

# Теория вероятностей

9 марта 2014 г.



# Глава 1

## ОСНОВЫ

### 1.1 Предисловие

Теория вероятностей — наука о **повторяющихся случайных** явлениях.

Примеры: квантовая физика, вихри в турбулентных потоках, изменения молекулы ДНК в жидкостях, ...

Цель: **прогноз**. Мы, исследуя случайные явления, будем пытаться что-то предсказать.

Нас интересует то, что случается с нами периодически.

При исследовании повторяющихся случайных явлений мы исследуем количественные характеристики и закономерности

### 1.2 Вероятностный эксперимент

**Определение 1.2.1.** *Вероятностный эксперимент — явление, исход которого для нас неопределён и который можно повторить любое число раз независимым образом.*

**Определение 1.2.2.** *Вероятностное пространство — совокупность всех исходов вероятностного эксперимента.*

$\Omega$  — вероятностное пространство

$\Omega \ni \omega$  — элементарный исход

**Пример 1.2.1** (Подбрасывание монетки). *Выпадение орла (0) и выпадение решки (1) — элементарные исходы*

$$\Omega = \{0, 1\}$$

**Пример 1.2.2** (Подбрасывание игрального кубика). *Количество выпавших очков — элементарный исход*

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

**Пример 1.2.3** (Задача о встрече). *Два человека в течение часа один раз приходят на одно и то же место.*

Пара  $(x, y)$  — элементарный исход (время, в которое первый и второй человек появится в указанном месте)

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$$

**Пример 1.2.4** (Монета подбрасывается до первого появления орла). Элементарный исход — номер подбрасывания, на котором выпадет орёл

$$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

### 1.3 Случайные события и действия над ними

**Определение 1.3.1.** Случайное событие — подмножество множества всех исходов вероятностного эксперимента.

$\Omega \supset A$  — случайное событие

$\Omega$  — достоверное событие

$\emptyset$  — невозможное события

**Пример 1.3.1** (Подбрасывание монетки).  $A$  — выпал орёл

$$A = \{0\}$$

**Пример 1.3.2** (Подбрасывание игрального кубика).  $A$  — выпало чётное число

$$A = \{2, 4, 6\}$$

**Пример 1.3.3** (Задава о встрече).  $A$  — встретились

**Пример 1.3.4** (Монета подбрасывается до первого появления орла).  $A$  — не потребовалось 100 подбрасываний

$$A = \{1, \dots, 99\}$$

Можно говорить о **пересечении** событий  $A$  и  $B$ , но лучше говорить, что они **произошли одновременно**.

$\emptyset$  — невозможное событие

$\Omega$  — достоверное события

$\bar{A}$  — событие  $A$  не произошло

$A \cap B$  —  $A$  и  $B$  произошли

$A \cup B$  — произошло хотя бы одно из событий  $A, B$

$A \setminus B$  — произошло  $A$ , но не  $B$

**Определение 1.3.2.** Последовательность случайных событий

$$\{A_n \mid n \geq 1\}$$

**Определение 1.3.3.** Верхний предел последовательности  $\{A_n \mid n \geq 1\}$  — это случайное событие, состоящее в том, что произошло бесконечно много событий из исходной последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

**Определение 1.3.4.** *Нижний предел последовательности  $\{A_n \mid n \geq 1\}$  — это случайное событие, состоящее в том, что произошли все события из исходной последовательности.*

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Некоторые свойства:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}}$$

## 1.4 Классический вероятностный эксперимент

**Определение 1.4.1.** *Классический вероятностный эксперимент — такой, у которого конечное число исходов, ни один из которых не является более предпочтительным, чем другой.*

У нас появилось желание приписывать числовые характеристики событиям.

$|\Omega| < +\infty$ , все элементарные исходы равновероятны,  $\Omega \supset A$  — случайное событие.

**Определение 1.4.2** (Вероятность). *Вероятность того, что случайное событие  $A \subset \Omega$  произошло, является отношением мощности множества  $A$  к мощности множества  $\Omega$ :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

*Свойства:*

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$\text{Частный случай: } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$$

Рецепт вычисления вероятности классического эксперимента:

1. Описать  $\Omega$
2. Описать события  $A$  (исходы, благоприятный событию  $A$ , состоят в том, что ...)
3. Найти  $|\Omega|, |A|, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

**Теорема 1.4.1** (Формула включения-исключения). *Есть  $n$  случайных событий:  $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ . Вероятность того, что произошло хотя бы одно событие, считается по формуле:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^n \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2}^n \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^3 A_{i_k}\right) - \\ &\dots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \left[ (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^k A_{i_t}\right) \right] \end{aligned}$$

**Пример 1.4.1** (Задача о конвертах). *Дано  $n$  писем и  $n$  конвертов. Письма раскладываются случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по правильному адресу.*

*Случайно раскладываем  $n$  писем по  $n$  конвертам — получаем перестановки.*

$\Omega$  — все перестановки чисел от 1 до  $n$

$A_i$  — событие, состоящее в том, что  $i$ -е письмо попало по правильному адресу

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i_1 < i_2} \frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \\ &= \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} + \\ &+ \dots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

## 1.5 Геометрический вероятностный эксперимент

**Пример 1.5.1** (Простейший геометрический эксперимент).  $G \subset D \subset \mathbb{R}^n$ , наугад выбираем точку  $M \in D$ . Событие  $A$  состоит в том, что  $M \in A$ . Тогда вероятность события  $G$ :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|G|}{|D|}$$

$|D|$  — длина, площадь, объём  $D$  (в зависимости от  $n$ )

Вероятность в геометрическом эксперименте обладает теми же свойствами, что и в классическом, но появились ненулевые события с нулевой вероятностью

$$(\exists A \subset \Omega)(A \neq \emptyset) : \mathbb{P}(A) = 0$$

**Пример 1.5.2** (Непустое событие с нулевой вероятностью). *Вероятность, события  $A$ , состоящего в том, что точка попадёт на линию (или точку) в трёхмерном пространстве, равна нулю, так как объём линии(точки) равен нулю (но такое событие возможно)*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0}{|D|} = 0$$

**Определение 1.5.1.** Для  $A \subset \mathbb{R}$

$$A + x = \{y + x \mid y \in A\}$$

Свойства длины. Разбиваем числовую прямую на непересекающиеся отрезки  $A_k$ :

$$A_k = [a_k; b_k], a_k < b_k < a_{k+1}$$

1. Аддитивность

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

2. Однородность Эвклидова пространства: длина множества, сдвинутого на  $x$ , равна длине исходного множества

$$|A + x| = |A|$$

**Утверждение 1.5.1.** Нельзя определить функцию множества, обладающую свойствами 1 и 2, на всех подмножествах числовой прямой.

*Доказательство.* Пусть  $|\cdot|$  определена на всех подмножествах  $\mathbb{R}$  и обладает свойствами 1 и 2.

Возьмём отрезок  $[0; 1]$  и введём отношение эквивалентности “ $\sim$ ”. Будем считать эквивалентными числа, разность между которыми — число рациональное.

$$\forall x, y \in [0; 1] : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Тогда множество классов эквивалентности  $\{K_\alpha\}$  будет разбиением отрезка  $[0; 1]$ :

$$\bigcup_{\alpha} K_\alpha = [0; 1]$$

$$K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

$A$  — множество, в котором находится по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Значит,  $|A| \leq 1$ .

Введём  $\{r_k\}$  — множество рациональных чисел на отрезке  $[-1; 1]$ :

$$\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$$

Поскольку в  $A$  содержится по одному представителю из каждого класса эквивалентности  $K_\alpha$ , разность между числами в каждом классе — число рациональное, а сами числа взяты из отрезка  $[0; 1]$ , то разность между двумя числами не может быть больше, чем 1 и меньше, чем  $-1$ , и является числом рациональным. Значит, объединив все возможные суммы чисел из  $A$  с числами из  $\{r_k\}$ , точно можно получить все числа из каждого класса  $K_\alpha$ , а, следовательно, и отрезок  $[0; 1]$ :

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \supset [0; 1]$$

Очевидно, что произвольное число  $x$  из отрезка  $[0; 1]$  будет принадлежать какому-то классу эквивалентности  $K_\alpha$  и найдётся такое число  $y$  из этого класса, принадлежащее множеству  $A$  (по определению множества  $A$ ):

$$x \in [0; 1] \Rightarrow \exists \alpha : \begin{cases} x \in K_\alpha \\ \exists y \in A \cap K_\alpha \end{cases}$$

Это в свою очередь означает, что разность  $x$  и  $y$  — рациональное число из множества  $\{r_k\}$ , так как они принадлежат одному классу эквивалентности  $K_\alpha$ :

$$x - y = r_k \Rightarrow x \in A + r_k$$

**Примечание** к применению свойства 2: множество  $\{A + r_k\}$  необязательно является разбиением, поэтому мощность объединений его элементов может быть меньше суммы их мощностей

$$|[0; 1]| = 1 \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |A + r_k| = \sum_{k \geq 1} |A| \quad (1.1)$$

Поскольку все числа из  $A$  попадают на отрезок  $[0; 1]$ , а  $r_k \in [-1; 1]$ , то ни одно из чисел множества  $\{A + r_k\}$  не попадёт за пределы отрезка  $[-1; 2]$ :

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \subset [-1; 2] \Rightarrow \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq 3 \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| \leq 3, \forall n \geq 1$$

Если взять два разных рациональных числа  $r_{k_1}$  и  $r_{k_2}$ , то  $A + r_{k_1}$  и  $A + r_{k_2}$  не будут иметь одинаковых элементов, так как, если разность между двумя числами — число рациональное, то они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, но множество  $A$  содержит лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности  $K_\alpha$ :

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow r_{k_1} \neq r_{k_2} \Rightarrow A + r_{k_1} \cap A + r_{k_2} = \emptyset$$

А это значит, что множество  $\{A + r_k\}$  является разбиением и к нему применимо свойство 2:

$$3 \geq \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| = \sum_{k=1}^n |A + r_k| = n \cdot |A|, \forall n \geq 1$$

Поскольку это действительно для любого натурального  $n$ , то  $|A|$  может равняться лишь нулю, чтобы произведение не могло превышать 3, но из (1.1) имеем, что эта сумма (произведение) это значение должно быть не меньше, чем 1:

$$|A| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |A| = 0 \not\geq 1$$

Противоречие. □

Пока что не будут разглядываться непустые множества без длины.



## Глава 2

# Вероятность

### 2.1 Условная вероятность

$A, B$  — случайные события,  $\mathbb{P}(B) > 0$

**Определение 2.1.1.** Условная вероятность события  $A$  при условии  $B$  (при условии, что  $B$  произошло)

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Очевидные свойства:

1.  $\mathbb{P}(B | B) = 1$
2.  $\mathbb{P}(\Omega | B) = 1$
3.  $\mathbb{P}(\emptyset | B) = 0$

**Пример 2.1.1.** Игральный кубик подбрасывается два раза. Событие  $A$  состоит в том, что сумма очков равна 9. Событие  $B$  состоит в том, что во второй раз выпадет чётная цифра.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) \mid i, j = \overline{1, 6}\} && \Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \\ A &= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} && \Rightarrow |A| = 4 \\ B &= \{(i, k) \mid i = \overline{1, 6}, k = 2, 4, 6\} && \Rightarrow |B| = 6 \cdot 3 = 18 \\ A \cap B &= \{(3, 6), (5, 4)\} && \Rightarrow |A \cap B| = 2 \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{18} \\ \mathbb{P}(A | B) &= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

## 2.2 Формула полной вероятности

**Определение 2.2.1.** Набор событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$  называется полным набором гипотез, если выполняются следующие условия:

1. Вероятность ни одного из них не равна нулю

$$\mathbb{P}(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$$

2. Они попарно не пересекаются

$$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$

3. Их объединение составляет вероятностное пространство

$$\bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$$

Свойства очень похожи на определение разбиения множества, но с одной поправкой: условие 1 более сильное, так как ранее было показано, что бывают непустые множества, вероятность которых равна нулю.

**Лемма 2.2.1.** Если набор  $H_1, \dots, H_n$  является разбиением множества  $\Omega$ , то для его произвольного непустого подмножества  $A \subset \Omega$  семейство  $G = \{H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$  будет разбиением.

*Доказательство.* Обозначим через  $m$  количество элементов в множестве  $G$

$$m = |G|$$

Первое свойство очевидно выполняется по построению: в семейство входят только ненулевые множества.

Выполнение второго свойства показывает просто

$$G_i \cap G_j = (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (H_i \cap H_j) \cap A = \emptyset, i \neq j$$

Чтобы показать то, что выполняется и третье свойство, нужно немного подумать

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{A \cap H_k \neq \emptyset} (A \cap H_k)$$

Поскольку объединение любого множества  $A$  с пустым даст исходное множество ( $A \cup \emptyset = A$ ), то к объединению можно добавить и пустые пересечения — те  $A \cap H_k$ , которые не содержат элементов, от чего и не попали в  $G$

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k)$$

А дальше всё тривиально

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k) = A \cap \left( \bigcup_{k=1}^n H_k \right) = A \cap \Omega = A$$

□

**Лемма 2.2.2** (Формула полной вероятности).  $\Omega$  — вероятностное пространство,  $\Omega \supset A$  — случайное событие,  $\Omega \supset H_1, \dots, H_n$  — полный набор гипотез. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

*Доказательство.* Когда  $\mathbb{P}(A) = 0$ , то доказательство очевидно, так как  $\mathbb{P}(A \mid H_k) = 0, \forall H_k$ .

Займёмся случаем, когда  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . Поскольку  $\{H_k \mid k = \overline{1, n}\}$  — разбиение  $\Omega$ , то семейство  $G = \{A \cap H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$  — разбиение  $A$  ( $|G| = m$ ), а это значит, что сумма мощностей всех  $G_k$  равняется мощности их объединения, а их объединение — это и есть множество  $A$

$$\sum_{k=1}^m |G_k| = \left| \bigcup_{k=1}^m G_k \right| = |A|$$

Перепишем по-другому это равенство, пользуясь тем, что добавление нуля к сумме ничего не меняет: ведь могут быть такие пересечения  $A \cap H_k$ , которые являются пустыми множествами, а это значит, что их мощность равна 0 ( $A \cap H_k = \emptyset \Rightarrow |A \cap H_k| = 0$ )

$$|A| = \sum_{k=1}^m |G_k| = \sum_{A \cap H_k \neq \emptyset} |A \cap H_k| = \sum_{k=1}^n |A \cap H_k|$$

Поделим обе части на мощность вероятностного пространства  $|\Omega|$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^n \frac{|A \cap H_k|}{|\Omega|}$$

Теперь видим вероятность события  $A$  слева и сумму вероятностей того, что это событие произошло вместе с каждой гипотезой  $H_k$ , справа

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap H_k)$$

Умножаем правую часть на единицу и получаем желаемый результат

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \left( \mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k) \right)$$

Последняя дробь по определению является вероятностью  $A$  при условии того, что произошло событие  $H_k$ . Таким образом, лемма доказана

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

□

## 2.3 Формула Байеса

Постановка задачи: Имеется вероятностное пространство  $\Omega$ , случайное событие  $A \subset \Omega$ ,  $H_1, \dots, H_n$  — полный набор гипотез, вероятности  $\mathbb{P}(H_k)$  и  $\mathbb{P}(A | H_k)$  известны для каждой гипотезы. Нужно найти  $\mathbb{P}(H_k | A)$ .

**Лемма 2.3.1** (Формула Байеса).

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

*Доказательство.* Начнём с определения условной вероятности

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Распишем знаменатель по формуле полной вероятности, а числитель умножим на 1

$$\frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

В числителе получилась условная вероятность, умноженная на вероятность гипотезы — формула Байеса доказана

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

□

## 2.4 Независимые события

### 2.4.1 Основные определения и утверждения

**Определение 2.4.1.**  $A$  и  $B$  независимы, если вероятность того, что они произошли одновременно, равна произведению их вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$$

**Определение 2.4.2.**  $A_1, \dots, A_n$  независимы в совокупности, если для всякого набора  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$  выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Обозначение:  $A^1 = A, A^{-1} = \bar{A}$

**Утверждение 2.4.1.** Из того, что случайные величины  $A_1, \dots, A_n$  независимы в совокупности, следует, что любая непустая подсовокупность этой совокупности тоже независима.

*Доказательство.* Если  $n = 2$ , то доказательство тривиально, так как имеется набор  $A_1, A_2$  и подсовокупность будет содержать лишь один элемент, вероятность которого будет равна произведению вероятностей всех элементов, то есть его вероятности

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^1 A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^1 \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) = \mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1})$$

Займёмся же серьёзными вещами и дальше будем считать, что  $n > 2$ . Имеется набор независимых в совокупности случайных событий  $A_1, \dots, A_n$ . Это значит, что для всякого набора  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$  выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Перепишем его в другом виде (отделим  $A_n^{\varepsilon_n}$  от кучи)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k} \cap A_n^{\varepsilon_n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$$

Введём событие  $\mathcal{A}^\varepsilon$ , для набора  $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ , состоящее в том, что произошли все события  $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}$$

Тогда вышеупомянутое тождество будет переписано в виде

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$$

Поделим обе части на вероятность того, что произошло событие  $A_n$

$$\frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \cap A_n^{\varepsilon_n})}{\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})} = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Слева имеем условную вероятность

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Отметим, что  $\varepsilon_n$  не фигурирует справа и может принимать как значение 1, так и  $-1$ , а это значит, что в левой части может стоять как  $A_n$ , так и его дополнение  $\overline{A_n}$ , а это значит, что условные вероятности равны

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \quad (2.1)$$

Чтобы доказать утверждение о том, что набор событий  $A_1, \dots, A_{n-1}$  является независимым в совокупности, нужно показать, что вероятность

события  $\mathcal{A}^\varepsilon$  равна произведению вероятностей событий  $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ , то есть, показать, что событие  $\mathcal{A}^\varepsilon$  не зависит от события  $A_n^{\varepsilon_n}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \quad (2.2)$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для  $\mathcal{A}^\varepsilon$  с набором гипотез  $A_n^{\varepsilon_n}$  и  $\overline{A_n^{\varepsilon_n}} = A_n^{-\varepsilon_n}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{-\varepsilon_n})$$

Используем то, что  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) \cdot (1 - \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}))$$

Раскрываем скобки и группируем множители при  $\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) \cdot [\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) - \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n})] + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) \quad (2.3)$$

Взглянув на равенство (2.1), видим, что условные вероятности в скобках равенства (2.3) равны, а это значит, что их разность равна нулю

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) - \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) = 0$$

Учитывая то, что разность этих вероятностей равна нулю, вернёмся к равенству (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) &= \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) \cdot 0 + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) \\ \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) &= \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) \end{aligned}$$

Снова воспользуемся равенством (2.1) и получаем, что вероятность пересечения событий  $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$  равна произведению вероятностей этих событий, а это значит, что выполняется равенство (2.2)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{-\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Убираем промежуточные значения (условные вероятности), переходим к начальным обозначениям и получаем то, что при выбрасывании последнего элемента из последовательности  $A_1, \dots, A_n$  остальные события  $A_1, \dots, A_{n-1}$  остаются независимыми в совокупности

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Так как пересечение множеств и умножение чисел коммутативно, то можем переместить любой элемент  $A_k$  в конец последовательности, а его вероятность в конец произведения. Тогда задача доказательства того, что при выбрасывании произвольного элемента из совокупности независимых событий всё равно будет независимый в совокупности набор случайных событий, сводится к предыдущей задаче, где удаляли последний элемент  $A_n$ .

Не ограничиваемся данными рассуждениями. Если выкинуть один элемент из набора, то получаем независимые в совокупности события, а это значит, что, если получившийся набор не пуст, то из него опять же можно убрать один элемент и опять же получим независимые в совокупности события. Таким образом можно получить любую подсовокупность исходной независимой совокупности  $A_1, \dots, A_n$ , которая тоже в свою очередь будет независимой.

□

**Утверждение 2.4.2.** Если  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$  независимы в совокупности, то события  $B_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$  и  $B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$  независимы.

*Доказательство.* Возьмём независимые в совокупности события.

$$A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$$

Введём два события

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

$$B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$$

Нужно доказать, что вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2) \quad (2.4)$$

Применим закон де Моргана

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{\overline{B_1 \cap B_2}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_1 \cap B_2}) \quad (2.5)$$

Имеем вероятность того, что произошло хотя бы одно из событий, значит, можно применить формулу включения-исключения

$$\mathbb{P}(\overline{B_1 \cap B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) - \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \quad (2.6)$$

Воспользовавшись законом де Моргана, перепишем события  $B_1$  и  $B_2$  без объединений

$$B_1 = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$$

$$B_2 = \bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}$$

Поскольку пересечение  $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$  содержит лишь независимые в совокупности события, то его вероятность равна произведению вероятностей этих

событий (вспомним, что дополнения независимых в совокупности событий тоже независимы в совокупности, что описывается тем случаем, когда  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{n+m} = -1$ )

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) &= \mathbb{P}\left\{\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}\right)\right\} = \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{n+m}}) = \\ &= \prod_{k=1}^{n+m} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} \mathbb{P}(\overline{A_k})\end{aligned}$$

Поскольку  $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_{n+m}}$  — набор независимых случайных событий, то любая подсовокупность тоже является независимой. Таким образом, выделив два набора  $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$  и  $\overline{A_{n+1}}, \dots, \overline{A_{n+m}}$ , видим, что последние произведения вероятностей этих событий есть ни что иное, как вероятности пересечений

$$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}\right)$$

Перейдя от пересечений событий  $A_k$  обратно к событиям  $B_1$  и  $B_2$ , видим, что дополнения этих событий независимы

$$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2})$$

Вернёмся к равенству (2.6) и перепишем его, используя только что полученные знания

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) &= \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) - \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \\ &= \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) - \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2})\end{aligned}$$

А теперь посмотрим, что случится с равенством (2.5)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) &= \mathbb{P}(\overline{\overline{B_1} \cup \overline{B_2}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(\overline{B_1}) - \mathbb{P}(\overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2}) = \\ &= [1 - \mathbb{P}(\overline{B_1})] \cdot [1 - \mathbb{P}(\overline{B_2})] = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2)\end{aligned}$$

Видим, что равенство (2.4) выполняется, а это значит, что утверждение доказано

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2)$$

□

### 2.4.2 Лемма Бореля-Кантелли

Подбрасываем монетку бесконечное число раз. Какова вероятность того, что решка выпадет бесконечное число раз?



Если ввести событие  $A_n$ , которое состоит в том, что при  $n$ -ом подбрасывании монетки выпала решка, то дополнение к нему  $\overline{A_n}$  будет состоять в том, что при  $n$ -ом подбрасывании монетки выпал орёл.

Очевидно, что последовательность событий  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  независима в совокупности, так как монетке всё равно, какой стороной она упала на пол в прошлый раз.

Теперь видим, что событие  $A$ , которое заключается в том, что решка выпадет бесконечное число раз, есть ни что иное как верхний предел последовательности событий  $A_n$

$$A = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n$$

Попробуем посчитать вероятность того, что этого не произойдёт. То есть, вероятность события  $\overline{A}$ . Для начала нужно разобраться, что оно из себя представляет

$$\overline{A} = \overline{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}$$

Поскольку мощность объединения множеств не больше, чем сумма их мощностей, а вероятность пересечения независимых событий равна произведению их вероятностей, то имеем мощные предпосылки для подсчёта вероятности. Пускай монетка несимметричная и вероятность выпадения решки равна  $p : 0 < p < 1$ , а вероятность выпадения орла равна  $q = 1 - p$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m} \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{m \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_m}) = \sum_{n \geq 1} \lim_{m \rightarrow \infty} q^{-m} = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$$

То есть, не может быть такого, что с какого-то момента всегда начнёт выпадать орёл (или же решка). Это значит, что при бесконечном подбрасывании монетки и орёл, и решка встретятся бесконечно часто, что вполне соответствует нашим представлениям о мире и симметричной монетке.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - 0 = 1$$

**Лемма 2.4.1** (Бореля-Кантелли). *Лемма состоит из двух частей*

*а Имеется набор **независимых** случайных событий  $\{A_n \mid n \geq 1\}$  (независимые в том смысле, что любая конечная подпоследовательность является независимой в совокупности). Если ряд, элементами которого являются вероятности этих событий, **расходится**, то произойдёт **бесконечно много** событий из исходной последовательности*

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \prod_{n \in N} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in N} A_n\right), (\forall N \subset \mathbb{N} : |N| < +\infty) \\ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) &= +\infty \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) = 1 \end{aligned}$$

*b* Имеется **произвольный** набор случайных событий  $\{A_n \mid n \geq 1\}$ . Если ряд, элементами которого являются вероятности этих событий, **сходится**, то произойдёт лишь **конечное число** событий из исходной последовательности

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) = 0$$

*Доказательство.* Доказательство тоже состоит из двух частей

*a* Имеются  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  — независимые случайные события. Это значит, что их дополнения  $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}, \dots$  тоже независимы между собой

$$\forall N \geq n \begin{cases} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N A_k\right) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(\overline{A_k}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) = \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \end{cases}$$

Также известно, что ряд, состоящий из вероятностей исходных событий, расходится

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$$

Посмотрим, чему равна вероятность дополнения к верхнему пределу

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right)$$

Мощность объединения не больше, чем сумма мощностей множеств

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k})$$

Зафиксируем полученный результат

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \quad (2.7)$$

Прологарифмируем произведение вероятностей дополнений случайных событий и воспользуемся неравенством  $\ln(1-x) \leq -x, 0 \leq x \leq 1$  [1, стр. 327]

$$\ln\left(\prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right) = \sum_{k \geq n} \ln[\mathbb{P}(1 - A_k)] \leq \sum_{k \geq n} [-\mathbb{P}(A_k)] = -\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k)$$

Поскольку ряд вероятностей по условию расходится, то любой его остаток  $r_n$  тоже расходится

$$r_n = \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$$

Это значит, что логарифм произведений стремится к  $-\infty$ , а само произведение стремится к нулю

$$\ln \left( \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \right) = - \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = -\infty \Rightarrow \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 0$$

Следовательно, вероятность, которую искали в (2.7), равна нулю

$$\mathbb{P} \left( \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$$

Это в свою очередь означает, что произойдёт бесконечно много событий из последовательности

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 1 - \mathbb{P} \left( \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) = 1 - 0 = 1$$

- б) Есть набор случайных событий  $\{A_n \mid n \geq 1\}$ . Также известно, что ряд, состоящих из их вероятностей, сходится.

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

Поскольку ряд сходится, то это значит, что его остаток  $r_n$  при достаточно больших  $n$  стремится к нулю [2, стр. 430]

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Мощность пересечения двух множеств не больше, чем мощность каждого из них. Значит, вероятность верхнего предела не больше, чем вероятность какого-либо объединения, которое присутствует в формуле. Ничто не мешает выбрать объединение, не содержащее сколь угодно много первых событий последовательности [1, стр. 327]

$$\mathbb{P} \left( \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

Знаем, что вероятность объединения случайных не больше, чем сумма вероятностей случайных событий. Тут видим, что приговора свойство сходимости ряда и вероятность того, что произойдёт бесконечно много событий, не больше нуля

$$\mathbb{P} \left( \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcup_{k \geq n} A_k \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

□



# Литература

- [1] Ширяев А. Н. Вероятность-1. Москва: МЦНМО, 2004. 520 с.
- [2] В. А. Ильин Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть I. Москва: Физико-математическая литература, 2005. 648 с.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Основы</b>	<b>3</b>
1.1	Предисловие . . . . .	3
1.2	Вероятностный эксперимент . . . . .	3
1.3	Случайные события и действия над ними . . . . .	4
1.4	Классический вероятностный эксперимент . . . . .	5
1.5	Геометрический вероятностный эксперимент . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Вероятность</b>	<b>9</b>
2.1	Условная вероятность . . . . .	9
2.2	Формула полной вероятности . . . . .	10
2.3	Формула Байеса . . . . .	12
2.4	Независимые события . . . . .	12
2.4.1	Основные определения и утверждения . . . . .	12
2.4.2	Лемма Бореля-Кантелли . . . . .	16