Математическая Статистика

9 мая 2014 г.

Глава 1

Основы

1.1 Методы оценок характеристик распределения наблюдаемых случайных величин

$x_1, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения F. Логично, что вероятность выпадения каждого x_k (вероятность того, что наугад взятый из выборки x будет равен x_k) одинакова

$$P(x = x_k) = \frac{1}{n}$$

Цель — найти F или сказать что-то о её свойствах.

1.1.1 Эмпирическая функция распределения

Определение 1.1.1 (Эмпирическая функция распределения)**.** Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке $x_1, \ldots, x_n$ называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(x_k \leq x)$$

Теорема 1.1.1. *Неизвестная функция распределения $F(x)$ может быть сколь угодно точно восстановлена по выборке достаточно большого объёма [1, стр. 25].*

$$\mathbb{P}\left(F_n(x) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F(x)\right) = 1$$

Идея доказательства. Вспомним, чему равна эмпирическая функция распределения

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(x_k \leq x)$$

Заметим, что индикаторы $\mathbb{1}(x_k \leq x)$ являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, а функцию распределения $F(x)$ можно записать следующим образом

$$F(x) = \mathbb{P}\{x_1 \leq x\} = M\mathbb{1}(x_1 \leq x)$$

Так как эмпирическая функция распределения является средним арифметическим индикаторов, то по усиленному закону больших чисел она сходится к неизвестной функции распределения почти наверное при устремлении длины выборки к бесконечности

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(x_k \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} M\mathbb{1}(x_1) = F(x)$$

Теорема доказана

$$F_n(x) \overset{a.s.}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} F(x)$$

□

1.1.2 Гистограмма

Как можно попытаться отследить плотность распределения? Постараемся найти функцию распределения, а потом и плотность.

Допустим, F имеет хорошую (непрерывную) плотность. Как тогда из F получить p?

Мы знаем, что $F' = p$, но это никому не нужно, так как F_n' — производная ступенчатой функции, которая почти везде будет равна нулю.

Но также мы помним, что

$$F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)\,dx$$

Положим $a = x$ и введём $\Delta_x = b - x$

$$F(x + \Delta_x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta_x} p(y)\,dy$$

Делим обе части на Δ_x.

$$\frac{1}{\Delta_x} \cdot \int_x^{x+\Delta_x} p(y)\,dy = \frac{F(x+\Delta_x) - F(x)}{\Delta_x}$$

Несложно заметить, что при достаточно малых значениях Δ_x получаем плотность распределения $p(x)$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta_x} \xrightarrow{\Delta_x \to 0} \frac{dF(x)}{dx} = p(x)$$

Значит, можем заменить $p(x)$ не производной, а такой разностью.

$$p(x) \approx \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta}$$

Возьмём m полуинтервалов на числовой прямой $I_j = (a_{j-1}, a_j], i = \overline{1,m}$ таких, что все значения выборки попадают в один из них. Для этого определим пару свойств точек, ограничивающих эти интервалы:

1. Каждая следующая точка строго правее (больше) предыдущей. (так как зачем нам одинаковые точки?)

$$a_0 < a_1 < \dots < a_m$$

2. Каждое значение выборки должно попадать ровно в один полуинтервал. Очевидно, что данные полуинтервалы I_j не пересекаются между собой. Значит, осталось потребовать, чтобы крайнее левое значение было меньше минимального значения из выборки, а крайнее правое — не больше максимального

$$a_0 < min\left(X\right) \le max\left(X\right) \le a_m$$

Введём функцию $q\left(y\right)$

$$q\left(y\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{F\left(a_j\right) - F\left(a_{j-1}\right)}{a_j - a_{j-1}} \cdot \mathbb{1}\left(y \in I_j\right)$$

Определим последовательность функций $q_n\left(y\right)$, заменив $F(x)$ на $F_n\left(x\right)$ в предыдущем определении

$$q_n\left(y\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right)}{a_j - a_{j-1}} \cdot \mathbb{1}\left(y \in I_j\right) \tag{1.1}$$

Отметим, что q_n сходится к q почти наверное (согласно закону больших чисел), а q в свою очередь сходится к p (согласно центральной предельной теореме)

$$q_n\left(y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} q\left(y\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} p\left(y\right)$$

Функция q_n называется **гистограммой**.

Избавимся от a_j в формуле, а для этого вспомним, чему равно $F_n\left(x\right)$

$$F_n\left(x\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \le x\right)$$

Теперь посмотрим, чему равна разность $F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right)$, которая, как мы видим, является вероятностью того, что x попало в отрезок I_j

$$F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \le a_j\right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \le a_{j-1}\right)$$

Сгруппируем слагаемые и получим чуть более компактную запись разности

$$F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\mathbb{1}\left(x_k \le a_j\right) - \mathbb{1}\left(x_k \le a_{j-1}\right)\right] \tag{1.2}$$

Рассмотрим возможные значения индикаторов

Если оба индикатора равны единице, это значит, что x_k не больше a_j и не больше a_{j-1}. Поскольку $a_{j-1} \leq a_j$, то можно обойтись тем, что $x \leq a_{j-1}$

$$\begin{cases} \mathbb{1}\left(x_k \leq a_j\right) = 1 \\ \mathbb{1}\left(x_k \leq a_{j-1}\right) = 1 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k \leq a_j \\ x_k \leq a_{j-1} \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_k \leq a_{j-1} \leq a_j \Rightarrow x_k \leq a_{j-1}$$

Такая ситуация, что x больше, чем a_j, но не больше, чем a_{j-1}, невозможна, так как a_{j-1} не больше, чем a_j, а признать возможной такое положение дел $(a_j < x_k \leq a_{j-1})$ означало бы то, что $a_j < a_{j-1}$

$$\begin{cases} \mathbb{1}\left(x_k \leq a_j\right) = 0 \\ \mathbb{1}\left(x_k \leq a_{j-1}\right) = 1 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k > a_j \\ x_k \leq a_{j-1} \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_j < x_k \leq a_{j-1} \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases}$$

Если оба индикатора равны нулю, то это значит, что x строго больше как a_j, так и a_{j-1}. Опять же, поскольку $a_{j-1} \leq a_j$, то достаточно сказать, что $x > a_j$.

$$\begin{cases} \mathbb{1}\left(x_k \leq a_j\right) = 0 \\ \mathbb{1}\left(x_k \leq a_{j-1}\right) = 0 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k > a_j \\ x_k > a_{j-1} \\ a_j \geq a_{j-1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_k > a_j \geq a_{j-1} \Rightarrow x_k > a_j$$

Если же x больше, чем a_{j-1}, но не больше, чем a_j, то x попадает в полуинтервал $(a_{j-1}, a_j]$

$$\begin{cases} \mathbb{1}\left(x_k \leq a_j\right) = 1 \\ \mathbb{1}\left(x_k \leq a_{j-1}\right) = 0 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k \leq a_j \\ x_k > a_{j-1} \\ a_j \geq a_{j-1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_{j-1} < x_k \leq a_j$$

Вспомним формулу (1.2)

$$F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right) = \\ = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\mathbb{1}\left(x_k \leq a_j\right) - \mathbb{1}\left(x_k \leq a_{j-1}\right)\right]$$

Очевидно, что нас интересуют те пары, разность которых не равна нулю. Это значит, что те случаи, когда $x > a_j$ или $x \leq a_{j-1}$, нас не интересуют. Поскольку такой случай, что $a_j < x \leq a_{j-1}$ невозможен, то его тоже отбросим. Значит, остался только тот вариант, когда x попадает в полуинтервал $(a_{j-1}, a_j]$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\mathbb{1}\left(x_k \leq a_j\right) - \mathbb{1}\left(x_k \leq a_{j-1}\right)\right] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \in (a_{j-1}, a_j]\right)$$

Видим знакомые полуинтервалы $(a_{j-1}, a_j] = I_j$. Воспользуемся этим

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \in (a_{j-1}, a_j]\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \in I_j\right)$$

Получаем компактную запись для разности функций распределения

$$F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \in I_j\right) \tag{1.3}$$

Вернёмся к уравнению (1.1)

$$q_n\left(y\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right)}{a_j - a_{j-1}} \cdot \mathbb{1}\left(y \in I_j\right)$$

Воспользовавшись тем, что $(a_j - a_{j-1})$ — длина полуинтервала I_j, а разность $F_n\left(a_j\right) - F_n\left(a_{j-1}\right)$ была только что переписана через индикаторы, получаем такую формулу

$$q_n\left(y\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \in I_j\right) \cdot \frac{1}{|I_j|} \cdot \mathbb{1}\left(y \in I_j\right)$$

Упростим, введя функцию $\nu_j\left(X\right)$ [1, стр. 68], которая считает количество элементов выборки $X = x_1, \ldots, x_n$, попавших в интервал I_j. Это будет сумма индикаторов того, что элемент x_k попал в I_j

$$\nu_j\left(X\right) = \sum_{x \in X} \mathbb{1}\left(x \in I_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\left(x_k \in I_j\right)$$

Поскольку $\mathbb{1}\left(y \in I_j\right)$ зависит от j и не зависит от k, то его можно перенести во внешнюю сумму. Получаем следующую формулу

$$q_n\left(y\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbb{1}\left(y \in I_j\right)}{n \cdot |I_j|} \cdot \nu_j\left(X\right)$$

У этой суммы только один ненулевой элемент, так как y может попасть только в один полуинтервал. Тогда обозначим номер отрезка, в который попал y, через k $(y \in I_k)$, а функцию $q_n\left(y\right)$ запишем как q_n^k

$$q_n^k = \frac{\nu_k\left(X\right)}{n \cdot |I_k|} \tag{1.4}$$

Что мы тут видим? Теперь k — номер "столбика" гистограммы (номер интересующего нас полуинтервала — того, в который попал y).

"Высота" столбика (значение функции на определённом полуинтервале) пропорциональна количеству элементов, попавших в этот отрезок (что логично). Кроме того, происходит деление на общее количество элементов. Деление нужно, чтобы $q\left(y\right)$ сходилось к $p\left(y\right)$.

Делителю же $|I_k|$ отведена особая роль — он предотвращает искажение гистограммы при различных длинах отрезков. То есть, чем длиннее отрезок, тем ниже столбик, так как элементы более "размазаны" по отрезку, что тоже логично.

Представим, что значение функции — это высоту прямоугольника, а длина отрезка — его ширина (графически это изображается именно так). Тогда отношение количества элементов, попавших в полуинтервал, к количеству всех элементов выборки (вероятность того, что случайно взятый элемент из выборки попадёт в k-ый отрезок [1, стр. 24]), является площадью прямоугольника

$$S_k = \frac{\nu_k(X)}{n} = \mathbb{P}_n(x \in I_k)$$

Введём замену в формуле (1.4) и умножим обе части на длину отрезка

$$\mathbb{P}_n(x \in I_k) = q_n^k \cdot |I_k|$$

Если устремить количество полуинтервалов к бесконечности ($m \to \infty$), то каждый полуинтервал будет сжиматься в точку. При этом вероятность попадения x в отрезок будет стремиться к вероятности попадения x в точку y. Введём обозначения $|I_j| = \delta$, $I_j = \Delta_y$

$$\mathbb{P}_n(x = y) \approx \mathbb{P}_n(x \in \Delta_y) = q_n(y) \cdot \delta, \qquad m \to \infty$$

Очень напоминает ситуацию с плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ

$$\mathbb{P}(\xi = x) \approx p(x) \cdot \delta, \qquad \delta \to 0$$

Нужно отметить, что количество элементов выборки должно стремиться к бесконечности ($n \to \infty$), так как плотность может быть лишь у непрерывных случайных величин. Чем больше будет элементов, тем плотнее они будут стоять на числовой прямой.

1.1.3 Оценка неизвестных параметров

Снова у нас есть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения F_θ, где θ — неизвестный параметр из множества Θ

Пример 1.1.1. Имеем нормальное распределение с известным СКО $\sigma = 1$ и неизвестным математическим ожиданием a — $N(a, 1)$. Тогда θ — математическое ожидание a

Пример 1.1.2. Есть нормальное распределение, в котором неизвестны оба параметра. Тогда θ будет парой (a, σ)

Главный вопрос — определение основных параметров распределения выборки.

Определение 1.1.2 (Статистика)**.** Статистикой называют функцию S от выборки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$S(X) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Определение 1.1.3 (Оценка)**.** Статистику, значение которой заменяет неизвестный параметр, называют оценкой

Пример 1.1.3. Предположим, что выборка сделана из распределения Бернулли, то есть $\{x_i\}$ — набор одинаково распределённых случайных величин, причём

$$x_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

Тогда неизвестный параметр — величина p (вероятность удачного эксперимента)

$$\theta = p \in [0;1] = \Theta$$

Введём разные оценки $\hat{p}$

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$
$$\hat{p}_2 = x_1$$
$$\hat{p}_3 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_k$$

Замечание: Поскольку $\hat{p}$ — случайная величина, то может оказаться, что она не равна настоящему параметру p

$$\mathbb{P}\{\hat{p} = p\} = 0$$

1. Возникает мысль о том, что разность $\hat{p} - p$ должна быть "маленькой". Например, чтобы $M(\hat{p}-p)^2$ было самое маленькое из возможных.

2. Также логично желать того, чтобы оценка $\hat{p}$ сходилась к истинному значению параметра p по вероятности ($\hat{p} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p$) или почти всюду ($\hat{p} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} p$)

3. При многократном повторении эксперимента даже самая (на первый взгляд) плохая оценка может оказаться полезной

$$M\hat{p}_1 = p$$
$$M\hat{p}_2 = p$$
$$M\hat{p}_3 = p$$

   Например, если целый год каждый день дают набор чисел, а статистик считает значение параметра p с помощью оценки $\hat{p_2}$, то в среднем за год у него получится величина, близкая к истинному p.

Определение 1.1.4 (Состоятельная оценка)**.** Оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если стремится к истинному значению θ по вероятности

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta$$

Определение 1.1.5 (Сильно состоятельная оценка)**.** Оценка $\hat{\theta}$ называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению θ почти наверное

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \theta$$

Пример 1.1.4. Оценка $\hat{p}_1$ из прошлого примера является сильно состоятельной.

Определение 1.1.6 (Несмещённая оценка)**.** Оценка $\hat{\theta}$ несмещённая, если

$$\forall\theta \in \Theta : M_\theta\hat{\theta} = \theta$$

Замечание 1. *Несмещённая оценка существует не всегда*

Определение 1.1.7. Несмещённая оценка $\hat{\theta} \in K$ называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок K, если для всякой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta} \in K$

$$D_\theta\hat{\theta} \le D_\theta\tilde{\theta}, \qquad \forall\theta \in \Theta$$

или же

$$M_\theta\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 \le M_\theta\left(\tilde{\theta} - \theta\right)^2, \qquad \forall\theta \in \Theta$$

Замечание 2. *В учебнике Боровкова А. А. “Математическая статистика” оценка, удовлетворяющая этим условиям, носит название* ***эффективная оценка*** *[1, стр. 130], но у нас этот термин будет использоваться далее в другом смысле*

Пример 1.1.5. Сравним $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_3$

$$D_p\hat{p}_1 = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot p\cdot(1-p) = \frac{p\cdot(1-p)}{n}$$
$$D_p\hat{p}_3 = \frac{2\cdot p\cdot(1-p)}{n}$$

1.1.4 Выборочные оценки. Метод моментов

Как восстановить неизвестный параметр $\theta \in \Theta$ из функции распределения $F_\theta(x)$?

Вспомним распределения и их параметры

1. Нормальное распределение $N\left(a, \sigma^2\right)$. В нём параметр a является средним, а параметр σ^2 — дисперсией

2. Пуассоновское распределение $Poi\left(\lambda\right)$. Тут параметр λ является и средним, и дисперсией

3. Экспоненциальное распределение $Exp\left(\lambda\right)$. $\dfrac{1}{\lambda}$ — среднее, $\dfrac{1}{\lambda^2}$ — дисперсия

И так далее...

Как правило, неизвестный параметр θ можно искать следующим образом

$$\exists \varphi \in C(\mathbb{R}) : \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_\theta(x) = g(\theta)$$

Значит, у нас есть уравнение для поиска оценки $\hat{\theta}$ при непрерывной и монотонной $g\left(\hat{\theta}\right)$

$$g\left(\hat{\theta}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x) \tag{1.5}$$

Пример 1.1.6. Если θ — среднее, то $\varphi(x) = x$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_\theta(x) = \theta = g(\theta)$$

Теорема 1.1.2. *Пусть функция $\varphi(x)$ в (1.5) непрерывна, ограничена и строго монотонная. Тогда оценка $\hat{\theta}$ существует и является сильно состоятельной.*

Доказательство. Имеем формулу (1.5)

$$g\left(\hat{\theta}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x)$$

Поскольку функция $g\left(\hat{\theta}\right)$ непрерывна и монотонна, то она имеет обратную функцию $g^{-1} : g^{-1}\left(g\left(\hat{\theta}\right)\right) = \hat{\theta}$.

Применим обратную функцию к обеим частям уравнения

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x)\right)$$

Поскольку выборочная функция распределения почти всюду равна неизвестной функции распределения при достаточно большом объёме выборки, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x)$$

Функция $g^{-1}(x)$ непрерывна

$$\hat{\theta} = g^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} g^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dF_n(x)\right) = \theta$$

Теорема доказана

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \theta$$

□

Определение 1.1.8 (Выборочное среднее)**.** Выборочное средние обозначается через $\overline{x}$ и считается по следующей формуле

$$\overline{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$$

Поскольку все элементы выборки равновероятны, получаем математическое ожидание дискретной равномерно распределённой случайной величины, принимающей n значений

$$\overline{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Определение 1.1.9 (Выборочная дисперсия)**.** Выборочная дисперсия $\overline{\sigma^2}$ считается формуле

$$\overline{\sigma^2} = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - \overline{x})^2 \, dF_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2$$

1.2 Свойства оценок

1.2.1 Неравенство Рао-Крамера

Теорема 1.2.1 (Колмогорова)**.** *Оптимальная оценка единственная или её нет вообще*

Доказательство. Допустим, есть две разные оптимальные и несмещённые оценки θ_1 и θ_2. Тогда по определению для любой несмещённой оценки $\hat{\theta}$ будет

$$\begin{cases} D_\theta \theta_1 \le D_\theta \hat{\theta} \\ D_\theta \theta_2 \le D_\theta \hat{\theta} \end{cases}, \forall \theta \in \Theta$$

Поскольку неравенство выполняется для каждой несмещённой оценки $\hat{\theta}$, а оценки θ_1 и θ_2 являются несмещёнными, то можем их и поставить в неравенство в роли $\hat{\theta}$

$$\begin{cases} D_\theta \theta_1 \le D_\theta \theta_2 \\ D_\theta \theta_2 \le D_\theta \theta_1 \end{cases}, \forall \theta \in \Theta$$

А это возможно только если дисперсии этих оценок равны. Обозначим эту дисперсию через $\sigma^2(\theta)$

$$D_\theta \theta_1 = D_\theta \theta_2 = \sigma^2(\theta)$$

Возьмём несмещённую оценку $\tilde{\theta}$, равную среднеарифметическому оценок θ_1 и θ_2

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \theta_1 + \frac{1}{2} \cdot \theta_2$$

Тогда по определению θ_1 и θ_2 получаем, что дисперсия новой оценки не меньше, чем у оптимальных

$$D_\theta \tilde{\theta} \geq \sigma^2(\theta) \tag{1.6}$$

Попробуем честно вычислить дисперсию оценки $\tilde{\theta}$

$$\begin{aligned} D_\theta \tilde{\theta} = M_\theta \left(\tilde{\theta} - \theta\right) = M_\theta \left[\frac{1}{2} \cdot (\theta_1 - \theta) + \frac{1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta)\right]^2 = \\ = \frac{1}{4} \cdot D_\theta \theta_1 + \frac{1}{4} \cdot D_\theta \theta_1 + \frac{1}{2} \cdot M_\theta \left[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)\right] \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши (частный случай неравенства Гёльдера)

$$\begin{aligned} M_\theta \left[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)\right] \leq \sqrt{M_\theta \left(\theta_1 - \theta\right)^2 \cdot M_\theta \left(\theta_2 - \theta\right)^2} = \\ = \sqrt{D_\theta \theta_1 \cdot D_\theta \theta_2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

И вернёмся к вычислению дисперсии оценки $\tilde{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot D_\theta \theta_1 + \frac{1}{4} \cdot D_\theta \theta_1 + \frac{1}{2} \cdot M_\theta \left[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)\right] \leq \\ \leq \frac{1}{2} \cdot \sigma^2(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2(\theta) \cdot \sigma^2(\theta)} = \sigma^2(\theta) \end{aligned}$$

То есть, дисперсия оценки $\tilde{\theta}$ не больше дисперсии введённой оптимальной оценки

$$D_\theta \tilde{\theta} \leq \sigma^2(\theta) \tag{1.8}$$

Воспользовавшись неравенствами (1.6) и (1.8), получаем равенство

$$D_\theta \tilde{\theta} = \sigma^2(\theta)$$

Это значит, что в неравенстве (1.7) в данном случае тоже выходит равенство

$$M_\theta \left[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)\right] = \sqrt{M_\theta \left(\theta_1 - \theta\right)^2} \cdot \sqrt{M_\theta \left(\theta_2 - \theta\right)^2}$$

Для дальнейших размышлений вспомним аналогию с векторами, а именно смысл равенства в неравенстве Коши для скалярного произведения векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \sqrt{\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\vec{b}^2} \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей только тогда, когда они сонаправлены

$$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\vec{b}^2}$$

Положим математическое ожидание нормой, а $\theta_1 - \theta$ и $\theta_2 - \theta$ векторами пространства случайных событий. Получаем, что нормы и направления этих векторов совпадают

$$M_\theta \left[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta) \right] = \sqrt{M_\theta \left(\theta_1 - \theta\right)^2} \cdot \sqrt{M_\theta \left(\theta_2 - \theta\right)^2}$$
$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \widehat{\theta, \theta_2} - \theta\right)$$

Это значит, что они равны, что противоречит предположению о том, что они разные

$$\begin{cases} \left(\theta_1 - \widehat{\theta, \theta_2} - \theta\right) = 0 \\ M_\theta \left(\theta_1 - \theta\right)^2 = M_\theta \left(\theta_2 - \theta\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 - \theta = \theta_2 - \theta$$
$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

Теорема доказана □

Для дальнейших действий будем считать, что функция распределения $F_\theta(x)$ имеет плотность $p(x, \theta)$, которая дважды дифференцируема по θ. То есть её можно дифференцировать под знаком интеграла.

Также отметим, что выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ имеет плотность распределения, так как является случайным вектором в $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого — случайные величины.

Определение 1.2.1 (Функция правдоподобия)**.** Плотность распределения вектора независимых случайных величин, равная произведению плотностей распределения его компонент, называется функцией правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k, \theta)$$

Прологарифмировав функцию правдоподобия, получим симпатичную сумму

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln p(x_k, \theta)$$

А симпатична она тем, что это сумма незасимых одинаково распределённых случайных величин. Воспользовавшись законом больших чисел, можем сказать, что она стремится к сумме n одинаковых математических ожиданий при достаточно большом размере выборки

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \frac{\ln p(x_1, \theta) + \cdots + \ln p(x_n, \theta)}{n} \approx$$
$$\approx n \cdot M_\theta \ln p(x_1, \theta)$$

Проблема в том, что мы не знаем среднего. Для разрешения этого вопроса введём ещё одно определение

Определение 1.2.2 (Вклад выборки)**.** Ваклад выборки — частная производная по параметру θ от логарифма функции правдоподобия

$$U(\vec{x},\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\vec{x},\theta) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\ln p(x_k,\theta) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}L(\vec{x},\theta)}{L(\vec{x},\theta)}$$

Замечание 3. *Математическое ожидание вклада выборки равно нулю*

$$M_\theta U(\vec{x},\theta) = 0$$

Доказательство. Посчитаем математическое ожидание вклада выборки

$$M_\theta U(\vec{x},\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} U(\vec{u},\theta)\cdot L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}L(\vec{x},\theta)}{L(\vec{x},\theta)}\cdot L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\theta}L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u}$$

Воспользовавшись предположением о том, что функция распределения дважды дифференцируема, вынесем взятие производной за знак интеграла

$$M_\theta U(\vec{x},\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u}$$

Поскольку интегрируем плотность распределения случайного вектора по всему пространству, то он равен единице. Производная же от единице равна нулю. Это значит, что математическое ожидание вклада выборки равно нулю

$$M_\theta U(\vec{x},\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u} = \frac{\partial}{\partial\theta}1 = 0$$

□

Замечание 4. *Частная производная по оценке θ от функции правдоподобия $L(\vec{u},\theta)$ равна нулю.*

Доказательство. Выше у нас было равенство

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u} = 0$$

Так как производную можем заносить под знак интеграла (согласно нашему предположению), то получаем такое равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\theta}L(\vec{u},\theta)\,d\vec{u} = 0$$

Поскольку интеграл не зависит от θ, то такое возможно лишь в том случае, когда производная равна нулю

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L\left(\vec{u},\theta\right) = 0$$

□

Определение 1.2.3 (Количество информации Фишера)**.** Математическое ожидание квадрата вклада выборки называется количеством информации Фишера

$$I_n\left(\theta\right) = M_\theta U\left(\vec{x},\theta\right)^2$$

Замечание 5.

$$M_\theta U\left(\vec{x},\theta\right)^2 = -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\left(\vec{x},\theta\right)$$

Доказательство. Будем доказывать справа налево

$$-M_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\left(\vec{x},\theta\right) = -M_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} L\left(\vec{x},\theta\right)}{L\left(\vec{x},\theta\right)} =$$

$$= -M_\theta \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} L\left(\vec{x},\theta\right) \cdot L\left(\vec{x},\theta\right) - \left[\frac{\partial}{\partial\theta} L\left(\vec{x},\theta\right)\right]^2}{L\left(\vec{x},\theta\right)^2} \right) =$$

$$= -M_\theta \frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} L\left(\vec{x},\theta\right)}{L\left(\vec{x},\theta\right)} + M_\theta \left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} L\left(\vec{x},\theta\right)}{L\left(\vec{x},\theta\right)} \right]^2$$

Помним, что производная от функции правдоподобия по θ равна нулю. Значит вторая производная тоже равна нулю и остаётся лишь математическое ожидание квадрата, который равен квадрату производной логарифма функции правдоподобия, что в свою очередь и есть вклад выборки

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L\left(\vec{u},\theta\right) = 0 \Rightarrow -M_\theta \frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} L\left(\vec{x},\theta\right)}{L\left(\vec{x},\theta\right)} = 0$$

$$\Rightarrow -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\left(\vec{x},\theta\right) = M_\theta \left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} L\left(\vec{x},\theta\right)}{L\left(\vec{x},\theta\right)} \right]^2 =$$

$$= M_\theta \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L\left(\vec{x},\theta\right) \right]^2 = M_\theta U\left(\vec{x},\theta\right)^2$$

Утверждение доказано

$$M_\theta U\left(\vec{x},\theta\right)^2 = -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\left(\vec{x},\theta\right)$$

□

Количество информации позволяет оценить точность, с которой можем получить параметр θ

Теорема 1.2.2 (Неравенство Рао-Крамера)**.** *Пусть $\hat{\theta}$ — несмещённая оценка параметра θ. Тогда имеет место неравенство*

$$\forall\theta \in \Theta : D_\theta \hat{\theta} \geq \frac{1}{I_n\left(\theta\right)}$$

Доказательство. Выпишем, чему равно математическое ожидание оценки θ

$$\begin{cases} M_\theta \hat{\theta} & = \theta \\ M_\theta \hat{\theta} & = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u}$$

Продифференцируем с двух сторон полученное для θ равенство по самому параметру θ

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u}$$

Левая часть равенства превращается в единицу, а справа заносим взятие производной под знак интеграла. Также помним, что оценка $\theta\left(\vec{u}\right)$ не зависит от параметра θ. Это значит, что производную нужно брать только от функции правдоподобия

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u}$$

Далее нам нужно получить вклад выборки. Для этого умножим и поделим подинтегральное выражение на функцию правдоподобия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L\left(\vec{u}, \theta\right)}{L\left(\vec{u}, \theta\right)} \cdot L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u}$$

Видим, что дробь под интегралом — производная логарифма функции правдоподобия, которая является вкладом выборки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L\left(\vec{u}, \theta\right)}{L\left(\vec{u}, \theta\right)} \cdot L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\left(\vec{u}\right) \cdot U\left(\vec{x}, \theta\right) \cdot L\left(\vec{u}, \theta\right) d\vec{u}$$

У нас есть математическое ожидание произведения оценки и вклада выборки, которое равно единице

$$1 = M_\theta \left(\hat{\theta} \cdot U\left(\vec{x}, \theta\right)\right) \tag{1.9}$$

Помним, что математическое ожидание вклада выборки равно нулю. Значит, умножение его на константу ничего не меняет

$$\begin{aligned} M_\theta U\left(\vec{x}, \theta\right) &= 0 \\ \Rightarrow \theta \cdot M_\theta U\left(\vec{x}, \theta\right) = M_\theta \left(\theta \cdot U\left(\vec{x}, \theta\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Воспользовавшись полученным результатом, вернёмся к равенству (1.9). Отнимем от обеих частей ноль (то есть, полученное только что выражение)

$$1 = M_\theta \left(\hat{\theta} \cdot U(\vec{x}, \theta)\right) - M_\theta \left(\theta \cdot U(\vec{x}, \theta)\right)$$

Получаем компактное равенство

$$1 = M_\theta \left[\left(\hat{\theta} - \theta\right) \cdot U(\vec{x}, \theta)\right]$$

Воспользовавшись неравенством Коши, узнаём, произведение корней дисперсии и количества информации больше, чем единица

$$\begin{aligned} 1 &= M_\theta \left[\left(\hat{\theta} - \theta\right) \cdot U(\vec{x}, \theta)\right] \leq \\ &\leq \sqrt{M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta\right)} \cdot \sqrt{M_\theta U(\vec{x}, \theta)} = \\ &= \sqrt{D_\theta \hat{\theta}} \cdot \sqrt{I_n(\theta)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Возводим обе части равенства в квадрат и делим на количество информации

$$D_\theta \hat{\theta} \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Неравенство доказано □

Замечание 6. *Иногда нужно оценивать не сам параметр, а функцию параметра*

Если α — несмещённая оценка для $f(\theta)$, то справедливо следующее неравенство

$$\forall \theta \in \Theta : D_\theta \alpha \geq \frac{|f'(\theta)|}{I_n(\theta)}$$

1.2.2 Метод максимального правдоподобия

У нас есть нижняя оценка точности, с которой можно отыскать желаемую оценку, а это значит, что точнее определить просто не получится и нужно стремиться к равенству в неравенстве Рао-Крамера.

Определение 1.2.4 (Эффективная оценка)**.** Оценка $\hat{\theta}$, для которой в неравенстве Рао-Крамера стоит равенство, называется эффективной

$$\forall \theta \in \Theta : D_\theta \hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Попытаемся выяснить, какими свойствами должна обладать плотность, чтобы можно было получить эффективную оценку. Для этого в неравенстве Рао-Крамера нужно рассмотреть случай равенства (так как в этом случае оценка будет самой точной)

$$D_\theta \hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Рассмотрим неравенство (1.10) и попытаемся понять, в каком случае в нём будет стоять знак равенства

$$
\begin{aligned}
1 = M_\theta \left[\left(\hat{\theta} - \theta \right) \cdot U(\vec{x}, \theta) \right] = \\
= \sqrt{M_\theta \left(\hat{\theta} - \theta \right)^2} \cdot \sqrt{M_\theta U(\vec{x}, \theta)^2}
\end{aligned}
$$

Снова проводим аналогию с векторами и видим, что скалярное произведение (математическое ожидание произведения) векторов (функций от параметра θ: $f_1(\theta) = \hat{\theta} - \theta$ и $f_2(\theta) = U(\vec{x}, \theta)$) равно произведению их норм (корней квадратов математических ожиданий).

Это в свою очередь означает, что "угол" между этими векторами (функциями) равен нулю и эти функции являются линейными комбинациями друг друга. Значит, есть такая функция $k(\theta)$, что $f_2(\theta)$ равняется произведению $f_1(\theta)$ и $k(\theta)$.

$$
\begin{aligned}
U(\vec{x}, \theta) &= \left(\hat{\theta} - \theta \right) \cdot k(\theta) \\
\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\vec{x}, \theta) &= \hat{\theta} \cdot k(\theta) - \theta \cdot k(\theta) \\
\partial \ln L(\vec{x}, \theta) &= \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot k(\theta) \cdot \partial\theta - \theta \cdot k(\theta) \cdot \partial\theta
\end{aligned}
$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$
\int \partial \ln L(\vec{x}, \theta) = \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot \int k(\theta)\, \partial\theta - \int \theta \cdot k(\theta)\, \partial\theta
$$

Получим следующее равенство

$$
\ln L(\vec{x}, \theta) + c_1(\vec{x}) = \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot [a(\theta) + c_2] - [b^*(\theta) + c_3]
$$

Сгруппируем константы и введём замену $b(\theta) = -b^*(\theta)$

$$
\ln L(\vec{x}, \theta) = \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot a(\theta) + b(\theta) + c(\vec{x})
$$

Избавимся от логарифма слева, а для этого проэкспонируем обе части равенства

$$
L(\vec{x}, \theta) = \exp\left\{ \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot a(\theta) + b(\theta) + c(\vec{x}) \right\}
$$

При конечном n положим такую плотность распределения

$$
p(x_1, \theta) = \exp\left\{ \hat{\theta}(x_1) \cdot a_1(\theta) + b_1(\theta) + c_1(x_1) \right\}
$$

В таком случае получим следующую функцию правдоподобия

$$
\begin{aligned}
L(\vec{x}, \theta) = \prod_{k=1}^{n} p(x_1, \theta) = \\
= \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \hat{\theta}(x_k) \cdot a_1(\theta) + n \cdot b_1(\theta) + \sum_{k=1}^{n} c_1(x_k) \right\}
\end{aligned}
$$

Отметим, что в этом случае оценка $\hat{\theta}(\vec{x})$ является суммой оценок по каждой координате (случайной величине)

$$\hat{\theta}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\theta}(x_k)$$

Определение 1.2.5 (Экспоненциальное распределение)**.** Распределения следующего вида называются экспоненциальными

$$p(x, \theta) = \exp\left\{\hat{\theta}(x) \cdot a(\theta) + b(\theta) + c(x)\right\}$$

Попробуем найти рецепт выяснения эффективной оценки. Начнём с примера

Пример 1.2.1. Есть выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $N(\theta, 1)$. Тогда плотность распределения k-ой случайной величины будет следующей

$$p(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot exp\left\{-\frac{(x_k - \theta)^2}{2}\right\}$$

Её логарифм, очевидно, имеет такой вид

$$\ln p(x_k) = \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \frac{(x_k - \theta)^2}{2}$$

Теперь выпишем логарифм функции правдоподобия

$$\begin{aligned}\ln L(\vec{x}, \theta) &= \sum_{k=1}^{n} \ln p(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \theta)^2}{2} = \\ &= n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \theta)^2}{2}\end{aligned}$$

Раскроем скобки

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \theta - \frac{n \cdot \theta^2}{2}$$

Воспользуемся формулой для несмещённой (ещё и эффективной) оценки среднего

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \theta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \theta \cdot n = \overline{x} \cdot \theta \cdot n$$

$$\Rightarrow \ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{2} + \overline{x} \cdot \theta \cdot n - \frac{n \cdot \theta^2}{2}$$

Сгруппировав множители n, получаем

$$\ln L(\vec{x},\theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{2} - n \cdot \frac{\theta^2 - 2\cdot\overline{x}\cdot\theta}{2}$$

Добавим и отнимем в числителе дроби выборочное среднее

$$\ln L(\vec{x},\theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{2} - n \cdot \frac{\theta^2 - 2\cdot\overline{x}\cdot\theta + \left(\overline{x}^2 - \overline{x}^2\right)}{2}$$

Теперь в числителе очевиден квадрат разности

$$\ln L(\vec{x},\theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{2} + n \cdot \frac{\overline{x}^2}{2} - n \cdot \frac{\theta^2 - 2\cdot\overline{x}\cdot\theta + \overline{x}^2}{2}$$

Записываем квадрат разности короче, а выборочное средние вносим под знак суммы

$$\ln L(\vec{x},\theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 - \overline{x}^2}{2} - n \cdot \frac{(\theta - \overline{x})^2}{2}$$

Видим, что последнее вычитаемое не может быть отрицательным, а когда оценка θ равна выборочному среднему, то последнее слагаемое обращается в нуль, а сама функция правдоподобия в таком случае принимает максимальное значение.

Делаем предположение о том, как находить наилучшую оценку

$$Q_* = \arg\max_{\theta} \ln L(\vec{x},\theta)$$

Оказывается, именно так она и находится.

Определение 1.2.6 (Оценка максимального правдоподобия)**.** Оценка максимального правдоподобия θ_* — такое значение параметра θ, при котором функция правдобободобия достигает своего максимального значения

$$Q_* = \arg\max_{\theta} \ln L(\vec{x},\theta)$$

Замечание 7. *Оценок маесимального правдоподобия может быть несколько, а может не существовать ни одной.*

Определение 1.2.7 (Уравнение правдоподобия)**.** Уравнением правдоподобия называется равенство вида

$$U(\vec{x},\theta) = 0$$

Или же

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\vec{x},\theta) = 0$$

Замечание 8. *В гладком случае оценку θ_* можно искать с помощью уравнения правдоподобия. Тем не менее, нужно помнить, что равенство первой производной нулю является лишь необходимым условием максимума, поэтому полученные результаты необходимо проверять.*

Определение 1.2.8 (Вариационный ряд)**.** Вариационный ряд выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значения выборки, упорядоченные в порядке неубывания

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}, x_{(1)} = \min_k x_k$$

Теорема 1.2.3. *Если плотность $p\,(x,\theta)$ непрерывна и дифференцируема по параметру θ, а производная не равна нулю $\dfrac{\partial}{\partial\theta}p\,(x,\theta) \neq 0$, то оценка максимального правдоподобия состоятельна*

Глава 2

Достаточные статистики

2.1 Оптимальная оценка

Определение 2.1.1 (Симметризация)**.** Симметризация Λ оценки $\hat{\theta}$ — среднее оценок $\hat{\theta}$ для всевозможных перестановок $\sigma \in S_n$ элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Lambda\hat{\theta} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)$$

Лемма 2.1.1. *Для произвольной несмещённой оценки $\hat{\theta}$ её симметризация $\Lambda\hat{\theta}$ не хуже её самой в среднем квадратическом*

$$M_\theta\hat{\theta} = \theta \Rightarrow \begin{cases} M_\theta\Lambda\hat{\theta} = M_\theta\hat{\theta} = \theta \\ D_\theta\Lambda\hat{\theta} \le D_\theta\hat{\theta} \end{cases}$$

Доказательство. Берём $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Введём обозначения для более короткой записи используемых в доказательстве случайных векторов.

Вектор, состоящий из элементов выборки в их изначальном порядке, обозначим привычным $\vec{x}$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}$$

Вектор, состоящий из элементов, изменивших своё местоположение под влиянием перестановки σ (значение которой будет ясно из контекста), будем обозначать через $\vec{x}_\sigma$

$$\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \vec{x}_\sigma$$

Тогда и оценки примут более красивый вид

$$\hat{\theta}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \hat{\theta}\left(\vec{x}\right)$$
$$\hat{\theta}\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right)$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству.

1. Начнём с первого пункта — докажем несмещённость симметризации оценки $\hat{\theta}$.

   Нетрудно показать, что вектора $\vec{x}$ и $\vec{x}_\sigma$ имеют одинаковое распределение для любой перестановки σ, а это значит, что и оценки $\hat{\theta}\left(\vec{x}\right)$ и $\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right)$ распределены одинаково как функции случайных одинаково распределённых векторов. Следовательно, их математические ожидания равны между собой при любой перестановке σ

   $$M_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}\right) = M_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) = \theta$$

   Посчитаем математическое ожидание симметризации оценки $\hat{\theta}$

   $$M_\theta \Lambda \hat{\theta} = M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) \right\}$$

   Помним, что математическое ожидание линейно и константы можно выносить за знак математического ожидания, а математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий

   $$M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) \right\} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} M_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right)$$

   Не забываем, что математическое ожидание оценки любого вектора $\vec{x}_\sigma$ одинаково и равно параметру θ

   $$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} M_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \theta$$

   Сумма имеет $n!$ слагаемых (количество перестановок $\sigma \in S_n$)

   $$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \theta = \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot \theta = \theta$$

   А это значит, что первый пункт доказан и симметризация несмещённой оценки $\hat{\theta}$ действительно несмещённая

   $$M_\theta \Lambda \hat{\theta} = \theta$$

2. Теперь посмотрим, чему равна дисперсия симметризации оценки $\hat{\theta}$

   Воспользуемся определением

   $$D_\theta \Lambda \hat{\theta} = M_\theta \left(\Lambda \hat{\theta} - \theta\right)^2 = M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right\}^2$$

Внесём параметр θ в сумму. Для этого нужно умножить и поделить его на $n!$ (так как сумма имеет $n!$ слагаемых)

$$M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right\}^2 =$$

$$= M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot \theta \right\}^2 =$$

$$= M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - n! \cdot \theta \right) \right\}^2 =$$

$$= M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right) \right\}^2 =$$

$$= M_\theta \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right) \right\}^2$$

Вспомним неравенство Йенсена для выпуклой функции f

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \cdot x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot f\left(x_i\right), \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

В нашем случае $x_i = \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_{\sigma_i}\right) - \theta \right)$, функция $f\left(x\right) = x^2$, сумма проходит по всевозможным перестановкам σ, а роль q_i выполняет $\dfrac{1}{n!}$, так как

$$\sum_{\sigma \in S_n} q_i = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} = n! \cdot \frac{1}{n!} = 1$$

Перепишем неравенство Йенсена для нашего случая

$$M_\theta \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right) \right\}^2 \leq M_\theta \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right)^2 \tag{2.1}$$

Воспользуемся линейностью математического ожидания, внеся его под знак суммы

$$M_\theta \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right)^2 = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} M_\theta \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right)^2$$

Видим сумму дисперсий. Дисперсии одинаковы, так как оценки имеют одинаковые распределения

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} M_\theta \left(\hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) - \theta \right)^2 = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} D_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}_\sigma\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} D_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot D_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}\right) = D_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}\right)$$

Из неравенства Йенсена (2.1) видим, что дисперсия симметризации не хуже дисперсии самой оценки

$$D_\theta \Lambda \hat{\theta} \leq D_\theta \hat{\theta}\left(\vec{x}\right)$$

То есть, симметризация не ухудшает оценку, а в общем случае (когда неравенство строгое) даже делает её лучше. □

Замечание 9. *Равенство в неравенстве Йенсена (в доказательстве выше) возможно только в случае симметричной функции. Значит, в качестве оценки достаточно брать только симметричные функции выборки*

Определение 2.1.2 (Функция вариационного ряда)**.** Если оценка $\hat{\theta}$ симметрична относительно перестановок аргументов, то она является функцией вариационного ряда

Замечание 10. *Все оценки, которые претендуют быть оптимальными, должны быть функциями вариационного ряда*

2.2 σ-алгебра, порождённая случайной величиной

Имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, также есть функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что связанные с ней множества измеримы по Лебегу

$$\{\omega \mid \xi\left(\omega\right) < c\} \in \mathfrak{F}, c \in \mathbb{R}$$

Но это будет неудобно при использовании, поэтому возьмём борелевские подмножества $\mathfrak{B}$ множества $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \supset \mathfrak{B} \ni \Delta : \xi^{-1}\left(\Delta\right) \in \mathfrak{F}$$

Рассмотрим более подробно, что же означает запись $\xi^{-1}\left(\Delta\right)$

$$\xi^{-1}\left(\Delta\right) = \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta\}, \qquad \Delta \in \mathfrak{B}, \omega \in \Omega$$

Определение 2.2.1 (Сигма-алгебра, порождённая случайной величиной)**.** $\mathfrak{F}_\xi = \sigma\left(\xi\right)$ — σ-алгебра, порождённая случайной величиной ξ

$$\mathfrak{F}_\xi = \left\{\xi^{-1}\left(\Delta\right) \mid \Delta \in \mathfrak{B}\right\}$$

Из курса теории вероятностей помним лемму, которая утверждает, что ξ — случайная величина тогда и только тогда, когда

$$\forall \Delta \in \mathfrak{B} : \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta\} = \{\xi \in \Delta\} = \xi^{-1}\left(\Delta\right) \in \mathfrak{F}$$

А это значит, что все элементы σ-алгебры $\mathfrak{F}_\xi$ входят в σ-алгебру $\mathfrak{F}$, а сама $\mathfrak{F}_\xi$ является подмножеством $\mathfrak{F}$

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_\xi = \left\{\xi^{-1}\left(\Delta\right) \mid \Delta \in \mathfrak{B}\right\} \\ \forall \Delta \in \mathfrak{B} : \xi^{-1}\left(\Delta\right) \in \mathfrak{F} \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{F}_\xi \subset \mathfrak{F}$$

Проверим, что $\mathfrak{F}_\xi$ действительно является σ-алгеброй

1. Множество элементарных исходов Ω входит в $\mathfrak{F}_\xi$. Поскольку случайная величина ξ принимает действительные значения, то прообраз множества действительных чисел $\mathbb{R}$ и будет множеством элементарных исходов Ω. А поскольку $\mathbb{R}$ принадлежит борелевской σ-алгебре, то его прообраз по определению принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{F}_\xi$

$$\begin{cases} \xi^{-1}\left(\Delta \in \mathfrak{B}\right) \in \mathfrak{F} \\ \mathbb{R} \in \mathfrak{B} \\ \xi^{-1}\left(\mathbb{R}\right) = \Omega \end{cases} \qquad \Rightarrow \Omega \in \mathfrak{F}_\xi$$

2. Если событие A принадлежит $\mathfrak{F}_\xi$, то его дополнение $\overline{A}$ тоже принадлежит $\mathfrak{F}_\xi$

$$\begin{aligned} A = \xi^{-1}\left(\Delta\right) = \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta\} \\ \Rightarrow \overline{A} = \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \notin \Delta\} = \left\{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \overline{\Delta}\right\} \\ \overline{A} = \xi^{-1}\left(\overline{\Delta}\right) \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{B}$ является σ-алгеброй, а Δ — её элемент, то дополнение $\overline{\Delta}$ тоже принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{B}$. Из этого следует, что свойство выполняется

$$\begin{cases} \xi^{-1}\left(\Delta\right) \in \mathfrak{F} \\ \Delta \in \mathfrak{B} \Rightarrow \overline{\Delta} \in \mathfrak{B} \end{cases} \qquad \Rightarrow \overline{\xi^{-1}\left(\Delta\right)} = \xi^{-1}\left(\overline{\Delta}\right) \in \mathfrak{F}$$

3. Замкнутость относительно счётных пересечений.

   Начнём с замкнутости относительно пересечения двух множеств

$$A = \xi^{-1}\left(\Delta_1\right), B = \xi^{-1}\left(\Delta_2\right)$$

   Начинаем считать

$$\begin{aligned} A \cap B &= \xi^{-1}\left(\Delta_1\right) \cap \xi^{-1}\left(\Delta_2\right) = \\ &= \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta_1\} \cap \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta_2\} = \\ &= \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta_1 \wedge \xi\left(\omega\right) \in \Delta_2\} = \\ &= \{\omega \mid \xi\left(\omega\right) \in \Delta_1 \cap \Delta_2\} = \xi^{-1}\left(\Delta_1 \cap \Delta_2\right) \end{aligned}$$

   Значит, имеем равенство

$$\xi^{-1}\left(\Delta_1\right) \cap \xi^{-1}\left(\Delta_2\right) = \xi^{-1}\left(\Delta_1 \cap \Delta_2\right)$$

   Пользуясь методом математической индукции нетрудно показать, что для любого n выполняется

$$\xi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \xi^{-1}\left(\Delta_i\right), \Delta_i \in \mathfrak{B}$$

Как устроена эта σ-алгебра? Каждому элементарному исходу отвечает одно и только одно значение случайной величины, а каждому значению случайной величины отвечает один и больше элементарных исходов. Допустим, есть некое $a \in \mathbb{R}$, которое является образом по крайней мере двух элементарных исходов ω_1 и ω_2

$$\xi(\omega_1) = \xi(\omega_2) = a$$

Теперь рассмотрим элемент Δ борелевской σ-алгебры $\mathfrak{B}$. Из вышесказанного следует, что, если число a принадлежит множеству Δ, то прообраз этого множества содержит элементы ω_1 и ω_2, в противном случае оба элементарных исхода не входят в прообраз

$$\begin{aligned} a \in \Delta &\Rightarrow \xi^{-1}(\Delta) \ni \omega_1, \omega_2 \\ a \notin \Delta &\Rightarrow \xi^{-1}(\Delta) \not\ni \omega_1, \omega_2 \end{aligned}$$

То есть, множество $\mathfrak{F}_\xi$ не будет различать элементы ω_1 и ω_2. Это в свою очередь означает, что можно разбить $\mathfrak{F}_\xi$ на уровни — непересекающиеся подмножества

Определение 2.2.2 (Множество уровня)**.** Множество уровня H_t — полный прообраз значения $t \in \mathbb{R}$ случайной величины ξ

$$H_t = \{\omega \mid \xi(\omega) = t\} = \xi^{-1}(t)$$

Замечание 11. *Уровни H_i составляют разбиение множества элементарных исходов Ω.*

1. *Множества H_i не пересекаются*

$$H_{t_1} \neq H_{t_2} \Leftrightarrow t_1 \neq t_2$$

2. *Объединение всех H_i даёт множество элементарных исходов*

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} H_t = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \xi^{-1}(t) = \xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$$

Очень похоже на гипотезы из курса теории вероятностей с той лишь разницей, что уровней может быть бесконечное и даже континуальное количество, из чего также следует, что вероятность некоторых из них может быть нулевой.

2.3 Случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной

В общем случае вероятностное пространство может быть разбито на континуальное количество множеств уровней (для σ-алгебры, порождённой непрерывной случайной величиной).

Начнём же с рассмотрения того случая, когда случайная величина ξ принимает n значений $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\xi : \Omega \to \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Это в свою очередь означает, что у нас есть n уровней

$$H_k = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\}, k = \overline{1, n}$$

Нетрудно понять, что σ-алгебра $\sigma(\xi)$ содержит 2^n элементов

$$\sigma(\xi) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} H_k^{\eta_k} \mid \eta_k = \overline{0, 1}, H_k^0 = \emptyset, H_k^1 = H_k \right\}$$

Нам нет смысла пользоваться лишь одной случайной величиной ξ. Нас интересует, как устроены случайные величины, которые измеримы относительно σ-алгебры $\sigma(\xi)$.

Возьмём $\varkappa$ — случайная величина, измеримая относительно $\sigma(\xi)$. Это значит, что все прообразы случайной величины $\varkappa$ должны лежать в σ-алгебре $\sigma(\xi)$

$$\{\omega \mid \varkappa(\omega) \le c\} \in \sigma(\xi)$$

То есть, прообразы $\varkappa$ выражаются через объединения уровней H_k

$$\{\omega \mid \varkappa(\omega) \le c\} = \bigcup_{k=1}^{n} H_k^{\eta_k}$$

Введём обозначение

$$A(c) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) \le c\}$$

Очевидно, что при $c \to -\infty$ прообразом является пустое множество, а когда $c \to +\infty$, то прообразом является всё множество элементарных исходов

$$\{\omega \mid \varkappa(\omega) \le -\infty\} = \{\omega \mid \varkappa(\omega) \in \emptyset\} = \varkappa^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$
$$\{\omega \mid \varkappa(\omega) \le +\infty\} = \{\omega \mid \varkappa(\omega) \in \mathbb{R}\} = \varkappa^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$$

Также ясно, что, если имеются два элемента борелевского множества и один включён в другой, то полный прообраз первого элемента тоже будет включён в прообраз второго

$$\begin{aligned} \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}, \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \\ \Rightarrow \varkappa^{-1}(\Delta_1) \subseteq \varkappa^{-1}(\Delta_1) \cup \varkappa^{-1}(\Delta_2) = \\ = \varkappa^{-1}(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \varkappa^{-1}(\Delta_2) \end{aligned}$$

Ни у кого не возникает сомнений, что справедливо и такое утверждение

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \le c_2 \Rightarrow A(c_1) \subseteq A(c_2)$$

Объединим и проанализируем вышеописанное:

1. Количество элементов в множестве $A(c)$ не уменьшается с ростом c
$$c_1 \le c_2 \Rightarrow A(c_1) \subseteq A(c_2)$$
2. Множество $A(c)$ “разрастается” от пустого множества $\emptyset$ до множества элементарных событий Ω с ростом c от $-\infty$ до $+\infty$
$$A(-\infty) = \emptyset, A(+\infty) = \Omega$$
3. Множество $A(c)$ растёт дискретными шагами. Это связано с тем, что уровни H_k в нашей σ-алгебре неделимы, а каждый её элемент должен состоять из объединений этих уровней и ничего другого.

Из этого всего делаем более конкретные выводы о том, как изменяется значение функции $A(c)$ с ростом параметра c. Должны быть опорные точки, на которых происходит “скачок” — точки, на которых к объединению добавляется ещё один или более уровней.

Поскольку имеется n уровней, то может быть не более n скачков: ведь самый “медленный” рост будет происходить, если добавлять по одному уровню на определённых константах, а нужно пройти всё от пустого множества $\emptyset$ до множества элементарных исходов Ω.

Выделим m точек $(m \le n)$ $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ как значения случайной величины $\varkappa$
$$\varkappa : \Omega \to \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$$

Посмотрим, как соотносятся между собой $A(c_i)$ и $A(c_{i-1})$, чтобы лучше понять природу скачков.

Сначала покажем, что $A(c_1)$ является прообразом c_1
$$\varkappa^{-1}(c_1) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_1\}$$

Поскольку случайная величина не принимает значений до c_1, то множество $A(c_1 - 0) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) < c_1\}$ пустое. Получаем то, что хотели
$$\begin{aligned}\varkappa^{-1}(c_1) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_1\} \cup \emptyset = \\ = \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_1\} \cup \{\omega \mid \varkappa(\omega) < c_1\} = \\ = \{\omega \mid \varkappa(\omega) \le c_1\} = A(c_1)\end{aligned}$$

Идём дальше. Обозначим $c_0 = -\infty$. Тогда в каждой точке $A(c_i), i = \overline{1, m}$ происходит скачок на множество $\varkappa^{-1}(c_i)$, то есть
$$A(c_i) = A(c_{i-1}) \cup \varkappa^{-1}(c_i)$$

Так происходит, потому что имеет место равенство, которое выполняется из-за того, что функция имеет скачки лишь на параметрах c_i, а между ними не меняет значения
$$A(c_i) = A(c_{i+1} - 0)$$

В таком случае тождество очевидно
$$\begin{aligned}A(c_i) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) \le c_i\} = \\ = \{\omega \mid \varkappa(\omega) < c_i\} \cup \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_i\} = \\ = A(c_{i-1} - 0) \cup \varkappa^{-1}(c_i) = A(c_{i-1}) \cup \varkappa^{-1}(c_i)\end{aligned}$$

Поскольку $\varkappa$ — случайная величина, принимающая m значений, то её прообразы составляют разбиение пространства элементарных исходов Ω. А поскольку $A\left(c_{i-1}\right)$ состоит из объединений этих прообразов, то оно не пересекается с $\varkappa^{-1}\left(c_i\right)$. То есть, мы знаем, как вычислять прообраз $\varkappa$

$$\begin{cases} A\left(c_{i-1}\right) \cap \varkappa^{-1}\left(c_i\right) = \emptyset \\ A\left(c_i\right) = A\left(c_{i-1}\right) \cup \varkappa^{-1}\left(c_i\right) \end{cases} \Rightarrow \varkappa^{-1}\left(c_i\right) = A\left(c_i\right) \setminus A\left(c_{i-1}\right)$$

Значит, случайная величина $\varkappa$ принимает значение c_i при выпадении любого элементарного исхода ω из множества $A\left(c_i\right) \setminus A\left(c_{i-1}\right)$

$$\varkappa\left(\omega\right) = c_i, \omega \in A\left(c_i\right) \setminus A\left(c_{i-1}\right) \tag{2.2}$$

Запишем это в более удобном виде

$$\varkappa\left(\omega\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in A\left(c_i\right) \setminus A\left(c_{i-1}\right)\right\}$$

Но эта сумма кажется уродливой из-за длинного индикатора и непонятного m. Попытаемся разобраться, в чём же дело и как прийти к изначальной n и милым H_k.

Помним, что $A\left(c_i\right) \setminus A\left(c_{i-1}\right)$ — объединение нескольких множеств уровня H_k.

Для любого t разность множеств $A\left(c_t\right) \setminus A\left(c_{t-1}\right) \neq \emptyset$ (когда это множество пустое, то индикатор просто не сработает и нечего считать) можно представить как объединение двух непересекающихся множеств, которые обозначим $H_1^t \in \mathfrak{F}$ и $H_2^t \in \mathfrak{F}$, причём H_1^t — множество уровня, а H_2^t — произвольное множество из $\mathfrak{F}$ (в том числе и пустое, если разность и есть множество уровня). Тогда t-ое слагаемое примет следующий вид

$$c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in A\left(c_t\right) \setminus A\left(c_{t-1}\right)\right\} = c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_1^t \cup H_2^t\right\}$$

Поскольку множества H_1^t и H_2^t по условию не пересекаются, то можно разбить индикатор на сумму

$$\begin{aligned} c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_1^t \cup H_2^t\right\} &= c_t \cdot \left(\mathbb{1}\left\{\omega \in H_1^t\right\} + \mathbb{1}\left\{\omega \in H_2^t\right\}\right) \\ &= c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_1^t\right\} + c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_2^t\right\} \end{aligned}$$

Если ввести две константы c_1^t и c_2^t, которые будут равны старой c_t, то равенство примет более симпатичный вид

$$c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_1^t\right\} + c_t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_2^t\right\} = c_1^t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_1^t\right\} + c_2^t \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in H_2^t\right\}$$

Если же H_2^t не является пустым множеством $\emptyset$ или множеством уровня H_k, то нужно повторить процедуру, разбив H_2^t на объединение двух непересекающихся множеств — на множество уровня и множество из $\mathfrak{F}$. В итоге (вследствие конечности множества $\mathfrak{F}$) индикатор разности $A\left(c_t\right) \setminus A\left(c_{t-1}\right)$ будет разбита на сумму индикаторов множеств уровней.

Таким же образом можно поступить со всеми остальными индикаторами. В итоге получим n констант $d_1, d_2, \ldots, d_n$ вместо m $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Теперь сумма примет более приятный для глаз и понятный из контекста начала раздела вид

$$\begin{aligned}\varkappa(\omega) &= \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in A(c_i) \setminus A(c_{i-1})\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_i\}\end{aligned}$$

Видим, что теперь можно определить отображение из множества значений, принимаемых случайной величиной ξ, в множество значений, принимаемых случайной величиной $\varkappa$

$$f : \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$$

Попробуем показать, что $\varkappa$ является функцией от ξ. Очевидно, что случайная величина ξ имеет такой же вид, что и $\varkappa$ — сумма констант, умноженных на индикаторы, так как мы только что показали, что все функции, измеримые относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной ξ, выглядят именно так

$$f(\xi(\omega)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_i\}\right)$$

Поскольку уровни H_i не пересекаются, то лишь одно слагаемое не будет равно нулю: ω может принадлежать лишь одному уровню. В таком случае запись принимает свой изначальный вид без суммы (2.2)

$$f(\xi(\omega)) = f(a_i), \omega \in H_i$$

Замечаем, что $f(a_i) = d_i$, а это и есть то значение, которое принимает случайная величина $\varkappa$ на уровне H_i

$$f(\xi(\omega)) = f(a_i) = d_i = \varkappa(\omega), \omega \in H_i$$

Поскольку мы не привязывались к конкретным i и конкретным ω, то получаем желаемое равенство

$$\varkappa = f(\xi)$$

Отсюда делаем вывод, что случайной величине $\varkappa$ необходимо и достаточно быть функцией случайной величины ξ, чтобы быть измеримой относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной ξ.

2.4 Условное математическое ожидание

Имеется произвольная случайная величина η, интегрируемая с квадратом. Нужно найти случайную величину $\tilde{\eta}$ которая измерима в $\sigma(\xi)$ и ближайшая в среднем квадратическом к η.

2.4.1 Проекция вектора

Для наглядности начнём с геометрической интерпретации задачи. Если представить η как вектор в некоем пространстве $\mathfrak{L}$, а $\sigma(\xi)$ как подпространство пространства $\mathfrak{L}$, то $\tilde{\eta}$ будет ни что иное, как проекция случайной величины η на пространство $\sigma(\xi)$.

Отдохнём от случайных величин и вспомним геометрию.

Имеется точка x в пространстве L'. Мы ищем такую точку y в подпространстве $L \subset L'$, что расстояние между x и y минимальное. Значит, надо опустить перпендикуляр от y на L.

У нас есть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в L, тогда y можно найти по формуле

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot e_k \tag{2.3}$$

Потому что $y \in L$ должен лежать в пространстве L по условию, а это значит, что он должен быть линейной комбинацией базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и это очевидно выполняется

Также разностью $x - y$ должен быть вектор, перпендикулярный пространству L. То есть, скалярное произведение этой разности с любым вектором z из пространства L должно равняться нулю

$$(x - y) \perp L \Leftrightarrow \forall z \in L : (x - y, z) = 0$$

Вследствие линейности скалярного произведения можно переписать это условие иначе

$$\begin{cases} \forall z \in L : (x - y, z) = 0 \\ (a + b, c) = (a, c) + (b, c) \end{cases} \Rightarrow \forall z \in L : (x, z) = (y, z)$$

Покажем, что и это выполняется. z является линейной комбинацией базисных векторов. Запишем это

$$z = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot e_k$$

В таком случае скалярное произведение (x, z) будет таким

$$(x, z) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot (x, e_k)$$

С произведением (y, x) придётся чуть-чуть повозиться

$$(y, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot e_k, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot \beta_k$$

Как видим, суммы равны, а значит, проекция x на L найдена верно.

2.4.2 Проекция случайной величины

Возьмём L — множество всех случайных величин, которые измеримы относительно $\sigma(\xi)$.

$$L \ni \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathbb{1}_{H_k}, c_k \in \mathbb{R}$$

Но что же взять в качестве ортонормированного базиса? По внешнему виду элементов пространства L кажется, что это $\mathbb{1}_{H_k}$. В качестве скалярного произведения случайных величин возьмём математическое ожидание произведения.

Оказывается, H_k действительно ортогональны

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow H_{k_1} \cap H_{k_2} = \emptyset \Rightarrow M\left(\mathbb{1}_{H_{k_1}} \cdot \mathbb{1}_{H_{k_1}}\right) = 0$$

Теперь нужно нормировать эти базисные вектора, а для этого их надо поделить на их нормы. В нашем пространстве норма порождена скалярным произведением, то есть

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{M(x \cdot x)} = \sqrt{M(x^2)}, x \in L$$

Теперь у нас есть всё необходимое для того, чтобы представить ортонормированный базис. Начнём преобразования H_k

$$e_k = \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{M(\mathbb{1}_{H_k})^2}}$$

Поскольку индикатор может принимать лишь одно из двух значений 0 или 1, а их квадраты равны им самим, то в формуле квадрат тоже можно убрать

$$e_k = \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{M\mathbb{1}_{H_k}}}$$

Также помним, что математическое ожидание в знаменателе есть ни что иное, как вероятность события H_k, и теперь у нас есть красивый ортонормированный базис

$$e_k = \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}} \tag{2.4}$$

Идём дальше, ищем проекцию. Вспомним снова пример с векторами (2.3)

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot e_k$$

Если заменить y на $\tilde{\eta}$, а x на η, то получаем следующую картину, имеющую непосредственное отношение к задаче

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^{n} (\eta, e_k) \cdot e_k$$

Осталось заменить e_k на то, что получили выше (2.4)

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\eta, \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}}\right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}}$$

Заменяем скалярное произведение на математическое ожидание произведения и получаем то, с чем можно дальше работать, не отвлекаясь на геометрию

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^{n} M\left(\eta \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}\left(H_k\right)}}\right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}\left(H_k\right)}}$$

Поскольку вероятность $\mathbb{P}\left(H_k\right)$ — константа, то её можно вынести за математическое ожидание

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}\right)}{\sqrt{\mathbb{P}\left(H_k\right)}} \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}\left(H_k\right)}}$$

Произведения корней вероятности даёт саму вероятность. Теперь у нас есть красивая формула для проекции случайной величины

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}\right)}{\mathbb{P}\left(H_k\right)} \cdot \mathbb{1}_{H_k} \tag{2.5}$$

На что стоит обратить внимание в этой формуле:

1. $\tilde{\eta}$ — **случайная величина**, так как индикатор вне математического ожидания никуда не девается и результат суммы будет зависеть от произошедшего ω, а точнее от того, какому уровню H_k оно принадлежит

2. Когда ω принадлежит H_k, то результатом суммы будет среднее значение случайной величины η на событии H_k

Если с первым пунктом всё очевидно, то небольшое пояснение ко второму не помешает.

Нужно показать, что k-я "координата" случайной величины $\tilde{\eta}$ действительно даёт среднее значение случайной величины η на событии H_k

$$\frac{M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}\right)}{\mathbb{P}\left(H_k\right)}$$

Начнём с определения математического ожидания

$$\begin{aligned} M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}\right) &= \int\limits_{\Omega} \mathbb{P}\left(d\omega\right) \eta\left(\omega\right) \cdot \mathbb{1}_{H_k} \cdot = \\ &= \int\limits_{H_k} \mathbb{P}\left(d\omega\right) \eta\left(\omega\right) + \int\limits_{\Omega \setminus H_k} \mathbb{P}\left(d\omega\right) 0 \cdot \end{aligned} \tag{2.6}$$

Видим математическое ожидание случайной величины, которая гарантированно принимает нулевое значение на множестве $\Omega \setminus H_k$, что в свою очередь искажает желаемую картину и притягивает результат к нулю с силой, которая пропорциональна $\mathbb{P}\left(\Omega \setminus H_k\right)$. То есть, "вес" каждого ненулевого значения случайной величины уменьшился.

Почему так происходит? Потому что вероятность события H_k в общем случае не равна единице. Если ввести новую меру $\mathbb{P}_k\left(A\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(H_k\right)}$, то наступит гармония, а вероятность $\mathbb{P}_k\left(H_k\right)$ будет равна единице.

Из контекста понятно, что нигде кроме как в интеграле по событию H_k эта мера использоваться не будет, поэтому она будет колебаться в пределах $[0; 1]$, но строгости ради введём небольшую поправку (и увидим, что не напрасно)

$$\mathbb{P}_k(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}$$

Видим условную вероятность, а значит, мы на правильном пути! Логично, что в поисках условного математического ожидания должна была встретиться условная вероятность

$$\mathbb{P}_k(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} = \mathbb{P}(A \mid H_k)$$

Теперь математическое ожидание (2.6) принимает несколько иной вид

$$M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}) = \int\limits_{H_k} \mathbb{P}(d\omega \mid H_k)\, \eta(\omega) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

Тут уже уровень H_k играет роль целого множества элементарных исходов, его мера $\mathbb{P}(H_k \mid H_k)$ равна единице, а мы получаем действительно среднее значение случайной величины η на множестве H_k, умноженное на вероятность $\mathbb{P}(H_k)$. Значит, осталось лишь поделить обе части на $\mathbb{P}(H_k)$

$$\frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} = \int\limits_{H_k} \mathbb{P}(d\omega \mid H_k)\, \eta(\omega)$$

Определение 2.4.1 (Условное математическое ожидание случайной величины относительно случайного события)**.** Условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно **события** A [2, стр. 68] обозначается $M(\xi \mid A)$ и считается по формуле

$$M(\xi \mid A) = \frac{M(\xi \cdot \mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)} = \int\limits_{A} \mathbb{P}(d\omega \mid A)\, \xi(\omega)$$

Пользуясь только что введённым обозначением, можно более красиво переписать формулу (2.5) для получения проекции случайной величины η на σ-алгебру, порождённой уровнями $H_1, H_2, \ldots, H_n$

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^{n} M(\eta \mid H_k) \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Забегая наперёд, введём определение частного случая условного математического ожидания случайной величины относительно **σ-алгебры**, чтобы обратить внимание на этот важный момент.

Определение 2.4.2 (Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры, порождённой случайной величиной, принимающей конечное количество значений)**.** Есть σ-алгебра $\mathfrak{F}_1$, разбитая на n уровней $H_1, H_2, \dots, H_n$. Тогда условное математическое ожидание случайной величины η относительно этой σ-алгебры — **случайная величина**, которая обозначается $M(\eta \mid \mathfrak{F}_1)$ и вычисляется по формуле

$$M(\eta \mid \mathfrak{F}_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Замечание 12. *У нас есть определения условного математического ожидания относительно* σ***-алгебры*** $\mathfrak{F}$ *и относительно* ***случайного события*** A. *Из контекста будет ясно, какое именно определение используется, поэтому путаницы возникнуть не должно.*

Например, последнее определение может выглядеть немного странно

$$M(\eta \mid \mathfrak{F}_1) = \sum_{k=1}^{n} M(\eta \mid H_k) \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Зато при более детальном рассмотрении из самой записи очевиден её смысл: условное математическое ожидание относительно σ-алгебры — вектор, для получения которого нужно умножить проекции на базисные векторы. Ведь $M(\eta \mid H_k)$ — ни что иное, как проекция вектора (случайной величины) η на ось (уровень) H_k, также эта величина является скаляром, как и проекция вектора на ось.

Лемма 2.4.1 (Равенство скалярных произведений для конечной сигма–алгебры). *Для случайной величины η и её проекции $\tilde{\eta}$ на σ-алгебру $\mathfrak{F}_\xi$, порождённую случайной величиной ξ, принимающей конечное количество значений, выполняется равенство скалярных произведений*

$$\forall A \in \mathfrak{F}_\xi : M(\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_A) = M(\eta \cdot \mathbb{1}_A) \tag{2.7}$$

Доказательство. Для начала распишем $\tilde{\eta}$ по определению

$$M(\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_A) = M\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k} \cdot \mathbb{1}_A\right)$$

Произведение индикаторов $\mathbb{1}_{H_k}$ и $\mathbb{1}_A$ — индикатор пересечения $\mathbb{1}_{H_k \cap A}$. Воспользуемся линейностью математического ожидания, не забывая, что дробь в каждом слагаемом — константа и выносится за знак математического ожидания

$$M\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k} \cdot \mathbb{1}_A\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot M(\mathbb{1}_{H_k \cap A})$$

Помним, что математическое ожидание индикатора — вероятность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot M(\mathbb{1}_{H_k \cap A}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k \cap A)$$

Замечаем условную вероятность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k})}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k \cap A) = \sum_{k=1}^{n} M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(H_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_k)$$

Поскольку A принадлежит множеству случайных событий $\mathfrak{F}_\xi$, то условная вероятность $\mathbb{P}(A \mid H_k)$ равна либо нулю, либо единице, поскольку A либо включает в себя уровень H_k, либо не пересекается с ним. То есть, получился индикатор $\mathbb{1}(H_k \subseteq A)$. А этот индикатор говорит о том, что теперь надо суммировать лишь по тем уровням, которые являются частью события A, а дальше можно смело воспользоваться линейностью математического ожидания

$$\sum_{k=1}^{n} M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_k) = \sum_{k=1}^{n} M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}) \cdot \mathbb{1}(H_k \subseteq A) =$$
$$= \sum_{H_k \subseteq A} M(\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}) = M\left(\sum_{H_k \subseteq A} \eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}\right)$$

Далее мы имеем полное математическое и моральное право вынести η за знак суммы. Если с математикой всё очевидно (работает закон дистрибутивности), то напомню о морально-этической стороне дела: нам нужно, пройтись по всем возможным индикаторам $\mathbb{1}_{H_k}$, из которых лишь один сработает (будет равен единице, а не нулю), поэтому сумма нужна лишь для того, чтобы не писать в конце каждой строчки "для тех ω, что входят в H_k" (помним, что случайная величина и индикатор — функции от элементарного события ω)

$$M\left(\sum_{H_k \subseteq A} \eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}\right) = M\left(\eta(\omega) \cdot \sum_{H_k \subseteq A} \mathbb{1}_{H_k}(\omega)\right)$$

Сумма индикаторов непересекающихся событий — индикатор их объединения, которое является множеством A. Не забываем, что оно может состоять из объединений уровней и только из них (или же быть пустым)

$$M\left(\eta \cdot \sum_{H_k \subseteq A} \mathbb{1}_{H_k}\right) = M(\eta \cdot \mathbb{1}_A)$$

Значит, равенство (2.7) выполняется. □

Замечание 13. *В связи с выполнением равенства скалярных произведений можем сделать вывод, что математическое ожидание случайной величины и её проекции тоже равны. Это нетрудно показать, установив A равным всему множеству элементарных исходов (индикатор в таком случае станет просто тождественной единицей)*

$$M(\eta) = M(\eta \cdot \mathbb{1}_\Omega) = M(\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_\Omega) = M(\tilde{\eta})$$

2.4.3 Условное математическое ожидание

Введём же общее определение для условного математического ожидания случайной величины относительно σ-алгебры

Определение 2.4.3 (Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры)**.** Условным математическим ожиданием случайной величины η относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_1$ называется такая случайная величина $\tilde{\eta}$, что

1. Случайная величина $\tilde{\eta}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_1$
2. Выполняется равенство скалярных произведений

$$\forall A \in \mathfrak{F}_1 : M\left(\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_A\right) = M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_A\right)$$

Обозначение $\tilde{\eta} = M\left(\eta \mid \mathfrak{F}_1\right)$

Условное математическое ожидание случайной величины η относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной ξ, будем обозначать $M\left(\eta \mid \sigma\left(\xi\right)\right)$, а более кратко $M\left(\eta \mid \xi\right)$

Попробуем обобщить определение условного математического ожидания, чтобы обладать универсальной формулой, из которой можно делать какие-то выводы. Начнём с того, что у нас уже есть

$$M\left(\eta \mid \mathfrak{F}_\xi\right) = \sum_{k=1}^{n} M\left(\eta \mid H_k\right) \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Множество уровня H_k — прообраз одного из значений случайной величины ξ, которой порождена σ-алгебра $\mathfrak{F}_\xi$. Если назвать эти значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то запись примет следующий вид

$$M\left(\eta \mid \sigma\left(\xi\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} M\left(\eta \mid \xi^{-1}\left(a_k\right)\right) \cdot \mathbb{1}\left(\xi^{-1}\left(a_k\right)\right) \tag{2.8}$$

Воспользовавшись альтернативной записью прообраза

$$\xi^{-1}\left(a_k\right) = \left\{\omega \mid \xi\left(\omega\right) = a_k\right\} = \left\{\xi = a_k\right\}$$

Перепишем формулу (2.8) с той поправкой, что позволим себе не писать фигурные скобки для удобства и красоты

$$M\left(\eta \mid \sigma\left(\xi\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} M\left(\eta \mid \xi = a_k\right) \cdot \mathbb{1}_{\xi = a_k}$$

Теперь введём функцию $\varphi^\eta\left(x\right) = M\left(\eta \mid \xi = x\right)$ и условное математическое ожидание примет следующий вид

$$M\left(\eta \mid \xi\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^\eta\left(a_k\right) \cdot \mathbb{1}_{\xi = a_k}$$

Вновь вспоминаем роль суммы и индикаторов и видим, что условное математическое ожидание в нашей формуле принимает значение $\varphi^\eta\left(x\right)$ в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина $\xi\left(\omega\right)$. То есть, можно переписать равенство следующим образом

$$M\left(\eta \mid \xi\right) = \varphi^\eta\left(a_k\right) : \xi\left(\omega\right) = a_k$$

То есть, можно просто подставить значение случайной величины ξ в качестве аргумента функции φ^{η} и получим условное математическое ожидание

$$M(\eta \mid \xi) = \varphi^{\eta}(\xi)$$

Расписывать эту функцию не имеет смысла, так как получим нечто несуразное

$$\xcancel{\varphi^{\eta}(\xi) = M(\eta \mid \xi = \xi)}$$

Зато можно теперь можно попытаться распространить эту функцию на общий случай* и проверить, будет ли случайная величина $\varphi^{\eta}(\xi)$ условным математическим ожиданием.

Лемма 2.4.2 (Равенство скалярных произведений)**.** *В общем случае функция*

$$\varphi^{\eta}(\xi) = M(\eta \mid \xi = x)\big|_{x=\xi}$$

является условным математическим ожиданием случайной величины η относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной ξ

$$M(\eta \mid \sigma(\xi)) = \varphi^{\eta}(\xi)$$

Доказательство. Нужно доказать то, что выполняются оба свойства условного математического ожидания.

То, что $\varphi^{\eta}(\xi)$ измерима относительно $\sigma(\xi)$, очевидно из определения: $\varphi^{\eta}(\xi)$ является функцией случайной величины ξ, а это и есть измеримость.

Дальше придётся немного повозиться.

$$\forall A \in \sigma(\xi) : M(\varphi^{\eta}(\xi) \cdot \mathbb{1}_A) = M(\eta \cdot \mathbb{1}_A)$$

Следуем определению, пока что ничего очевидного нет кроме надежды на то, что была выведена достаточно общая формула, которая должна работать

$$M(\varphi^{\eta}(\xi) \cdot \mathbb{1}_A) = \int\limits_{\Omega} \varphi^{\eta}(\xi) \cdot \mathbb{1}_A \cdot d\mathbb{P}$$

Применим индикатор и будем интегрировать не по всему множеству элементарных исходов, а лишь по событию A, а также в явном виде покажем элементарный исход ω, так как сейчас с ним надо будет поработать основательно

$$\int\limits_{\Omega} \varphi^{\eta}(\xi) \cdot \mathbb{1}_A \cdot d\mathbb{P} = \int\limits_{A} \varphi^{\eta}(\xi(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) \tag{2.9}$$

Теперь нужно немного остановиться и подумать, что же делать дальше. Немного выше оказалось, что сама по себе запись $\varphi^{\eta}(\xi)$ не даёт ничего полезного. Копнём немно глубже и посмотрим на то, что есть у нас. Значение случайной величины использовалось лишь для восстановления случайного

*Так как формула была выведена из условного математического ожидания относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной, принимающей конечное количество значений, то справедливость формулы для этого случая доказывать уже не надо события, которому принадлежит произошедший элементарный исход ω[†]. То есть, мы знали, чему равна случайная величина, но не знали, какое именно событие произошло, зато могли определить, какому уровню принадлежит произошедшее событие. Тут же у нас есть интеграл и мы проходим по каждому мельчайшему событию $d\omega$. Вспомним, чему равна $\varphi^\eta(x)$

$$\varphi^\eta(x) = M(\eta \mid \xi = x)$$

А теперь распишем условное математическое ожидание

$$\varphi^\eta(x) = M(\eta \mid \xi = x) = \frac{M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi = x\}}\right)}{\mathbb{P}\{\xi = x\}}$$

В общем случае для непрерывных случайных величин такая запись не имеет смысла, но мы как раз рассматриваем очень маленькие значения, а усложнять нет желания. Поэтому просто подставляем получившееся выражение в интеграл (2.9)

$$\int\limits_A \varphi^\eta(\xi(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_A \frac{M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi = x\}}\right)}{\mathbb{P}\{\xi = x\}}\mathbb{P}(d\omega)$$

Воспользовавшись вышесказанным, заменим событие $\{\xi = x\}$ на $d\omega$ и продолжим колдовать

$$\int\limits_A \frac{M\left(\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi = x\}}\right)}{\mathbb{P}\{\xi = x\}}\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_A \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega})}{\mathbb{P}(d\omega)}\mathbb{P}(d\omega)$$

Вероятности сокращаются, хоть это и немного смущает, а $d\omega$ находится в индикаторе, что ещё больше нагнетает обстановку. Учтём внесённые изменения и перепишем математическое ожидание через интеграл

$$\int\limits_A \frac{M(\eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega})}{\mathbb{P}(d\omega)}\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_A \int\limits_\Omega \eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(d\tilde{\omega})$$

Не путаемся: $d\omega$ принадлежит внешнему интегралу, а $d\tilde{\omega}$ внутреннему. Индикатор упрощает нашу задачу, сужая пределы интегрирования внутреннего интеграла до маленького события $d\omega$

$$\int\limits_A \int\limits_\Omega \eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \int\limits_A \int\limits_{d\omega} \eta(\tilde{\omega})\,\mathbb{P}(d\tilde{\omega}) \tag{2.10}$$

Дальше происходит магия, которую можно трактовать по-разному

[†] Ведь именно по значению случайной величины мы и находили уровни, элементарные исходы которых для нас неразличимы внутри одного множества уровня

$$H_t = \xi^{-1}(a_t) = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_t\}$$

Формулировка 1: Поскольку событие $d\omega$ и без того маленькое, дробить его на более мизерные $d\tilde{\omega}$ смысла нет, а это значит, что внутренний интеграл просто уничтожается и остаётся произведение случайной величины η на вероятность события $d\omega$

$$\int\limits_{d\omega} \eta(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \eta(\omega) \cdot \mathbb{P}(d\omega)$$

Формулировка 2: *(простая)* Промежуток $d\omega$ столь мал, что случайная величина η на нём не меняет значения, то есть её можно считать константой и вынести из внутреннего интеграла. Внутри же останется лишь вероятность $d\tilde{\omega}$, а сам интеграл будет равен вероятности $d\omega$[‡]

$$\int\limits_{d\omega} \eta(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \eta(\omega) \cdot \int\limits_{d\omega} \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \eta(\omega) \cdot \mathbb{P}(d\omega)$$

Формулировка 3: *(усложнённая)* Поскольку рассматривается интеграл Лебега, а множество Ω может быть любым, то понятие "промежуток $d\omega$" в общем случае бессмысленно. В таком случае можно определить $d\omega$ как событие, на котором η принимает одно и то же значение (назовём его $c_{d\omega}$) почти всюду.

$$d\omega = A \in \mathfrak{F} : \eta^{-1}(c_{d\omega}) = A' \subset A, \mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(A)$$

Значит, в качестве ω можно принять любой элементарный исход из A', а в связи с нулевой вероятностью попасть в разность $A \setminus A'$ можно сказать, что ω — (почти) любой элемент из $d\omega$. Возьмём же интеграл Лебега по определению [3, стр. 69]

$$\int\limits_{d\omega} \eta(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = c_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(A) + x \cdot \mathbb{P}(A \setminus A')$$

Поскольку множество A' имеет ту же вероятность, что и A, то их разность имеет нулевую вероятность, поэтому нас не интересует, что за значения в x, является ли он константой или функцией — произведение равно нулю

$$c_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(A) + x \cdot \mathbb{P}(A \setminus A') = c_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(d\omega)$$

Вернёмся к старым обозначениям ($c_{d\omega} = \eta(\omega \in d\omega)$) и получаем конечный результат

$$\int\limits_{d\omega} \eta(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \eta(\omega) \cdot \mathbb{P}(d\omega)$$

[‡] Имеется простая функция $f(\omega) = 1$, интеграл Лебега от которой равен мере множества, по которому идёт интегрирование

$$\int\limits_{d\omega} d\mathbb{P} = 1 \cdot \mathbb{P}(d\omega)$$

С этим моментом разобрались, вернёмся же к нашему двойному интегралу (2.10). Получаем такой вот результат

$$\int\limits_{A}\int\limits_{d\omega}\eta\mathbb{P}\left(d\tilde{\omega}\right)=\int\limits_{A}\eta\mathbb{P}\left(d\omega\right)$$

Но ведь это и есть искомое математическое ожидание! Значит, свойство доказано, формула верна

$$\int\limits_{A}\eta\mathbb{P}\left(d\omega\right)=\int\limits_{\Omega}\eta\cdot\mathbb{1}_{A}\cdot\mathbb{P}\left(d\omega\right)=M\left(\eta\cdot\mathbb{1}_{A}\right)$$

□

Теперь вернёмся к менее абстрактным вещам и посмотрим, как выглядит условное математическое ожидание, когда случайные величины ξ и η имеют совместную плотность распределения

$$\mathbb{P}\left\{(\xi,\eta)\in\Delta\right\}=\iint\limits_{\Delta}p\left(x,y\right)dxdy$$

В таком случае компонента ξ имеет плотность r

$$r\left(x\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}p\left(x,y\right)dy$$

Компонента η имеет плотность q

$$q\left(y\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}p\left(x,y\right)dx$$

Уточним определение функции $\varphi^{\eta}\left(x\right)$ для данного случая. Вот первоначальный вариант

$$\varphi^{\eta}\left(x\right)=M\left(\eta\mid\xi=x\right)=\frac{M\left(\eta\cdot\mathbb{1}\left(\xi=x\right)\right)}{\mathbb{P}\left\{\xi=x\right\}}$$

В данном (непрерывном) случае вероятность события $\mathbb{P}\left\{\xi=x\right\}$ является плотностью случайной величины ξ в точке x

$$\mathbb{P}\left\{\xi=x\right\}=r\left(x\right)$$

Математическое ожидание случайной величины η, умноженной на индикатор $\mathbb{1}\left(\xi=x\right)$, есть ни что иное как математическое ожидание η при фиксированном $\xi=x$

$$M\left(\eta\cdot\mathbb{1}\left(\xi=x\right)\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}y\cdot p\left(x,y\right)\cdot dy$$

Теперь у нас есть конкретная формула для $\varphi^\eta(x)$ для случая непрерывных случайных величин с общей плотностью распределения

$$\varphi^\eta(x) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy}{r(x)} = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy}{\int\limits_{\mathbb{R}} p(x,y)\, dy} \tag{2.11}$$

Докажем снова, что $\varphi^\eta(\xi)$ является условным математическим ожиданием случайной величины η относительно σ-алгебры, порождённой случайной величиной ξ. Чтобы не было скучно, будем доказывать несколько иначе, чем ранее.

Лемма 2.4.3 (Равенство скалярных произведений для случайных величин с совместной плотностью)**.** *Пускай имеются две случайные величины* (ξ, η) *с совместной плотностью* $p(x,y)$*. Тогда функция*

$$\varphi^\eta(\xi) = \left.\frac{\int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy}{\int\limits_{\mathbb{R}} p(x,y)\, dy}\right|_{x=\xi}$$

Является условным математическим ожиданием $M(\eta \mid \xi)$

Доказательство. Первое свойство снова очевидно, поэтому надо доказать

$$\forall A \in \sigma(\xi) : M(\varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A) = M(\eta \cdot \mathbb{1}_A) \tag{2.12}$$

У нас есть совместная плотность и мы хотим посчитать математическое ожидание, пользуясь именно ею. Для этого превратим индикатор $\mathbb{1}(\omega \in A)$ в функцию случайной величины ξ. Поскольку любое событие A принадлежит $\sigma(\xi)$, то оно представимо в виде $\xi^{-1}(\Delta), \Delta \in \mathfrak{B}$. Перепишем индикатор следующим образом: $\mathbb{1}(\omega \in A) = \mathbb{1}(\xi \in \Delta)$. И вот теперь мы готовы к тому, чтобы записать определение математического ожидания

$$M(\varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^\eta(x) \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

От y зависит лишь совместная плотность, а интеграл от неё по всей оси y является плотностью распределения ξ. То есть, интеграл по y уходит, а вместо $p(x,y)$ появляется $r(x)$. Также учтём индикатор и сузим область интегрирования с $\mathbb{R}$ до Δ

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^\eta(x) \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int\limits_{\Delta} \varphi^\eta(x) \cdot r(x) \cdot dx$$

Дальше распишем функцию φ^η, пользуясь формулой (2.11)

$$\int\limits_{\Delta} \varphi^\eta(x) \cdot r(x) \cdot dx = \int\limits_{\Delta} \left(\frac{\int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy}{r(x)} \cdot r(x) \right) dx$$

Сократим одинаковые плотности и получим интересный двойной интеграл

$$\int\limits_{\Delta} \left(\frac{\int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy}{r(x)} \cdot r(x) \right) dx = \int\limits_{\Delta} \int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy \cdot dx$$

Вернём индикатор обратно в интеграл

$$\int\limits_{\Delta} \int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy \cdot dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x,y) \cdot dy \cdot dx$$

Видим, что это и есть то математическое ожидание, которое нам нужно

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x,y) \cdot dy \cdot dx = M(\eta \cdot \mathbb{1}_{\xi \in \Delta}) = M(\eta \cdot \mathbb{1}_A)$$

Это значит, что тождество доказано и условное математическое ожидание для случайных величин с совместной плотностью считается с помощью

$$\varphi^{\eta}(x) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} y \cdot p(x,y) \cdot dy}{\int\limits_{\mathbb{R}} p(x,y)\, dy}$$

По формуле

$$M(\eta \mid \xi) = \varphi^{\eta}(\xi) = \left. \varphi^{\eta}(x) \right|_{x=\xi}$$

□

Литература

[1] Боровков А. А. Математическая статистика. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 705 с.

[2] Боровков А. А. Теория Вероятностей. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.

[3] Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. Киев: Выща школа. Головное издательство, 1989. 152 с.

Предметный указатель

Оглавление