

Теория вероятностей

10 марта 2014 г.

Глава 1

ОСНОВЫ

1.1 Предисловие

Теория вероятностей — наука о **повторяющихся случайных** явлениях.

Примеры: квантовая физика, вихри в турбулентных потоках, изменения молекулы ДНК в жидкостях, ...

Цель: **прогноз**. Мы, исследуя случайные явления, будем пытаться что-то предсказать.

Нас интересует то, что случается с нами периодически.

При исследовании повторяющихся случайных явлений мы исследуем количественные характеристики и закономерности

1.2 Вероятностный эксперимент

Определение 1.2.1. *Вероятностный эксперимент — явление, исход которого для нас не определён и который можно повторить любое число раз **независимым** образом.*

Определение 1.2.2. *Вероятностное пространство — совокупность всех исходов вероятностного эксперимента.*

Ω — вероятностное пространство

$\Omega \ni \omega$ — элементарный исход

Пример 1.2.1 (Подбрасывание монетки). *Выпадение орла (0) и выпадение решки (1) — элементарные исходы*

$$\Omega = \{0, 1\}$$

Пример 1.2.2 (Подбрасывание игрального кубика). *Количество выпавших очков — элементарный исход*

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

Пример 1.2.3 (Задача о встрече). *Два человека в течение часа один раз приходят на одно и то же место.*

Пара (x, y) — элементарный исход (время, в которое первый и второй человек появится в указанном месте)

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$$

Пример 1.2.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла). Элементарный исход — номер подбрасывания, на котором выпадет орёл

$$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

1.3 Случайные события и действия над ними

Определение 1.3.1. Случайное событие — подмножество множества всех исходов вероятностного эксперимента.

$\Omega \supset A$ — случайное событие

Ω — достоверное событие

\emptyset — невозможное события

Пример 1.3.1 (Подбрасывание монетки). A — выпал орёл

$$A = \{0\}$$

Пример 1.3.2 (Подбрасывание игрального кубика). A — выпало чётное число

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Пример 1.3.3 (Задава о встрече). A — встретились

Пример 1.3.4 (Монета подбрасывается до первого появления орла). A — не потребовалось 100 подбрасываний

$$A = \{1, \dots, 99\}$$

Можно говорить о **пересечении** событий A и B , но лучше говорить, что они **произошли одновременно**.

\emptyset — невозможное событие

Ω — достоверное события

\bar{A} — событие A не произошло

$A \cap B$ — A и B произошли

$A \cup B$ — произошло хотя бы одно из событий A, B

$A \setminus B$ — произошло A , но не B

Определение 1.3.2. Последовательность случайных событий

$$\{A_n \mid n \geq 1\}$$

Определение 1.3.3. Верхний предел последовательности $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — это случайное событие, состоящее в том, что произошло бесконечно много событий из исходной последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

Определение 1.3.4. *Нижний предел последовательности $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — это случайное событие, состоящее в том, что произошли все события из исходной последовательности.*

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Некоторые свойства:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}}$$

1.4 Классический вероятностный эксперимент

Определение 1.4.1. *Классический вероятностный эксперимент — такой, у которого конечное число исходов, ни один из которых не является более предпочтительным, чем другой.*

У нас появилось желание приписывать числовые характеристики событиям.

$|\Omega| < +\infty$, все элементарные исходы равновероятны, $\Omega \supset A$ — случайное событие.

Определение 1.4.2 (Вероятность). *Вероятность того, что случайное событие $A \subset \Omega$ произошло, является отношением мощности множества A к мощности множества Ω :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Свойства:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$\text{Частный случай: } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$$

Рецепт вычисления вероятности классического эксперимента:

1. Описать Ω
2. Описать события A (исходы, благоприятный событию A , состоят в том, что ...)
3. Найти $|\Omega|, |A|, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Теорема 1.4.1 (Формула включения-исключения). *Есть n случайных событий: $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$. Вероятность того, что произошло хотя бы одно событие, считается по формуле:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^n \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2}^n \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^3 A_{i_k}\right) - \\ &\dots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \left[(-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^k A_{i_t}\right) \right] \end{aligned}$$

Пример 1.4.1 (Задача о конвертах). *Дано n писем и n конвертов. Письма раскладываются случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по правильному адресу.*

Случайно раскладываем n писем по n конвертам — получаем перестановки.

Ω — все перестановки чисел от 1 до n

A_i — событие, состоящее в том, что i -е письмо попало по правильному адресу

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i_1 < i_2} \frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \\ &= \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} + \\ &+ \dots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

1.5 Геометрический вероятностный эксперимент

Пример 1.5.1 (Простейший геометрический эксперимент). $G \subset D \subset \mathbb{R}^n$, наугад выбираем точку $M \in D$. Событие A состоит в том, что $M \in A$. Тогда вероятность события G :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|G|}{|D|}$$

$|D|$ — длина, площадь, объём D (в зависимости от n)

Вероятность в геометрическом эксперименте обладает теми же свойствами, что и в классическом, но появились ненулевые события с нулевой вероятностью

$$(\exists A \subset \Omega)(A \neq \emptyset) : \mathbb{P}(A) = 0$$

Пример 1.5.2 (Непустое событие с нулевой вероятностью). *Вероятность, события A , состоящего в том, что точка попадёт на линию (или точку) в трёхмерном пространстве, равна нулю, так как объём линии(точки) равен нулю (но такое событие возможно)*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0}{|D|} = 0$$

Определение 1.5.1. Для $A \subset \mathbb{R}$

$$A + x = \{y + x \mid y \in A\}$$

Свойства длины. Разбиваем числовую прямую на непересекающиеся отрезки A_k :

$$A_k = [a_k; b_k], a_k < b_k < a_{k+1}$$

1. Аддитивность

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

2. Однородность Эвклидова пространства: длина множества, сдвинутого на x , равна длине исходного множества

$$|A + x| = |A|$$

Утверждение 1.5.1. Нельзя определить функцию множества, обладающую свойствами 1 и 2, на всех подмножествах числовой прямой.

Доказательство. Пусть $|\cdot|$ определена на всех подмножествах \mathbb{R} и обладает свойствами 1 и 2.

Возьмём отрезок $[0; 1]$ и введём отношение эквивалентности “ \sim ”. Будем считать эквивалентными числа, разность между которыми — число рациональное.

$$\forall x, y \in [0; 1] : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Тогда множество классов эквивалентности $\{K_\alpha\}$ будет разбиением отрезка $[0; 1]$:

$$\bigcup_{\alpha} K_\alpha = [0; 1] \\ K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

A — множество, в котором находится по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Значит, $|A| \leq 1$.

Введём $\{r_k\}$ — множество рациональных чисел на отрезке $[-1; 1]$:

$$\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$$

Поскольку в A содержится по одному представителю из каждого класса эквивалентности K_α , разность между числами в каждом классе — число рациональное, а сами числа взяты из отрезка $[0; 1]$, то разность между двумя числами не может быть больше, чем 1 и меньше, чем -1 , и является числом рациональным. Значит, объединив все возможные суммы чисел из A с числами из $\{r_k\}$, точно можно получить все числа из каждого класса K_α , а, следовательно, и отрезок $[0; 1]$:

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \supset [0; 1]$$

Очевидно, что произвольное число x из отрезка $[0; 1]$ будет принадлежать какому-то классу эквивалентности K_α и найдётся такое число y из этого класса, принадлежащее множеству A (по определению множества A):

$$x \in [0; 1] \Rightarrow \exists \alpha : \begin{cases} x \in K_\alpha \\ \exists y \in A \cap K_\alpha \end{cases}$$

Это в свою очередь означает, что разность x и y — рациональное число из множества $\{r_k\}$, так как они принадлежат одному классу эквивалентности K_α :

$$x - y = r_k \Rightarrow x \in A + r_k$$

Примечание к применению свойства 2: множество $\{A + r_k\}$ необязательно является разбиением, поэтому мощность объединений его элементов может быть меньше суммы их мощностей

$$|[0; 1]| = 1 \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |A + r_k| = \sum_{k \geq 1} |A| \quad (1.1)$$

Поскольку все числа из A попадают на отрезок $[0; 1]$, а $r_k \in [-1; 1]$, то ни одно из чисел множества $\{A + r_k\}$ не попадёт за пределы отрезка $[-1; 2]$:

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \subset [-1; 2] \Rightarrow \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq 3 \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| \leq 3, \forall n \geq 1$$

Если взять два разных рациональных числа r_{k_1} и r_{k_2} , то $A + r_{k_1}$ и $A + r_{k_2}$ не будут иметь одинаковых элементов, так как, если разность между двумя числами — число рациональное, то они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, но множество A содержит лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности K_α :

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow r_{k_1} \neq r_{k_2} \Rightarrow A + r_{k_1} \cap A + r_{k_2} = \emptyset$$

А это значит, что множество $\{A + r_k\}$ является разбиением и к нему применимо свойство 2:

$$3 \geq \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| = \sum_{k=1}^n |A + r_k| = n \cdot |A|, \forall n \geq 1$$

Поскольку это действительно для любого натурального n , то $|A|$ может равняться лишь нулю, чтобы произведение не могло превышать 3, но из (1.1) имеем, что эта сумма (произведение) это значение должно быть не меньше, чем 1:

$$|A| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |A| = 0 \not\geq 1$$

Противоречие. □

Пока что не будут разглядываться непустые множества без длины.

Глава 2

Вероятность

2.1 Условная вероятность

A, B — случайные события, $\mathbb{P}(B) > 0$

Определение 2.1.1. Условная вероятность события A при условии B (при условии, что B произошло)

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Очевидные свойства:

1. $\mathbb{P}(B | B) = 1$
2. $\mathbb{P}(\Omega | B) = 1$
3. $\mathbb{P}(\emptyset | B) = 0$

Пример 2.1.1. Игральный кубик подбрасывается два раза. Событие A состоит в том, что сумма очков равна 9. Событие B состоит в том, что во второй раз выпадет чётная цифра.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) \mid i, j = \overline{1, 6}\} && \Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \\ A &= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} && \Rightarrow |A| = 4 \\ B &= \{(i, k) \mid i = \overline{1, 6}, k = 2, 4, 6\} && \Rightarrow |B| = 6 \cdot 3 = 18 \\ A \cap B &= \{(3, 6), (5, 4)\} && \Rightarrow |A \cap B| = 2 \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{18} \\ \mathbb{P}(A | B) &= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

2.2 Формула полной вероятности

Определение 2.2.1. Набор событий H_1, H_2, \dots, H_n называется *полным набором гипотез*, если выполняются следующие условия:

1. Вероятность ни одного из них не равна нулю

$$\mathbb{P}(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$$

2. Они попарно не пересекаются

$$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$

3. Их объединение составляет вероятностное пространство

$$\bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$$

Свойства очень похожи на определение разбиения множества, но с одной поправкой: условие 1 более сильное, так как ранее было показано, что бывают непустые множества, вероятность которых равна нулю.

Лемма 2.2.1. Если набор H_1, \dots, H_n является разбиением множества Ω , то для его произвольного непустого подмножества $A \subset \Omega$ семейство $G = \{H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ будет разбиением.

Доказательство. Обозначим через m количество элементов в множестве G

$$m = |G|$$

Первое свойство очевидно выполняется по построению: в семейство входят только ненулевые множества.

Выполнение второго свойства показать просто

$$G_i \cap G_j = (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (H_i \cap H_j) \cap A = \emptyset, i \neq j$$

Чтобы показать то, что выполняется и третье свойство, нужно немного подумать

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{A \cap H_k \neq \emptyset} (A \cap H_k)$$

Поскольку объединение любого множества A с пустым даст исходное множество ($A \cup \emptyset = A$), то к объединению можно добавить и пустые пересечения — те $A \cap H_k$, которые не содержат элементов, от чего и не попали в G

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k)$$

А дальше всё тривиально

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k) = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n H_k \right) = A \cap \Omega = A$$

□

Лемма 2.2.2 (Формула полной вероятности). Ω — вероятностное пространство, $\Omega \supset A$ — случайное событие, $\Omega \supset H_1, \dots, H_n$ — полный набор гипотез. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

Доказательство. Когда $\mathbb{P}(A) = 0$, то доказательство очевидно, так как $\mathbb{P}(A \mid H_k) = 0, \forall H_k$.

Займёмся случаем, когда $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Поскольку $\{H_k \mid k = \overline{1, n}\}$ — разбиение Ω , то семейство $G = \{A \cap H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$ — разбиение A ($|G| = m$), а это значит, что сумма мощностей всех G_k равняется мощности их объединения, а их объединение — это и есть множество A

$$\sum_{k=1}^m |G_k| = \left| \bigcup_{k=1}^m G_k \right| = |A|$$

Перепишем по-другому это равенство, пользуясь тем, что добавление нуля к сумме ничего не меняет: ведь могут быть такие пересечения $A \cap H_k$, которые являются пустыми множествами, а это значит, что их мощность равна 0 ($A \cap H_k = \emptyset \Rightarrow |A \cap H_k| = 0$)

$$|A| = \sum_{k=1}^m |G_k| = \sum_{A \cap H_k \neq \emptyset} |A \cap H_k| = \sum_{k=1}^n |A \cap H_k|$$

Поделим обе части на мощность вероятностного пространства $|\Omega|$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^n \frac{|A \cap H_k|}{|\Omega|}$$

Теперь видим вероятность события A слева и сумму вероятностей того, что это событие произошло вместе с каждой гипотезой H_k , справа

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap H_k)$$

Умножаем правую часть на единицу и получаем желаемый результат

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k) \right)$$

Последняя дробь по определению является вероятностью A при условии того, что произошло событие H_k . Таким образом, лемма доказана

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

□

2.3 Формула Байеса

Постановка задачи: Имеется вероятностное пространство Ω , случайное событие $A \subset \Omega$, H_1, \dots, H_n — полный набор гипотез, вероятности $\mathbb{P}(H_k)$ и $\mathbb{P}(A | H_k)$ известны для каждой гипотезы. Нужно найти $\mathbb{P}(H_k | A)$.

Лемма 2.3.1 (Формула Байеса).

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

Доказательство. Начнём с определения условной вероятности

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Распишем знаменатель по формуле полной вероятности, а числитель умножим на 1

$$\frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

В числителе получилась условная вероятность, умноженная на вероятность гипотезы — формула Байеса доказана

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

□

2.4 Независимые события

2.4.1 Основные определения и утверждения

Определение 2.4.1. A и B независимы, если вероятность того, что они произошли одновременно, равна произведению их вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$$

Определение 2.4.2. A_1, \dots, A_n независимы в совокупности, если для всякого набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Обозначение: $A^1 = A, A^{-1} = \bar{A}$

Утверждение 2.4.1. Из того, что случайные величины A_1, \dots, A_n независимы в совокупности, следует, что любая непустая подсовокупность этой совокупности тоже независима.

Доказательство. Если $n = 2$, то доказательство тривиально, так как имеется набор A_1, A_2 и подсовокупность будет содержать лишь один элемент, вероятность которого будет равна произведению вероятностей всех элементов, то есть его вероятности

$$\mathbb{P}(A_1^{\varepsilon_1}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^1 A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^1 \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) = \mathbb{P}(A^{\varepsilon_1})$$

Займёмся же серьёзными вещами и дальше будем считать, что $n > 2$. Имеется набор независимых в совокупности случайных событий A_1, \dots, A_n . Это значит, что для всякого набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Перепишем его в другом виде (отделим $A_n^{\varepsilon_n}$ от кучи)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k} \cap A_n^{\varepsilon_n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$$

Введём событие \mathcal{A}^ε , для набора $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$, состоящее в том, что произошли все события $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}$$

Тогда вышеупомянутое тождество будет переписано в виде

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \cap A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$$

Поделим обе части на вероятность того, что произошло событие A_n

$$\frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \cap A_n^{\varepsilon_n})}{\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})} = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Слева имеем условную вероятность

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Отметим, что ε_n не фигурирует справа и может принимать как значение 1, так и -1 , а это значит, что в левой части может стоять как A_n , так и его дополнение $\overline{A_n}$, а это значит, что условные вероятности равны

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid A_n^{\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon \mid \overline{A_n^{\varepsilon_n}}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \quad (2.1)$$

Чтобы доказать утверждение о том, что набор событий A_1, \dots, A_{n-1} является независимым в совокупности, нужно показать, что вероятность

события \mathcal{A}^ε равна произведению вероятностей событий $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$, то есть, показать, что событие \mathcal{A}^ε не зависит от события $A_n^{\varepsilon_n}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k}) \quad (2.2)$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для \mathcal{A}^ε с набором гипотез $A_n^{\varepsilon_n}$ и $\overline{A_n^{\varepsilon_n}} = A_n^{-\varepsilon_n}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{-\varepsilon_n})$$

Используем то, что $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) \cdot \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) \cdot (1 - \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}))$$

Раскрываем скобки и группируем множители при $\mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n})$

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) \cdot [\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) - \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n})] + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) \quad (2.3)$$

Взглянув на равенство (2.1), видим, что условные вероятности в скобках равенства (2.3) равны, а это значит, что их разность равна нулю

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) - \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) = 0$$

Учитывая то, что разность этих вероятностей равна нулю, вернёмся к равенству (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) &= \mathbb{P}(A_n^{\varepsilon_n}) \cdot 0 + \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) \\ \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) &= \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) \end{aligned}$$

Снова воспользуемся равенством (2.1) и получаем, что вероятность пересечения событий $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ равна произведению вероятностей этих событий, а это значит, что выполняется равенство (2.2)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{-\varepsilon_n}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}^\varepsilon | A_n^{\varepsilon_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Убираем промежуточные значения (условные вероятности), переходим к начальным обозначениям и получаем то, что при выбрасывании последнего элемента из последовательности A_1, \dots, A_n остальные события A_1, \dots, A_{n-1} остаются независимыми в совокупности

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^{\varepsilon_k})$$

Так как пересечение множеств и умножение чисел коммутативно, то можем переместить любой элемент A_k в конец последовательности, а его вероятность в конец произведения. Тогда задача доказательства того, что при выбрасывании произвольного элемента из совокупности независимых событий всё равно будет независимый в совокупности набор случайных событий, сводится к предыдущей задаче, где удаляли последний элемент A_n .

Не ограничиваемся данными рассуждениями. Если выкинуть один элемент из набора, то получаем независимые в совокупности события, а это значит, что, если получившийся набор не пуст, то из него опять же можно убрать один элемент и опять же получим независимые в совокупности события. Таким образом можно получить любую подсовокупность исходной независимой совокупности A_1, \dots, A_n , которая тоже в свою очередь будет независимой.

□

Утверждение 2.4.2. Если $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ независимы в совокупности, то события $B_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$ и $B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$ независимы.

Доказательство. Возьмём независимые в совокупности события.

$$A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$$

Введём два события

$$B_1 = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

$$B_2 = \bigcup_{k=n+1}^{n+m} A_k$$

Нужно доказать, что вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2) \quad (2.4)$$

Применим закон де Моргана

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{\overline{B_1 \cap B_2}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_1 \cap B_2}) \quad (2.5)$$

Имеем вероятность того, что произошло хотя бы одно из событий, значит, можно применить формулу включения-исключения

$$\mathbb{P}(\overline{B_1 \cap B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) - \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \quad (2.6)$$

Воспользовавшись законом де Моргана, перепишем события B_1 и B_2 без объединений

$$B_1 = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$$

$$B_2 = \bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}$$

Поскольку пересечение $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ содержит лишь независимые в совокупности события, то его вероятность равна произведению вероятностей этих

событий (вспомним, что дополнения независимых в совокупности событий тоже независимы в совокупности, что описывается тем случаем, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{n+m} = -1$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) &= \mathbb{P}\left\{\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}\right)\right\} = \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{n+m}}) = \\ &= \prod_{k=1}^{n+m} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} \mathbb{P}(\overline{A_k})\end{aligned}$$

Поскольку $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_{n+m}}$ — набор независимых случайных событий, то любая подсовокупность тоже является независимой. Таким образом, выделив два набора $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ и $\overline{A_{n+1}}, \dots, \overline{A_{n+m}}$, видим, что последние произведения вероятностей этих событий есть ни что иное, как вероятности пересечений

$$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n+1}^{n+m} \overline{A_k}\right)$$

Перейдя от пересечений событий A_k обратно к событиям B_1 и B_2 , видим, что дополнения этих событий независимы

$$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2})$$

Вернёмся к равенству (2.6) и перепишем его, используя только что полученные знания

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) &= \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) - \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \\ &= \mathbb{P}(\overline{B_1}) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) - \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2})\end{aligned}$$

А теперь посмотрим, что случится с равенством (2.5)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) &= \mathbb{P}(\overline{\overline{B_1} \cup \overline{B_2}}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(\overline{B_1}) - \mathbb{P}(\overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2}) = \\ &= [1 - \mathbb{P}(\overline{B_1})] \cdot [1 - \mathbb{P}(\overline{B_2})] = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2)\end{aligned}$$

Видим, что равенство (2.4) выполняется, а это значит, что утверждение доказано

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2)$$

□

2.4.2 Лемма Бореля-Кантелли

Подбрасываем монетку бесконечное число раз. Какова вероятность того, что решка выпадет бесконечное число раз?

Если ввести событие A_n , которое состоит в том, что при n -ом подбрасывании монетки выпала решка, то дополнение к нему $\overline{A_n}$ будет состоять в том, что при n -ом подбрасывании монетки выпал орёл.

Очевидно, что последовательность событий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ независима в совокупности, так как монетке всё равно, какой стороной она упала на пол в прошлый раз.

Теперь видим, что событие A , которое заключается в том, что решка выпадет бесконечное число раз, есть ни что иное как верхний предел последовательности событий A_n

$$A = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n$$

Попробуем посчитать вероятность того, что этого не произойдёт. То есть, вероятность события \overline{A} . Для начала нужно разобраться, что оно из себя представляет

$$\overline{A} = \overline{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}$$

Поскольку мощность объединения множеств не больше, чем сумма их мощностей, а вероятность пересечения независимых событий равна произведению их вероятностей, то имеем мощные предпосылки для подсчёта вероятности. Пускай монетка несимметричная и вероятность выпадения решки равна $p : 0 < p < 1$, а вероятность выпадения орла равна $q = 1 - p$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m} \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{m \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_m}) = \sum_{n \geq 1} \lim_{m \rightarrow \infty} q^{-m} = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$$

То есть, не может быть такого, что с какого-то момента всегда начнёт выпадать орёл (или же решка). Это значит, что при бесконечном подбрасывании монетки и орёл, и решка встретятся бесконечно часто, что вполне соответствует нашим представлениям о мире и симметричной монетке.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - 0 = 1$$

Лемма 2.4.1 (Бореля-Кантелли). *Лемма состоит из двух частей*

*а Имеется набор **независимых** случайных событий $\{A_n \mid n \geq 1\}$ (независимые в том смысле, что любая конечная подпоследовательность является независимой в совокупности). Если ряд, элементами которого являются вероятности этих событий, **расходится**, то произойдёт **бесконечно много** событий из исходной последовательности*

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \prod_{n \in N} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in N} A_n\right), (\forall N \subset \mathbb{N} : |N| < +\infty) \\ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) &= +\infty \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) = 1 \end{aligned}$$

б Имеется **произвольный** набор случайных событий $\{A_n \mid n \geq 1\}$. Если ряд, элементами которого являются вероятности этих событий, **сходится**, то произойдёт лишь **конечное число** событий из исходной последовательности

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) = 0$$

Доказательство. Доказательство тоже состоит из двух частей

а Имеются $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — независимые случайные события. Это значит, что их дополнения $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}, \dots$ тоже независимы между собой

$$\forall N \geq n \begin{cases} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N A_k\right) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(\overline{A_k}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) = \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \end{cases}$$

Также известно, что ряд, состоящий из вероятностей исходных событий, расходится

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$$

Посмотрим, чему равна вероятность дополнения к верхнему пределу

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right)$$

Мощность объединения не больше, чем сумма мощностей множеств

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k})$$

Зафиксируем полученный результат

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \quad (2.7)$$

Прологарифмируем произведение вероятностей дополнений случайных событий и воспользуемся неравенством $\ln(1-x) \leq -x, 0 \leq x \leq 1$ [1, стр. 327]

$$\ln\left(\prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right) = \sum_{k \geq n} \ln[\mathbb{P}(1 - A_k)] \leq \sum_{k \geq n} [-\mathbb{P}(A_k)] = -\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k)$$

Поскольку ряд вероятностей по условию расходится, то любой его остаток r_n тоже расходится

$$r_n = \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$$

Это значит, что логарифм произведений стремится к $-\infty$, а само произведение стремится к нулю

$$\ln \left(\prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \right) = - \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = -\infty \Rightarrow \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 0$$

Следовательно, вероятность, которую искали в (2.7), равна нулю

$$\mathbb{P} \left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \prod_{k \geq n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0$$

Это в свою очередь означает, что произойдёт бесконечно много событий из последовательности

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) = 1 - 0 = 1$$

- б) Есть набор случайных событий $\{A_n \mid n \geq 1\}$. Также известно, что ряд, состоящих из их вероятностей, сходится.

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

Поскольку ряд сходится, то это значит, что его остаток r_n при достаточно больших n стремится к нулю [2, стр. 430]

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Мощность пересечения двух множеств не больше, чем мощность каждого из них. Значит, вероятность верхнего предела не больше, чем вероятность какого-либо объединения, которое присутствует в формуле. Ничто не мешает выбрать объединение, не содержащее сколь угодно много первых событий последовательности [1, стр. 327]

$$\mathbb{P} \left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

Знаем, что вероятность объединения случайных не больше, чем сумма вероятностей случайных событий. Тут видим, что пригодились свойства сходимости ряда и вероятность того, что произойдёт бесконечно много событий, не больше нуля

$$\mathbb{P} \left(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

□

Литература

- [1] Ширяев А. Н. Вероятность-1. Москва: МЦНМО, 2004. 520 с.
- [2] В. А. Ильин Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть I. Москва: Физико-математическая литература, 2005. 648 с.

Оглавление

1	Основы	3
1.1	Предисловие	3
1.2	Вероятностный эксперимент	3
1.3	Случайные события и действия над ними	4
1.4	Классический вероятностный эксперимент	5
1.5	Геометрический вероятностный эксперимент	6
2	Вероятность	9
2.1	Условная вероятность	9
2.2	Формула полной вероятности	10
2.3	Формула Байеса	12
2.4	Независимые события	12
2.4.1	Основные определения и утверждения	12
2.4.2	Лемма Бореля-Кантелли	16