Теория вероятностей

9 марта 2014 г.

Глава 1

Основы

1.1 Предисловие

Теория вероятностей — наука о **повторяющихся случайных** явлениях.

Примеры: квантовая физика, вихри в турбулентных потоках, изменения молекулы ДНК в жидкостях, ...

Цель: **прогноз**. Мы, исследуя случайные явления, будем пытаться что-то предсказать.

Нас интересует то, что случается с нами периодически.

При исследовании повторяющихся случайных явлений мы исследуем количественные характеристики и закономерности

1.2 Вероятностный эксперимент

Определение 1.2.1. *Вероятностный эксперимент — явление, исход которого для нас неопределён и который можно повторить любое число раз* ***независимым*** *образом.*

Определение 1.2.2. *Вероятностное пространство — совокупность всех исходов вероятностного эксперимента.*

Ω — вероятностное пространство
$\Omega \ni \omega$ — элементарный исход

Пример 1.2.1 (Подбрасывание монетки)**.** *Выпадение орла* (0) *и выпадение решки* (1) *— элементарные исходы*

$$\Omega = \{0, 1\}$$

Пример 1.2.2 (Подбрасывание игрального кубика)**.** *Количество выпавших очков — элементарный исход*

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$$

Пример 1.2.3 (Задача о встрече)**.** *Два человека в течение часа один раз приходят на одно и то же место.*

Пара (x, y) — элементарный исход (время, в которое первый и второй человек появится в указанном месте)

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$$

Пример 1.2.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла)**.** *Элементарный исход — номер подбрасывания, на котором выпадет орёл*

$$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

1.3 Случайные события и действия над ними

Определение 1.3.1. *Случайное событие — подмножество множества всех исходов вероятностного эксперимента.*

$\Omega \supset A$ — случайное событие
Ω — достоверное событие
$\emptyset$ — невозможное события

Пример 1.3.1 (Подбрасывание монетки)**.** *A – выпал орёл*

$$A = \{0\}$$

Пример 1.3.2 (Подбрасывание игрального кубика)**.** *A — выпало чётное число*

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Пример 1.3.3 (Задава о встрече)**.** *A — встретились*

Пример 1.3.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла)**.** *A — не потребовалось 100 подбрасываний*

$$A = \{1, \dots, 99\}$$

Можно говорить о **пересечении** событий A и B, но лучше говорить, что они **произошли одновременно**.
$\emptyset$ — невозможное событие
Ω — достоверное события
$\overline{A}$ — событие A не произошло
$A \cap B$ — A и B произошли
$A \cup B$ — произошло хотя бы одно из событий A, B
$A \setminus B$ — произошло A, но не B

Определение 1.3.2. *Последовательность случайных событий*

$$\{A_n \mid n \geq 1\}$$

Определение 1.3.3. *Верхний предел последовательности $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — это случайное событие, состоящее в том, что произошло бесконечно много событий из исходной последовательности.*

$$\varlimsup_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

Определение 1.3.4. *Нижний предел последовательности $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — это случайное событие, состоящее в том, что произошли все события из исходной последовательности.*

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Некоторые свойства:

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

$$\overline{\varlimsup_{n\to\infty} A_n} = \varliminf_{n\to\infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\varliminf_{n\to\infty} A_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \overline{A_n}$$

1.4 Классический вероятностный эксперимент

Определение 1.4.1. *Классический вероятностный эксперимент — такой, у которого конечное число исходов, ни один из которых не является более предпочтительным, чем другой.*

У нас появилось желание приписывать числовые характеристики событиям.

$|\Omega| < +\infty$, все элементарные исходы равновероятны, $\Omega \supset A$ — случайное событие.

Определение 1.4.2 (Вероятность)**.** *Вероятность того, что случайное событие $A \subset \Omega$ прозошло, является отношением мощности множества A к мощности множества Ω:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Свойства:
$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Частный случай: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$

Рецепт вычисления вероятности классического эксперимента:

1. Описать Ω
2. Описать события A (исходы, благоприятный событию A, стостоят в том, что ...)
3. Найти $|\Omega|, |A|, \mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Теорема 1.4.1 (Формула включения-исключения)**.** *Есть n случаыныйх событий: $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$. Вероятность того, что произошло хотя бы одно событие, считается по формуле:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1<i_2}^{n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3}^{n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{3} A_k\right) - \\ - \dots + (-1)^{n+1}\cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}\cdot \sum_{1\le i_1<\dots<i_k}^{n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{k} A_{i_t}\right)\right]$$

Пример 1.4.1 (Задача о конвертах)**.** *Дано n писем и n конвертов. Письма раскладываются случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по правильному адресу.*

Случайно раскладываем n писем по n конвертам — получаем перестановки.

Ω — все перестановки чисел от 1 до n

A_i — событие, состоящее в том, что i-е письмо попало по правильному адресу

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i_1<i_2}\frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{k+1}\cdot\sum_{i_1<\dots<i_k}\frac{(n-k)!}{n!} = \\ = \binom{1}{n}\cdot\frac{1}{n} - \binom{2}{n}\cdot\frac{1}{n\cdot(n-1)} + \dots + (-1)^{k+1}\cdot\binom{k}{n}\cdot\frac{(n-k)!}{n!} + \\ + \dots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e}$$

1.5 Геометрический вероятностный эксперимент

Пример 1.5.1 (Простейший геометрический эксперимент)**.** *$G \subset D \subset \mathbb{R}^n$, наугад выбираем точку $M \in D$. Событие A состоит в том, что $M \in A$. Тогда вероятность события G:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|G|}{|D|}$$

$|D|$ — длина, площадь, объём D (в зависимости от n)

Вероятность в геометрическом эксперименте обладает теми же свойствами, что и в классическом, но появились ненулевые события с нулевой вероятностью

$$(\exists A \subset \Omega)(A \ne \emptyset) : \mathbb{P}(A) = 0$$

Пример 1.5.2 (Непустое событие с нулевой вероятностью)**.** *Вероятность, события A, состоящего в том, что точка попадёт на линию (или точку) в трёхмерном пространстве, равна нулю, так как объём линии(точки) равен нулю (но такое событие возможно)*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0}{|D|} = 0$$

Определение 1.5.1. *Для $A \subset \mathbb{R}$*

$$A + x = \{y + x \mid y \in A\}$$

Свойства длины. Разбиваем числовую прямую на непересекающиеся отрезки A_k:

$$A_k = [a_k; b_k], a_k < b_k < a_{k+1}$$

1. Аддитивность

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

2. Однородность Эвклидового пространства: длина множества, сдвинутого на x, равна длине исходного множества

$$|A + x| = |A|$$

Утверждение 1.5.1. *Нельзя определить функцию множества, обладающую свойствами 1 и 2, на всех подмножествах числовой прямой.*

Доказательство. Пусть $|\cdot|$ определена на всех подмножествах $\mathbb{R}$ и обладает свойствами 1 и 2.

Возьмём отрезок $[0; 1]$ и введём отношение эквивалентности “$\sim$”. Будем считать эквивалентными числа, разность между которыми — число рациональное.

$$\forall x, y \in [0; 1] : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Тогда множество классов эквивалентности $\{K_\alpha\}$ будет разбиением отрезка $[0; 1]$:

$$\bigcup_{\alpha} K_\alpha = [0; 1]$$

$$K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

A — множество, в котором находится по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Значит, $|A| \leq 1$.

Введём $\{r_k\}$ — множество рациональный чисел на отрезке $[-1; 1]$:

$$\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$$

Поскольку в A содержится по одному представителю из каждого класса эквивалентности K_α, разность между числами в каждом классе — число рациональное, а сами числа взяты из отрезка $[0; 1]$, то разность между двумя числами не может быть больше, чем 1 и меньше, чем -1, и является числом рациональным. Значит, объединив все возможные суммы чисел из A с числами из $\{r_k\}$, точно можно получить все числа из каждого класса K_α, а, следовательно, и отрезок $[0; 1]$:

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \supset [0; 1]$$

Очевидно, что произвольное число x из отрезка $[0;1]$ будет принадлежать какому-то классу эквивалентности K_α и найдётся такое число y из этого класса, принадлежащее множеству A (по определению множества A):

$$x \in [0;1] \Rightarrow \exists \alpha : \begin{cases} x \in K_\alpha \\ \exists y \in A \cap K_\alpha \end{cases}$$

Это в свою очередь означает, что разность x и y — рациональное число из множества $\{r_k\}$, так как они принадлежат одному классу эквивалентности K_α:

$$x - y = r_k \Rightarrow x \in A + r_k$$

Примечание к применению свойства 2: множество $\{A + r_k\}$ необязательно является разбиением, поэтому мощность объединений его элементов может быть меньше суммы их мощностей

$$|[0;1]| = 1 \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |A + r_k| = \sum_{k \geq 1} |A| \tag{1.1}$$

Поскольку все числа из A попадают на отрезок $[0;1]$, а $r_k \in [-1;1]$, то ни одно из чисел множества $\{A + r_k\}$ не попадёт за пределы отрезка $[-1;2]$:

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \subset [-1;2] \Rightarrow \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq 3 \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^{n} (A + r_k) \right| \leq 3, \forall n \geq 1$$

Если взять два разных рациональных числа r_{k_1} и r_{k_2}, то $A+r_{k_1}$ и $A+r_{k_2}$ не будут иметь одинаковых элементов, так как, если разность между двумя числами — число рациональное, то они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, но множество A содержит лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности K_α:

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow r_{k_1} \neq r_{k_2} \Rightarrow A + r_{k_1} \cap A + r_{k_2} = \emptyset$$

А это значит, что множество $\{A + r_k\}$ является разбиением и к нему применимо свойство 2:

$$3 \geq \left| \bigcup_{k=1}^{n} (A + r_k) \right| = \sum_{k=1}^{n} |A + r_k| = n \cdot |A|, \forall n \geq 1$$

Поспольку это действительно для любого натурального n, то $|A|$ может равняться лишь нулю, чтобы произведение не могло превышать 3, но из (1.1) имеем, что эта сумма (произведение) это значение должно быть не меньше, чем 1:

$$|A| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |A| = 0 \ngeq 1$$

Противоречие. □

Пока что не будут разглядываться непустые множества без длины.

Глава 2

Вероятность

2.1 Условная вероятность

A, B — случайные события, $\mathbb{P}(B) > 0$)

Определение 2.1.1. *Условная вероятность события A при условии B (при условии, что B произошло)*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Очевидные свойства:

1. $\mathbb{P}(B \mid B) = 1$
2. $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = 1$
3. $\mathbb{P}(\emptyset \mid B) = 0$

Пример 2.1.1. *Игральный кубик подбрасывается два раза. Событие A состоит в том, что сумма очков равна 9. Событие B состоит в том, что во второй раз выпадет чётная цифра.*

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left\{(i,j) \mid i,j = \overline{1,6}\right\} &&\Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36\\
A &= \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} &&\Rightarrow |A| = 4\\
B &= \left\{(i,k) \mid i = \overline{1,6}, k = 2,4,6\right\} &&\Rightarrow |B| = 6 \cdot 3 = 18\\
A \cap B &= \{(3,6),(5,4)\} &&\Rightarrow |A \cap B| = 2\\
\mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}\\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{18}\\
\mathbb{P}(A \mid B) &= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

2.2 Формула полной вероятности

Определение 2.2.1. *Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется полным набором гипотез, если выполняются ледующие условия:*

1. *Вероятность ни одного из них не равна нулю*

$$\mathbb{P}(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$$

2. *Они попарно не пересекаются*

$$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$

3. *Их объединение составляет вероятностное пространство*

$$\bigcup_{k=1}^{n} H_k = \Omega$$

Свойства очень похожи на определение разбиения множества, но с одной поправкой: условие 1 *более сильное, так как ранее было показано, что бывают непустые множества, вероятность которых равна нулю.*

Лемма 2.2.1. *Если набор $H_1, \ldots, H_n$ является разбиением множества Ω, то для его произвольного непустого подмножества $A \subset \Omega$ семейство $G = \{H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ будет разбиением.*

Доказательство. Обозначим через m количество элементов в множестве G

$$m = |G|$$

Первое свойство очевидно выполняется по построению: в семейство входят только ненулевые множества.

Выполнение второго свойства показываеть просто

$$G_i \cap G_j = (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (H_i \cap H_j) \cap A = \emptyset, i \neq j$$

Чтобы показать то, что выполняется и третье свойство, нужно немного подумать

$$\bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{A \cap H_k \neq \emptyset} (A \cap H_k)$$

Поскольку объединение любого множества A с пустым даст исходное множество ($A \cup \emptyset = A$), то к объединению можно добавить и пустые пересечения — те $A \cap H_k$, которые не содержат элементов, от чего и не попали в G

$$\bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap H_k)$$

А дальше всё тривиально

$$\bigcup_{k=1}^{m} G_k = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap H_k) = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k \right) = A \cap \Omega = A$$

□

Лемма 2.2.2 (Формула полной вероятности). Ω — *вероятностное пространство,* $\Omega \supset A$ — *случайное событие,* $\Omega \supset H_1, \ldots, H_n$ — *полный набор гипотез. Тогда*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

Доказательство. Когда $\mathbb{P}(A) = 0$, то доказательство очевидно, так как $\mathbb{P}(A \mid H_k) = 0, \forall H_k$.

Займёмся случаем, когда $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Поскольку $\left\{H_k \mid k = \overline{1, n}\right\}$ — разбиение Ω, то семейство $G = \{A \cap H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ — разбиение A ($|G| = m$), а это значит, что сумма мощностей всех G_k равняется мощности их объединения, а их объединение — это и есть множество A

$$\sum_{k=1}^{m} |G_k| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} G_k\right| = |A|$$

Перепишем по-другому это равенство, пользуясь тем, что добавление нуля к сумме ничего не меняет: ведь могут быть такие пересечения $A \cap H_k$, которые являются пустыми множествами, а это значит, что их мощность равна 0 ($A \cap H_k = \emptyset \Rightarrow |A \cap H_k| = 0$)

$$|A| = \sum_{k=1}^{m} |G_k| = \sum_{A \cap H_k \neq \emptyset} |A \cap H_k| = \sum_{k=1}^{n} |A \cap H_k|$$

Поделим обе части на мощность вероятностного пространства $|\Omega|$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|A \cap H_k|}{|\Omega|}$$

Теперь видим вероятность события A слева и сумму вероятностей того, что это событие произошло вместе с каждой гипотезой H_k, справа

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_k)$$

Умножаем правую часть на единицу и получаем желаемый результат

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k)\right)$$

Последняя дробь по определению является вероятностью A при условии того, что произошло событие H_k. Таким образом, лемма доказана

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

$\square$

2.3 Формула Байеса

Постановка задачи: Имеется вероятностное пространство Ω, случайное событие $A \subset \Omega$, $H_1, \ldots, H_n$ — полный набор гипотез, вероятности $\mathbb{P}(H_k)$ и $\mathbb{P}(A \mid H_k)$ известны для каждой гипотезы. Нужно найти $\mathbb{P}(H_k \mid A)$.

Лемма 2.3.1 (Формула Байеса)**.**

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

Доказательство. Начнём с определения условной вероятности

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Распишем знаменатель по формуле полной вероятности, а числитель умножим на 1

$$\frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

В числителе получилась условная вероятность, умноженная на вероятность гипотезы — формула Байеса доказана

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

□

2.4 Независимые события

2.4.1 Основные определения и утверждения

Определение 2.4.1. *A и B независимы, если вероятность того, что они произошли одновременно, равна произведению их вероятностей*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$$

Определение 2.4.2. *$A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если для всякого набора $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$ выполняется равенство*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Обозначение: $A^1 = A, A^{-1} = \overline{A}$

Утверждение 2.4.1. *Из того, что случайные величины $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, следует, что любая непустая подсовокупность этой совокупности тоже независима.*

Доказательство. Если $n = 2$, то доказательство тривиально, так как имеется набор A_1, A_2 и подсовокупность будет содержать лишь один элемент, вероятность которого будет равна произведению вероятностей всех элементов, то есть его вероятности

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{1} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) = \mathbb{P}(A^{\varepsilon_1})$$

Займёмся же серьёзными вещами и дальше будем считать, что $n > 2$. Имеется набор независимых в совокупности случайных событий $A_1, \ldots, A_n$. Это значит, что для всякого набора $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Перепишем его в другом виде (отделим $A_n^{\varepsilon_n}$ от кучи)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k} \cap A_n^{\varepsilon_n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$$

Введём событие $\mathcal{A}^{\varepsilon}$, для набора $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$, состоящее в том, что произошли все события $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$

$$\mathcal{A}^{\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}$$

Тогда вышеупомянутое тождество будет переписано в виде

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^{\varepsilon} \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$$

Поделим обе части на вероятность того, что произошло событие A_n

$$\frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}^{\varepsilon} \cap A_n^{\varepsilon_n})}{\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})} = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Слева имеем условную вероятность

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^{\varepsilon} \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Отметим, что ε_n не фигурирует справа и может принимать как значение 1, так и -1, а это значит, что в левой части может стоять как A_n, так и его дополнение $\overline{A_n}$, а это значит, что условные вероятности равны

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^{\varepsilon} \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^{\varepsilon} \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \tag{2.1}$$

Чтобы доказать утверждение о том, что набор событий $A_1, \ldots, A_{n-1}$ является независимым в совокупности, нужно показать, что вероятность события $\mathcal{A}^\varepsilon$ равна произведению вероятностей событий $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$, то есть, показать, что событие $\mathcal{A}^\varepsilon$ не зависит от события $A_n^{\varepsilon_n}$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_k^{\varepsilon_k}\right) \tag{2.2}$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для $\mathcal{A}^\varepsilon$ с набором гипотез $A_n^{\varepsilon_n}$ и $\overline{A_n^{\varepsilon_n}} = A_n^{-\varepsilon_n}$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_n^{-\varepsilon_n}\right)$$

Используем то, что $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right)\right)$$

Раскрываем скобки и группируем множители при $\mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right)$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right) \cdot \left[\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) - \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right)\right] + \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) \tag{2.3}$$

Взглянув на равенство (2.1), видим, что условные вероятности в скобках равенства (2.3) равны, а это значит, что их разность равна нулю

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) - \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) = 0$$

Учитывая то, что разность этих вероятностей равна нулю, вернёмся к равенству (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon_n}\right) \cdot 0 + \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) \\ \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) \end{aligned}$$

Снова воспользуемся равенством (2.1) и получаем, что вероятность пересечения событий $A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ равна произведению вероятностей этих событий, а это значит, что выполняется равенство (2.2)

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_k^{\varepsilon_k}\right)$$

Убираем промежуточные значения (условные вероятности), переходим к начальным обозначениям и получаем то, что при выбрасывании последнего элемента из последовательности $A_1, \ldots, A_n$ остальные события $A_1, \ldots, A_{n-1}$ остаются независимыми в совокупности

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_k^{\varepsilon_k}\right)$$

Так как пересечение множеств и умножение чисел коммутативно, то можем переместить любой элемент A_k в конец последовательности, а его вероятность в конец произведения. Тогда задача доказательства того, что при выбрасывании произвольного элемента из совокупности независимых событий всё равно будет независимый в совокупности набор случайных событий, сводится к предыдущей задаче, где удаляли последний элемент A_n.

Не ограничиваемся данными рассуждениями. Если выкинуть один элемент из набора, то получаем независимые в совокупности события, а это значит, что, если получившийся набор не пуст, то из него опять же можно убрать один элемент и опять же получим независимые в совокупности события. Таким образом можно получить любую подсовокупность исходной независимой совокупности $A_1, \dots, A_n$, которая тоже в свою очередь будет независимой.

□

Утверждение 2.4.2. *Если $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ независимы в совокупности, то события $B_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $B_2 = \bigcup\limits_{k=n+1}^{n+m} A_k$ независимы.*

Доказательство. Возьмём независимые в совокупности события.

$$A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$$

Введём два события

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

$$B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$$

Нужно доказать, что вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей

$$\mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2\right) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}\left(B_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(B_2\right) \tag{2.4}$$

Применим закон де Моргана

$$\mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\overline{B_1} \cup \overline{B_2}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}\right) \tag{2.5}$$

Имеем вероятность того, что прозшло хотя бы одно из событий, значит, можно применить формулу включения-исключения

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) \tag{2.6}$$

Воспользовавшись законом де Моргана, перепишем события B_1 и B_2 без объединений

$$B_1 = \overline{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}}$$

$$B_2 = \overline{\bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}}$$

Поскольку пересечение $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ содержит лишь независимые в совокупности события, то его вероятность равна произведению вероятностей этих событий (вспомним, что дополнения независимых в совокупностей событий тоже независимы в совокупности, что описывается тем случаем, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{n+m} = -1$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) &= \mathbb{P}\left\{\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}\right)\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{n+m}}\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{n+m} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) \cdot \prod_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\end{aligned}$$

Поскольку $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_{n+m}}$ — набор независимых случайных событий, то любая подсовокупность тоже является независимой. Таким образом, выделив два набора $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ и $\overline{A_{n+1}}, \ldots, \overline{A_{n+m}}$, видим, что последние произведения вероятностей этих событий есть ни что иное, как вероятности пересечений

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) \cdot \prod_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)$$

Перейдя от пересечений событий A_k обратно к событиям B_1 и B_2, видим, что дополнения этих событий независимы

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right)$$

Вернёмся к равенству (2.6) и перепишем его, используя только что полученные знания

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right)\end{aligned}$$

А теперь посмотрим, что случится с равенством (2.5)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{\overline{B_1} \cup \overline{B_2}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}\right) = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right) = \\ &= \left[1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\right] \cdot \left[1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_2}\right)\right] = \mathbb{P}\left(B_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(B_2\right)\end{aligned}$$

Видим, что равенство (2.4) выполняется, а это значит, что утверждение доказано

$$\mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2\right) = \mathbb{P}\left(B_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(B_2\right)$$

□

2.4.2 Лемма Бореля-Кантелли

Подбрасываем монетку бесконечное число раз. Какова вероятрность того, что решка выпадет бесконечное число раз?

Если ввести событие A_n, которое состоит в том, что при n-ом подбрасывании монетки выпала решка, то дополнение к нему $\overline{A_n}$ будет состоять в том, что при n-ом подбрасывании монетки выпал орёл.

Очевидно, что последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ независима в совокупности, так как монетке всё равно, какой стороной она упала на пол в прошлый раз.

Теперь видим, что собитие A, которое заключается в том, что решка выпадет бесконечное число раз, есть ни что иное как верхний предел последовательности событий A_n

$$A = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$$

Попробуем посчитать вероятность того, что этого не произойдёт. То есть, вероятность события $\overline{A}$. Для начала нужно разобраться, что оно из себя представляет

$$\overline{A} = \overline{\varlimsup_{n\to\infty} A_n} = \varliminf_{n\to\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \overline{A_m}$$

Поскольку мощность объединения множеств не больше, чем сумма их мощностей, а вероятность пересечения независимых событий равна произведению их вероятностей, то имеем мощные предпосылки для подсчёта вероятности. Пускай монетка несимметричная и вероятность выпадения решки равна $p : 0 < p < 1$, а вероятность выпадения орла равна $q = 1 - p$

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \overline{A_m} \leq \sum_{n\geq 1} \prod_{m\geq n} \mathbb{P}\left(\overline{A_m}\right) = \sum_{n\geq 1} \lim_{m\to\infty} q^{-m} = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$$

То есть, не может быть такого, что с какого-то момента всегда начнёт выпадать орёл (или же решка). Это значит, что при бесконечном подбрасывании монетки и орёл, и решка встретятся бесконечно часто, что вполне соответствует нашим представлениям о мире и симметричной монетке.

$$\mathbb{P}\left(A\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - 0 = 1$$

Лемма 2.4.1 (Бореля-Кантелли)**.** *Лемма состоит из двух частей*

a Имеется набор ***независимых*** *случайных собитый* $\{A_n \mid n \geq 1\}$ *(независимые в том смысле, что любая конечная подпоследовательность является независимов в совокупности). Если ряд, элементами которого являются вероятности этих событий,* ***расходится****, то произойдёт* ***бесконечно много*** *событий из исходной последовательности*

$$\begin{cases} \prod\limits_{n\in N} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in N} A_n\right), (\forall N \subset \mathbb{N} : |N| < +\infty) \\ \sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(A_n\right) = +\infty \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

b *Имеется* ***произвольный*** *набор случайных событий* $\{A_n \mid n \geq 1\}$*. Если ряд, элементами которого являются вероятности этих событий,* ***сходится****, то произойдёт лишь* ***конечное число*** *событий из исходной последовательности*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(A_n\right) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

Доказательство. a Поскольку вероятность — величина неотрицательная, произведение неотрицательных величин — тоже неотрицательная величина, то, если из суммы изъять неотрицательные величины, она не станет больше. Значит, можем упростить задачу

b Есть набор случайных событий $\{A_n \mid n \geq 1\}$. Также известно, что ряд, состоящих из их вероятностей, сходится.

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(A_n\right) < +\infty$$

Поскольку ряд сходится, то это значит, что его остаток r_n при достаточно больших n стремится к нулю[1, стр. 430]

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(A_n\right) < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \mathbb{P}\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Мощность пересечения двух множеств не больше, чем мощность каждого из них. Значит, вероятность верхнего предела не больше, чем вероятность какого-либо объединения, которое присутствует в формуле. Ничто не мешает выбрать объединение, не содержащее сколь угодно много первых событий последовательности.

$$\mathbb{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

Знаем, что вероятность объединения случайных не больше, чем сумма вероятностей случайных событий. Тут видим, что пригождается свойство сходимости ряда и вероятность того, что произойдёт бесконечно много событий, не больше нуля

$$\mathbb{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \mathbb{P}\left(A_k\right) = 0$$

Вторая часть леммы доказана.

□

Литература

[1] В. А. Ильин Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть I. Москва: Физико-математическая литература, 2005. 648 с.

Оглавление