Теория вероятностей

28 февраля 2014 г.

Глава 1

Основы

1.1 Предисловие

Теория вероятностей — наука о **повторяющихся случайных** явлениях.

Примеры: квантовая физика, вихри в турбулентных потоках, изменения молекулы ДНК в жидкостях, ...

Цель: **прогноз**. Мы, исследуя случайные явления, будем пытаться что-то предсказать.

Нас интересует то, что случается с нами периодически.

При исследовании повторяющихся случайных явлений мы исследуем количественные характеристики и закономерности

1.2 Вероятностный эксперимент

Определение 1.2.1. *Вероятностный эксперимент — явление, исход которого для нас неопределён и который можно повторить любое число раз* ***независимым*** *образом.*

Определение 1.2.2. *Вероятностное пространство — совокупность всех исходов вероятностного эксперимента.*

Ω — вероятностное пространство

$\Omega \ni \omega$ — элементарный исход

Пример 1.2.1 (Подбрасывание монетки)**.** *0 — орёл, 1 — решка*

$$\Omega = \{0, 1\}$$

Пример 1.2.2 (Подбрасывание игрального кубика)**.**

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

Пример 1.2.3 (Задава о встрече)**.** *Два человека в течение часа приходят на одно и то же место.*

x, y — время, в которое окажется в данном месте первый или второй человек соответственно.

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$$

Пример 1.2.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла).

$$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

1.3 Случайные события и действия над ними

Определение 1.3.1. *Случайное событие — подмножество множества всех исходов вероятностного эксперимента.*

$\Omega \supset A$ — случайное событие
Ω — достоверное событие
$\emptyset$ — невозможное события

Пример 1.3.1 (Подбрасывание монетки). A – *выпал орёл*

$$A = 0$$

Пример 1.3.2 (Подбрасывание игрального кубика). A — *выпало чётное число*

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Пример 1.3.3 (Задава о встрече). A — *встретились*

Пример 1.3.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла). A — *не потребовалось 100 подбрасываний*

$$A = \{1, \dots, 99\}$$

Можно говорить о **пересечении** событий A и B, но лучше говорить, что они **произошли одновременно**.
$\emptyset$ — невозможное событие
Ω — достоверное события
$\overline{A}$ — событие A не произошло
$A \cap B$ — A и B произошли
$A \cup B$ — произошло хотя бы одно из событий A, B
$A \setminus B$ — произошло A, но не B

Определение 1.3.2. *Последовательность случайных событий*

$$\{A_n \mid n \geq 1\}$$

Определение 1.3.3. *Верхний предел последовательности* $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — *это случайное событие, состоящее в том, что произошло бесконечно много событий из исходной последовательности.*

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

Определение 1.3.4. *Нижний предел последовательности* $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — *это случайное событие, состоящее в том, что произошли все события из исходной последовательности.*

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Некоторые свойства:

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

$$\overline{\varlimsup_{n\to\infty} A_n} = \varliminf_{n\to\infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\varliminf_{n\to\infty} A_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \overline{A_n}$$

1.4 Классический вероятностный эксперимент

Определение 1.4.1. *Классический вероятностный эксперимент — такой, у которого конечное число исходов, ни один из которых не является более предпочтительным, чем другой.*

У нас появилось желание приписывать числовые характеристики событиям.

$|\Omega| < +\infty$, все элементарные исходы равновероятны, $\Omega \supset A$ — случайное событие.

Определение 1.4.2 (Вероятность). *Вероятность того, что случайное событие $A \subset \Omega$ прозошло, является отношением мощности множества A к мощности множества Ω:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Свойства:
$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Частный случай: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$

Рецепт вычисления вероятности классического эксперимента:

1. Описать Ω
2. Описать события A (исходы, благоприятный событию A, стостоят в том, что ...)
3. Найти $|\Omega|, |A|, \mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Теорема 1.4.1 (Формула включения-исключения). *Есть n случаынйх событий: $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$. Вероятность того, что произошло хотя бы одно событие, считается по формуле:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1<i_2}^{n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3}^{n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{3} A_k\right) - \\ - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \cdot \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k}^{n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{k} A_{i_t}\right)\right]$$

Пример 1.4.1 (Задача о конвертах)**.** *Дано n писем и n конвертов. Письма раскладываются случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по правильному адресу.*

Случайно раскладываем n писем по n конвертам — получаем перестановки.

Ω — все перестановки чисел от 1 до n

A_i — событие, состоящее в том, что i-е письмо попало по правильному адресу

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i_1<i_2} \frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1<\dots<i_k} \frac{(n-k)!}{n!} =$$
$$= \binom{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - \binom{2}{n} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{k}{n} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} +$$
$$+ \dots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e}$$

1.5 Геометрический вероятностный эксперимент

Пример 1.5.1 (Простейший геометрический эксперимент)**.** *$G \subset D \subset \mathbb{R}^n$, наугад выбираем точку $M \in D$. Событие A состоит в том, что $M \in A$. Тогда вероятность события G:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|G|}{|D|}$$

$|D|$ — длина, площадь, объём D (в зависимости от n)

Вероятность в геометрическом эксперименте обладает теми же свойствами, что и в классическом, но появились ненулевые события с нулевой вероятностью

$$(\exists A \subset \Omega)(A \neq \emptyset) : \mathbb{P}(A) = 0$$

Пример 1.5.2 (Непустое событие с нулевой вероятностью)**.** *Вероятность, события A, состоящего в том, что точка попадёт на линию (или точку) в трёхмерном пространстве, равна нулю, так как объём линии(точки) равен нулю (но такое событие возможно)*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0}{|D|} = 0$$

Определение 1.5.1. *Для $A \subset \mathbb{R}$*

$$A + x = \{y + x \mid y \in A\}$$

Свойства длины. Разбиваем числовую прямую на непересекающиеся отрезки A_k:

$$A_k = [a_k; b_k], a_k < b_k < a_{k+1}$$

1. Аддитивность

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

2. Однородность Эвклидового пространства: длина множества, сдвинутого на x, равна длине исходного множества
$$|A + x| = |A|$$

Утверждение 1.5.1. *Нельзя определить функцию множества, обладающую свойствами 1 и 2, на всех подмножествах числовой прямой.*

Доказательство. Пусть $|\cdot|$ определена на всех подмножествах $\mathbb{R}$ и обладает свойствами 1 и 2.

Возьмём отрезок $[0;1]$ и введём отношение эквивалентности "$\sim$". Будем считать эквивалентными числа, разность между которыми — число рациональное.
$$\forall x, y \in [0;1] : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Тогда множество классов эквивалентности $\{K_\alpha\}$ будет разбиением отрезка $[0;1]$:
$$\bigcup_\alpha K_\alpha = [0;1]$$
$$K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

A — множество, в котором находится по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Значит, $|A| \leq 1$.

Введём $\{r_k\}$ — множество рациональный чисел на отрезке $[-1;1]$:
$$\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap [-1;1]$$

Поскольку в A содержится по одному представителю из каждого класса эквивалентности K_α, разность между числами в каждом классе — число рациональное, а сами числа взяты из отрезка $[0;1]$, то разность между двумя числами не может быть больше, чем 1 и меньше, чем -1, и является числом рациональным. Значит, объединив все возможные суммы чисел из A с числами из $\{r_k\}$, точно можно получить все числа из каждого класса K_α, а, следовательно, и отрезок $[0;1]$:
$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \supset [0;1]$$

Очевидно, что произвольное число x из отрезка $[0;1]$ будет принадлежать какому-то классу эквивалентности K_α и найдётся такое число y из этого класса, принадлежащее множеству A (по определению множества A):
$$x \in [0;1] \Rightarrow \exists \alpha : \begin{cases} x \in K_\alpha \\ \exists y \in A \cap K_\alpha \end{cases}$$

Это в свою очередь означает, что разность x и y — рациональное число из множества $\{r_k\}$, так как они принадлежат одному классу эквивалентности K_α:
$$x - y = r_k \Rightarrow x \in A + r_k$$

Примечание к применению свойства 2: множество $\{A + r_k\}$ необязательно является разбиением, поэтому мощность объединений его элементов может быть меньше суммы их мощностей

$$|[0;1]| = 1 \leq \left|\bigcup_{k\geq 1}(A + r_k)\right| \leq \sum_{k\geq 1}|A + r_k| = \sum_{k\geq 1}|A| \tag{1.1}$$

Поскольку все числа из A попадают на отрезок $[0;1]$, а $r_k \in [-1;1]$, то ни одно из чисел множества $\{A + r_k\}$ не попадёт за пределы отрезка $[-1;2]$:

$$\bigcup_{k\geq 1}(A + r_k) \subset [-1;2] \Rightarrow \left|\bigcup_{k\geq 1}(A + r_k)\right| \leq 3 \Rightarrow \left|\bigcup_{k=1}^{n}(A + r_k)\right| \leq 3, \forall n \geq 1$$

Если взять два разных рациональных числа r_{k_1} и r_{k_2}, то $A+r_{k_1}$ и $A+r_{k_2}$ не будут иметь одинаковых элементов, так как, если разность между двумя числами — число рациональное, то они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, но множество A содержит лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности K_α:

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow r_{k_1} \neq r_{k_2} \Rightarrow A + r_{k_1} \cap A + r_{k_2} = \emptyset$$

А это значит, что множество $\{A + r_k\}$ является разбиением и к нему применимо свойство 2:

$$3 \geq \left|\bigcup_{k=1}^{n}(A + r_k)\right| = \sum_{k=1}^{n}|A + r_k| = n \cdot |A|, \forall n \geq 1$$

Поспольку это действительно для любого натурального n, то $|A|$ может равняться лишь нулю, чтобы произведение не могло превышать 3, но из (1.1) имеем, что эта сумма (произведение) это значение должно быть не меньше, чем 1:

$$|A| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|A| = 0 \ngeq 1$$

Противоречие. $\square$

Пока что не будут разглядываться непустые множества без длины.

Глава 2

2.1 Условная вероятность

A, B — случайные события, $\mathbb{P}(B) > 0)$

Определение 2.1.1. *Условная вероятность события A при условии B (при условии, что B произошло)*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Очевидные свойства:

1. $\mathbb{P}(B \mid B) = 1$
2. $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = 1$
3. $\mathbb{P}(\emptyset \mid B) = 0$

Определение 2.1.2. *A и B независимы, если вероятность того, что они произошли одновременно, равна произведению их вероятностей*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$$

Пример 2.1.1. *Игральный кубик подбрасывается два раза. Событие A состоит в том, что сумма очков равна 9. Событие B состоит в том, что во второй раз выпадет чётная цифра.*

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{(i,j) \mid i,j = \overline{1,6}\right\} && \Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \\
A &= \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} && \Rightarrow |A| = 4 \\
B &= \left\{(i,k) \mid i = \overline{1,6}, k = 2,4,6\right\} && \Rightarrow |B| = 6 \cdot 3 = 18 \\
A \cap B &= \{(3,6), (5,4)\} && \Rightarrow |A \cap B| = 2 \\
\mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{18} \\
\mathbb{P}(A \mid B) &= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

2.2 Формула полной вероятности

Определение 2.2.1. *Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется полным набором гипотез, если выполняются ледующие условия:*

1. *Вероятность ни одного из них не равна нулю*
$$\mathbb{P}(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$$
2. *Они попарно не пересекаются*
$$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$
3. *Их объединение составляет вероятностное пространство*
$$\bigcup_{k=1}^{n} H_k = \Omega$$

Свойства очень похожи на определение разбиения множества, но с одной поправкой: условие 1 *более сильное, так как ранее было показано, что бывают непустые множества, вероятность которых равна нулю.*

Лемма 2.2.1. *Если набор $H_1, \ldots, H_n$ является разбиением множества Ω, то для его произвольного непустого подмножества $A \subset \Omega$ семейство $G = \{H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ будет разбиением.*

Доказательство. Обозначим через m количество элементов в множестве G
$$m = |G|$$

Первое свойство очевидно выполняется по построению: в семейство входят только ненулевые множества.

Выполнение второго свойства показываеть просто
$$G_i \cap G_j = (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (H_i \cap H_j) \cap A = \emptyset, i \neq j$$

Чтобы показать то, что выполняется и третье свойство, нужно немного подумать
$$\bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{A \cap H_k \neq \emptyset} (A \cap H_k)$$

Поскольку объединение любого множества A с пустым даст исходное множество ($A \cup \emptyset = A$), то к объединению можно добавить и пустые пересечения — те $A \cap H_k$, которые не содержат элементов, от чего и не попали в G
$$\bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap H_k)$$

А дальше всё тривиально
$$\bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap H_k) = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k \right) = A \cap \Omega = A$$

□

Лемма 2.2.2 (Формула полной вероятности). Ω — *вероятностное пространство, $\Omega \supset A$ — случайное событие, $\Omega \supset H_1, \ldots, H_n$ — полный набор гипотез. Тогда*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

Доказательство. Когда $\mathbb{P}(A) = 0$, то доказательство очевидно, так как $\mathbb{P}(A \mid H_k) = 0, \forall H_k$.

Займёмся случаем, когда $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Поскольку $\left\{H_k \mid k = \overline{1, n}\right\}$ — разбиение Ω, то семейство $G = \{A \cap H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ — разбиение A ($|G| = m$), а это значит, что сумма мощностей всех G_k равняется мощности их объединения, а их объединение — это и есть множество A

$$\sum_{k=1}^{m} |G_k| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} G_k\right| = |A|$$

Перепишем по-другому это равенство, пользуясь тем, что добавление нуля к сумме ничего не меняет: ведь могут быть такие пересечения $A \cap H_k$, которые являются пустыми множествами, а это значит, что их мощность равна 0 ($A \cap H_k = \emptyset \Rightarrow |A \cap H_k| = 0$)

$$|A| = \sum_{k=1}^{m} |G_k| = \sum_{A \cap H_k \neq \emptyset} |A \cap H_k| = \sum_{k=1}^{n} |A \cap H_k|$$

Поделим обе части на мощность вероятностного пространства $|\Omega|$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|A \cap H_k|}{|\Omega|}$$

Теперь видим вероятность события A слева и сумму вероятностей того, что это событие произошло вместе с каждой гипотезой H_k, справа

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_k)$$

Умножаем правую часть на единицу и получаем желаемый результат

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k)\right)$$

Последняя дробь по определению является вероятностью A при условии того, что произошло событие H_k. Таким образом, лемма доказана

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

□

2.3 Формула Байеса

Постановка задачи: Имеется вероятностное пространство Ω, случайное событие $A \subset \Omega$, $H_1, \dots, H_n$ — полный набор гипотез, вероятности $\mathbb{P}(H_k)$ и $\mathbb{P}(A \mid H_k)$ известны для каждой гипотезы. Нужно найти $\mathbb{P}(H_k \mid A)$.

Лемма 2.3.1 (Формула Байеса)**.**

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

Доказательство. Начнём с определения условной вероятности

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Распишем знаменатель по формуле полной вероятности, а числитель умножим на 1

$$\frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

В числителе получилась условная вероятность, умноженная на вероятность гипотезы — формула Байеса доказана

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

□

Оглавление