Must know

16 мая 2014 г.

Часть I

Распределения случайных величин

1 Дискретные распределения

1.1 Биномиальное распределение

1.1.1 Определение

$$\xi \sim Bin\left(n, p\right), n \in \mathbb{N}, p \in [0; 1]$$

$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k}$$

1.1.2 Математическое ожидание

Математическое ожидание посчитаем с помощью познаний в комбинаторике

$$\begin{aligned} M\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\ = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\ = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot [(n-1) - (k-1)]!} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\ = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\ = n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^{k-1} \cdot \left(1 - p\right)^{(n-1)-(k-1)} = \\ = n \cdot p \cdot \left[p + (1 - p)\right]^{n-1} = n \cdot p \cdot 1^{n-1} = n \cdot p \end{aligned}$$

1.1.3 Дисперсия

Дисперсию же выведем из знания того, что такое биномиальное распределение, а также с помощью свойств дисперсии. Биномиальное распределение — серия независимых испытаний Бернулли (подкидывание асимметричной монетки).

Если случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и k ($\xi \sim Bin\left(n, p\right)$), то $\mathbb{P}\left(\xi = k\right)$ — вероятность того, что в серии из n экспериментов удачными окажутся ровно k, а сама случайная величина — сумма случайных величин $\xi_i \sim Bin\left(1, p\right), i = \overline{1, n}$.

Таким образом, получаем

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Помним, что дисперсия суммы независимых случайных величин — сумма их дисперсий. Найдём дисперсию ξ_i:

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - \left(M\xi\right)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - \left[1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)\right]^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p)$$

Значит, теперь достаточно просто найти и дисперсию ξ

$$D\xi = D \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Обозначив вероятность “неудачи” через $q = 1 - p$, получим симпатичную формулу

$$D\xi = n \cdot p \cdot q$$

1.1.4 Характеристическая функция

Характеристическую функцию считать не так сложно, как математическое ожидание и дисперсию

$$\varphi_\xi\left(t\right) = Me^{i \cdot t \cdot \xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot t \cdot k} \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(p \cdot e^{i \cdot t}\right)^k \cdot (1-p)^{n-k} = \left(p \cdot e^{i \cdot t} + 1 - p\right)^n$$

С заменой $q = 1 - p$ характеристическая функция принимает вид

$$\varphi_\xi\left(t\right) = \left(p \cdot e^{i \cdot t} + q\right)^n$$

1.1.5 Итоги

$$\xi \sim Bin\left(n, p\right), n \in \mathbb{N}, p \in [0; 1]$$

$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$M\xi = n \cdot p$$

$$D\xi = n \cdot p \cdot q$$

$$\varphi_\xi\left(t\right) = \left(p \cdot e^{i \cdot t} + q\right)^n$$

1.2 Геометрическое распределение

1.2.1 Определение

$$\xi \sim Geom\left(p\right), p \in [0,1]$$
$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p$$

1.2.2 Математическое ожидание

Начнём с определения

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p$$

Дальше возьмём производную

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p = -p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k}$$

И вспомним, чему равна сумма бесконечного степенного ряда

$$-p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k} = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-\left(1-p\right)}\right)$$

Дальше сокращаем и берём производную

$$-p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-\left(1-p\right)}\right) = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p}\right) =$$
$$= -p \cdot \frac{-p-\left(1-p\right)}{p^2} = -p \cdot \frac{-1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

1.2.3 Дисперсия

Возьмём две производные от суммы

$$\frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(k-1\right) \left(1-p\right)^{k-2}$$

Разложим на две суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(k-1\right) \left(1-p\right)^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(1-p\right)^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k-2}$$

Теперь можем составить уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(1-p\right)^{k-2} = \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k-2}$$

Берём производную от первой суммы справа (которую считали выше), а также умножаем и делим на $(1-p)^2$ вторую

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-2} = \frac{d}{dp}\left(\frac{-1}{p^2}\right) + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

Берём вторую производную, а также снова вспоминаем сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-2} = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \frac{1-p}{p}$$

Умножим обе части на $(1-p)$, чтобы слева получалось $\frac{M\xi^2}{p}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-2\cdot p}{p^3} + \frac{1}{p}$$

Складываем дроби с правой стороны

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-2\cdot p+p^2}{p^3}$$

Видим квадрат разности в сумме с единицей

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{(1-p)^2+1}{p^3}$$

Теперь считаем дисперсию по определению

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = p \cdot \frac{(1-p)^2+1}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{(1-p)^2+1-1}{p^2}$$

Заменив $(1-p)$ на q, получаем такой ответ

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

1.2.4 Характеристическая функция

Начнём с определения

$$\varphi_\xi(t) = Me^{i\cdot t\cdot \xi} = \sum_{k=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot k} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Умножим и поделим на $(1-p)$, внесём экспоненты в скобки

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot k} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[e^{i\cdot t} \cdot (1-p)\right]^k$$

$$\frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[e^{i\cdot t} (1-p)\right]^k = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{i\cdot t} \cdot (1-p)}{1 - e^{i\cdot t} \cdot (1-p)}$$

$$\frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}{1-e^{i \cdot t} \cdot (1-p)} = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1-e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}$$

Снова заменим $q = 1 - p$ и получаем результат

$$\varphi_\xi(t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot q}$$

1.2.5 Итоги

$$\xi \sim Geom(p), p \in [0,1], q = 1 - p$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$$

$$M\xi = \frac{1}{p}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

$$\varphi_\xi(t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot q}$$

1.3 Пуассоновское распределение

1.3.1 Определение

$$\xi \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

1.3.2 Математическое ожидание

Тут всё элементарно: разложение экспоненты в ряд Тейлора. Также суммировать начинаем не с нуля, а с единицы, так как при $k = 0$ всё слагаемое обращается в нуль

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Далее выполняем замену $r = k - 1$, суммирование начинается с нуля. Получаем разложение экспоненты в ряд Тейлора (Маклорена)

$$e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

1.3.3 Дисперсия

Начнём с расчёта второго момента

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Разложим на две суммы, чтобы красиво сократить факториалы и проделать тот же трюк, что и выше

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Последняя сумма является математическим ожиданием, равным λ, а другую продолжим преобразовывать дальше

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

Пользуясь теми же принципами (сделав сумму по $r = k-2$ от 0 до ∞), снова получаем e^{λ}, которая сокращается. Теперь у нас есть второй момент

$$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda = \lambda \cdot (\lambda + 1)$$

Теперь можно посчитать дисперсию

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

1.3.4 Характеристическая функция

Тут всё тоже предельно просто

$$\varphi_\xi(t) = Me^{i \cdot t \cdot \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i \cdot t \cdot k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \cdot e^{i \cdot t}\right)^k}{k!}$$

Опять ряд Маклорена для экспоненты и всё выглядит почти красиво (за исключением экспоненты в экспоненте)

$$e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \cdot e^{i \cdot t}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \exp\left(\lambda \cdot e^{i \cdot t}\right) = \exp\left\{\lambda \cdot \left(e^{i \cdot t} - 1\right)\right\}$$

1.3.5 Итоги

$$\xi \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$M\xi = D\xi = \lambda$$

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{\lambda \cdot \left(e^{i \cdot t} - 1\right)\right\}$$

2 Непрерывные распределения

2.1 Равномерное распределение

2.1.1 Определение

$$\xi \sim Un\left([a,b]\right), a < b \in \mathbb{R}$$

$$p\left(x\right) = \frac{\mathbb{1}\left(x \in [a,b]\right)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left(x \in [a,b]\right)$$

2.1.2 Математическое ожидание

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left(x \in [a,b]\right)\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_{a}^{b} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

2.1.3 Дисперсия

Снова начнём с поиска второго момента

$$M\xi^2 = \int\limits_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)} = \frac{(b-a)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3\cdot(b-a)} =$$

$$= \frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3} = \frac{(a+b)^2-a\cdot b}{3}$$

А теперь считаем дисперсию

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(a+b)^2-a\cdot b}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{4\cdot(a+b)^2-4\cdot a\cdot b}{12} - \frac{3\cdot(a+b)^2}{12} = \frac{(a+b)^2-4\cdot a\cdot b}{12} =$$

$$= \frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot a\cdot b}{12} = \frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

2.1.4 Характеристическая функция

Берём интеграл от экспоненты

$$\varphi_\xi(t) = Me^{i\cdot t\cdot\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\cdot t\cdot x}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{1}\left(x\in[a,b]\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b e^{i\cdot t\cdot x}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{i\cdot t}\cdot\int\limits_a^b e^{i\cdot t\cdot x}\,d\left(x\cdot i\cdot t\right) =$$

$$= \frac{1}{i\cdot t\cdot(b-a)}\cdot e^{i\cdot t\cdot x}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{i\cdot t\cdot b}-e^{i\cdot t\cdot b}}{i\cdot t\cdot(b-a)}$$

2.1.5 Итоги

$$\xi\sim Un\left([a,b]\right), a<b\in\mathbb{R}$$

$$p(x) = \frac{1}{b-a}\cdot\mathbb{1}\left(x\in[a,b]\right)$$

$$M\xi = \frac{a+b}{2}$$

$$D\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\varphi_\xi(t) = \frac{e^{i\cdot t\cdot b}-e^{i\cdot t\cdot b}}{i\cdot t\cdot(b-a)}$$

2.2 Экспоненциальное распределение

2.2.1 Определение

$$\xi\sim Exp(\lambda), \lambda>0$$

$$p(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}$$

2.2.2 Математическое ожидание

2.2.3 Дисперсия

2.2.4 Характеристическая функция

2.2.5 Итоги

2.3 Нормальное распределение

2.3.1 Определение

2.3.2 Математическое ожидание

2.3.3 Дисперсия

2.3.4 Характеристическая функция

2.3.5 Итоги

Содержание