  $G_c(s) = 1$ .

**Si determini l'intervallo di valori di  $\delta$  per il quale il picco alla risonanza del sistema in anello chiuso non superi il valore di 1.4.**

La f.d.t. del sistema in anello chiuso è:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 10\delta s + 1}.$$

Il valore di picco si ha per  $\omega = \bar{\omega} = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta_c^2}$  dove  $\delta_c$  è il coefficiente di smorzamento (chiamato così per differenziarlo dal  $\delta$  della f.d.t.). Posto  $\delta_c = 5\delta$ , diventa:  $\omega = \bar{\omega} = \omega_n \sqrt{1 - 50\delta^2} = \sqrt{1 - 50\delta^2}$ . in corrispondenza di tale valore, il modulo di  $G(j\omega)$  vale

$$M(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2 + 100\delta^2\bar{\omega}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-1+50\delta^2)^2 + 100\delta^2(1-50\delta^2)}} = \frac{0.1}{\delta\sqrt{1-25\delta^2}}.$$

Affinché sia  $M(\bar{\omega}) < 1.4$  dev'essere  $0.1 \leq \delta\sqrt{1-25\delta^2} \cdot 1.4 \Leftrightarrow \delta\sqrt{1-25\delta^2} \geq 0.07$ .

Affinché la disequazione, ed il sistema, abbiano senso, bisogna imporre:  $0 \leq \delta \leq 0.2$ .

Elevo tutto al quadrato:  $\delta^2 - 25\delta^4 - 0.0049 \geq 0$

Posto  $\delta^2 = z$ :  $z^2 - 0.04z + 0.000196 \leq 0$

$0.01 \leq z \leq 0.03$ .

$$0.1 \leq \delta \leq 0.17.$$

### Quesito C

Sia  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$ ,  $G_c(s) = 10$ .

**Si determini il margine di fase ed il margine di guadagno.**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+j\omega)(1+0.2j\omega)} = -\frac{(2.4)}{(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)} + j\frac{0.4\omega^2-2}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$$\angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow \arctan(\omega) + \arctan(0.2\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\omega+0.2\omega}{1-0.2\omega^2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = \omega_1 = \sqrt{5} = 2.23.^1$$

$$|G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)| = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1.2}}} = \frac{2}{\sqrt{36}} = \frac{1}{3} = 0.3$$

Il margine di guadagno è:  $MG = 3$

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow 2 = \omega\sqrt{1+\omega^2} \cdot \sqrt{1+0.04\omega^2} \Rightarrow \omega^6 + 26\omega^4 + 25\omega^2 - 100 = 0$$

$$z^3 + 26z^2 + 25z - 100 = 0$$

Posto  $p(z) = z^3 + 26z^2 + 25z - 100$  considerato che è una funzione strettamente crescente e appurato che:  $p(1) < 0$  e  $p(2) > 0$ , ricerco la soluzione nell'intervallo  $[1, 1.6]$ .

$$p(1.5) = -0.625$$

Considero  $z = z_1 = 1.5$  soluzione dell'equazione.  $\Rightarrow \omega_1 \simeq 1.23$ .

$$\angle G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_1) - \arctan(0.2\omega_1) \simeq -2.62r$$

$$M\phi \simeq 0.52r \simeq 25$$

**Si progetti un controllore PD con le regole di Ziegler e Nichols.**

Posto  $k_c = 3$  e  $T_c = \frac{2\pi}{3} = 2.1$  Calcolo il valore dei coefficienti:

$$k = 0.5 \cdot 3 = 1.5$$

$$k_d = 0.2 \cdot 2.1 = 0.42$$

---

<sup>1</sup>Si poteva giungere allo stesso risultato in maniera più semplice imponendo  $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0$ .

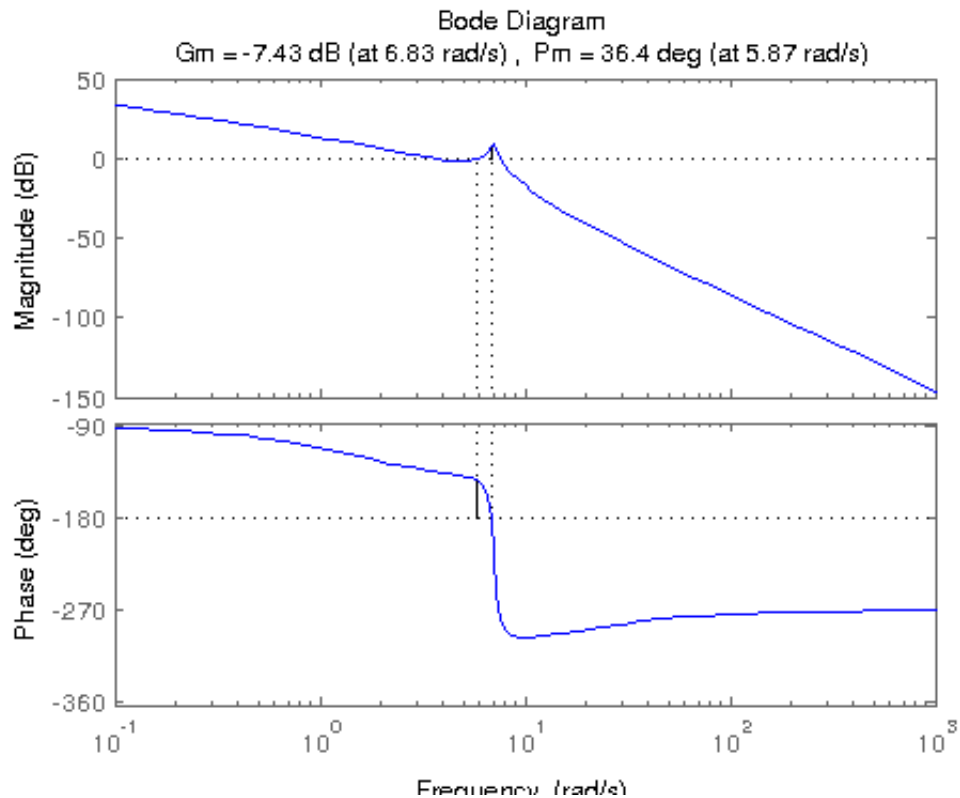
## 10 Appello del 05.07.12 [i]

### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{50(s+10)}{s(s+2)(s^2+0.6s+50)}$

*Si traccino i diagrammi di Bode di ampiezza e fase (approssimati con la regola del 4.81) associati a ciascuno dei fattori di  $G_p(j\omega)$ , nonché i diagrammi risultanti*

*Posto  $G_c(j\omega) = 1$ , si fornisca una stima dei margini di stabilità del sistema sfruttando i diagrammi asintotici già tracciati*



### Quesito B [N]

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_c(j\omega) = k$ ,  $G_p(j\omega) = \frac{s^2+4s+8}{s^2(s+1)}$

*Posto  $k > 0$  si tracci il diagramma polare di Nyquist (Considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).*

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k(s^2+4s+8)}{s^2(s+1)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k(8-\omega^2+4j\omega)}{(j\omega)^2(1+j\omega)} = -\frac{k(8+3\omega^2)}{\omega^2(1+\omega^2)} + j\frac{k(4-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)}$$

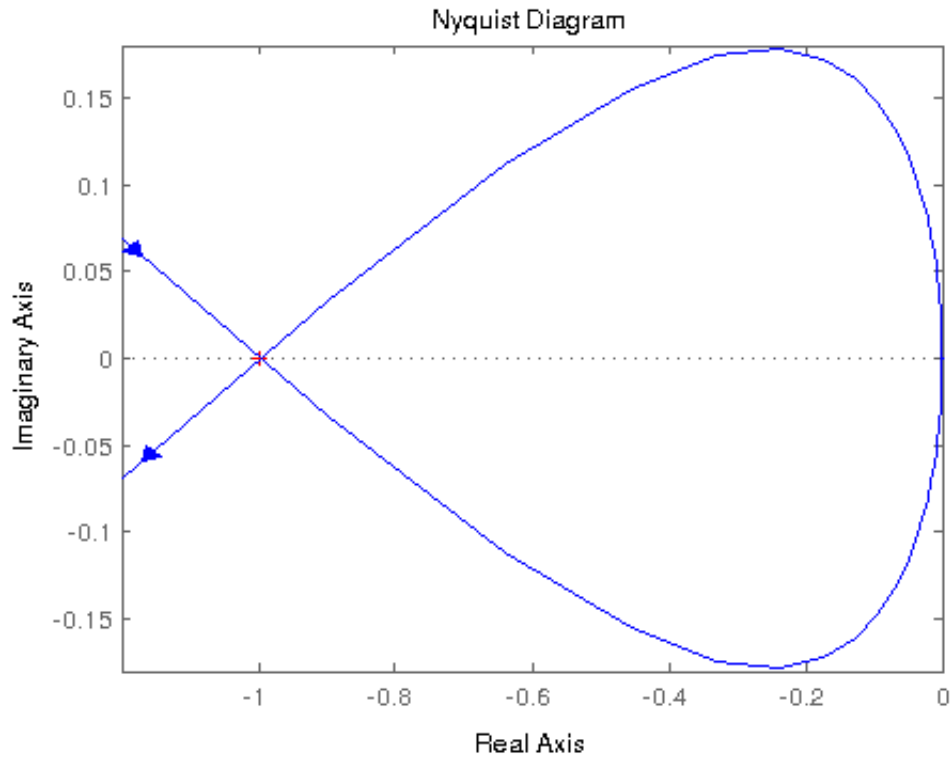
1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k > 0 & -\pi \\ k < 0 & -2\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = \begin{cases} k > 0 & -\frac{\pi}{2} \\ k < 0 & -\frac{3}{2}\pi \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = -\text{segn}(k) \cdot \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = +\text{segn}(k) \cdot \infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \omega = 2$   
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = -k$
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori reali di  $\omega$

3. DISEGNO (PER  $k = 1$ )



**Si specifichi esattamente la posizione dei poli al variare di  $k \in (-\infty, +\infty)$  con il criterio di Nyquist.**

$k > 1$ : Il diagramma circonda una volta in senso orario il punto critico e una volta in senso antiorario, il sistema è stabile con 3 radici a parte reale negativa.

$0 < k < 1$ : Il diagramma circonda due volte in senso orario il punto critico, il sistema è instabile con un polo a parte reale positiva e due poli a parte reale negativa.

$k = 1$ : Il sistema è marginalmente stabile con due poli a parte reale nulla.

$k < 0$ : Il sistema è instabile con un polo a parte reale positiva.

### **Quesito C**

Sia assegnato un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s}$

**Si tari un regolatore PID con le regole di Ziegler-Nichols in anello chiuso**

$$\begin{aligned}\angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= -\pi \Leftrightarrow \omega = \omega_{cp} = \frac{\pi}{2} \\ |G_p(j\omega_{cp})G_c(j\omega_{cp})| &= \frac{2}{\pi} = 0.64 \\ k_c &= 1.57\end{aligned}$$

**Supponendo un disturbo sul controllore  $d(t) = 2 \cdot 1(t) + \delta(t)$  e un ingresso  $u(t) = \delta(t) + e^{-t}$  si determini il valore della risposta a regime**

# 11 Appello del 03.09.12 [i]

## Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_c = k, G_p = \frac{s+3}{3(s-1)}$ .

**Posto  $k > 0$  si tracci il diagramma polare di Nyquist.**

$$1. G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{k(s+3)}{3(s-1)} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{k(1+0.3j\omega)}{(1-j\omega)} = -k \frac{1-0.3\omega^2+j1.3\omega}{(1+\omega^2)}$$

2. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} k > 0 & -\pi \\ k < 0 & 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = \begin{cases} k > 0 & 0 \\ k < 0 & \pi \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = k = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = -k \\ \lim_{\omega \rightarrow 0+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 0 = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = 0.3k \\ \lim_{\omega \rightarrow 0+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} & = 0 \end{cases}$$

$$\Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) = \pi$$

3. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

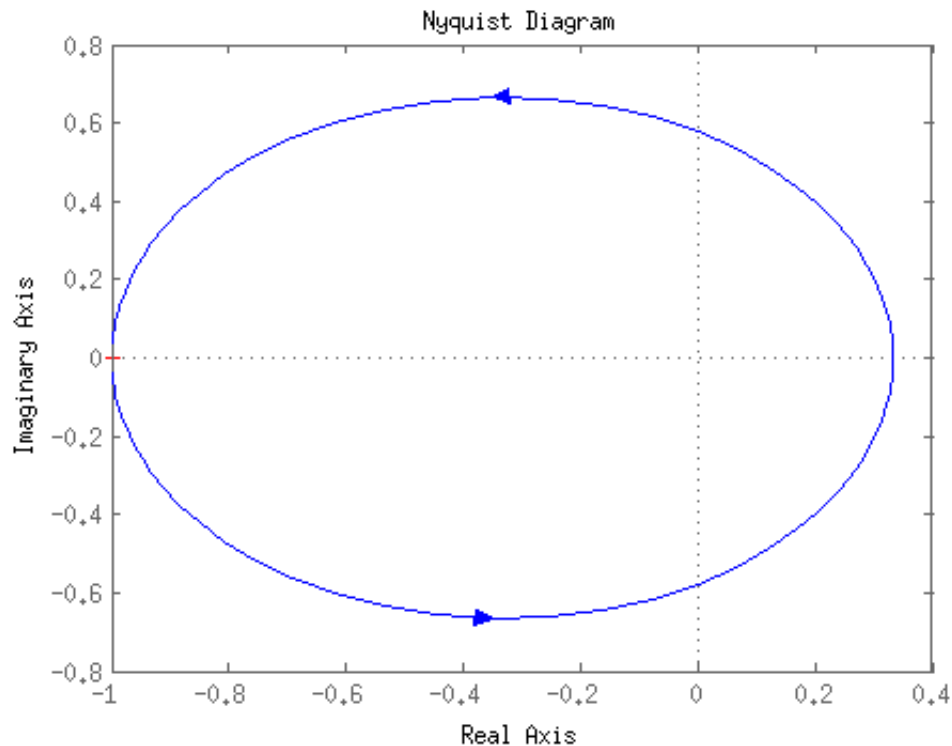
a) Intersezione con l'asse dei numeri reali

$$\begin{aligned} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 0 \\ \Re\{G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)\} &= -k \end{aligned}$$

b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari

$$\begin{aligned} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{0.3} \rightarrow \omega_{1/2} = \pm 0.58 \\ \Im\{G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)\} &= -k \cdot 0.56 \end{aligned}$$

4. DISEGNO



**Utilizzando il criterio di Nyquist, si determini come vari il numero di poli nel semipiano sinistro, destro e sull'asse immaginario per  $k \in (-\infty, +\infty)$**

- Per  $-k < -1 \rightarrow k > 1$  oppure  $0.3k < -1 \rightarrow k < -3.3$  il sistema è stabile con un polo a parte reale negativa.
- Per  $-3.3 < k < 1$  il sistema è instabile con un polo a parte reale positiva
- Per  $k = -3.3$  e  $k = 1$  il sistema è marginalmente stabile

**Si determini il valore di  $k$  per il quale la risposta all'impulso del sistema è sinusoidale specificando il valore della sinusoide**

$$k = 1,$$

### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{e^{-sT}}{s(2s+1)} \Big|_{j\omega}$ ,  $G_c(j\omega) = 0.1$ . In cascata a questo sistema è presente un altro sistema con f.d.t.:  $L(s) = e^{-2s}$ .



**Assumendo  $T = 4$ , si determini se il sistema è stabile o meno. In caso affermativo, si calcoli il margine di fase.**

Il ritardo fuori dall'anello ha il solo scopo di ritardare l'uscita, non influenza la stabilità del sistema.

Per  $T = 4$ :

||

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow 0.1 = \omega\sqrt{2\omega^2 + 1} \Leftrightarrow \omega = \omega_1 = 0.52$$

$$\angle G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1) = -0.52 \cdot 4 - \frac{\pi}{2} - \arctan(2 \cdot 0.52) = -4.45$$

$$M\phi = -1.31$$

**Si determini il valore limite del ritardo di  $G_p(j\omega)$  corrispondente ad un funzionamento stabile, e quindi si tracci l'andamento qualitativo della risposta all'impulso del sistema in figura.**

### Quesito C

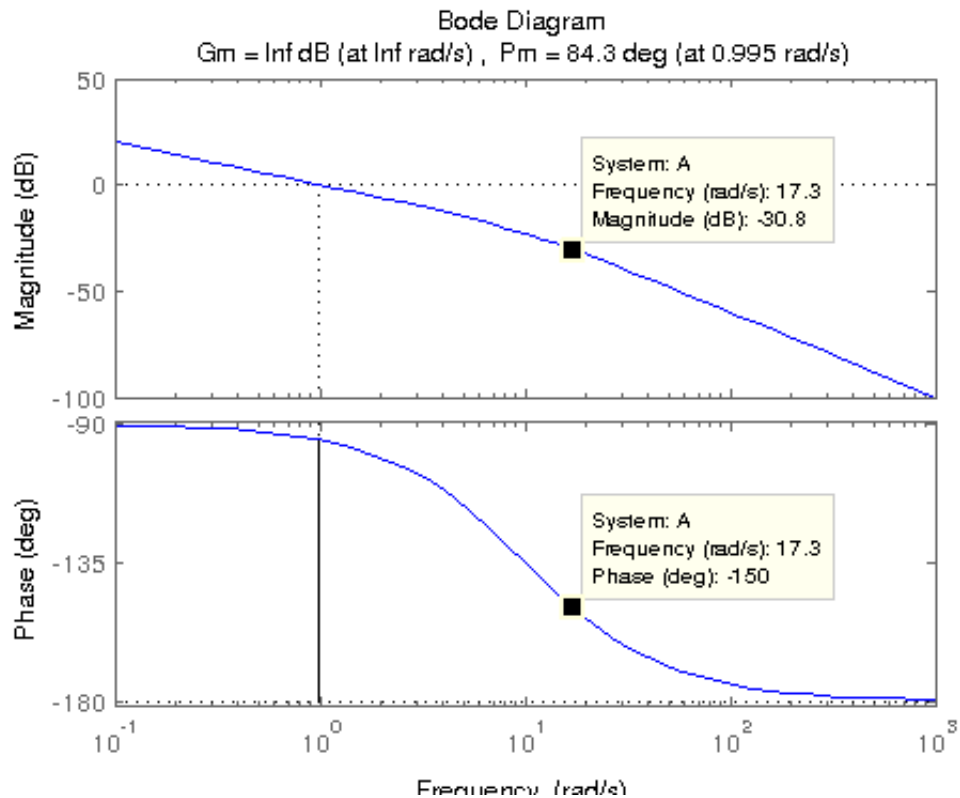
Sia assegnato un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{e^{-0.25s}}{1+0.1s}$  e  $G_c(s)$  regolatore di tipo integrale.

**Si tiri il regolatore in modo da garantire un margine di fase di  $30^\circ$ <sup>1</sup>**

Se la costante del regolatore integrale è unitaria, il diagramma di bode di  $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$  è:

---

<sup>1</sup>In alternativa a questo metodo "grafico" basato sul diagramma di Bode, è possibile utilizzare il metodo dell'ottimo simmetrico.



Variare la costante del regolatore non ha effetti sulla fase ma solo sul modulo. Nella fattispecie ha la capacità di traslare verticalmente il diagramma delle ampiezze. In questo caso bisogna traslare verso l'alto il diagramma di  $30.8\text{dB}$ . La costante  $T_i$  sarà quindi:  $T_i = 1/10^{30.8/20}$ .

***Dopo aver effettuato la taratura, si determini il margine di guadagno corrispondente.***

Il margine di guadagno non è finito.

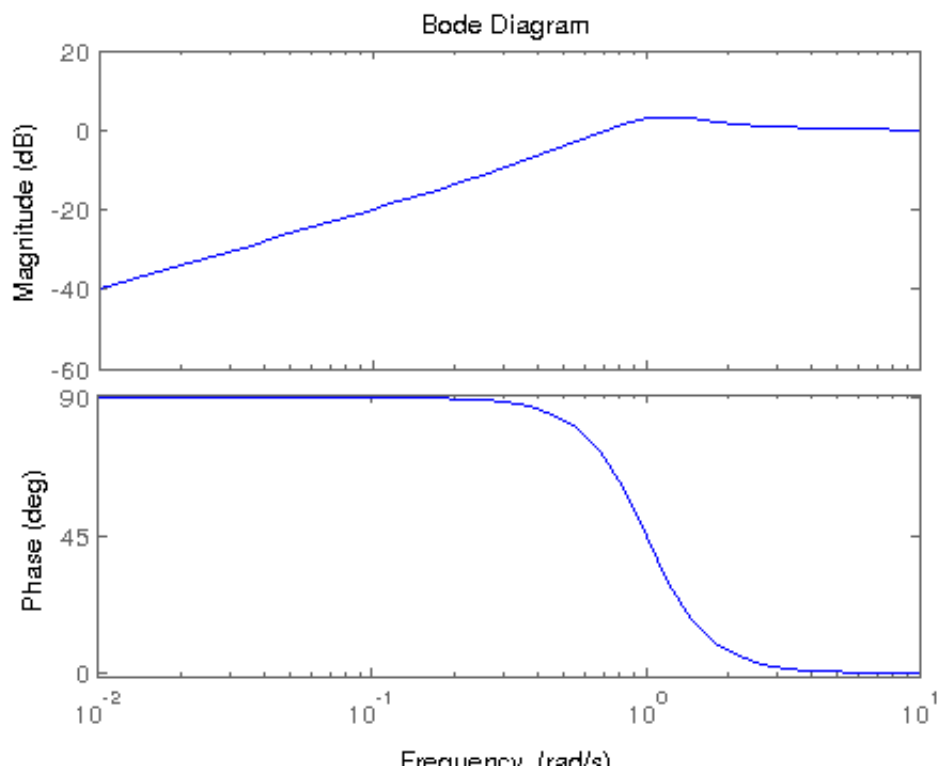
## 12 Appello del 26.09.12 [i]

### Quesito A

Sia assegnato un sistema in retroazione unitaria con un disturbo di carico  $d(t)$ . Sia la f.d.t. del plant:  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

**Si traccino su carta semilogaritmica i diagrammi asintotici di Bode della funzione sensitività**

La funzione sensitività è:  $S = \frac{s^2+s}{s^2+s+1}$



**Si determinino i contributi  $r(t)$  e  $d(t)$  all'uscita  $y(t)$  se  $r(t) = \sin(0.02t)$  e  $d(t) = 0.5 \sin(0.01t)$**

Per il disturbo è sufficiente osservare il diagramma di bode della funzione sensitività:

Posto  $\omega_1 = 0.01, \omega_2 = 0.02$ :

$$\begin{aligned}|S(j\omega_1)|_{dB} &= -40dB \Rightarrow |S(j\omega_1)| = 10^{-40/20} = 0.01 \\ \angle G(j\omega_1) &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

La componente legata al disturbo sarà:  $y_d(t) = 0.005 \sin(0.01t + \frac{\pi}{2})$ .

L'uscita  $y_r(t)$  è invece legata all'ingresso  $r(t)$  dalla f.d.t.:  $G_0(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)} = \frac{1}{s^2+s+1}$ .

$$\begin{aligned}|G_0(j\omega_2)| &= \frac{1}{\sqrt{\omega_2^4+3\omega_2^2+1}} \simeq 1 \\ \angle G_0(j\omega_2) &= 0\end{aligned}$$

### Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_c(s) = k, G_p(s) = -125 \frac{(s-1)}{(s-5)(s+1.25)(s+20)}$ .

**Posto  $k > 0$ , si tracci il diagramma polare di Nyquist.**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = -k \frac{125(s-1)}{(s-5)(s+1.25)(s+20)} \Big|_{s=j\omega} = -k \frac{1-j\omega}{(1-0.2j\omega)(1+0.8j\omega)(1+0.05j\omega)} = k \frac{(0.008\omega^4+0.52\omega^2-1)+j\omega(1.65+0.13\omega^2)}{(1+0.04\omega^2)(1+0.64\omega^2)(1+0.0025\omega^2)}$$

1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = \pi - \pi = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= k \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \pi\end{aligned}$$

2. INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

a) Intersezione con l'asse immaginario:

$$\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow 0.008\omega^4 + 0.52\omega^2 - 1 = 0$$

Posto  $\omega^2 = z$

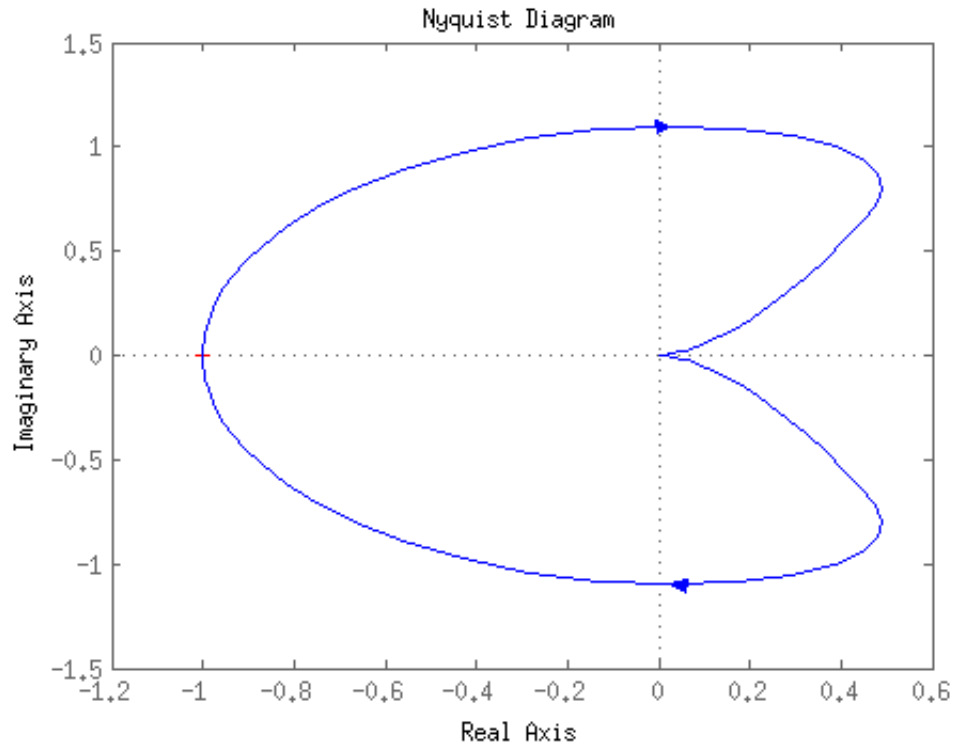
$$\begin{aligned}z^2 + 65z - 125 &= 0 \\ \Delta = 65^2 + 4 \cdot 125 &= 4725; \\ z_{1/2} &= \frac{-65 \pm 68.73}{2} \\ z_1 = 1.86 & \quad z_2 = -66.86 \\ \omega_{1/2} = \pm 1.36 & \quad \omega_{3/4} = \pm j8.17\end{aligned}$$

Per  $\omega = \omega_1 = 1.36$  si ha:

$$\Im(G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)) = k \frac{(1.36)(1.65+0.138 \cdot (1.36)^2)}{(1+0.04 \cdot (1.36)^2)(1+0.64 \cdot (1.36)^2)(1+0.0025 \cdot (1.36)^2)} = \frac{2.59}{2.35}k = 1.1k$$

i. L'intersezione con l'asse reale si realizza per  $\omega = 0$  nel punto  $s_1 = -k + j0$

### 3. DISEGNO



**Utilizzando esclusivamente il criterio di Nyquist, si specifichi il numero di poli nel semipiano sinistro e sull'asse immaginario al variare di  $k$  nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$**

Il diagramma dovrebbe compiere un giro in senso antiorario attorno al punto critico  $-1 + j0$  affinché il sistema in anello chiuso sia stabile, pertanto:

**Per  $k > 1$ :** Il sistema è instabile con due poli a parte reale positiva e uno a parte reale negativa

**Per  $k < 1$ :** Il sistema è instabile con un polo a parte reale negativa e due a parte reale positiva

**Per  $k = 1$ :** Il sistema è instabile con un polo a parte reale nulla e un polo a parte reale positiva e uno a parte reale negativa

**Se ha senso, si determini il valore di  $k$  per il quale la risposta all'impulso del sistema è sinusoidale specificando la pulsazione dell'oscillazione**

Il sistema non è mai marginalmente stabile.

**Quesito C**

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{1}{(1+0.5s)^3}$  e  $G_c = k + \frac{1}{T_1 \cdot s}$ .

**Si determinino le costanti  $k$  e  $T_1$  utilizzando le regole di Ziegler-Nichols in anello chiuso.**

Disattivo l'azione integratrice del controllore e studio l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso con il criterio di Routh per calcolare il guadagno critico:  $(1 + 0.5s)^3 + k = 0 \rightarrow 0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.5s + k + 1 = 0$

$$\begin{array}{c|cc} 4 & 0.125 & 1.5 \\ 3 & 0.75 & k+1 \\ 2 & 8-k & \\ 1 & \frac{-k^2+7k+8}{8-k} & \end{array}$$

Pertanto, il guadagno critico è  $k_c = 8$ . Per  $k > 8$  il sistema è instabile (2 poli a p. reale positiva, un polo a p. reale negativa), per  $k < 8$  il sistema è stabile (3 poli a p. reale negativa).

Per  $k = 8$  posso considerare l'equazione ausiliaria associata:

$$s^2 + 12 = 0 \rightarrow s = \pm j \cdot \sqrt{12} \rightarrow \omega_n = \sqrt{12} \rightarrow T_c = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.814$$

Calcolo i coefficienti  $k$  e  $T_1$ :

$$\begin{aligned} k &= 0.45 \cdot k_c = 3.6 \\ T_i &= 0.85 \cdot T_c = 1.542 \end{aligned}$$

**Utilizzando il controllore tarato al punto precedente, si dica (motivando la risposta) se con l'introduzione di un ritardo di 1 s nella f.d.t.  $G_p(s)$  il sistema chiuso in retroazione sia stabile.**

## 13 Appello del 27.11.12 [i]

### Quesito A

Sia assegnato il sistema descritto dalla seguente f.d.t.:

$$G_p(s) = \frac{0.2}{s^2 + 0.2 \cdot a \cdot s + 2}$$

**Supponendo di applicare l'ingresso  $u(t) = 20 \cdot \sin(\omega t)$ , si determini il valore costante  $a$  in modo che il massimo valore dell'uscita a regime non superi 3.<sup>1</sup>**

Devo imporre  $M(\omega)_{max} \leq 3/20 = 0.15$ . Poiché  $\begin{cases} 2\delta\omega_n &= 0.2a \\ \omega_n^2 &= 2 \end{cases}$  si ha  $\delta = \frac{a}{10\sqrt{2}}$ . Distinguo quindi due casi:

1. Per  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \delta < 1 \rightarrow 10 \leq a \leq 10\sqrt{2}$  e per  $\delta \geq 1 \rightarrow a \geq 10\sqrt{2}$ ,  $M(\omega)_{max} = M(0) = 0.1$
2. Per  $0 \leq \delta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 0 \leq a \leq 10$ ,  $M(\omega)_{max} = \frac{0.1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$ .

Nel primo caso per tali intervalli il requisito è sempre rispettato.

Nel secondo caso, bisogna imporre:

$$M(\omega)_{max} = \frac{1}{\delta\sqrt{1-\delta^2}} \leq 1.5 \rightarrow \delta^2(1-\delta^2) - 0.4 \geq 0. \text{ Posto } z = \delta^2 \text{ si ha: } z^2 - z + 0.4 \leq 0 \rightarrow z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1.6}}{2}$$

### Quesito B

### Quesito C

---

<sup>1</sup> Perché non usare il teorema del valore finale? Perché non c'è un valore finale!

## 14 Appello del 12.02.13

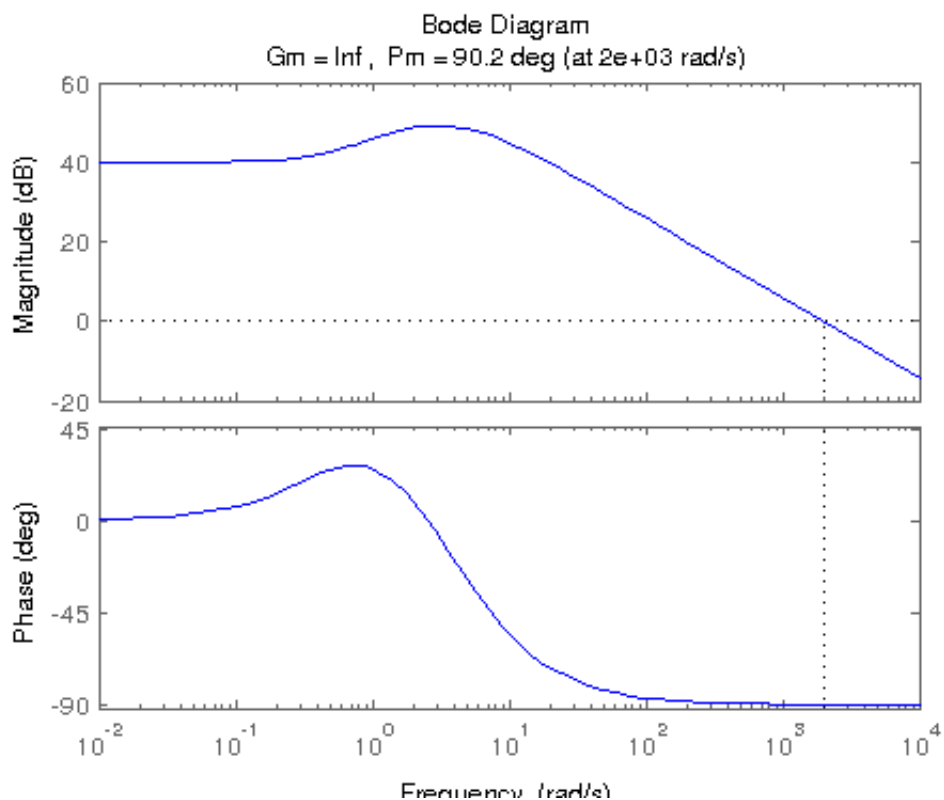
### Quesito A

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = 2000 \frac{(s+0.5)}{(s+2)(s+5)} \Big|_{s=j\omega}$ ,  
 $G_c(j\omega) = 1$

*Si traccino i diagrammi asintotici di Bode di ampiezza e fase (approssimati con la regola del 4.81) associati a ciascuno dei fattori di  $G_p(j\omega)$  nonché i diagrammi risultanti*

*Effettuando le dovute correzioni (giustificate) si traccino i diagrammi di bode effettivi di  $G_p(j\omega)$ .*

*Sfruttando i diagrammi tracciati, si fornisca una stima dei margini di stabilità del sistema*





**Quesito B**

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{1}{s(s-1)} \Big|_{s=j\omega}$ ,  $G_c(j\omega) = 1$ .

**Si tracci il diagramma polare di Nyquist (considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{1}{s(s-1)} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{1}{j\omega(1-j\omega)} = -\frac{1}{(1+\omega^2)} + j\frac{1}{\omega(1+\omega^2)}$$

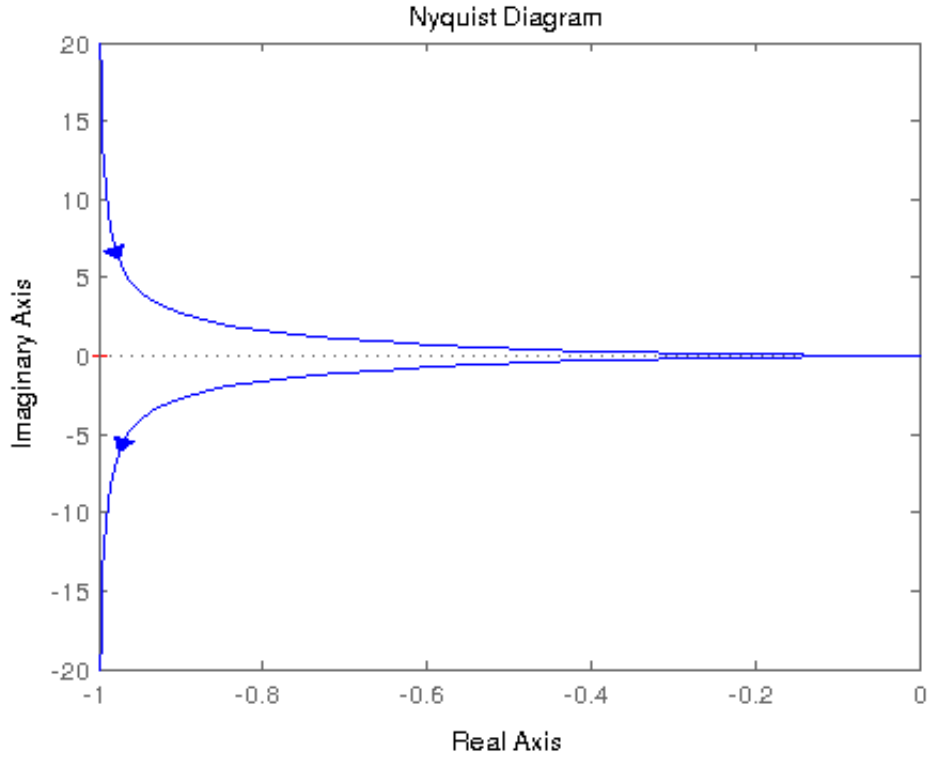
## 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -1 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= +\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

## 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- a) Intersezione con l'asse dei numeri reali  
 $\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione
- b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari  
 $\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow$  Non esistono valori finiti di  $\omega$  che soddisfino l'equazione

3. DISEGNO (PER  $k = 1$ )



**Posto  $G_c(j\omega) = k$ , si determini la posizione dei poli utilizzando esclusivamente il criterio di Nyquist**

Per il criterio di Nyquist, essendo il sistema in anello aperto instabile, il diagramma deve circondare il punto critico  $s = -1 + j0$  una volta in senso antiorario.

$k > 0$ : il sistema in anello chiuso è instabile con due poli a parte reale negativa

$k < 0$ : il sistema in anello chiuso è instabile con un polo a parte reale negativa

**Posto  $G_c(j\omega) = (1 + Tj\omega)$  si tracci di nuovo il diagramma di Nyquist e si studi la stabilità per  $T > 0$  utilizzando esclusivamente il criterio di Nyquist.**

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{1+Ts}{s(s-1)} \Big|_{s=j\omega} = -\frac{(1+Tj\omega)}{j\omega(1-j\omega)} = -\frac{1+T}{(1+\omega^2)} + j\frac{1-T\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}$$

#### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n)\frac{\pi}{2} - (m_2-n_2)\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= -1-T \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} &= +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 0$$

$$\Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) = 3\frac{\pi}{2}$$

2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

a) Intersezione con l'asse dei numeri reali

$$\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{T}$$

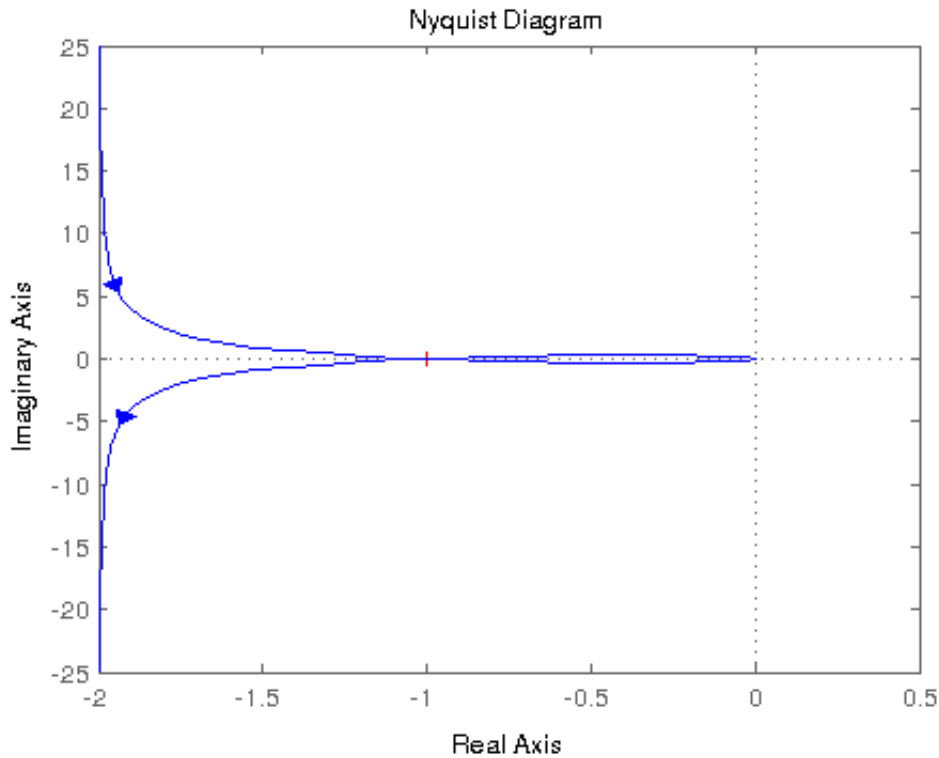
$$\omega_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$\Re\{G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)\} = -T$$

b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari

$$\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \text{Non esistono valori finiti di } \omega \text{ che soddisfino l'equazione.}$$

3. DISEGNO (PER  $T = 1$ )



$T = 1$ : il sistema è marginalmente stabile

$T > 1$ : il sistema è stabile con due poli a parte reale negativa

$T < 1$ : Il sistema è instabile con due poli a parte reale positiva

**Quesito C**

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(j\omega) = \frac{e^{-0.2s}}{s}$ ,  $G_c(j\omega) = 1$ .

**Tarare un regolatore PI utilizzando le regole di Ziegler-Nichols.**

$$\angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow -0.2\omega + 2k\pi - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\omega_k = \frac{5}{2}\pi + 10k\pi \simeq 7.85 + 10k\pi$$

$$|G_p(j\omega_0)G_c(j\omega_0)| = \frac{2}{5\pi} \simeq 0.13$$

$$k_c = 7.85$$

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{4\pi}{5\pi} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$K = k_c \cdot 0.45 = 3.53$$

$$T_i = T_c \cdot 0.85 = 0.68 \Leftrightarrow K_i = 1.47$$

**Dopo aver effettuato la taratura, si determinino i margini di stabilità del sistema**

Il guadagno di anello è ora:

$$G_p(j\omega)G_c(j\omega) = K_i \frac{(1+K/K_i j\omega)e^{-0.2j\omega}}{(j\omega)^2} = 9.1 \frac{(1+0.39j\omega)e^{-0.2j\omega}}{(j\omega)^2}.$$

Calcolo il margine di fase:

$$|G_p(j\omega)G_c(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K^2}{2} + \frac{\sqrt{K^4 + 4K_1^2}}{2}} = 4.17$$

$$\angle G_p(j\omega_{cp})G_c(j\omega_{cp}) = -\arctan(\omega_{cp} \frac{K}{K_i}) - \pi - 0.2\omega_{cp} \simeq -2.96$$

$$M\phi = -0.18r = 10.61$$

Calcolo il margine di stabilità:

$$\angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) = -\pi \Leftrightarrow \arctan(0.39\omega) - 0.2\omega - 2\pi = 0$$

$$\text{Pongo } p(\omega) = \arctan(0.39\omega) - 0.2\omega - 2\pi.$$

La frequenza di cross-phase è  $\omega_{cp} = 5.7449$ . Il margine di guadagno è:  $k = 1.4848$ .

# 15 Appello del 26.02.13 [i]

## Quesito A

## Quesito B

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{s+0.1}{s^3(s-10)}$ ,  $G_c(s) = 1$ .

*Si tracci il diagramma polare di Nyquist (considero nei calcoli  $\omega > 0$ ).*

$$\begin{aligned} G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= -0.01 \frac{(1+10s)}{s^3(1-0.1s)} \Big|_{s=j\omega} = -0.01 \frac{(1+10j\omega)}{(j\omega)^3(1-0.1j\omega)} = -0.01j \frac{(1+10j\omega)(1+0.1j\omega)}{\omega^3(1+0.01\omega^2)} = \\ &= \frac{0.101}{\omega^2(1+0.01\omega^2)} - 0.01j \frac{1-\omega^2}{\omega^3(1+0.01\omega^2)} \end{aligned}$$

### 1. COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= \varphi_0 - \mu \frac{\pi}{2} = -\frac{5}{2}\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G_p(j\omega)G_c(j\omega) &= (m-n) \frac{\pi}{2} - (m_2 - n_2)\pi + \varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= +\infty = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = +\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = -\infty \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_p(j\omega)G_c(j\omega)| &= 0 \\ \Delta \arg(G_p(j\omega)G_c(j\omega)) &= \pi \end{aligned}$$

### 2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

a) Intersezione con l'asse dei numeri reali

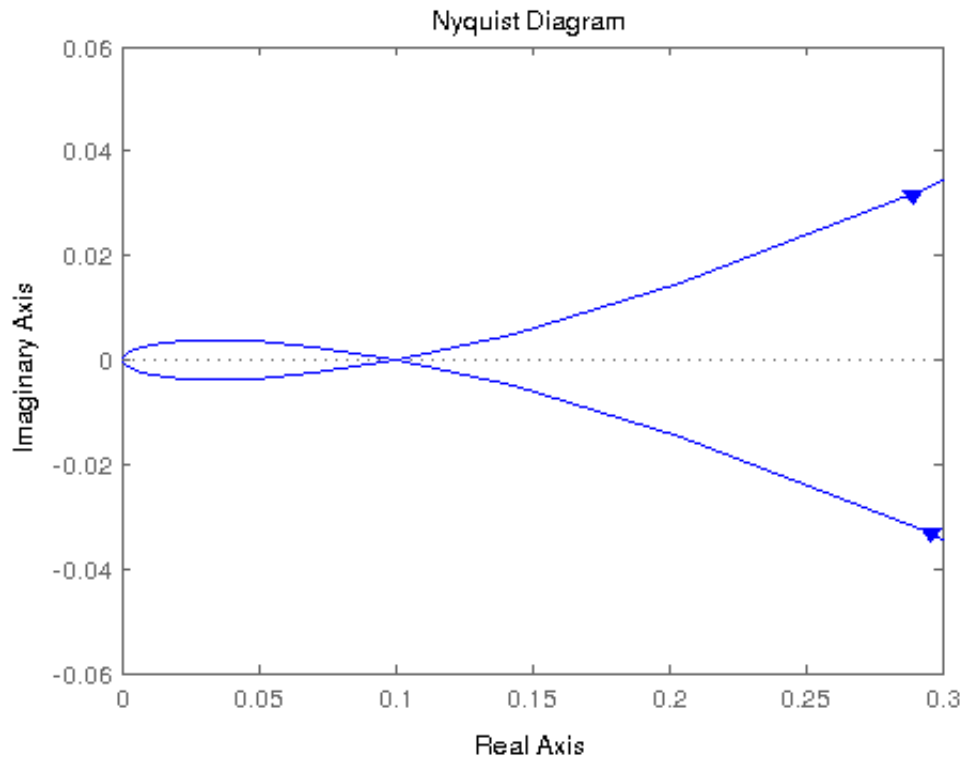
$$\Im\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \omega_{1/2} = \pm 1$$

$$\Re\{G_p(j\omega_1)G_c(j\omega_1)\} = 0.1$$

b) Intersezione con l'asse dei numeri immaginari

$$\Re\{G_p(j\omega)G_c(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \text{Non esistono valori finiti di } \omega$$

### 3. DISEGNO



### Quesito C

Si consideri un sistema in retroazione unitaria con  $G_p(s) = \frac{1}{(s+2)(s+9)}$ .

***Si progetti il regolatore  $G_c(s)$  in modo che il sistema in anello chiuso abbia poli dominanti in  $-3 \pm 3j$ .***

L'equazione caratteristica del sistema in anello aperto è:  $p(s) = s^2 + 11s + 18$ . L'obiettivo del controllo è quello di ottenere un sistema in anello chiuso con un'equazione caratteristica del tipo:  $p'(s) = s^2 + 6s + 18$ . Il controllore in grado di assolvere questo compito è un controllore del tipo  $G_c(s) = -5s$ , infatti:  $G(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = -5 \frac{s}{s^2+11s+18-5s} = -5 \frac{s}{s^2+6s+18}$ .

# Indice analitico

Criterio di Nyquist, 8, 12, 17, 20, 22, 40,  
45, 50, 51

Diagramma

di Bode, 43, 48

di Nyquist, 7, 9, 10, 12, 17, 20, 22,  
40, 45, 50, 51, 54

Errori a regime, 6

Margine di fase, 41

Margini di stabilità, 4, 10, 13, 17, 19, 23,  
52

Risposta a regime, 44

Taratura

analitica, 4, 6, 15, 22, 54

basata sul diagramma di Bode, 42,  
47

basata sul l.d.r., 4

col metodo del modulo ottimo, 20

col metodo di Ziegler-Nichols, 23, 46,  
52