

# Математическая Статистика

31 мая 2014 г.



# Глава 1

## ОСНОВЫ

### 1.1 Методы оценок характеристик распределения наблюдаемых случайных величин

$x_1, \dots, x_n$  — независимые одинаково распределённые случайные величины с неизвестной функцией распределения  $F$ . Логично, что вероятность выпадения каждого  $x_k$  (вероятность того, что наугад взятый из выборки  $x$  будет равен  $x_k$ ) одинакова

$$P(x = x_k) = \frac{1}{n}$$

Цель — найти  $F$  или сказать что-то о её свойствах.

#### 1.1.1 Эмпирическая функция распределения

**Определение 1.1.1** (Эмпирическая функция распределения). Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной по выборке  $x_1, \dots, x_n$ , называется функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq x)$$

**Теорема 1.1.1.** *Неизвестная функция распределения  $F(x)$  может быть сколь угодно точно восстановлена по выборке достаточно большого объёма [1, стр. 25].*

$$\mathbb{P}\left(F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)\right) = 1$$

*Идея доказательства.* Вспомним, чему равна эмпирическая функция распределения

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq x)$$

Заметим, что индикаторы  $\mathbb{1}(x_k \leq x)$  являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, а функцию распределения  $F(x)$  можно записать следующим образом

$$F(x) = \mathbb{P}\{x_1 \leq x\} = M \mathbb{1}(x_1 \leq x)$$

Так как эмпирическая функция распределения является средним арифметическим индикаторов, то по усиленному закону больших чисел она сходится к неизвестной функции распределения почти наверное при устремлении длины выборки к бесконечности

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \mathbb{M}(x_1) = F(x)$$

Теорема доказана

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} F(x)$$

□

### 1.1.2 Гистограмма

Как можно попытаться отследить плотность распределения? Постараемся найти функцию распределения, а потом и плотность.

Допустим,  $F$  имеет хорошую (непрерывную) плотность. Как тогда из  $F$  получить  $p$ ?

Мы знаем, что  $F' = p$ , но это никому не нужно, так как  $F'_n$  — производная ступенчатой функции, которая почти везде будет равна нулю.

Но также мы помним, что

$$F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx$$

Положим  $a = x$  и введём  $\Delta_x = b - x$

$$F(x + \Delta_x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta_x} p(y) dy$$

Делим обе части на  $\Delta_x$ .

$$\frac{1}{\Delta_x} \cdot \int_x^{x+\Delta_x} p(y) dy = \frac{F(x + \Delta_x) - F(x)}{\Delta_x}$$

Несложно заметить, что при достаточно малых значениях  $\Delta_x$  получаем плотность распределения  $p(x)$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta_x} \xrightarrow{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{dF(x)}{dx} = p(x)$$

Значит, можем заменить  $p(x)$  не производной, а такой разностью.

$$p(x) \approx \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{\Delta}$$

Возьмём  $m$  полуинтервалов на числовой прямой  $I_j = (a_{j-1}, a_j], i = \overline{1, m}$  таких, что все значения выборки попадают в один из них. Для этого определим пару свойств точек, ограничивающих эти интервалы:

### 1.1. Методы оценок характеристик распределения наблюдаемых случайных величин

1. Каждая следующая точка строго правее (больше) предыдущей. (так как зачем нам одинаковые точки?)

$$a_0 < a_1 < \dots < a_m$$

2. Каждое значение выборки должно попадать ровно в один полуинтервал. Очевидно, что данные полуинтервалы  $I_j$  не пересекаются между собой. Значит, осталось потребовать, чтобы крайнее левое значение было меньше минимального значения из выборки, а крайнее правое — не меньше максимального

$$a_0 < \min(X) \leq \max(X) \leq a_m$$

Введём функцию  $q(y)$

$$q(y) = \sum_{j=1}^m \frac{F(a_j) - F(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}} \cdot \mathbb{1}(y \in I_j)$$

Определим последовательность функций  $q_n(y)$ , заменив  $F(x)$  на  $F_n(x)$  в предыдущем определении

$$q_n(y) = \sum_{j=1}^m \frac{F_n(a_j) - F_n(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}} \cdot \mathbb{1}(y \in I_j) \quad (1.1)$$

Отметим, что  $q_n$  сходится к  $q$  почти наверное (согласно закону больших чисел), а  $q$  в свою очередь сходится к  $p$  (согласно центральной предельной теореме)

$$q_n(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} q(y) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} p(y)$$

Функция  $q_n$  называется **гистограммой**.

Избавимся от  $a_j$  в формуле, а для этого вспомним, чему равно  $F_n(x)$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq x)$$

Теперь посмотрим, чему равна разность  $F_n(a_j) - F_n(a_{j-1})$ , которая, как мы видим, является вероятностью того, что  $x$  попало в отрезок  $I_j$

$$\begin{aligned} F_n(a_j) - F_n(a_{j-1}) &= \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq a_j) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1}) \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые и получим чуть более компактную запись разности

$$\begin{aligned} F_n(a_j) - F_n(a_{j-1}) &= \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n [\mathbb{1}(x_k \leq a_j) - \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1})] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим возможные значения индикаторов

Если оба индикатора равны единице, это значит, что  $x_k$  не больше  $a_j$  и не больше  $a_{j-1}$ . Поскольку  $a_{j-1} \leq a_j$ , то можно обойтись тем, что  $x \leq a_{j-1}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbb{1}(x_k \leq a_j) = 1 \\ \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1}) = 1 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_k \leq a_j \\ x_k \leq a_{j-1} \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \\ &\Rightarrow x_k \leq a_{j-1} \leq a_j \Rightarrow x_k \leq a_{j-1} \end{aligned}$$

Такая ситуация, что  $x$  больше, чем  $a_j$ , но не больше, чем  $a_{j-1}$ , невозможна, так как  $a_{j-1}$  не больше, чем  $a_j$ , а признать возможной такое положение дел ( $a_j < x_k \leq a_{j-1}$ ) означало бы то, что  $a_j < a_{j-1}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbb{1}(x_k \leq a_j) = 0 \\ \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1}) = 1 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_k > a_j \\ x_k \leq a_{j-1} \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_j < x_k \leq a_{j-1} \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} \end{aligned}$$

Если оба индикатора равны нулю, то это значит, что  $x$  строго больше как  $a_j$ , так и  $a_{j-1}$ . Опять же, поскольку  $a_{j-1} \leq a_j$ , то достаточно сказать, что  $x > a_j$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbb{1}(x_k \leq a_j) = 0 \\ \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1}) = 0 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_k > a_j \\ x_k > a_{j-1} \\ a_j \geq a_{j-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow x_k > a_j \geq a_{j-1} \Rightarrow x_k > a_j \end{aligned}$$

Если же  $x$  больше, чем  $a_{j-1}$ , но не больше, чем  $a_j$ , то  $x$  попадает в полуинтервал  $(a_{j-1}, a_j]$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbb{1}(x_k \leq a_j) = 1 \\ \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1}) = 0 \\ a_{j-1} \leq a_j \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_k \leq a_j \\ x_k > a_{j-1} \\ a_j \geq a_{j-1} \end{cases} \\ &\Rightarrow a_{j-1} < x_k \leq a_j \end{aligned}$$

Вспомним формулу (1.2)

$$\begin{aligned} F_n(a_j) - F_n(a_{j-1}) &= \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n [\mathbb{1}(x_k \leq a_j) - \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1})] \end{aligned}$$

Очевидно, что нас интересуют те пары, разность которых не равна нулю. Это значит, что те случаи, когда  $x > a_j$  или  $x \leq a_{j-1}$ , нас не интересуют. Поскольку такой случай, что  $a_j < x \leq a_{j-1}$  невозможен, то его тоже отбросим. Значит, остался только тот вариант, когда  $x$  попадает в полуинтервал  $(a_{j-1}, a_j]$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n [\mathbb{1}(x_k \leq a_j) - \mathbb{1}(x_k \leq a_{j-1})] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \in (a_{j-1}, a_j])$$

### 1.1. Методы оценок характеристик распределения наблюдаемых случайных величин 7

Видим знакомые полуинтервалы  $(a_{j-1}, a_j] = I_j$ . Воспользуемся этим

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \in (a_{j-1}, a_j]) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \in I_j)$$

Получаем компактную запись для разности функций распределения

$$F_n(a_j) - F_n(a_{j-1}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \in I_j) \quad (1.3)$$

Вернёмся к уравнению (1.1)

$$q_n(y) = \sum_{j=1}^m \frac{F_n(a_j) - F_n(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}} \cdot \mathbb{1}(y \in I_j)$$

Воспользовавшись тем, что  $(a_j - a_{j-1})$  — длина полуинтервала  $I_j$ , а разность  $F_n(a_j) - F_n(a_{j-1})$  была только что переписана через индикаторы, получаем такую формулу

$$q_n(y) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \in I_j) \cdot \frac{1}{|I_j|} \cdot \mathbb{1}(y \in I_j)$$

Упростим, введя функцию  $\nu_j(X)$  [1, стр. 68], которая считает количество элементов выборки  $X = x_1, \dots, x_n$ , попавших в интервал  $I_j$ . Это будет сумма индикаторов того, что элемент  $x_k$  попал в  $I_j$

$$\nu_j(X) = \sum_{x \in X} \mathbb{1}(x \in I_j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(x_k \in I_j)$$

Поскольку  $\mathbb{1}(y \in I_j)$  зависит от  $j$  и не зависит от  $k$ , то его можно перенести во внешнюю сумму. Получаем следующую формулу

$$q_n(y) = \sum_{j=1}^m \frac{\mathbb{1}(y \in I_j)}{n \cdot |I_j|} \cdot \nu_j(X)$$

У этой суммы только один ненулевой элемент, так как  $y$  может попасть только в один полуинтервал. Тогда обозначим номер отрезка, в который попал  $y$ , через  $k$  ( $y \in I_k$ ), а функцию  $q_n(y)$  запишем как  $q_n^k$

$$q_n^k = \frac{\nu_k(X)}{n \cdot |I_k|} \quad (1.4)$$

Что мы тут видим? Теперь  $k$  — номер “столбика” гистограммы (номер интересующего нас полуинтервала — того, в который попал  $y$ ).

“Высота” столбика (значение функции на определённом полуинтервале) пропорциональна количеству элементов, попавших в этот отрезок (что логично). Кроме того, происходит деление на общее количество элементов. Деление нужно, чтобы  $q(y)$  сходилось к  $p(y)$ .

Делителю же  $|I_k|$  отведена особая роль — он предотвращает искажение гистограммы при различных длинах отрезков. То есть, чем длиннее отрезок, тем ниже столбик, так как элементы более “размазаны” по отрезку, что тоже логично.

Представим, что значение функции — это высота прямоугольника, а длина отрезка — его ширина (графически это изображается именно так). Тогда отношение количества элементов, попавших в полуинтервал, к количеству всех элементов выборки (вероятность того, что случайно взятый элемент из выборки попадёт в  $k$ -ый отрезок [1, стр. 24]), является площадью прямоугольника

$$S_k = \frac{\nu_k(X)}{n} = \mathbb{P}_n(x \in I_k)$$

Введём замену в формуле (1.4) и умножим обе части на длину отрезка

$$\mathbb{P}_n(x \in I_k) = q_n^k \cdot |I_k|$$

Если устремить количество полуинтервалов к бесконечности ( $m \rightarrow \infty$ ), то каждый полуинтервал будет сжиматься в точку. При этом вероятность попадания  $x$  в отрезок будет стремиться к вероятности попадания  $x$  в точку  $y$ . Введём обозначения  $|I_j| = \delta$ ,  $I_j = \Delta_y$

$$\mathbb{P}_n(x = y) \approx \mathbb{P}_n(x \in \Delta_y) = q_n(y) \cdot \delta, \quad m \rightarrow \infty$$

Очень напоминает ситуацию с плотностью распределения непрерывной случайной величины  $\xi$

$$\mathbb{P}(\xi = x) \approx p(x) \cdot \delta, \quad \delta \rightarrow 0$$

Нужно отметить, что количество элементов выборки должно стремиться к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), так как плотность может быть лишь у непрерывных случайных величин. Чем больше будет элементов, тем плотнее они будут стоять на числовой прямой.

### 1.1.3 Оценка неизвестных параметров

Снова у нас есть  $x_1, \dots, x_n$  — выборка из распределения  $F_\theta$ , где  $\theta$  — неизвестный параметр из множества  $\Theta$

**Пример 1.1.1.** Имеем нормальное распределение с известным СКО  $\sigma = 1$  и неизвестным математическим ожиданием  $a$  —  $N(a, 1)$ . Тогда  $\theta$  — математическое ожидание  $a$

**Пример 1.1.2.** Есть нормальное распределение, в котором неизвестны оба параметра. Тогда  $\theta$  будет парой  $(a, \sigma)$

Главный вопрос — определение основных параметров распределения выборки.

**Определение 1.1.2 (Статистика).** Статистикой называют функцию  $S$  от выборки  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$S(X) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Определение 1.1.3 (Оценка).** Статистику, значение которой заменяет неизвестный параметр, называют оценкой



**Пример 1.1.3.** Предположим, что выборка сделана из распределения Бернулли, то есть  $\{x_i\}$  — набор одинаково распределённых случайных величин, причём

$$x_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1 - p \end{cases}$$

Тогда неизвестный параметр — величина  $p$  (вероятность удачного эксперимента)

$$\theta = p \in [0; 1] = \Theta$$

Введём разные оценки  $\hat{p}$

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\hat{p}_2 = x_1$$

$$\hat{p}_3 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_k$$

Замечание: Поскольку  $\hat{p}$  — случайная величина, то может оказаться, что она не равна настоящему параметру  $p$

$$\mathbb{P} \{ \hat{p} = p \} = 0$$

1. Возникает мысль о том, что разность  $\hat{p} - p$  должна быть “маленькой”. Например, чтобы  $M(\hat{p} - p)^2$  было самое маленькое из возможных.
2. Также логично желать того, чтобы оценка  $\hat{p}$  сходилась к истинному значению параметра  $p$  по вероятности ( $\hat{p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} p$ ) или почти всюду ( $\hat{p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} p$ )
3. При многократном повторении эксперимента даже самая (на первый взгляд) плохая оценка может оказаться полезной

$$M\hat{p}_1 = p$$

$$M\hat{p}_2 = p$$

$$M\hat{p}_3 = p$$

Например, если целый год каждый день дают набор чисел, а статистик считает значение параметра  $p$  с помощью оценки  $\hat{p}_2$ , то в среднем за год у него получится величина, близкая к истинному  $p$ .

**Определение 1.1.4** (Состоятельная оценка). Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  по вероятности

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$$

**Определение 1.1.5** (Сильно состоятельная оценка). Оценка  $\hat{\theta}$  называется сильно состоятельной, если стремится к истинному значению  $\theta$  почти наверное

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \theta$$

**Пример 1.1.4.** Оценка  $\hat{p}_1$  из прошлого примера является сильно состоятельной.

**Определение 1.1.6** (Несмещённая оценка). Оценка  $\hat{\theta}$  несмещённая, если

$$\forall \theta \in \Theta : M_{\theta} \hat{\theta} = \theta$$

**Замечание 1.** Несмещённая оценка существует не всегда

**Определение 1.1.7.** Несмещённая оценка  $\hat{\theta} \in K$  называется оптимальной в классе квадратично интегрируемых оценок  $K$ , если для всякой другой несмещённой оценки  $\tilde{\theta} \in K$

$$D_{\theta} \hat{\theta} \leq D_{\theta} \tilde{\theta}, \quad \forall \theta \in \Theta$$

или же

$$M_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 \leq M_{\theta} (\tilde{\theta} - \theta)^2, \quad \forall \theta \in \Theta$$

**Замечание 2.** В учебнике Боровкова А. А. “Математическая статистика” оценка, удовлетворяющая этим условиям, носит название **эффективная оценка** [1, стр. 130], но у нас этот термин будет использоваться далее в другом смысле

**Пример 1.1.5.** Сравним  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_3$

$$D_p \hat{p}_1 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p \cdot (1-p)}{n}$$

$$D_p \hat{p}_3 = \frac{2 \cdot p \cdot (1-p)}{n}$$

### 1.1.4 Выборочные оценки. Метод моментов

Как восстановить неизвестный параметр  $\theta \in \Theta$  из функции распределения  $F_{\theta}(x)$ ?

Вспомним распределения и их параметры

1. Нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ . В нём параметр  $a$  является средним, а параметр  $\sigma^2$  — дисперсией
2. Пуассоновское распределение  $Poi(\lambda)$ . Тут параметр  $\lambda$  является и средним, и дисперсией
3. Экспоненциальное распределение  $Exp(\lambda)$ .  $\frac{1}{\lambda}$  — среднее,  $\frac{1}{\lambda^2}$  — дисперсия

И так далее...

Как правило, неизвестный параметр  $\theta$  можно искать следующим образом

$$\exists \varphi \in C(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_{\theta}(x) = g(\theta)$$

Значит, у нас есть уравнение для поиска оценки  $\hat{\theta}$  при непрерывной и монотонной  $g(\hat{\theta})$

$$g(\hat{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x) \quad (1.5)$$

**Пример 1.1.6.** Если  $\theta$  — среднее, то  $\varphi(x) = x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\theta}(x) = \theta = g(\theta)$$

**Теорема 1.1.2.** Пусть функция  $\varphi(x)$  в (1.5) непрерывна, ограничена и строго монотонная. Тогда оценка  $\hat{\theta}$  существует и является сильно состоятельной.

*Доказательство.* Имеем формулу (1.5)

$$g(\hat{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x)$$

Поскольку функция  $g(\hat{\theta})$  непрерывна и монотонна, то она имеет обратную функцию  $g^{-1} : g^{-1}(g(\hat{\theta})) = \hat{\theta}$ .

Применим обратную функцию к обеим частям уравнения

$$\hat{\theta} = g^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x) \right)$$

Поскольку выборочная функция распределения почти всюду равна неизвестной функции распределения при достаточно большом объеме выборки, то

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x)$$

Функция  $g^{-1}(x)$  непрерывна

$$\hat{\theta} = g^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} g^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_n(x) \right) = \theta$$

Теорема доказана

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \theta$$

□

**Определение 1.1.8** (Выборочное среднее). Выборочное среднее обозначается через  $\bar{x}$  и считается по следующей формуле

$$\bar{x} = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$$

Поскольку все элементы выборки равновероятны, получаем математическое ожидание дискретной равномерно распределённой случайной величины, принимающей  $n$  значений

$$\bar{x} = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k$$

**Определение 1.1.9** (Выборочная дисперсия). Выборочная дисперсия  $\overline{\sigma^2}$  считается формуле

$$\overline{\sigma^2} = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 dF_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

## 1.2 Свойства оценок

### 1.2.1 Неравенство Рао-Крамера

**Теорема 1.2.1** (Колмогорова). *Оптимальная оценка единственная или её нет вообще*

*Доказательство.* Допустим, есть две разные оптимальные и несмещённые оценки  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Тогда по определению для любой несмещённой оценки  $\hat{\theta}$  будет

$$\begin{cases} D_{\theta}\theta_1 \leq D_{\theta}\hat{\theta} \\ D_{\theta}\theta_2 \leq D_{\theta}\hat{\theta} \end{cases}, \forall \theta \in \Theta$$

Поскольку неравенство выполняется для каждой несмещённой оценки  $\hat{\theta}$ , а оценки  $\theta_1$  и  $\theta_2$  являются несмещёнными, то можем их и поставить в неравенство в роли  $\hat{\theta}$

$$\begin{cases} D_{\theta}\theta_1 \leq D_{\theta}\theta_2 \\ D_{\theta}\theta_2 \leq D_{\theta}\theta_1 \end{cases}, \forall \theta \in \Theta$$

А это возможно только если дисперсии этих оценок равны. Обозначим эту дисперсию через  $\sigma^2(\theta)$

$$D_{\theta}\theta_1 = D_{\theta}\theta_2 = \sigma^2(\theta)$$

Возьмём несмещённую оценку  $\tilde{\theta}$ , равную среднеарифметическому оценок  $\theta_1$  и  $\theta_2$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \theta_1 + \frac{1}{2} \cdot \theta_2$$

Тогда по определению  $\theta_1$  и  $\theta_2$  получаем, что дисперсия новой оценки не меньше, чем у оптимальных

$$D_{\theta}\tilde{\theta} \geq \sigma^2(\theta) \quad (1.6)$$

Попробуем честно вычислить дисперсию оценки  $\tilde{\theta}$

$$\begin{aligned} D_{\theta}\tilde{\theta} &= M_{\theta}(\tilde{\theta} - \theta) = M_{\theta}\left[\frac{1}{2} \cdot (\theta_1 - \theta) + \frac{1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot D_{\theta}\theta_1 + \frac{1}{4} \cdot D_{\theta}\theta_1 + \frac{1}{2} \cdot M_{\theta}[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)] \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши (частный случай неравенства Гёльдера)

$$\begin{aligned} M_{\theta}[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)] &\leq \sqrt{M_{\theta}(\theta_1 - \theta)^2 \cdot M_{\theta}(\theta_2 - \theta)^2} = \\ &= \sqrt{D_{\theta}\theta_1 \cdot D_{\theta}\theta_2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

И вернёмся к вычислению дисперсии оценки  $\tilde{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot D_{\theta}\theta_1 + \frac{1}{4} \cdot D_{\theta}\theta_1 + \frac{1}{2} \cdot M_{\theta}[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)] &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \sigma^2(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2(\theta) \cdot \sigma^2(\theta)} = \sigma^2(\theta) \end{aligned}$$

То есть, дисперсия оценки  $\tilde{\theta}$  не больше дисперсии введённой оптимальной оценки

$$D_{\theta}\tilde{\theta} \leq \sigma^2(\theta) \quad (1.8)$$

Воспользовавшись неравенствами (1.6) и (1.8), получаем равенство

$$D_{\theta}\tilde{\theta} = \sigma^2(\theta)$$

Это значит, что в неравенстве (1.7) в данном случае тоже выходит равенство

$$M_{\theta}[(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)] = \sqrt{M_{\theta}(\theta_1 - \theta)^2} \cdot \sqrt{M_{\theta}(\theta_2 - \theta)^2}$$

Для дальнейших размышлений вспомним аналогию с векторами, а именно смысл равенства в неравенстве Коши для скалярного произведения векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sqrt{\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\vec{b}^2} \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей только тогда, когда они сонаправлены

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\vec{b}^2}$$

Положим математическое ожидание нормой, а  $\theta_1 - \theta$  и  $\theta_2 - \theta$  векторами пространства случайных событий. Получаем, что нормы и направления этих векторов совпадают

$$\begin{aligned} M_\theta [(\theta_1 - \theta) \cdot (\theta_2 - \theta)] &= \sqrt{M_\theta (\theta_1 - \theta)^2} \cdot \sqrt{M_\theta (\theta_2 - \theta)^2} \\ &\Rightarrow \left( \widehat{\theta_1 - \theta, \theta_2 - \theta} \right) \end{aligned}$$

Это значит, что они равны, что противоречит предположению о том, что они разные

$$\begin{aligned} \begin{cases} \left( \widehat{\theta_1 - \theta, \theta_2 - \theta} \right) = 0 \\ M_\theta (\theta_1 - \theta)^2 = M_\theta (\theta_2 - \theta)^2 \end{cases} &\Rightarrow \theta_1 - \theta = \theta_2 - \theta \\ &\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \end{aligned}$$

Теорема доказана □

Для дальнейших действий будем считать, что функция распределения  $F_\theta(x)$  имеет плотность  $p(x, \theta)$ , которая дважды дифференцируема по  $\theta$ . То есть её можно дифференцировать под знаком интеграла.

Также отметим, что выборка  $(x_1, \dots, x_n)$  имеет плотность распределения, так как является случайным вектором в  $\mathbb{R}^n$ , все компоненты которого — случайные величины.

**Определение 1.2.1** (Функция правдоподобия). Плотность распределения вектора независимых случайных величин, равная произведению плотностей распределения его компонент, называется функцией правдоподобия

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{k=1}^n p(x_k, \theta)$$

Прологарифмировав функцию правдоподобия, получим симпатичную сумму

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = \sum_{k=1}^n \ln p(x_k, \theta)$$

А симпатична она тем, что это сумма незасимых одинаково распределённых случайных величин. Воспользовавшись законом больших чисел, можем сказать, что она стремится к сумме  $n$  одинаковых математических ожиданий при достаточно большом размере выборки

$$\begin{aligned} \ln L(\vec{x}, \theta) &= n \cdot \frac{\ln p(x_1, \theta) + \dots + \ln p(x_n, \theta)}{n} \approx \\ &\approx n \cdot M_\theta \ln p(x_1, \theta) \end{aligned}$$

Проблема в том, что мы не знаем среднего. Для разрешения этого вопроса введём ещё одно определение

**Определение 1.2.2** (Вклад выборки). Вклад выборки — частная производная по параметру  $\theta$  от логарифма функции правдоподобия

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\vec{x}, \theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \ln p(x_k, \theta) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} \end{aligned}$$

**Замечание 3.** Математическое ожидание вклада выборки равно нулю

$$M_{\theta} U(\vec{x}, \theta) = 0$$

*Доказательство.* Посчитаем математическое ожидание вклада выборки

$$\begin{aligned} M_{\theta} U(\vec{x}, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} U(\vec{u}, \theta) \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} \end{aligned}$$

Воспользовавшись предположением о том, что функция распределения дважды дифференцируема, вынесем взятие производной за знак интеграла

$$M_{\theta} U(\vec{x}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u}$$

Поскольку интегрируем плотность распределения случайного вектора по всему пространству, то он равен единице. Производная же от единицы равна нулю. Это значит, что математическое ожидание вклада выборки равно нулю

$$M_{\theta} U(\vec{x}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0$$

□

**Замечание 4.** Частная производная по оценке  $\theta$  от функции правдоподобия  $L(\vec{u}, \theta)$  равна нулю.

*Доказательство.* Выше у нас было равенство

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = 0$$

Так как производную можем заносить под знак интеграла (согласно нашему предположению), то получаем такое равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = 0$$

Поскольку интеграл не зависит от  $\theta$ , то такое возможно лишь в том случае, когда производная равна нулю

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta) = 0$$

□

**Определение 1.2.3** (Количество информации Фишера). Математическое ожидание квадрата вклада выборки называется количеством информации Фишера

$$I_n(\theta) = M_\theta U(\vec{x}, \theta)^2$$

**Замечание 5.**

$$M_\theta U(\vec{x}, \theta)^2 = -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\vec{x}, \theta)$$

*Доказательство.* Будем доказывать справа налево

$$\begin{aligned} -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\vec{x}, \theta) &= -M_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} = \\ &= -M_\theta \left( \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(\vec{x}, \theta) \cdot L(\vec{x}, \theta) - \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta) \right]^2}{L(\vec{x}, \theta)^2} \right) = \\ &= -M_\theta \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} + M_\theta \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} \right]^2 \end{aligned}$$

Помним, что производная от функции правдоподобия по  $\theta$  равна нулю. Значит вторая производная тоже равна нулю и остаётся лишь математическое ожидание квадрата, который равен квадрату производной логарифма функции правдоподобия, что в свою очередь и есть вклад выборки

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta) = 0 &\Rightarrow -M_\theta \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} = 0 \\ \Rightarrow -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\vec{x}, \theta) &= M_\theta \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \theta)} \right]^2 = \\ &= M_\theta \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\vec{x}, \theta) \right]^2 = M_\theta U(\vec{x}, \theta)^2 \end{aligned}$$

Утверждение доказано

$$M_\theta U(\vec{x}, \theta)^2 = -M_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\vec{x}, \theta)$$

□

Количество информации позволяет оценить точность, с которой можем получить параметр  $\theta$

**Теорема 1.2.2** (Неравенство Рао-Крамера). Пусть  $\hat{\theta}$  — несмещённая оценка параметра  $\theta$ . Тогда имеет место неравенство

$$\forall \theta \in \Theta : D_\theta \hat{\theta} \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$



*Доказательство.* Выпишем, чему равно математическое ожидание оценки  $\theta$

$$\begin{cases} M_\theta \hat{\theta} &= \theta \\ M_\theta \hat{\theta} &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u}$$

Продифференцируем с двух сторон полученное для  $\theta$  равенство по самому параметру  $\theta$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u}$$

Левая часть равенства превращается в единицу, а справа заносим взятие производной под знак интеграла. Также помним, что оценка  $\theta(\vec{u})$  не зависит от параметра  $\theta$ . Это значит, что производную нужно брать только от функции правдоподобия

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u}$$

Далее нам нужно получить вклад выборки. Для этого умножим и поделим подинтегральное выражение на функцию правдоподобия

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta)}{L(\vec{u}, \theta)} \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} \end{aligned}$$

Видим, что дробь под интегралом — производная логарифма функции правдоподобия, которая является вкладом выборки

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\vec{u}, \theta)}{L(\vec{u}, \theta)} \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\vec{u}) \cdot U(\vec{x}, \theta) \cdot L(\vec{u}, \theta) d\vec{u} \end{aligned}$$

У нас есть математическое ожидание произведения оценки и вклада выборки, которое равно единице

$$1 = M_\theta \left( \hat{\theta} \cdot U(\vec{x}, \theta) \right) \quad (1.9)$$

Помним, что математическое ожидание вклада выборки равно нулю. Значит, умножение его на константу ничего не меняет

$$\begin{aligned} M_\theta U(\vec{x}, \theta) &= 0 \\ \Rightarrow \theta \cdot M_\theta U(\vec{x}, \theta) &= M_\theta (\theta \cdot U(\vec{x}, \theta)) = 0 \end{aligned}$$

Воспользовавшись полученным результатом, вернёмся к равенству (1.9). Отнимем от обеих частей ноль (то есть, полученное только что выражение)

$$1 = M_{\theta} \left( \hat{\theta} \cdot U(\vec{x}, \theta) \right) - M_{\theta} (\theta \cdot U(\vec{x}, \theta))$$

Получаем компактное равенство

$$1 = M_{\theta} \left[ (\hat{\theta} - \theta) \cdot U(\vec{x}, \theta) \right]$$

Воспользовавшись неравенством Коши, узнаём, произведение корней дисперсии и количества информации больше, чем единица

$$\begin{aligned} 1 &= M_{\theta} \left[ (\hat{\theta} - \theta) \cdot U(\vec{x}, \theta) \right] \leq \\ &\leq \sqrt{M_{\theta} (\hat{\theta} - \theta)} \cdot \sqrt{M_{\theta} U(\vec{x}, \theta)} = \\ &= \sqrt{D_{\theta} \hat{\theta}} \cdot \sqrt{I_n(\theta)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Возводим обе части равенства в квадрат и делим на количество информации

$$D_{\theta} \hat{\theta} \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Неравенство доказано  $\square$

**Замечание 6.** Иногда нужно оценивать не сам параметр, а функцию параметра

Если  $\alpha$  — несмещённая оценка для  $f(\theta)$ , то справедливо следующее неравенство

$$\forall \theta \in \Theta : D_{\theta} \alpha \geq \frac{|f'(\theta)|}{I_n(\theta)}$$

## 1.2.2 Метод максимального правдоподобия

У нас есть нижняя оценка точности, с которой можно отыскать желаемую оценку, а это значит, что точнее определить просто не получится и нужно стремиться к равенству в неравенстве Рао-Крамера.

**Определение 1.2.4** (Эффективная оценка). Оценка  $\hat{\theta}$ , для которой в неравенстве Рао-Крамера стоит равенство, называется эффективной

$$\forall \theta \in \Theta : D_{\theta} \hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Попытаемся выяснить, какими свойствами должна обладать плотность, чтобы можно было получить эффективную оценку. Для этого в неравенстве Рао-Крамера нужно рассмотреть случай равенства (так как в этом случае оценка будет самой точной)

$$D_{\theta} \hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Рассмотрим неравенство (1.10) и попытаемся понять, в каком случае в нём будет стоять знак равенства

$$\begin{aligned} 1 &= M_\theta \left[ \left( \hat{\theta} - \theta \right) \cdot U(\vec{x}, \theta) \right] = \\ &= \sqrt{M_\theta \left( \hat{\theta} - \theta \right)^2} \cdot \sqrt{M_\theta U(\vec{x}, \theta)^2} \end{aligned}$$

Снова проводим аналогию с векторами и видим, что скалярное произведение (математическое ожидание произведения) векторов (функций от параметра  $\theta$ :  $f_1(\theta) = \hat{\theta} - \theta$  и  $f_2(\theta) = U(\vec{x}, \theta)$ ) равно произведению их норм (корней математических ожиданий квадратов).

Это в свою очередь означает, что “угол” между этими векторами (функциями) равен нулю и эти функции являются линейными комбинациями друг друга. Значит, есть такая функция  $k(\theta)$ , что  $f_2(\theta)$  равняется произведению  $f_1(\theta)$  и  $k(\theta)$ .

$$\begin{aligned} U(\vec{x}, \theta) &= \left( \hat{\theta} - \theta \right) \cdot k(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\vec{x}, \theta) &= \hat{\theta} \cdot k(\theta) - \theta \cdot k(\theta) \\ \partial \ln L(\vec{x}, \theta) &= \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot k(\theta) \cdot \partial \theta - \theta \cdot k(\theta) \cdot \partial \theta \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int \partial \ln L(\vec{x}, \theta) = \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot \int k(\theta) \partial \theta - \int \theta \cdot k(\theta) \partial \theta$$

Получим следующее равенство

$$\ln L(\vec{x}, \theta) + c_1(\vec{x}) = \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot [a(\theta) + c_2] - [b^*(\theta) + c_3]$$

Сгруппируем константы и введём замену  $b(\theta) = -b^*(\theta)$

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot a(\theta) + b(\theta) + c(\vec{x})$$

Избавимся от логарифма слева, а для этого проэкспонируем обе части равенства

$$L(\vec{x}, \theta) = \exp \left\{ \hat{\theta}(\vec{x}) \cdot a(\theta) + b(\theta) + c(\vec{x}) \right\}$$

При конечном  $n$  положим такую плотность распределения

$$p(x_1, \theta) = \exp \left\{ \hat{\theta}(x_1) \cdot a_1(\theta) + b_1(\theta) + c_1(x_1) \right\}$$

В таком случае получим следующую функцию правдоподобия

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \theta) &= \prod_{k=1}^n p(x_k, \theta) = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \hat{\theta}(x_k) \cdot a_1(\theta) + n \cdot b_1(\theta) + \sum_{k=1}^n c_1(x_k) \right\} \end{aligned}$$

Отметим, что в этом случае оценка  $\hat{\theta}(\vec{x})$  является суммой оценок по каждой координате (случайной величине)

$$\hat{\theta}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \hat{\theta}(x_k)$$

**Определение 1.2.5** (Экспоненциальное распределение). Распределения следующего вида называются экспоненциальными

$$p(x, \theta) = \exp \left\{ \hat{\theta}(x) \cdot a(\theta) + b(\theta) + c(x) \right\}$$

Попробуем найти рецепт выяснения эффективной оценки. Начнём с примера

**Пример 1.2.1.** Есть выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием  $N(\theta, 1)$ . Тогда плотность распределения  $k$ -ой случайной величины будет следующей

$$p(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x_k - \theta)^2}{2} \right\}$$

Её логарифм, очевидно, имеет такой вид

$$\ln p(x_k) = \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \frac{(x_k - \theta)^2}{2}$$

Теперь выпишем логарифм функции правдоподобия

$$\begin{aligned} \ln L(\vec{x}, \theta) &= \sum_{k=1}^n \ln p(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \theta)^2}{2} = \\ &= n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \theta)^2}{2} \end{aligned}$$

Раскроем скобки

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2} + \sum_{k=1}^n x_k \cdot \theta - \frac{n \cdot \theta^2}{2}$$

Воспользуемся формулой для несмещённой и эффективной оценки среднего

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \theta &= \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot \theta \cdot n = \bar{x} \cdot \theta \cdot n \\ \Rightarrow \ln L(\vec{x}, \theta) &= n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2} + \bar{x} \cdot \theta \cdot n - \frac{n \cdot \theta^2}{2} \end{aligned}$$

Сгруппировав множители при  $n$ , получаем

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2} - n \cdot \frac{\theta^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \theta}{2}$$

Добавим и вычтем в числителе дроби выборочное среднее

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2} - n \cdot \frac{\theta^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \theta + (\bar{x}^2 - \bar{x}^2)}{2}$$

Теперь в числителе очевиден квадрат разности

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2} + n \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} - n \cdot \frac{\theta^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \theta + \bar{x}^2}{2}$$

Сворачиваем квадрат разности, а выборочное среднее заносим под знак суммы

$$\ln L(\vec{x}, \theta) = n \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} - \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2 - \bar{x}^2}{2} - n \cdot \frac{(\theta - \bar{x})^2}{2}$$

Видим, что последнее слагаемое не может быть положительным, так как это квадрат со знаком “минус”. Когда оценка  $\theta$  равна выборочному среднему (идеальный случай), то последнее слагаемое обращается в нуль, а сама функция правдоподобия в таком случае принимает максимальное значение.

Делаем предположение о том, как находить наилучшую оценку

$$Q_* = \arg \max_{\theta} \ln L(\vec{x}, \theta)$$

Оказывается, именно так она и находится.

**Определение 1.2.6** (Оценка максимального правдоподобия). Оценка максимального правдоподобия  $\theta_*$  — такое значение параметра  $\theta$ , при котором функция правдоподобия достигает своего максимального значения

$$Q_* = \arg \max_{\theta} \ln L(\vec{x}, \theta)$$

**Замечание 7.** Оценок максимального правдоподобия может быть несколько, а может не существовать ни одной.

**Определение 1.2.7** (Уравнение правдоподобия). Уравнением правдоподобия называется равенство вида

$$U(\vec{x}, \theta) = 0$$

Или же

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\vec{x}, \theta) = 0$$

**Замечание 8.** В гладком случае оценку  $\theta_*$  можно искать с помощью уравнения правдоподобия. Тем не менее, нужно помнить, что равенство первой производной нулю является лишь необходимым условием максимума, поэтому полученные результаты необходимо проверять.

**Определение 1.2.8** (Вариационный ряд). Вариационный ряд выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — значения выборки, упорядоченные в порядке неубывания

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}, \quad x_{(1)} = \min_k x_k$$

**Теорема 1.2.3.** Если плотность  $p(x, \theta)$  непрерывна и дифференцируема по параметру  $\theta$ , а производная не равна нулю  $\frac{\partial}{\partial \theta} p(x, \theta) \neq 0$ , то оценка максимального правдоподобия состоятельна

## Глава 2

# Достаточные статистики

### 2.1 Оптимальная оценка

**Определение 2.1.1** (Симметризация). Симметризация  $\Lambda$  оценки  $\hat{\theta}$  — среднее оценок  $\hat{\theta}$  для всевозможных перестановок  $\sigma \in S_n$  элементов выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\Lambda \hat{\theta} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

**Лемма 2.1.1.** Для произвольной несмещённой оценки  $\hat{\theta}$  её симметризация  $\Lambda \hat{\theta}$  не хуже её самой в среднем квадратическом

$$M_{\theta} \hat{\theta} = \theta \Rightarrow \begin{cases} M_{\theta} \Lambda \hat{\theta} = M_{\theta} \hat{\theta} = \theta \\ D_{\theta} \Lambda \hat{\theta} \leq D_{\theta} \hat{\theta} \end{cases}$$

*Доказательство.* Берём  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Введём обозначения для более короткой записи используемых в доказательстве случайных векторов.

Вектор, состоящий из элементов выборки в их изначальном порядке, обозначим привычным  $\vec{x}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}$$

Вектор, состоящий из элементов, изменивших своё местоположение под влиянием перестановки  $\sigma$  (значение которой будет ясно из контекста), будем обозначать через  $\vec{x}_{\sigma}$

$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \vec{x}_{\sigma}$$

Тогда и оценки примут более красивый вид

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \hat{\theta}(\vec{x}) \\ \hat{\theta}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= \hat{\theta}(\vec{x}_{\sigma}) \end{aligned}$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству.

1. Начнём с первого пункта — докажем несмещённость симметризации оценки  $\hat{\theta}$ .

Нетрудно показать, что вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{x}_\sigma$  имеют одинаковое распределение для любой перестановки  $\sigma$ , а это значит, что и оценки  $\hat{\theta}(\vec{x})$  и  $\hat{\theta}(\vec{x}_\sigma)$  распределены одинаково как функции случайных одинаково распределённых векторов. Следовательно, их математические ожидания равны между собой при любой перестановке  $\sigma$

$$M_\theta \hat{\theta}(\vec{x}) = M_\theta \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) = \theta$$

Посчитаем математическое ожидание симметризации оценки  $\hat{\theta}$

$$M_\theta \Lambda \hat{\theta} = M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) \right\}$$

Помним, что математическое ожидание линейно и константы можно выносить за знак математического ожидания, а математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий

$$M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) \right\} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} M_\theta \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma)$$

Не забываем, что математическое ожидание оценки любого вектора  $\vec{x}_\sigma$  одинаково и равно параметру  $\theta$

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} M_\theta \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \theta$$

Сумма имеет  $n!$  слагаемых (количество перестановок  $\sigma \in S_n$ )

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \theta = \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot \theta = \theta$$

А это значит, что первый пункт доказан и симметризация несмещённой оценки  $\hat{\theta}$  действительно несмещённая

$$M_\theta \Lambda \hat{\theta} = \theta$$

2. Теперь посмотрим, чему равна дисперсия симметризации оценки  $\hat{\theta}$

Воспользуемся определением

$$D_\theta \Lambda \hat{\theta} = M_\theta \left( \Lambda \hat{\theta} - \theta \right)^2 = M_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right\}^2$$



Внесём параметр  $\theta$  в сумму. Для этого нужно умножить и поделить его на  $n!$  (так как сумма имеет  $n!$  слагаемых)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M}_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right\}^2 = \\
 &= \mathbb{M}_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot \theta \right\}^2 = \\
 &= \mathbb{M}_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \left( \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - n! \cdot \theta \right) \right\}^2 = \\
 &= \mathbb{M}_\theta \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right) \right\}^2 = \\
 &= \mathbb{M}_\theta \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right) \right\}^2
 \end{aligned}$$

Вспомним неравенство Йенсена для выпуклой функции  $f$

$$f\left(\sum_{i=1}^n q_i \cdot x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n q_i \cdot f(x_i), \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1$$

В нашем случае  $x_i = \left(\hat{\theta}(\vec{x}_{\sigma_i}) - \theta\right)$ , функция  $f(x) = x^2$ , сумма проходит по всевозможным перестановкам  $\sigma$ , а роль  $q_i$  выполняет  $\frac{1}{n!}$ , так как

$$\sum_{\sigma \in S_n} q_i = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} = n! \cdot \frac{1}{n!} = 1$$

Перепишем неравенство Йенсена для нашего случая

$$\mathbb{M}_\theta \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right) \right\}^2 \leq \mathbb{M}_\theta \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right)^2 \quad (2.1)$$

Воспользуемся линейностью математического ожидания, внеся его под знак суммы

$$\mathbb{M}_\theta \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right)^2 = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{M}_\theta \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right)^2$$

Видим сумму дисперсий. Дисперсии одинаковы, так как оценки имеют одинаковые распределения

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{M}_\theta \left( \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) - \theta \right)^2 = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} D_\theta \hat{\theta}(\vec{x}_\sigma) = \\
 &= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} D_\theta \hat{\theta}(\vec{x}) = \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot D_\theta \hat{\theta}(\vec{x}) = D_\theta \hat{\theta}(\vec{x})
 \end{aligned}$$

Из неравенства Йенсена (2.1) видим, что дисперсия симметризации не хуже дисперсии самой оценки

$$D_{\theta} \Lambda \hat{\theta} \leq D_{\theta} \hat{\theta}(\vec{x})$$

То есть, симметризация не ухудшает оценку, а в общем случае (когда неравенство строгое) даже делает её лучше.  $\square$

**Замечание 9.** Равенство в неравенстве Йенсена (в доказательстве выше) возможно только в случае симметричной функции. Значит, в качестве оценки достаточно брать только симметричные функции выборки

**Определение 2.1.2** (Функция вариационного ряда). Если оценка  $\hat{\theta}$  симметрична относительно перестановок аргументов, то она является функцией вариационного ряда

**Замечание 10.** Все оценки, которые претендуют быть оптимальными, должны быть функциями вариационного ряда

## 2.2 $\sigma$ -алгебра, порождённая случайной величиной

Имеем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , также есть функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что связанные с ней множества измеримы по Лебегу

$$\{\omega \mid \xi(\omega) < c\} \in \mathfrak{F}, c \in \mathbb{R}$$

Но это будет неудобно при использовании, поэтому возьмём борелевские подмножества  $\mathfrak{B}$  множества  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \supset \mathfrak{B} \ni \Delta : \xi^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{F}$$

Рассмотрим более подробно, что же означает запись  $\xi^{-1}(\Delta)$

$$\xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\}, \quad \Delta \in \mathfrak{B}, \omega \in \Omega$$

**Определение 2.2.1** (Сигма-алгебра, порождённая случайной величиной).  $\mathfrak{F}_{\xi} = \sigma(\xi)$  —  $\sigma$ -алгебра, порождённая случайной величиной  $\xi$

$$\mathfrak{F}_{\xi} = \{\xi^{-1}(\Delta) \mid \Delta \in \mathfrak{B}\}$$

Из курса теории вероятностей помним лемму, которая утверждает, что  $\xi$  — случайная величина тогда и только тогда, когда

$$\forall \Delta \in \mathfrak{B} : \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} = \{\xi \in \Delta\} = \xi^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{F}$$

А это значит, что все элементы  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_{\xi}$  входят в  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{F}$ , а сама  $\mathfrak{F}_{\xi}$  является подмножеством  $\mathfrak{F}$

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{\xi} = \{\xi^{-1}(\Delta) \mid \Delta \in \mathfrak{B}\} \\ \forall \Delta \in \mathfrak{B} : \xi^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{F} \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{F}_{\xi} \subset \mathfrak{F}$$

Проверим, что  $\mathfrak{F}_{\xi}$  действительно является  $\sigma$ -алгеброй

1. Множество элементарных исходов  $\Omega$  входит в  $\mathfrak{F}_\xi$ . Поскольку случайная величина  $\xi$  принимает действительные значения, то прообраз множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  и будет множеством элементарных исходов  $\Omega$ . А поскольку  $\mathbb{R}$  принадлежит борелевской  $\sigma$ -алгебре, то его прообраз по определению принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{F}_\xi$

$$\begin{cases} \xi^{-1}(\Delta \in \mathfrak{B}) \in \mathfrak{F} \\ \mathbb{R} \in \mathfrak{B} \\ \xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \end{cases} \Rightarrow \Omega \in \mathfrak{F}_\xi$$

2. Если событие  $A$  принадлежит  $\mathfrak{F}_\xi$ , то его дополнение  $\bar{A}$  тоже принадлежит  $\mathfrak{F}_\xi$

$$\begin{aligned} A &= \xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} \\ \Rightarrow \bar{A} &= \{\omega \mid \xi(\omega) \notin \Delta\} = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \bar{\Delta}\} \\ \bar{A} &= \xi^{-1}(\bar{\Delta}) \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathfrak{B}$  является  $\sigma$ -алгеброй, а  $\Delta$  — её элемент, то дополнение  $\bar{\Delta}$  тоже принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{B}$ . Из этого следует, что свойство выполняется

$$\begin{cases} \xi^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{F} \\ \Delta \in \mathfrak{B} \Rightarrow \bar{\Delta} \in \mathfrak{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{\xi^{-1}(\Delta)} = \xi^{-1}(\bar{\Delta}) \in \mathfrak{F}$$

3. Замкнутость относительно счётных пересечений.

Начнём с замкнутости относительно пересечения двух множеств

$$A = \xi^{-1}(\Delta_1), B = \xi^{-1}(\Delta_2)$$

Начинаем считать

$$\begin{aligned} A \cap B &= \xi^{-1}(\Delta_1) \cap \xi^{-1}(\Delta_2) = \\ &= \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta_1\} \cap \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta_2\} = \\ &= \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta_1 \wedge \xi(\omega) \in \Delta_2\} = \\ &= \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta_1 \cap \Delta_2\} = \xi^{-1}(\Delta_1 \cap \Delta_2) \end{aligned}$$

Значит, имеем равенство

$$\xi^{-1}(\Delta_1) \cap \xi^{-1}(\Delta_2) = \xi^{-1}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

Пользуясь методом математической индукции нетрудно показать, что для любого  $n$  выполняется

$$\xi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n \Delta_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \xi^{-1}(\Delta_i), \Delta_i \in \mathfrak{B}$$

Как устроена эта  $\sigma$ -алгебра? Каждому элементарному исходу отвечает одно и только одно значение случайной величины, а каждому значению случайной величины отвечает один и больше элементарных исходов. Допустим, есть некое  $a \in \mathbb{R}$ , которое является образом по крайней мере двух элементарных исходов  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$$\xi(\omega_1) = \xi(\omega_2) = a$$

Теперь рассмотрим элемент  $\Delta$  борелевской  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{B}$ . Из вышесказанного следует, что, если число  $a$  принадлежит множеству  $\Delta$ , то прообраз этого множества содержит элементы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в противном случае оба элементарных исхода не входят в прообраз

$$a \in \Delta \Rightarrow \xi^{-1}(\Delta) \ni \omega_1, \omega_2$$

$$a \notin \Delta \Rightarrow \xi^{-1}(\Delta) \not\ni \omega_1, \omega_2$$

То есть, множество  $\mathfrak{F}_\xi$  не будет различать элементы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Это в свою очередь означает, что можно разбить  $\mathfrak{F}_\xi$  на уровни — непересекающиеся подмножества

**Определение 2.2.2** (Множество уровня). Множество уровня  $H_t$  — полный прообраз значения  $t \in \mathbb{R}$  случайной величины  $\xi$

$$H_t = \{\omega \mid \xi(\omega) = t\} = \xi^{-1}(t)$$

**Замечание 11.** Уровни  $H_i$  составляют разбиение множества элементарных исходов  $\Omega$ .

1. Множества  $H_i$  не пересекаются

$$H_{t_1} \neq H_{t_2} \Leftrightarrow t_1 \neq t_2$$

2. Объединение всех  $H_i$  даёт множество элементарных исходов

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} H_t = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \xi^{-1}(t) = \xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$$

Очень похоже на гипотезы из курса теории вероятностей с той лишь разницей, что уровней может быть бесконечное и даже континуальное количество, из чего также следует, что вероятность некоторых из них может быть нулевой.

## 2.3 Случайная величина, измеримая относительно $\sigma$ -алгебры

В общем случае вероятностное пространство может быть разбито на континуальное количество множеств уровней (для  $\sigma$ -алгебры, порождённой непрерывной случайной величиной).

Начнём же с рассмотрения того случая, когда случайная величина  $\xi$  принимает  $n$  значений  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Это в свою очередь означает, что у нас есть  $n$  уровней

$$H_k = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\}, k = \overline{1, n}$$

Нетрудно понять, что  $\sigma$ -алгебра  $\sigma(\xi)$  содержит  $2^n$  элементов

$$\sigma(\xi) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n H_k^{\eta_k} \mid \eta_k = \overline{0, 1}, H_k^0 = \emptyset, H_k^1 = H_k \right\}$$

Нам нет смысла пользоваться лишь одной случайной величиной  $\xi$ . Нас интересует, как устроены случайные величины, которые измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $\sigma(\xi)$ .

Возьмём  $\varkappa$  — случайная величина, измеримая относительно  $\sigma(\xi)$ . Это значит, что все прообразы случайной величины  $\varkappa$  должны лежать в  $\sigma$ -алгебре  $\sigma(\xi)$

$$\{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq c\} \in \sigma(\xi)$$

То есть, прообразы  $\varkappa$  выражаются через объединения уровней  $H_k$

$$\{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq c\} = \bigcup_{k=1}^n H_k^{\eta_k}$$

Введём обозначение

$$A(c) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq c\}$$

Очевидно, что при  $c \rightarrow -\infty$  прообразом является пустое множество, а когда  $c \rightarrow +\infty$ , то прообразом является всё множество элементарных исходов

$$\begin{aligned} \{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq -\infty\} &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) \in \emptyset\} = \varkappa^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ \{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq +\infty\} &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) \in \mathbb{R}\} = \varkappa^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \end{aligned}$$

Также ясно, что, если имеются два элемента борелевского множества и один включён в другой, то полный прообраз первого элемента тоже будет включён в прообраз второго

$$\begin{aligned} \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}, \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \\ \Rightarrow \varkappa^{-1}(\Delta_1) \subseteq \varkappa^{-1}(\Delta_1) \cup \varkappa^{-1}(\Delta_2) = \\ = \varkappa^{-1}(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \varkappa^{-1}(\Delta_2) \end{aligned}$$

Ни у кого не возникает сомнений, что справедливо и такое утверждение

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \leq c_2 \Rightarrow A(c_1) \subseteq A(c_2)$$

Объединим и проанализируем вышеописанное:

1. Количество элементов в множестве  $A(c)$  не уменьшается с ростом  $c$

$$c_1 \leq c_2 \Rightarrow A(c_1) \subseteq A(c_2)$$

2. Множество  $A(c)$  “разрастается” от пустого множества  $\emptyset$  до множества элементарных событий  $\Omega$  с ростом  $c$  от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$A(-\infty) = \emptyset, A(+\infty) = \Omega$$

3. Множество  $A(c)$  растёт дискретными шагами. Это связано с тем, что уровни  $H_k$  в нашей  $\sigma$ -алгебре неделимы, а каждый её элемент должен состоять из объединений этих уровней и ничего другого.

Из этого всего делаем более конкретные выводы о том, как изменяется значение функции  $A(c)$  с ростом параметра  $c$ . Должны быть опорные точки, на которых происходит “скачок” — точки, на которых к объединению добавляется ещё один или более уровней.

Поскольку имеется  $n$  уровней, то может быть не более  $n$  скачков: ведь самый “медленный” рост будет происходить, если добавлять по одному уровню на определённых константах, а нужно пройти всё от пустого множества  $\emptyset$  до множества элементарных исходов  $\Omega$ .

Выделим  $m$  точек ( $m \leq n$ )  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$  на числовой прямой  $\mathbb{R}$  как значения случайной величины  $\varkappa$

$$\varkappa : \Omega \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$$

Посмотрим, как соотносятся между собой  $A(c_i)$  и  $A(c_{i-1})$ , чтобы лучше понять природу скачков.

Сначала покажем, что  $A(c_1)$  является прообразом  $c_1$

$$\varkappa^{-1}(c_1) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_1\}$$

Поскольку случайная величина не принимает значений до  $c_1$ , то множество  $A(c_1 - 0) = \{\omega \mid \varkappa(\omega) < c_1\}$  пустое. Получаем то, что хотели

$$\begin{aligned} \varkappa^{-1}(c_1) &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_1\} \cup \emptyset = \\ &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_1\} \cup \{\omega \mid \varkappa(\omega) < c_1\} = \\ &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq c_1\} = A(c_1) \end{aligned}$$

Идём дальше. Обозначим  $c_0 = -\infty$ . Тогда в каждой точке  $A(c_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$  происходит скачок на множество  $\varkappa^{-1}(c_i)$ , то есть

$$A(c_i) = A(c_{i-1}) \cup \varkappa^{-1}(c_i)$$

Так происходит, потому что имеет место равенство, которое выполняется из-за того, что функция имеет скачки лишь на параметрах  $c_i$ , а между ними не меняет значения

$$A(c_i) = A(c_{i+1} - 0)$$

В таком случае тождество очевидно

$$\begin{aligned} A(c_i) &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) \leq c_i\} = \\ &= \{\omega \mid \varkappa(\omega) < c_i\} \cup \{\omega \mid \varkappa(\omega) = c_i\} = \\ &= A(c_{i-1} - 0) \cup \varkappa^{-1}(c_i) = A(c_{i-1}) \cup \varkappa^{-1}(c_i) \end{aligned}$$

Поскольку  $\varkappa$  — случайная величина, принимающая  $m$  значений, то её прообразы составляют разбиение пространства элементарных исходов  $\Omega$ . А поскольку  $A(c_{i-1})$  состоит из объединений этих прообразов, то оно не пересекается с  $\varkappa^{-1}(c_i)$ . То есть, мы знаем, как вычислять прообраз  $\varkappa$

$$\begin{cases} A(c_{i-1}) \cap \varkappa^{-1}(c_i) = \emptyset \\ A(c_i) = A(c_{i-1}) \cup \varkappa^{-1}(c_i) \end{cases} \Rightarrow \varkappa^{-1}(c_i) = A(c_i) \setminus A(c_{i-1})$$

Значит, случайная величина  $\varkappa$  принимает значение  $c_i$  при выпадении любого элементарного исхода  $\omega$  из множества  $A(c_i) \setminus A(c_{i-1})$

$$\varkappa(\omega) = c_i, \omega \in A(c_i) \setminus A(c_{i-1}) \quad (2.2)$$

Запишем это в более удобном виде

$$\varkappa(\omega) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in A(c_i) \setminus A(c_{i-1})\}$$

Но эта сумма кажется уродливой из-за длинного индикатора и непонятного  $m$ . Попробуем разобраться, в чём же дело и как прийти к изначальной  $n$  и милым  $H_k$ .

Помним, что  $A(c_i) \setminus A(c_{i-1})$  — объединение нескольких множеств уровня  $H_k$ .

Для любого  $t$  разность множеств  $A(c_t) \setminus A(c_{t-1}) \neq \emptyset$  (когда это множество пустое, то индикатор просто не сработает и нечего считать) можно представить как объединение двух непересекающихся множеств, которые обозначим  $H_1^t \in \mathfrak{F}$  и  $H_2^t \in \mathfrak{F}$ , причём  $H_1^t$  — множество уровня, а  $H_2^t$  — произвольное множество из  $\mathfrak{F}$  (в том числе и пустое, если разность и есть множество уровня). Тогда  $t$ -ое слагаемое примет следующий вид

$$c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in A(c_t) \setminus A(c_{t-1})\} = c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_1^t \cup H_2^t\}$$

Поскольку множества  $H_1^t$  и  $H_2^t$  по условию не пересекаются, то можно разбить индикатор на сумму

$$\begin{aligned} c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_1^t \cup H_2^t\} &= c_t \cdot (\mathbb{1}\{\omega \in H_1^t\} + \mathbb{1}\{\omega \in H_2^t\}) \\ &= c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_1^t\} + c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_2^t\} \end{aligned}$$

Если ввести две константы  $c_1^t$  и  $c_2^t$ , которые будут равны старой  $c_t$ , то равенство примет более симпатичный вид

$$c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_1^t\} + c_t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_2^t\} = c_1^t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_1^t\} + c_2^t \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_2^t\}$$

Если же  $H_2^t$  не является пустым множеством  $\emptyset$  или множеством уровня  $H_k$ , то нужно повторить процедуру, разбив  $H_2^t$  на объединение двух непересекающихся множеств — на множество уровня и множество из  $\mathfrak{F}$ . В итоге (вследствие конечности множества  $\mathfrak{F}$ ) индикатор разности  $A(c_t) \setminus A(c_{t-1})$  будет разбита на сумму индикаторов множеств уровней.

Таким же образом можно поступить со всеми остальными индикаторами. В итоге получим  $n$  констант  $d_1, d_2, \dots, d_n$  вместо  $m$   $c_1, c_2, \dots, c_m$ .

Теперь сумма примет более приятный для глаз и понятный из контекста начала раздела вид

$$\begin{aligned}\varkappa(\omega) &= \sum_{i=1}^m c_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in A(c_i) \setminus A(c_{i-1})\} = \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_i\}\end{aligned}$$

Видим, что теперь можно определить отображение из множества значений, принимаемых случайной величиной  $\xi$ , в множество значений, принимаемых случайной величиной  $\varkappa$

$$f : \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rightarrow \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

Попробуем показать, что  $\varkappa$  является функцией от  $\xi$ . Очевидно, что случайная величина  $\xi$  имеет такой же вид, что и  $\varkappa$  — сумма констант, умноженных на индикаторы, так как мы только что показали, что все функции, измеримые относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой случайной величиной  $\xi$ , выглядят именно так

$$f(\xi(\omega)) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}\{\omega \in H_i\}\right)$$

Поскольку уровни  $H_i$  не пересекаются, то лишь одно слагаемое не будет равно нулю:  $\omega$  может принадлежать лишь одному уровню. В таком случае запись принимает свой изначальный вид без суммы (2.2)

$$f(\xi(\omega)) = f(a_i), \omega \in H_i$$

Замечаем, что  $f(a_i) = d_i$ , а это и есть то значение, которое принимает случайная величина  $\varkappa$  на уровне  $H_i$

$$f(\xi(\omega)) = f(a_i) = d_i = \varkappa(\omega), \omega \in H_i$$

Поскольку мы не привязывались к конкретным  $i$  и конкретным  $\omega$ , то получаем желаемое равенство

$$\varkappa = f(\xi)$$

Отсюда делаем вывод, что случайной величине  $\varkappa$  необходимо и достаточно быть функцией случайной величины  $\xi$ , чтобы быть измеримой относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой случайной величиной  $\xi$ .

## 2.4 Условное математическое ожидание

Имеется произвольная случайная величина  $\eta$ , интегрируемая с квадратом. Нужно найти случайную величину  $\tilde{\eta}$  которая измерима в  $\sigma(\xi)$  и ближайшая в среднем квадратическом к  $\eta$ .



### 2.4.1 Проекция вектора

Для наглядности начнём с геометрической интерпретации задачи. Если представить  $\eta$  как вектор в некоем пространстве  $\mathfrak{L}$ , а  $\sigma(\xi)$  как подпространство пространства  $\mathfrak{L}$ , то  $\tilde{\eta}$  будет ни что иное, как проекция случайной величины  $\eta$  на пространство  $\sigma(\xi)$ .

Отдохнём от случайных величин и вспомним геометрию.

Имеется точка  $x$  в пространстве  $L'$ . Мы ищем такую точку  $y$  в подпространстве  $L \subset L'$ , что расстояние между  $x$  и  $y$  минимальное. Значит, надо опустить перпендикуляр от  $y$  на  $L$ .

У нас есть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в  $L$ , тогда  $y$  можно найти по формуле

$$y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) \cdot e_k \quad (2.3)$$

Потому что  $y \in L$  должен лежать в пространстве  $L$  по условию, а это значит, что он должен быть линейной комбинацией базисных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и это очевидно выполняется.

Также разностью  $x - y$  должен быть вектор, перпендикулярный пространству  $L$ . То есть, скалярное произведение этой разности с любым вектором  $z$  из пространства  $L$  должно равняться нулю

$$(x - y) \perp L \Leftrightarrow \forall z \in L : (x - y, z) = 0$$

Вследствие линейности скалярного произведения можно переписать это условие иначе

$$\begin{cases} \forall z \in L : (x - y, z) = 0 \\ (a + b, c) = (a, c) + (b, c) \end{cases} \Rightarrow \forall z \in L : (x, z) = (y, z)$$

Покажем, что и это выполняется.  $z$  является линейной комбинацией базисных векторов. Запишем это

$$z = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot e_k$$

В таком случае скалярное произведение  $(x, z)$  будет таким

$$(x, z) = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot (x, e_k)$$

С произведением  $(y, x)$  придётся чуть-чуть повозиться

$$(y, x) = \left( \sum_{k=1}^n (x, e_k) \cdot e_k, \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot e_k \right) = \sum_{k=1}^n (x, e_k) \cdot \beta_k$$

Как видим, суммы равны, а значит, проекция  $x$  на  $L$  найдена верно.

### 2.4.2 Проекция случайной величины

Возьмём  $L$  — множество всех случайных величин, которые измеримы относительно  $\sigma(\xi)$ .

$$L \ni \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mathbb{1}_{H_k}, c_k \in \mathbb{R}$$

Но что же взять в качестве ортонормированного базиса? По внешнему виду элементов пространства  $L$  кажется, что это  $\mathbb{1}_{H_k}$ . В качестве скалярного произведения случайных величин возьмём математическое ожидание произведения.

Оказывается,  $H_k$  действительно ортогональны

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow H_{k_1} \cap H_{k_2} = \emptyset \Rightarrow M[\mathbb{1}_{H_{k_1}} \cdot \mathbb{1}_{H_{k_2}}] = 0$$

Теперь нужно нормировать эти базисные вектора, а для этого их надо поделить на их нормы. В нашем пространстве норма порождена скалярным произведением, то есть

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{M[x \cdot x]} = \sqrt{M[x^2]}, x \in L$$

Теперь у нас есть всё необходимое для того, чтобы представить ортонормированный базис. Начнём преобразования  $H_k$

$$e_k = \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{M(\mathbb{1}_{H_k})^2}}$$

Поскольку индикатор может принимать лишь одно из двух значений 0 или 1, а их квадраты равны им самим, то в формуле квадрат тоже можно убрать

$$e_k = \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{M\mathbb{1}_{H_k}}}$$

Также помним, что математическое ожидание в знаменателе есть ни что иное, как вероятность события  $H_k$ , и теперь у нас есть красивый ортонормированный базис

$$e_k = \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}} \quad (2.4)$$

Идём дальше, ищем проекцию. Вспомним снова пример с векторами (2.3)

$$y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) \cdot e_k$$

Если заменить  $y$  на  $\tilde{\eta}$ , а  $x$  на  $\eta$ , то получаем следующую картину, имеющую непосредственное отношение к задаче

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^n (\eta, e_k) \cdot e_k$$

Осталось заменить  $e_k$  на то, что получили выше (2.4)

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^n \left( \eta, \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}} \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}}$$

Заменяем скалярное произведение на математическое ожидание произведения и получаем то, с чем можно дальше работать, не отвлекаясь на геометрию

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^n \mathbb{M} \left( \eta \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}} \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}}$$

Поскольку вероятность  $\mathbb{P}(H_k)$  — константа, то её можно вынести за математическое ожидание

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}} \cdot \frac{\mathbb{1}_{H_k}}{\sqrt{\mathbb{P}(H_k)}}$$

При умножении знаменателей получаем вероятность события  $H_k$ . Теперь у нас есть красивая формула для проекции случайной величины

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k} \quad (2.5)$$

На что стоит обратить внимание в этой формуле:

1.  $\tilde{\eta}$  — **случайная величина**, так как индикатор вне математического ожидания никуда не девается и результат суммы будет зависеть от произошедшего  $\omega$ , а точнее от того, какому уровню  $H_k$  оно принадлежит
2. Когда  $\omega$  принадлежит  $H_k$ , то результатом суммы будет среднее значение случайной величины  $\eta$  на событии  $H_k$

Если с первым пунктом всё очевидно, то небольшое пояснение ко второму не помешает.

Нужно показать, что  $k$ -я “координата” случайной величины  $\tilde{\eta}$  действительно даёт среднее значение случайной величины  $\eta$  на событии  $H_k$

$$\frac{\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)}$$

Начнём с определения математического ожидания

$$\begin{aligned} \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] &= \int_{\Omega} \eta(\omega) \cdot \mathbb{1}_{H_k} \mathbb{P}(d\omega) = \\ &= \int_{H_k} \eta(\omega) \mathbb{P}(d\omega) + \int_{\Omega \setminus H_k} 0 \mathbb{P}(d\omega) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Видим математическое ожидание случайной величины, которая гарантированно принимает нулевое значение на множестве  $\Omega \setminus H_k$ , что в свою очередь искажает желаемую картину и притягивает результат к нулю с силой, которая пропорциональна  $\mathbb{P}(\Omega \setminus H_k)$ . То есть, “вес” каждого ненулевого значения случайной величины уменьшился.

Почему так происходит? Потому что вероятность события  $H_k$  в общем случае не равна единице. Если ввести новую меру  $\mathbb{P}_k(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(H_k)}$ , то наступит гармония, а вероятность  $\mathbb{P}_k(H_k)$  будет равна единице.

Из контекста понятно, что эта мера будет использоваться лишь в интеграле по событию  $H_k$ , поэтому её значение будет колебаться в пределах  $[0; 1]$ , но строгости ради введём небольшую поправку (и увидим, что не напрасно)

$$\mathbb{P}_k(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}$$

Видим условную вероятность, а это значит, что мы на правильном пути! Логично, что в поисках условного математического ожидания должна была встретиться условная вероятность

$$\mathbb{P}_k(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} = \mathbb{P}(A \mid H_k)$$

Теперь математическое ожидание (2.6) принимает несколько иной вид

$$\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] = \mathbb{P}(H_k) \cdot \int_{H_k} \eta(\omega) \mathbb{P}(d\omega \mid H_k)$$

Тут уже уровень  $H_k$  играет роль целого множества элементарных исходов, его мера  $\mathbb{P}(H_k \mid H_k)$  равна единице, а мы получаем действительно среднее значение случайной величины  $\eta$  на множестве  $H_k$ , умноженное на вероятность  $\mathbb{P}(H_k)$ . Значит, осталось лишь поделить обе части на  $\mathbb{P}(H_k)$

$$\frac{\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} = \int_{H_k} \eta(\omega) \mathbb{P}(d\omega \mid H_k)$$

**Определение 2.4.1** (Условное математическое ожидание случайной величины относительно случайного события). Условное математическое ожидание случайной величины  $\xi$  относительно **события**  $A$  [2, стр. 68] обозначается  $\mathbb{M}[\xi \mid A]$  и считается по формуле

$$\mathbb{M}[\xi \mid A] = \frac{\mathbb{M}[\xi \cdot \mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)} = \int_A \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega \mid A)$$

Пользуясь только что введённым обозначением, можно более красиво переписать формулу (2.5) для получения проекции случайной величины  $\eta$  на  $\sigma$ -алгебру, порождённую уровнями  $H_1, H_2, \dots, H_n$

$$\tilde{\eta} = \sum_{k=1}^n \mathbb{M}[\eta \mid H_k] \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Забегаая наперёд, введём определение частного случая условного математического ожидания случайной величины относительно  $\sigma$ -алгебры, чтобы обратить внимание на этот важный момент.

**Определение 2.4.2** (Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры, порождённой случайной величиной, принимающей конечное количество значений). Есть  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{F}_1$ , разбитая

на  $n$  уровней  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Тогда условное математическое ожидание случайной величины  $\eta$  относительно этой  $\sigma$ -алгебры — **случайная величина**, которая обозначается  $M[\eta \mid \mathfrak{F}_1]$  и вычисляется по формуле

$$M[\eta \mid \mathfrak{F}_1] = \sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

**Замечание 12.** У нас есть определения условного математического ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}$  и относительно случайного события  $A$ . Из контекста будет ясно, какое именно определение используется, поэтому путаницы возникнуть не должно.

Например, последнее определение может выглядеть немного странно

$$M[\eta \mid \mathfrak{F}_1] = \sum_{k=1}^n M[\eta \mid H_k] \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Зато при более детальном рассмотрении из самой записи очевиден её смысл: условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры — вектор, для получения которого нужно умножить проекции на базисные векторы. Ведь  $M[\eta \mid H_k]$  — ни что иное, как проекция вектора (случайной величины)  $\eta$  на ось (уровень)  $H_k$ , также эта величина является скаляром, как и проекция вектора на ось.

**Лемма 2.4.1** (Равенство скалярных произведений для конечной сигма-алгебры). Для случайной величины  $\eta$  и её проекции  $\tilde{\eta}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{F}_\xi$ , порождённую случайной величиной  $\xi$ , принимающей конечное количество значений, выполняется равенство скалярных произведений

$$\forall A \in \mathfrak{F}_\xi : M[\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_A] = M[\eta \cdot \mathbb{1}_A] \quad (2.7)$$

*Доказательство.* Для начала распишем  $\tilde{\eta}$  по определению

$$M[\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_A] = M\left(\sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k} \cdot \mathbb{1}_A\right)$$

Произведение индикаторов  $\mathbb{1}_{H_k}$  и  $\mathbb{1}_A$  — индикатор пересечения  $\mathbb{1}_{H_k \cap A}$ . Воспользуемся линейностью математического ожидания, не забывая, что дробь в каждом слагаемом — константа и выносится за знак математического ожидания

$$M\left(\sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k} \cdot \mathbb{1}_A\right) = \sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot M[\mathbb{1}_{H_k \cap A}]$$

Помним, что математическое ожидание индикатора — вероятность

$$\sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot M[\mathbb{1}_{H_k \cap A}] = \sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k \cap A)$$

Замечаем условную вероятность

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k \cap A) &= \sum_{k=1}^n M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(H_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^n M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] \cdot \mathbb{P}(A \mid H_k) \end{aligned}$$

Поскольку  $A$  принадлежит множеству случайных событий  $\mathfrak{F}_\xi$ , то условная вероятность  $\mathbb{P}(A \mid H_k)$  равна либо нулю, либо единице, поскольку  $A$  либо включает в себя уровень  $H_k$ , либо не пересекается с ним. То есть, получился индикатор  $\mathbb{1}(H_k \subseteq A)$ . А этот индикатор говорит о том, что теперь надо суммировать лишь по тем уровням, которые являются частью события  $A$ , а дальше можно смело воспользоваться линейностью математического ожидания

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] \cdot \mathbb{P}(A \mid H_k) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] \cdot \mathbb{1}(H_k \subseteq A) = \\ &= \sum_{H_k \subseteq A} \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}] = \mathbb{M} \left[ \sum_{H_k \subseteq A} \eta \cdot \mathbb{1}_{H_k} \right] \end{aligned}$$

Далее мы имеем полное математическое и моральное право вынести  $\eta$  за знак суммы. Если с математикой всё очевидно (работает закон дистрибутивности), то напомним о морально-этической стороне дела: нам нужно, пройтись по всем возможным индикаторам  $\mathbb{1}_{H_k}$ , из которых лишь один работает (будет равен единице, а не нулю), поэтому сумма нужна лишь для того, чтобы не писать в конце каждой строчки “для тех  $\omega$ , что входят в  $H_k$ ” (помним, что случайная величина и индикатор — функции от элементарного события  $\omega$ )

$$\mathbb{M} \left[ \sum_{H_k \subseteq A} \eta \cdot \mathbb{1}_{H_k} \right] = \mathbb{M} \left[ \eta(\omega) \cdot \sum_{H_k \subseteq A} \mathbb{1}_{H_k}(\omega) \right]$$

Сумма индикаторов непересекающихся событий — индикатор их объединения, которое является множеством  $A$ . Не забываем, что оно может состоять из объединений уровней и только из них (или же быть пустым)

$$\mathbb{M} \left[ \eta \cdot \sum_{H_k \subseteq A} \mathbb{1}_{H_k} \right] = \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_A]$$

Значит, равенство (2.7) выполняется.  $\square$

**Замечание 13.** В связи с выполнением равенства скалярных произведений можем сделать вывод, что математическое ожидание случайной величины и её проекции тоже равны. Это нетрудно показать, установив  $A$  равным всему множеству элементарных исходов (индикатор в таком случае станет просто тождественной единицей)

$$\mathbb{M}\eta = \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{M}[\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{M}\tilde{\eta}$$

### 2.4.3 Условное математическое ожидание

Введём же общее определение для условного математического ожидания случайной величины относительно  $\sigma$ -алгебры

**Определение 2.4.3** (Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры). Условным математическим ожиданием случайной величины  $\eta$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_1$  называется такая случайная величина  $\tilde{\eta}$ , что

1. Случайная величина  $\tilde{\eta}$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_1$
2. Выполняется равенство скалярных произведений

$$\forall A \in \mathfrak{F}_1 : M[\tilde{\eta} \cdot \mathbb{1}_A] = M[\eta \cdot \mathbb{1}_A]$$

Обозначение  $\tilde{\eta} = M[\eta \mid \mathfrak{F}_1]$

**Замечание 14.** Условное математическое ожидание случайной величины  $\eta$  относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой случайной величиной  $\xi$ , будем обозначать  $M[\eta \mid \sigma(\xi)]$ , а более кратко  $M[\eta \mid \xi]$ .

То есть, имеем три эквивалентных записи

$$M[\eta \mid \mathfrak{F}_\xi] = M[\eta \mid \sigma(\xi)] = M[\eta \mid \xi]$$

Немного остановимся на примере, чтобы понять, что у нас есть на данный момент

**Пример 2.4.1.** У нас есть две дискретные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  с совместным дискретным распределением

$$\mathbb{P}\{\xi = a_i, \eta = b_j\} = p_{ij}$$

Очевидно, что числа  $p_{ij}$  обладают некоторым свойствам

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad \mathbb{P}\{\eta = b_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

Посчитаем условное математическое ожидание согласно формуле из определения (2.4.2)

$$M[\xi \mid \sigma(\eta)] = \sum_{k=1}^n \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_k}]}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Для этого выясним, чему равно математическое ожидание  $\xi$  при определённом значении  $\eta$  по формуле из определения (2.4.1)

$$M[\xi \mid \eta = b_j] = \frac{M[\xi \cdot \mathbb{1}_{\eta=b_j}]}{\mathbb{P}\{\eta = b_j\}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot p_{ij}}{\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}}$$

Попробуем обобщить определение условного математического ожидания, чтобы обладать универсальной формулой, из которой можно делать какие-то выводы. Начнём с того, что у нас уже есть

$$M[\eta \mid \mathfrak{F}_\xi] = \sum_{k=1}^n M[\eta \mid H_k] \cdot \mathbb{1}_{H_k}$$

Множество уровня  $H_k$  — прообраз одного из значений случайной величины  $\xi$ , которой порождена  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{F}_\xi$ . Если назвать эти значения  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то запись примет следующий вид

$$\mathbb{M}[\eta \mid \sigma(\xi)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{M}[\eta \mid \xi^{-1}(a_k)] \cdot \mathbb{1}_{\{\xi^{-1}(a_k)\}} \quad (2.8)$$

Вспомним альтернативные записи прообраза

$$\xi^{-1}(a_k) = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\} = \{\xi = a_k\}$$

И перепишем формулу (2.8)

$$\mathbb{M}[\eta \mid \sigma(\xi)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{M}[\eta \mid \xi = a_k] \cdot \mathbb{1}_{\xi=a_k}$$

Теперь введём функцию  $\varphi^\eta(x) = \mathbb{M}[\eta \mid \xi = x]$  и условное математическое ожидание примет следующий вид

$$\mathbb{M}[\eta \mid \xi] = \sum_{k=1}^n \varphi^\eta(a_k) \cdot \mathbb{1}_{\xi=a_k}$$

Вновь вспоминаем роль суммы и индикаторов и видим, что условное математическое ожидание в нашей формуле принимает значение  $\varphi^\eta(x)$  в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина  $\xi(\omega)$ . То есть, можно переписать равенство следующим образом

$$\mathbb{M}[\eta \mid \xi] = \varphi^\eta(a_k) : \xi(\omega) = a_k$$

То есть, можно просто подставить значение случайной величины  $\xi$  в качестве аргумента функции  $\varphi^\eta$  и получим условное математическое ожидание

$$\mathbb{M}[\eta \mid \xi] = \varphi^\eta(\xi)$$

Остановимся ещё немного на функции  $\varphi^\eta$ . Она является случайной величиной, поэтому перепишем равенство следующим образом

$$\varphi^\eta(\xi)(\omega) = \mathbb{M}[\eta \mid \xi](\omega)$$

Тогда будет корректна следующая запись

$$\varphi^\eta(\xi)(\omega) = \mathbb{M}[\eta \mid \xi = t] \Big|_{t=\xi(\omega)}$$

Не путаем случайную величину  $\xi(\omega)$  саму по себе со случайной величиной в случайном событии

$$H_t = \{\xi = t\} = \{\tilde{\omega} \mid \xi(\tilde{\omega}) = t\}$$

Для удобства вернёмся к обозначению  $H_t$

$$\varphi^\eta(\xi)(\omega) = \mathbb{M}[\eta \mid H_t] \Big|_{t=\xi(\omega)} = \frac{\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{H_t}]}{\mathbb{P}(H_t)} \Big|_{t=\xi(\omega)}$$



Покажем, что такая формула вычисления условного математического ожидания подходит для общего случая.\*

**Лемма 2.4.2** (Равенство скалярных произведений в общем случае). *В общем случае случайная величина  $\varphi^\eta(\xi)$  является условным математическим ожиданием случайной величины  $\eta$  относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой случайной величиной  $\xi$*

$$\mathbb{M}[\eta \mid \sigma(\xi)] = \varphi^\eta(\xi)$$

*Доказательство.* Нужно доказать то, что выполняются оба свойства условного математического ожидания.

То, что  $\varphi^\eta(\xi)$  измерима относительно  $\sigma(\xi)$ , очевидно из определения:  $\varphi^\eta(\xi)$  является функцией случайной величины  $\xi$ , а это и есть измеримость.

Дальше придётся немного повозиться.

$$\forall A \in \sigma(\xi) : \mathbb{M}[\varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_A]$$

Следуем определению. Пока что ничего очевидного нет кроме надежды на то, что была выведена достаточно общая формула, которая должна работать

$$\mathbb{M}[\varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A] = \int_{\Omega} \varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A d\mathbb{P}$$

Применим индикатор и будем интегрировать не по всему множеству элементарных исходов, а лишь по событию  $A$ , а также в явном виде покажем элементарный исход  $\omega$ , так как сейчас с ним надо будет поработать основательно

$$\int_{\Omega} \varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A d\mathbb{P} = \int_A \varphi^\eta(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) \quad (2.9)$$

Теперь нужно немного остановиться и подумать, что же делать дальше. Немного выше оказалось, что сама по себе запись  $\varphi^\eta(\xi)$  не даёт ничего полезного. Копнём немногo глубже и посмотрим на то, что есть у нас. Значение случайной величины использовалось лишь для восстановления случайного события, которому принадлежит произошедший элементарный исход  $\omega^\dagger$ . То есть, мы знали, чему равна случайная величина, но не знали, какое именно событие произошло, зато могли определить, какому уровню принадлежит произошедшее событие. Тут же у нас есть интеграл и мы проходим по каждому мельчайшему событию  $d\omega$ . Вспомним, чему равна  $\varphi^\eta(x)$

$$\varphi^\eta(x) = \mathbb{M}[\eta \mid \xi = x]$$

\*Так как формула была выведена из условного математического ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой случайной величиной, принимающей конечное количество значений, то справедливость формулы для этого случая доказывать уже нет нужды

<sup>†</sup>Ведь именно по значению случайной величины мы и находили уровни, элементарные исходы которых для нас неразличимы внутри одного множества уровня

$$H_t = \xi^{-1}(a_t) = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_t\}$$

А теперь распишем условное математическое ожидание

$$\varphi^\eta(x) = M[\eta \mid \xi = x] = \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi=x\}}]}{\mathbb{P}\{\xi = x\}}$$

В общем случае для непрерывных случайных величин такая запись не имеет смысла, но мы как раз рассматриваем очень маленькие значения, а усложнять нет желания. Поэтому просто подставляем получившееся выражение в интеграл (2.9)

$$\int_A \varphi^\eta(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_A \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi=x\}}]}{\mathbb{P}\{\xi = x\}} \mathbb{P}(d\omega) \quad (2.10)$$

Дальше происходит магия, которую можно трактовать по-разному

**Формулировка 1:** Воспользовавшись вышесказанным, заменим событие  $\{\xi = x\}$  на  $d\omega$  и продолжим колдовать

$$\int_A \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi=x\}}]}{\mathbb{P}\{\xi = x\}} \mathbb{P}(d\omega) = \int_A \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega}]}{\mathbb{P}(d\omega)} \mathbb{P}(d\omega)$$

Вероятности сокращаются, хоть это и немного смущает, а  $d\omega$  находится в индикаторе, что ещё больше нагнетает обстановку. Учтём внесённые изменения и перепишем математическое ожидание через интеграл

$$\int_A \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega}]}{\mathbb{P}(d\omega)} \mathbb{P}(d\omega) = \int_A \int_\Omega \eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(d\tilde{\omega})$$

Не путаемся:  $d\omega$  принадлежит внешнему интегралу, а  $d\tilde{\omega}$  внутреннему. Индикатор упрощает нашу задачу, сужая пределы интегрирования внутреннего интеграла до маленького события  $d\omega$

$$\int_A \int_\Omega \eta \cdot \mathbb{1}_{d\omega} \cdot \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \int_A \int_{d\omega} \eta(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(d\tilde{\omega})$$

Поскольку событие  $d\omega$  и без того маленькое, дробить его на более мизерные  $d\tilde{\omega}$  смысла нет, а это значит, что внутренний интеграл просто уничтожается и остаётся произведение случайной величины  $\eta$  на вероятность события  $d\omega$

$$\int_{d\omega} \eta(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(d\tilde{\omega}) = \eta(\omega) \cdot \mathbb{P}(d\omega)$$

**Формулировка 2:** Если посмотреть на исходный двойной интеграл, то можно увидеть условное математическое ожидание  $\eta$  относительно события  $\{\xi = x\} = d\omega$

$$\int_A \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi=x\}}]}{\mathbb{P}\{\xi = x\}} \mathbb{P}(d\omega) = \int_A M[\eta \mid d\omega] \mathbb{P}(d\omega)$$

Если определить  $d\omega$  как случайное событие, на котором случайная величина  $\eta$  принимает одно и то же значение почти всюду, то математическое ожидание равно значению  $\eta$  при появлении почти любого события из  $d\omega^\ddagger$  (если значение на промежутке  $d\omega$  — константа, то очевидно, что среднее значение будет равно ей же).

$$\int_A M[\eta \mid d\omega] \mathbb{P}(d\omega) = \int_A \eta \mathbb{P}(d\omega)$$

С этим моментом разобрались, вернёмся же к нашему двойному интегралу (2.10). Получаем такой вот результат

$$\int_A \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi=x\}}]}{\mathbb{P}\{\xi=x\}} \mathbb{P}(d\omega) = \int_A \eta \mathbb{P}(d\omega)$$

Но ведь это и есть искомое математическое ожидание! Значит, свойство доказано, формула верна

$$\int_A \eta \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \eta \cdot \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{P}(d\omega) = M[\eta \cdot \mathbb{1}_A]$$

□

Теперь вернёмся к менее абстрактным вещам и посмотрим, как выглядит условное математическое ожидание, когда случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют совместную плотность распределения

$$\mathbb{P}\{(\xi, \eta) \in \Delta\} = \iint_{\Delta} p(x, y) \, dx \, dy$$

В таком случае компонента  $\xi$  имеет плотность  $r$

$$r(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) \, dy$$

Компонента  $\eta$  имеет плотность  $q$

$$q(y) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) \, dx$$

Уточним определение функции  $\varphi^\eta(x)$  для данного случая. Вот первоначальный вариант

$$\varphi^\eta(x) = M[\eta \mid \xi = x] = \frac{M[\eta \cdot \mathbb{1}_{\{\xi=x\}}]}{\mathbb{P}\{\xi=x\}}$$

---

<sup>‡</sup>Нам достаточно постоянства значения  $\xi(\omega)$  **почти всюду** на событии  $d\omega$ , так как интеграл Лебега простой функции (функции, что принимает конечное число значений [3, стр. 53]) — сумма значений функции, умноженных на меры соответствующих им прообразов [3, стр. 69]; в противном случае результатом будет наибольшее значение из интегралов Лебега всех простых функций, не превышающих данную в каждой точке. А это значит, что, если и будут отклонения от основного значения функции  $\xi$  на событии  $d\omega$ , то они будут уничтожаться мерой своих прообразов, равными нулю (в связи с тем, что функция  $\xi(\omega)$  равна одному и тому же значению почти всюду на  $\omega$ )

В данном (непрерывном) случае вероятность события  $\mathbb{P}\{\xi = x\}$  является плотностью случайной величины  $\xi$  в точке  $x$

$$\mathbb{P}\{\xi = x\} = r(x)$$

Математическое ожидание случайной величины  $\eta$ , умноженной на индикатор  $\mathbb{1}(\xi = x)$ , есть ни что иное как математическое ожидание  $\eta$  при фиксированном  $\xi = x$

$$\mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}(\xi = x)] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy$$

Теперь у нас есть конкретная формула для  $\varphi^\eta(x)$  для случая непрерывных случайных величин с общей плотностью распределения

$$\varphi^\eta(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy}{r(x)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy} \quad (2.11)$$

Докажем снова, что  $\varphi^\eta(\xi)$  является условным математическим ожиданием случайной величины  $\eta$  относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой случайной величиной  $\xi$ . Чтобы не было скучно, будем доказывать несколько иначе, чем ранее.

**Лемма 2.4.3** (Равенство скалярных произведений условного математического ожидания случайных величин с совместной плотностью). *Пусть имеются две случайные величины  $(\xi, \eta)$  с совместной плотностью  $p(x, y)$ . Тогда функция*

$$\varphi^\eta(\xi) = \left. \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy} \right|_{x=\xi}$$

*Является условным математическим ожиданием  $\mathbb{M}[\eta | \xi]$*

*Доказательство.* Первое свойство снова очевидно, поэтому надо доказать

$$\forall A \in \sigma(\xi) : \mathbb{M}[\varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_A] \quad (2.12)$$

У нас есть совместная плотность и мы хотим посчитать математическое ожидание, пользуясь именно ею. Для этого превратим индикатор  $\mathbb{1}(\omega \in A)$  в функцию случайной величины  $\xi$ . Поскольку любое событие  $A$  принадлежит  $\sigma(\xi)$ , то оно представимо в виде  $\xi^{-1}(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathfrak{B}$ . Перепишем индикатор следующим образом:  $\mathbb{1}(\omega \in A) = \mathbb{1}(\xi \in \Delta)$ . И вот теперь мы готовы к тому, чтобы записать определение математического ожидания

$$\mathbb{M}[\varphi^\eta(\xi) \cdot \mathbb{1}_A] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi^\eta(x) \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x, y) dx dy$$

От  $y$  зависит лишь совместная плотность, а интеграл от неё по всей оси  $y$  является плотностью распределения  $\xi$ . То есть, интеграл по  $y$  уходит, а

вместо  $p(x, y)$  появляется  $r(x)$ . Также учтём индикатор и сузим область интегрирования с  $\mathbb{R}$  до  $\Delta$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi^\eta(x) \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Delta} \varphi^\eta(x) \cdot r(x) \, dx$$

Дальше распишем функцию  $\varphi^\eta$ , пользуясь формулой (2.11)

$$\int_{\Delta} \varphi^\eta(x) \cdot r(x) \, dx = \int_{\Delta} \left( \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) \, dy}{r(x)} \cdot r(x) \right) dx$$

Сократим одинаковые плотности и получим интересный двойной интеграл

$$\int_{\Delta} \left( \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) \, dy}{r(x)} \cdot r(x) \right) dx = \int_{\Delta} \int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) \, dy \, dx$$

Вернём индикатор обратно в интеграл

$$\int_{\Delta} \int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) \cdot dy \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x, y) \, dy \, dx$$

Видим, что это и есть то математическое ожидание, которое нам нужно

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y \cdot \mathbb{1}(x \in \Delta) \cdot p(x, y) \, dy \, dx = \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_{\xi \in \Delta}] = \mathbb{M}[\eta \cdot \mathbb{1}_A]$$

Это значит, что тождество доказано и условное математическое ожидание для случайных величин с совместной плотностью считается с помощью

$$\varphi^\eta(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) \, dy}{\int_{\mathbb{R}} p(x, y) \, dy}$$

По формуле

$$\mathbb{M}[\eta \mid \xi] = \varphi^\eta(\xi) = \varphi^\eta(x)|_{x=\xi}$$

□

**Теорема 2.4.1** (Существование условного математического ожидания). *Условное математическое ожидание существует всегда и единственное почти наверное*

*Доказательство.* [1, стр. 142]

□

### 2.4.4 Свойства условного математического ожидания

Были даны определения условного математического ожидания для разных случаев, теперь настало время привести основные свойства, которые позволят облегчить процедуру вычисления.<sup>§</sup>

1. Формула полной вероятности [1, стр. 144]

$$\mathbb{M}[\eta \mid \mathfrak{F}_1] = \mathbb{M}\eta$$

2. Условное математическое ожидание неотрицательной случайной величины неотрицательно почти наверное

$$\eta \geq 0 \Rightarrow \mathbb{M}[\eta \mid \mathfrak{F}_1] \geq 0$$

3. Неравенство Йенсена. Если функция  $\varphi$  выпуклая вниз, то

$$\varphi(\mathbb{M}[\eta \mid \mathfrak{F}_1]) \leq \mathbb{M}[\varphi(\eta) \mid \mathfrak{F}_1]$$

4. Теорема о трёх перпендикулярах

$$\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1 \Rightarrow \mathbb{M}[\mathbb{M}(\eta \mid \mathfrak{F}_1) \mid \mathfrak{F}_2] = \mathbb{M}[\eta \mid \mathfrak{F}_2]$$

5. Если случайная величина  $\eta$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_1$ , то её условное математическое ожидание равно ей самой

$$\mathbb{M}[\eta \mid \mathfrak{F}_1] = \eta$$

6. Если случайная величина  $\eta$  измерима относительно  $\mathfrak{F}_1$ , то для любой случайной величины  $\xi$

$$\mathbb{M}[\eta \cdot \xi \mid \mathfrak{F}_1] = \eta \cdot \mathbb{M}[\xi \mid \mathfrak{F}_1]$$

7. Если  $\eta$  не зависит от  $\mathfrak{F}_1$ , то её условное математическое ожидание равно простому математическому ожиданию

$$\forall \Delta \in \mathfrak{B}, A \in \mathfrak{F}_1 : \mathbb{P}(\{\eta \in \Delta\} \mid A) = \{\eta \in \Delta\} \Rightarrow \mathbb{M}[\eta \mid \mathfrak{F}_1] = \mathbb{M}\eta$$

8. Условное математическое ожидание линейно, сохраняется теорема Лебега о возможности предельного перехода под знаком условного математического ожидания [5, стр. 302]. В книге Ширяева это называется теоремой о сходимости под знаком условных ожиданий [4, стр. 272]

---

<sup>§</sup>Также со свойствами и их доказательствами можно ознакомиться в книгах Ширяева [4, стр. 270] и Боровкова [1, стр. 143]

### 2.4.5 Условное математическое ожидание функции произвольной случайной величины

Чем вызвала интерес эта тема? Допустим, у нас есть  $x_1, \dots, x_n$  — выборка с функцией правдоподобия  $L$

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{k=1}^n p(x_k, \theta)$$

Также есть  $\hat{\theta}$  — несмещённая оценка параметра  $\theta$ . Как улучшить  $\hat{\theta}$ ?

Возьмём статистику  $T = T(\vec{x})$ , тогда улучшенной оценкой  $\theta$  будет условное математическое ожидание  $M[\hat{\theta} | T]$ .

О свойствах, которыми должна обладать статистика  $T$ , поговорим позже. Одно ясно уже сейчас:  $T$  является функцией от выборки  $\vec{x}$ , как и оценка  $\hat{\theta}$ . Это значит, что нам не нужно погружаться в слишком абстрактные размышления, а достаточно выяснить, как считать математическое ожидание одной функции выборки (случайного вектора)  $f(\vec{x})$  при условии другой функции  $g(\vec{x})$  той же выборки  $\vec{x}$ .

$$f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Вспомним, что для поиска условного математического ожидания мы находили функцию  $\varphi^n(x) = M[\eta | \xi = x]$ . Тут изменилось совсем немного — лишь обозначения: вместо  $\eta$  у нас  $f(\vec{x})$ , а вместо  $\xi$  тут  $g(\vec{x})$ . Значит, нужно найти вид такого условного математического ожидания

$$M[f(\vec{x}) | g(\vec{x}) = t] = ?$$

Для начала нужно понять, что из себя представляет множество точек  $S_t = \{\vec{u} | g(\vec{u}) = t\}$ .

Очевидно, что функция  $g(\vec{x})$  описывает скалярное поле в  $n$ -мерном пространстве. А для скалярного поля множество  $S_t$  имеет своё название — поверхность уровня (изоповерхность) — то есть, поверхность, на которой функция принимает одно и то же значение.

Для понимания ситуации рассмотрим несколько примеров.

**Пример 2.4.2.** Имеем двумерное пространство

$$n = 2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Функция  $g(x, y)$  будет возвращать первую координату

$$g(x, y) = x$$

Очевидно, что поверхности уровней — вертикальные линии (параллельные оси ординат), так как при изменении  $y$  значение функции не меняется

$$S_t = \{(x, y) | g(x, y) = t\} = \{(x, y) | x = t\}$$

**Пример 2.4.3.** Опять возьмём двумерное пространство

$$n = 2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

В этот раз функция  $g(x, y)$  будет квадратом расстояния от начала координат  $(0, 0)$  до точки  $(x, y)$

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Тут поверхностями уровня будут окружности радиуса  $\sqrt{t}$ , так как окружность по определению является геометрическим местом точек, равноудалённых от определённой точки (расстояния до которых одинаковые)

$$S_t = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = t\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \sqrt{t}^2\}$$

**Пример 2.4.4.** Рассмотрим  $n$ -мерное пространство ( $n \geq 1$ ). Возьмём единичный вектор  $\vec{e} : \|\vec{e}\| = 1$ . Функция  $g$  будет скалярным произведением аргумента  $\vec{u}$  с только что определённым единичным вектором  $\vec{e}$

$$g(\vec{u}) = (\vec{u}, \vec{e})$$

В таком случае поверхностью уровня  $S_t$  будет гиперплоскость, проходящая через точку  $t \cdot \vec{e}$ , с нормалью  $\vec{e}$ , которую описывает следующее уравнение<sup>¶</sup>

$$S_t = \{\vec{u} \mid (\vec{u}, \vec{e}) = t\}$$

В примерах увидели, что получаемые поверхности уровня не имеют объёма в  $n$ -мерном пространстве, но у них есть площадь —  $(n - 1)$ -мерный объём.

Опираясь на предыдущий опыт (для величин с совместной плотностью), хотелось бы найти совместную плотность случайных величин  $f(\vec{x})$  и  $g(\vec{x})$ . И оказывается, что это желание является верной догадкой.

Нетрудно догадаться, что для того, чтобы найти “вес” поверхности уровня, нужно будет взять поверхностный интеграл от плотности.

Чтобы мы не получали нулевой вес поверхности  $S_t = \{g(\vec{x}) = t\}$ , будем считать объём её раздутости. Поместим поверхность в своеобразный кокон, толщина которого в каждой точке будет тем меньше, чем больше скорость перехода в этой точке от текущего уровня к следующему.

Чтобы значение  $t$  было близким к  $g(\vec{u})$ , нужно, чтобы точка  $\vec{u}$  была близка к поверхности  $S_t$ . Обозначим расстояние между  $t$  и  $g(\vec{u})$  как  $\tilde{\varepsilon}$ , а расстояние между точкой  $\vec{u}$  и поверхностью  $S_t$  как  $\varepsilon$ . Чему равны эти расстояния, будет выяснено ниже, а значение  $t$  и точки  $\vec{u}$  будет ясно из контекста.

Вероятность того, что значение  $g(\vec{x})$  отдалено от  $t$  не больше, чем на  $\tilde{\varepsilon}$ , будет приблизительно равна плотности распределения  $g(\vec{x})$  в этой точке

<sup>¶</sup> Уравнение гиперплоскости с нормалью  $\vec{e}$ , проходящую через точку с радиус-вектором  $\vec{x}$ , выглядит следующим образом

$$(\vec{u}, \vec{e}) = (\vec{x}, \vec{e})$$

Вследствие линейности скалярного произведения получаем

$$(t \cdot \vec{e}, \vec{e}) = t \cdot (\vec{e}, \vec{e}) = t$$

Значит, указав  $\vec{x} = t \cdot \vec{e}$ , получим уравнение, данное в примере

$$(\vec{u}, \vec{e}) = (\vec{x}, \vec{e}) = (t \cdot \vec{e}, \vec{e}) = t \cdot (\vec{e}, \vec{e}) = t$$



(если таковая имеется), умноженной на это расстояние — погрешность, которая нас устроит (потом мы, естественно, устремим её к нулю). Обозначим плотность случайной величины  $g(\vec{x})$  в точке  $t$  через  $q(t)$

$$\mathbb{P}\{g(\vec{x}) \in [t - \tilde{\varepsilon}, t + \tilde{\varepsilon}]\} \approx q(t) \cdot 2 \cdot \tilde{\varepsilon}$$

Вернёмся к раздутию. Помним, что  $\varepsilon$  — расстояние от точки  $\vec{u}$  до ближайшей к нему точки кокона, а также то, что это расстояние должно быть обратно пропорционально стремительности изменения уровней в этой окрестности. Понимаем, что нам необходима численная мера этой скорости. Под описание такой величины прекрасно подходит модуль градиента. Поскольку значение  $g(\vec{x})$  не меняется вдоль поверхности  $S_t$  и равно  $t$ , то градиент будет направлен по нормали к данной точке поверхности.

Норма градиента — отношение прироста функции к приросту координат. Нас интересует прирост координат  $\varepsilon$  в окрестности точки  $\vec{u}$ , мы располагаем приростом функции  $\tilde{\varepsilon}$  и нормой градиента  $\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|$ . Напрашивается формула

$$\varepsilon \approx \frac{\tilde{\varepsilon}}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \quad (2.13)$$

Обозначим раздутие поверхности  $S_t$  как  $G_{\tilde{\varepsilon}}$ , тогда вероятность попадания значения  $g(\vec{x})$  в коридорчик ширины  $\tilde{\varepsilon}$  будет приблизительно равно интегралу плотности распределения вектора  $\vec{x}$  по этому коридорчику

$$\mathbb{P}\{g(\vec{x}) \in [t - \tilde{\varepsilon}, t + \tilde{\varepsilon}]\} \approx q(t) \cdot 2 \cdot \tilde{\varepsilon} \approx \int_{G_{\tilde{\varepsilon}}} p(\vec{u}) d\vec{u}$$

Следовательно, у нас почти готова формула для плотности  $q(t)$  случайной величины  $g(\vec{x})$

$$q(t) \cdot 2 \cdot \tilde{\varepsilon} \approx \int_{G_{\tilde{\varepsilon}}} p(\vec{u}) d\vec{u} \Rightarrow q(t) \approx \frac{1}{2 \cdot \tilde{\varepsilon}} \cdot \int_{G_{\tilde{\varepsilon}}} p(\vec{u}) d\vec{u}$$

Чтобы убрать неточность и было обычное равенство, устремим ширину коридорчика к нулю

$$q(t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \tilde{\varepsilon}} \cdot \int_{G_{\tilde{\varepsilon}}} p(\vec{u}) d\vec{u} \quad (2.14)$$

Распишем  $\tilde{\varepsilon}$ , воспользовавшись формулой (2.13)

$$\varepsilon \approx \frac{\tilde{\varepsilon}}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \Rightarrow \tilde{\varepsilon} \approx \varepsilon \cdot \|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|$$

Вернёмся к плотности в формуле (2.14). Заменяя  $\tilde{\varepsilon}$  на  $\varepsilon \cdot \|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|$ , нужно разобраться, что теперь нужно устремлять к нулю. Поскольку модуль градиента — величина, зависящая от координат, и стремиться к нулю будет

лишь при изменении поведения функции, то устремлять будем  $\varepsilon$  (толщину кокона)

$$q(t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \tilde{\varepsilon}} \cdot \int_{G_{\tilde{\varepsilon}}} p(\vec{u}) d\vec{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \varepsilon \cdot \|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \cdot \int_{G_{\varepsilon}} p(\vec{u}) d\vec{u}$$

Поскольку  $\varepsilon$  играет роль половины толщины (отсюда и возникает множитель 2), а  $d\vec{u}$  — маленький элемент объёма, то при делении объёма на толщину получим площадь. Поскольку толщина стремится к нулю, то она становится соразмерна с объёмом и мы получаем ненулевое значение площади, а коридорчик  $G_{\tilde{\varepsilon}}$  вырождается в поверхность уровня  $S_t$ . Обозначив меру площади на поверхности  $S_t$  как  $\sigma_t(d\vec{u})$ , получаем поверхностный интеграл второго рода

$$q(t) = \int_{S_t} p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})$$

А теперь вспомним, как обстояло дело со случайными величинами, имеющими совместную плотность (2.11)

$$\varphi^n(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy}{r(x)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy}$$

В знаменателе у нас стоял вес поверхности уровня, раскрыв который, мы получали интеграл от совместной плотности. Что же есть у нас? Вес поверхности уровня — функция одного аргумента  $q(t)$ , которая равна интегралу от плотности по всей той части пространства, где случайная величина  $g(\vec{x})$  принимает одно и то же значение  $t$  — по поверхности уровня  $S_t$ .

То есть, в нашем случае роль  $\mathbb{R}$  играет поверхность  $S_t$ , роль совместной плотности  $p(x, y)$  играет плотность случайного вектора  $p(\vec{u})$ , а вместо дифференциала  $dy$  у нас мера площади, делённая на норму градиента  $\frac{\sigma_t(d\vec{u})}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|}$ . В числителе дроби в формуле (2.11) стоит  $y$ , в нашем же слу-

чае это функция  $f(\vec{u})$ , поскольку там случайная величина присутствовала в плотности сама по себе, тут же у нас есть плотность случайного вектора  $p(\vec{x})$ , а найти нужно среднее функции случайной величины  $f(\vec{x})$ . Итого, получается переход

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} y \cdot p(x, y) dy}{r(x)} \rightarrow \frac{\int_{S_t} f(\vec{u}) \cdot p(\vec{u}) \cdot \frac{\sigma_t(d\vec{u})}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|}}{q(t)}$$

И конечная формула

$$\mathbb{M}[f(\vec{x}) \mid g(\vec{x}) = t] = \frac{\int_{S_t} f(\vec{u}) \cdot p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})}{\int_{S_t} p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})}$$

**Теорема 2.4.2** (Условное математическое ожидание гладких функций). Если есть случайный вектор  $\vec{x}$  с известной плотностью распределения  $p(\vec{x})$ , а также гладкая функция  $g(\vec{x})$  с невырожденным градиентом, то математическое ожидание случайной величины  $f(\vec{x})$  при условии  $g(\vec{x}) = t$  считается по формуле

$$\mathbb{M}[f(\vec{x}) \mid g(\vec{x}) = t] = \frac{\int_{S_t} f(\vec{u}) \cdot p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})}{\int_{S_t} p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})}$$

**Замечание 15.** Формула остаётся справедливой, если поверхности уровня функции  $g$  состоят из нескольких гладких кусков.

## 2.5 Условные распределения

**Определение 2.5.1** (Условное распределение). Условное распределение случайной величины  $\xi$  при известной  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{F}_1$  — это функция  $\pi$

$$\pi : \Omega \times \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$$

Функция  $\pi$  должна обладать следующими свойствами

1. На любом элементе  $\Delta$  борелевского множества  $\Delta$  функция  $\pi(\cdot, \Delta)$  является измеримой относительно  $\mathfrak{F}_1$
2. На любом элементарном исходе из множества  $\Omega$  функция  $\pi(\omega, \cdot)$  является вероятностной мерой
3. Выполняется равенство

$$\forall \Delta \in \mathfrak{B} : \pi(\cdot, \Delta) = \mathbb{M}[\mathbb{1}\{\xi \in \Delta\} \mid \mathfrak{F}_1]$$

Обозначение

$$\pi(\cdot, \Delta) = \mathbb{P}(\xi \in \Delta \mid \mathfrak{F}_1)$$

Если же  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{F}_1$  порождена случайной величиной  $\eta$ :  $\mathfrak{F}_1 = \sigma(\eta)$ , работает следующее обозначение

$$\mathbb{P}(\xi \in \Delta \mid \sigma(\eta)) = p(\eta, \Delta)$$

Когда нас интересует событие  $\eta = t$ , работает следующее обозначение

$$\mathbb{P}(t, \Delta) = p(\xi \in \Delta \mid \eta = t)$$

Связь с условным математическим ожиданием

$$\mathbb{M}[f(\xi) \mid \eta = t] = \int_{\mathbb{R}} f(u) p(t, du)$$

**Замечание 16.** В обозначениях выше точка вместо аргумента означает, что на выходе мы получаем не определённое значение, а функцию от того аргумента, который заменён точкой.

Например, запись  $\pi(\cdot, \Delta)$  означает некую функцию  $\rho$

$$\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

Значение этой функции будет считаться по формуле

$$\rho(\omega) = \pi(\omega, \Delta)$$

Рассмотрим примеры вычисления условных распределений

**Пример 2.5.1** (См. пример (2.4.1)). Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют совместное дискретное распределение

$$\mathbb{P}\{\xi = a_i, \eta = b_j\} = p_{ij}$$

В таком случае условное распределение считается по формуле

$$\mathbb{P}\{\xi = a_i, \eta = b_j\} = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$$

**Пример 2.5.2** (См. формулу (2.11)). Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют совместную плотность распределения  $p(x, y)$

$$\frac{\int_{\Delta} y \cdot p(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy}$$

**Пример 2.5.3** (См. теорему (2.4.2)). У случайного вектора  $\vec{x}$  есть плотность распределения  $p(\vec{u})$ . Тогда условное распределение  $f(\vec{x})$  относительно гладкой функции  $g(\vec{x})$  считается по формуле

$$\mathbb{P}(f(\vec{x}) \in \Delta \mid g(\vec{x}) = t) = \frac{\int_{S_t \cap \Delta} p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})}{\int_{S_t} p(\vec{u}) \cdot \frac{1}{\|\vec{\nabla} \cdot g(\vec{u})\|} \sigma_t(d\vec{u})}$$

# Литература

- [1] Боровков А. А. Математическая статистика. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 705 с.
- [2] Боровков А. А. Теория Вероятностей. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.
- [3] Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. Киев: Выща школа. Головное издательство, 1989. 152 с.
- [4] Ширяев А. Н. Вероятность-1. Москва: МЦНМО, 2004. 520 с.
- [5] А. Н. Колмогоров С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 543 с.

# Предметный указатель

- Сигма-алгебра, порождённая случайной величиной, 26
- функция
  - правдоподобия, 14
  - вариационного ряда, 26
- функция распределения
  - эмпирическая, 3
  - неизвестная, 3
  - выборочная, 3
- гистограмма, 5
- количество информации Фишера, 16
- множество уровня, 28
- неизвестный параметр, 8
- неравенство
  - Рао-Крамера, 16
- оценка, 8
  - эффективная, 18
  - максимального правдоподобия, 21
  - несмещённая, 10
  - сильно состоятельная, 9
  - состоятельная, 9
- проекция
  - случайной величины, 35
- распределение
  - экспоненциальное, 20
- сигма-алгебра
  - порождённая случайной величиной, 26
- симметризация, 23
- случайная величина
  - измеримая относительно сигма-алгебры, 28
- статистика, 8
- теорема
  - Колмогорова, 12
- уравнение
  - правдоподобия, 21
- условное
  - математическое ожидание, 32
  - гладких функций, 51
  - относительно конечной сигма-алгебры, 36
  - свойства, 46
  - в общем виде, 39
  - случайных величин с совместной плотностью, 44
  - распределение, 51
  - вариационный ряд, 22
  - выборочная дисперсия, 12
  - выборочное среднее, 12
  - вклад выборки, 15

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Основы</b>	<b>3</b>
1.1	Методы оценок характеристик распределения наблюдаемых случайных величин . . . . .	3
1.1.1	Эмпирическая функция распределения . . . . .	3
1.1.2	Гистограмма . . . . .	4
1.1.3	Оценка неизвестных параметров . . . . .	8
1.1.4	Выборочные оценки. Метод моментов . . . . .	10
1.2	Свойства оценок . . . . .	12
1.2.1	Неравенство Рао-Крамера . . . . .	12
1.2.2	Метод максимального правдоподобия . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Достаточные статистики</b>	<b>23</b>
2.1	Оптимальная оценка . . . . .	23
2.2	$\sigma$ -алгебра, порождённая случайной величиной . . . . .	26
2.3	Случайная величина, измеримая относительно $\sigma$ -алгебры . . . . .	28
2.4	Условное математическое ожидание . . . . .	32
2.4.1	Проекция вектора . . . . .	33
2.4.2	Проекция случайной величины . . . . .	34
2.4.3	Условное математическое ожидание . . . . .	38
2.4.4	Свойства условного математического ожидания . . . . .	46
2.4.5	Условное математическое ожидание функции произвольной случайной величины . . . . .	47
2.5	Условные распределения . . . . .	51