

Теория вероятностей

1 марта 2014 г.

Глава 1

ОСНОВЫ

1.1 Предисловие

Теория вероятностей — наука о **повторяющихся случайных** явлениях.

Примеры: квантовая физика, вихри в турбулентных потоках, изменения молекулы ДНК в жидкостях, ...

Цель: **прогноз**. Мы, исследуя случайные явления, будем пытаться что-то предсказать.

Нас интересует то, что случается с нами периодически.

При исследовании повторяющихся случайных явлений мы исследуем количественные характеристики и закономерности

1.2 Вероятностный эксперимент

Определение 1.2.1. *Вероятностный эксперимент — явление, исход которого для нас неопределён и который можно повторить любое число раз независимым образом.*

Определение 1.2.2. *Вероятностное пространство — совокупность всех исходов вероятностного эксперимента.*

Ω — вероятностное пространство

$\Omega \ni \omega$ — элементарный исход

Пример 1.2.1 (Подбрасывание монетки). 0 — орёл, 1 — решка

$$\Omega = \{0, 1\}$$

Пример 1.2.2 (Подбрасывание игрального кубика).

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

Пример 1.2.3 (Задава о встрече). Два человека в течение часа приходят на одно и то же место.

x, y — время, в которое окажется в данном месте первый или второй человек соответственно.

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$$

Пример 1.2.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла).

$$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

1.3 Случайные события и действия над ними

Определение 1.3.1. Случайное событие — подмножество множества всех исходов вероятностного эксперимента.

$\Omega \supset A$ — случайное событие

Ω — достоверное событие

\emptyset — невозможное события

Пример 1.3.1 (Подбрасывание монетки). A — выпал орёл

$$A = 0$$

Пример 1.3.2 (Подбрасывание игрального кубика). A — выпало чётное число

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Пример 1.3.3 (Задава о встрече). A — встретились

Пример 1.3.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла). A — не потребовалось 100 подбрасываний

$$A = \{1, \dots, 99\}$$

Можно говорить о **пересечении** событий A и B , но лучше говорить, что они **произошли одновременно**.

\emptyset — невозможное событие

Ω — достоверное события

\bar{A} — событие A не произошло

$A \cap B$ — A и B произошли

$A \cup B$ — произошло хотя бы одно из событий A, B

$A \setminus B$ — произошло A , но не B

Определение 1.3.2. Последовательность случайных событий

$$\{A_n \mid n \geq 1\}$$

Определение 1.3.3. Верхний предел последовательности $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — это случайное событие, состоящее в том, что произошло бесконечно много событий из исходной последовательности.

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

Определение 1.3.4. Нижний предел последовательности $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — это случайное событие, состоящее в том, что произошли все события из исходной последовательности.

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Некоторые свойства:

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\subset \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \\ \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} &= \varliminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n} \\ \overline{\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n} &= \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}\end{aligned}$$

1.4 Классический вероятностный эксперимент

Определение 1.4.1. *Классический вероятностный эксперимент — такой, у которого конечное число исходов, ни один из которых не является более предпочтительным, чем другой.*

У нас появилось желание приписывать числовые характеристики событиям.

$|\Omega| < +\infty$, все элементарные исходы равновероятны, $\Omega \supset A$ — случайное событие.

Определение 1.4.2 (Вероятность). *Вероятность того, что случайное событие $A \subset \Omega$ произошло, является отношением мощности множества A к мощности множества Ω :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Свойства:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$\text{Частный случай: } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$$

Рецепт вычисления вероятности классического эксперимента:

1. Описать Ω
2. Описать события A (исходы, благоприятный событию A , состоят в том, что ...)
3. Найти $|\Omega|, |A|, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Теорема 1.4.1 (Формула включения-исключения). *Есть n случайных событий: $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$. Вероятность того, что произошло хотя бы одно событие, считается по формуле:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^n \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2}^n \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^3 A_{i_k}\right) - \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \left[(-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^k A_{i_t}\right) \right]\end{aligned}$$

Пример 1.4.1 (Задача о конвертах). Дано n писем и n конвертов. Письма раскладываются случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по правильному адресу.

Случайно раскладываем n писем по n конвертам — получаем перестановки.

Ω — все перестановки чисел от 1 до n

A_i — событие, состоящее в том, что i -е письмо попало по правильному адресу

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i_1 < i_2} \frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \\ &= \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} + \\ &+ \dots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

1.5 Геометрический вероятностный эксперимент

Пример 1.5.1 (Простейший геометрический эксперимент). $G \subset D \subset \mathbb{R}^n$, наугад выбираем точку $M \in D$. Событие A состоит в том, что $M \in A$. Тогда вероятность события G :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|G|}{|D|}$$

$|D|$ — длина, площадь, объём D (в зависимости от n)

Вероятность в геометрическом эксперименте обладает теми же свойствами, что и в классическом, но появились ненулевые события с нулевой вероятностью

$$(\exists A \subset \Omega)(A \neq \emptyset) : \mathbb{P}(A) = 0$$

Пример 1.5.2 (Непустое событие с нулевой вероятностью). Вероятность, события A , состоящего в том, что точка попадёт на линию (или точку) в трёхмерном пространстве, равна нулю, так как объём линии (точки) равен нулю (но такое событие возможно)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0}{|D|} = 0$$

Определение 1.5.1. Для $A \subset \mathbb{R}$

$$A + x = \{y + x \mid y \in A\}$$

Свойства длины. Разбиваем числовую прямую на непересекающиеся отрезки A_k :

$$A_k = [a_k; b_k], a_k < b_k < a_{k+1}$$

1. Аддитивность

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

2. Однородность Эвклидова пространства: длина множества, сдвинутого на x , равна длине исходного множества

$$|A + x| = |A|$$

Утверждение 1.5.1. *Нельзя определить функцию множества, обладающую свойствами 1 и 2, на всех подмножествах числовой прямой.*

Доказательство. Пусть $|\cdot|$ определена на всех подмножествах \mathbb{R} и обладает свойствами 1 и 2.

Возьмём отрезок $[0; 1]$ и введём отношение эквивалентности “ \sim ”. Будем считать эквивалентными числа, разность между которыми — число рациональное.

$$\forall x, y \in [0; 1] : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Тогда множество классов эквивалентности $\{K_\alpha\}$ будет разбиением отрезка $[0; 1]$:

$$\bigcup_{\alpha} K_{\alpha} = [0; 1]$$

$$K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

A — множество, в котором находится по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Значит, $|A| \leq 1$.

Введём $\{r_k\}$ — множество рациональных чисел на отрезке $[-1; 1]$:

$$\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$$

Поскольку в A содержится по одному представителю из каждого класса эквивалентности K_α , разность между числами в каждом классе — число рациональное, а сами числа взяты из отрезка $[0; 1]$, то разность между двумя числами не может быть больше, чем 1 и меньше, чем -1 , и является числом рациональным. Значит, объединив все возможные суммы чисел из A с числами из $\{r_k\}$, точно можно получить все числа из каждого класса K_α , а, следовательно, и отрезок $[0; 1]$:

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \supset [0; 1]$$

Очевидно, что произвольное число x из отрезка $[0; 1]$ будет принадлежать какому-то классу эквивалентности K_α и найдётся такое число y из этого класса, принадлежащее множеству A (по определению множества A):

$$x \in [0; 1] \Rightarrow \exists \alpha : \begin{cases} x \in K_\alpha \\ \exists y \in A \cap K_\alpha \end{cases}$$

Это в свою очередь означает, что разность x и y — рациональное число из множества $\{r_k\}$, так как они принадлежат одному классу эквивалентности K_α :

$$x - y = r_k \Rightarrow x \in A + r_k$$

Примечание к применению свойства 2: множество $\{A + r_k\}$ необязательно является разбиением, поэтому мощность объединений его элементов может быть меньше суммы их мощностей

$$|[0; 1]| = 1 \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |A + r_k| = \sum_{k \geq 1} |A| \quad (1.1)$$

Поскольку все числа из A попадают на отрезок $[0; 1]$, а $r_k \in [-1; 1]$, то ни одно из чисел множества $\{A + r_k\}$ не попадёт за пределы отрезка $[-1; 2]$:

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \subset [-1; 2] \Rightarrow \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq 3 \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| \leq 3, \forall n \geq 1$$

Если взять два разных рациональных числа r_{k_1} и r_{k_2} , то $A + r_{k_1}$ и $A + r_{k_2}$ не будут иметь одинаковых элементов, так как, если разность между двумя числами — число рациональное, то они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, но множество A содержит лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности K_α :

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow r_{k_1} \neq r_{k_2} \Rightarrow A + r_{k_1} \cap A + r_{k_2} = \emptyset$$

А это значит, что множество $\{A + r_k\}$ является разбиением и к нему применимо свойство 2:

$$3 \geq \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| = \sum_{k=1}^n |A + r_k| = n \cdot |A|, \forall n \geq 1$$

Поскольку это действительно для любого натурального n , то $|A|$ может равняться лишь нулю, чтобы произведение не могло превышать 3, но из (1.1) имеем, что эта сумма (произведение) это значение должно быть не меньше, чем 1:

$$|A| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |A| = 0 \not\geq 1$$

Противоречие. □

Пока что не будут разглядываться непустые множества без длины.

Глава 2

2.1 Условная вероятность

A, B — случайные события, $\mathbb{P}(B) > 0$

Определение 2.1.1. Условная вероятность события A при условии B (при условии, что B произошло)

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Очевидные свойства:

1. $\mathbb{P}(B | B) = 1$
2. $\mathbb{P}(\Omega | B) = 1$
3. $\mathbb{P}(\emptyset | B) = 0$

Пример 2.1.1. Игральный кубик подбрасывается два раза. Событие A состоит в том, что сумма очков равна 9. Событие B состоит в том, что во второй раз выпадет чётная цифра.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) \mid i, j = \overline{1, 6}\} && \Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \\ A &= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} && \Rightarrow |A| = 4 \\ B &= \{(i, k) \mid i = \overline{1, 6}, k = 2, 4, 6\} && \Rightarrow |B| = 6 \cdot 3 = 18 \\ A \cap B &= \{(3, 6), (5, 4)\} && \Rightarrow |A \cap B| = 2 \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{18} \\ \mathbb{P}(A | B) &= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

2.2 Формула полной вероятности

Определение 2.2.1. Набор событий H_1, H_2, \dots, H_n называется полным набором гипотез, если выполняются следующие условия:

1. Вероятность ни одного из них не равна нулю

$$\mathbb{P}(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$$

2. Они попарно не пересекаются

$$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$

3. Их объединение составляет вероятностное пространство

$$\bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$$

Свойства очень похожи на определение разбиения множества, но с одной поправкой: условие 1 более сильное, так как ранее было показано, что бывают непустые множества, вероятность которых равна нулю.

Лемма 2.2.1. Если набор H_1, \dots, H_n является разбиением множества Ω , то для его произвольного непустого подмножества $A \subset \Omega$ семейство $G = \{H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ будет разбиением.

Доказательство. Обозначим через m количество элементов в множестве G

$$m = |G|$$

Первое свойство очевидно выполняется по построению: в семейство входят только ненулевые множества.

Выполнение второго свойства показывает просто

$$G_i \cap G_j = (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (H_i \cap H_j) \cap A = \emptyset, i \neq j$$

Чтобы показать то, что выполняется и третье свойство, нужно немного подумать

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{A \cap H_k \neq \emptyset} (A \cap H_k)$$

Поскольку объединение любого множества A с пустым даст исходное множество ($A \cup \emptyset = A$), то к объединению можно добавить и пустые пересечения — те $A \cap H_k$, которые не содержат элементов, от чего и не попали в G

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k)$$

А дальше всё тривиально

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k) = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n H_k \right) = A \cap \Omega = A$$

□

Лемма 2.2.2 (Формула полной вероятности). Ω — вероятностное пространство, $\Omega \supset A$ — случайное событие, $\Omega \supset H_1, \dots, H_n$ — полный набор гипотез. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

Доказательство. Когда $\mathbb{P}(A) = 0$, то доказательство очевидно, так как $\mathbb{P}(A \mid H_k) = 0, \forall H_k$.

Займёмся случаем, когда $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Поскольку $\{H_k \mid k = \overline{1, n}\}$ — разбиение Ω , то семейство $G = \{A \cap H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ — разбиение A ($|G| = m$), а это значит, что сумма мощностей всех G_k равняется мощности их объединения, а их объединение — это и есть множество A

$$\sum_{k=1}^m |G_k| = \left| \bigcup_{k=1}^m G_k \right| = |A|$$

Перепишем по-другому это равенство, пользуясь тем, что добавление нуля к сумме ничего не меняет: ведь могут быть такие пересечения $A \cap H_k$, которые являются пустыми множествами, а это значит, что их мощность равна 0 ($A \cap H_k = \emptyset \Rightarrow |A \cap H_k| = 0$)

$$|A| = \sum_{k=1}^m |G_k| = \sum_{A \cap H_k \neq \emptyset} |A \cap H_k| = \sum_{k=1}^n |A \cap H_k|$$

Поделим обе части на мощность вероятностного пространства $|\Omega|$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^n \frac{|A \cap H_k|}{|\Omega|}$$

Теперь видим вероятность события A слева и сумму вероятностей того, что это событие произошло вместе с каждой гипотезой H_k , справа

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap H_k)$$

Умножаем правую часть на единицу и получаем желаемый результат

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k) \right)$$

Последняя дробь по определению является вероятностью A при условии того, что произошло событие H_k . Таким образом, лемма доказана

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

□

2.3 Формула Байеса

Постановка задачи: Имеется вероятностное пространство Ω , случайное событие $A \subset \Omega$, H_1, \dots, H_n — полный набор гипотез, вероятности $\mathbb{P}(H_k)$ и $\mathbb{P}(A | H_k)$ известны для каждой гипотезы. Нужно найти $\mathbb{P}(H_k | A)$.

Лемма 2.3.1 (Формула Байеса).

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

Доказательство. Начнём с определения условной вероятности

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Распишем знаменатель по формуле полной вероятности, а числитель умножим на 1

$$\frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

В числителе получилась условная вероятность, умноженная на вероятность гипотезы — формула Байеса доказана

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

□

2.4 Независимые события

Определение 2.4.1. A и B независимы, если вероятность того, что они произошли одновременно, равна произведению их вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$$

Определение 2.4.2. A_1, \dots, A_n независимы в совокупности, если для всякого набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Обозначение: $A^1 = A, A^{-1} = \bar{A}$

Утверждение 2.4.1. Из того, что A_1, \dots, A_n независимы в совокупности, следует, что любая их подсовокупность тоже независима.

Утверждение 2.4.2. Если $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ независимы в совокупности, то $B_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$ и $B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$ независимы.

Доказательство. Возьмём независимые в совокупности события.

$$A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$$

Выделим из них две подсовокупности

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

$$B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$$

□

Оглавление

1	Основы	3
1.1	Предисловие	3
1.2	Вероятностный эксперимент	3
1.3	Случайные события и действия над ними	4
1.4	Классический вероятностный эксперимент	5
1.5	Геометрический вероятностный эксперимент	6
2		9
2.1	Условная вероятность	9
2.2	Формула полной вероятности	9
2.3	Формула Байеса	12
2.4	Независимые события	12