# Случайные процессы

3 сентября 2014 г.

# Глава 1

# Азы

## 1.1 Определение случайного процесса

**Определение 1.1.1: Случайный процесс**

Случайные процесс с параметрическим множеством $T$ — совокупность случайных величин $\xi_t$, зафиксированных элементами $t$ множества $T$

То есть, случайный процесс является отображением из декартового произведения множества элементарных исходов и параметрического множества на множество действительных чисел

$$\xi : \Omega \times T \to \mathbb{R}$$

Также можно представить случайный процесс как случайную величину в вероятностном пространстве

$$\left(\Omega \times T, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right), \mathbb{P}\right),$$

где множество «случайных событий» построено следующим образом

$$\forall t \in T, \omega \in \Omega : \qquad \left\{(t, \omega) \mid \xi_t\left(\omega\right) \in \Delta\right\} \in \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right)$$

**Замечание 1.1.2: Случайный процесс с дискретным временем**

Если $T = \mathbb{N}$ или $T = \mathbb{Z}$, то $\xi$ — случайный процесс с дискретным временем.

**Замечание 1.1.3: Случайный процесс с непрерывным временем**

Если же $T = [0; +\infty]$, $T = [a; b]$ или $T = \mathbb{R}$, то $\xi$ — случайный процесс с непрерывным временем.

**Определение 1.1.4: Траектория случайного процесса**

Для фиксированного $\omega_0 \in \Omega$ функция $\xi(\omega_0)$ назыввается реализацией или траекторией случайного процесса, соответствующей исходу $\omega_0$

**Определение 1.1.5: Сечение случайного процесса**

Если $t_0 \in T$ фиксировано, то случайная величина $\xi_{t_0}$ называется сечением случайного процесса в точке $t_0$

**Пример 1.1.6**

Пусть $\xi_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин. Тогда $\xi$ — случайный процесс с параметрическим множеством $\mathbb{N}$

**Пример 1.1.7**

Рассмотрим процесс появления случайного события с параметрическим множеством $T = [0; +\infty)$. Пусть $\tau$ — неотрицательная случайная величина, а случайный процесс $\xi$ определён следующим образом

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau(\omega) \\ 0, & t < \tau(\omega) \end{cases}$$

или же, что то же

$$\xi_t = \mathbb{1}\{\tau \leq t\}$$

Проверим, что $\xi_t$ действительно является случайной величиной при любом $t \in T$. Рассмотрим множество $A$

$$A = \{\omega \mid \tau(\omega) \leq t\}$$

Оно является случайным событием по определению, так как $\tau$ является случайной величиной. Рассмотрим прообразы индикатора случайного события $A$

$$\{\mathbb{1}_A \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ \overline{A}, & 0 \leq x < 1 \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases}$$

Это значит, что

$$\xi_t = \mathbb{1}\{\tau \leq t\}$$

действительно является случайной величиной.

**Пример 1.1.8**

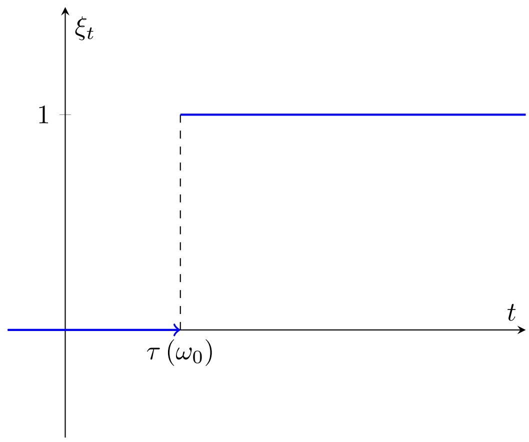


Рис. 1.1: Траектория случайного процесса, соответствующая элементарному исходу $\omega_0$ в примере 1.1.7

Пускай случайный процесс определён следующим образом

$$\xi_t = t \cdot \eta,$$

где случайная величина $\eta$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$

$$\eta \sim U([0; 1]),$$

а параметрическое пространство — тоже отрезок $[0; 1]$

$$t \in [0; 1] = T$$

# Предметный указатель

# Оглавление