

# Теория вероятностей

28 февраля 2014 г.



# Глава 1

## ОСНОВЫ

### 1.1 Предисловие

Теория вероятностей — наука о **повторяющихся случайных** явлениях.

Примеры: квантовая физика, вихри в турбулентных потоках, изменения молекулы ДНК в жидкостях, ...

Цель: **прогноз**. Мы, исследуя случайные явления, будем пытаться что-то предсказать.

Нас интересует то, что случается с нами периодически.

При исследовании повторяющихся случайных явлений мы исследуем количественные характеристики и закономерности

### 1.2 Вероятностный эксперимент

**Определение 1.2.1.** *Вероятностный эксперимент — явление, исход которого для нас неопределён и который можно повторить любое число раз независимым образом.*

**Определение 1.2.2.** *Вероятностное пространство — совокупность всех исходов вероятностного эксперимента.*

$\Omega$  — вероятностное пространство

$\Omega \ni \omega$  — элементарный исход

**Пример 1.2.1** (Подбрасывание монетки). 0 — орёл, 1 — решка

$$\Omega = \{0, 1\}$$

**Пример 1.2.2** (Подбрасывание игрального кубика).

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

**Пример 1.2.3** (Задава о встрече). Два человека в течение часа приходят на одно и то же место.

$x, y$  — время, в которое окажется в данном месте первый или второй человек соответственно.

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$$

**Пример 1.2.4** (Монета подбрасывается до первого появления орла).

$$\Omega = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

### 1.3 Случайные события и действия над ними

**Определение 1.3.1.** Случайное событие — подмножество множества всех исходов вероятностного эксперимента.

$\Omega \supset A$  — случайное событие

$\Omega$  — достоверное событие

$\emptyset$  — невозможное события

**Пример 1.3.1** (Подбрасывание монетки).  $A$  — выпал орёл

$$A = 0$$

**Пример 1.3.2** (Подбрасывание игрального кубика).  $A$  — выпало чётное число

$$A = \{2, 4, 6\}$$

**Пример 1.3.3** (Задава о встрече).  $A$  — встретились

**Пример 1.3.4** (Монета подбрасывается до первого появления орла).  $A$  — не потребовалось 100 подбрасываний

$$A = \{1, \dots, 99\}$$

Можно говорить о **пересечении** событий  $A$  и  $B$ , но лучше говорить, что они **произошли одновременно**.

$\emptyset$  — невозможное событие

$\Omega$  — достоверное события

$\bar{A}$  — событие  $A$  не произошло

$A \cap B$  —  $A$  и  $B$  произошли

$A \cup B$  — произошло хотя бы одно из событий  $A, B$

$A \setminus B$  — произошло  $A$ , но не  $B$

**Определение 1.3.2.** Последовательность случайных событий

$$\{A_n \mid n \geq 1\}$$

**Определение 1.3.3.** Верхний предел последовательности  $\{A_n \mid n \geq 1\}$  — это случайное событие, состоящее в том, что произошло бесконечно много событий из исходной последовательности.

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

**Определение 1.3.4.** Нижний предел последовательности  $\{A_n \mid n \geq 1\}$  — это случайное событие, состоящее в том, что произошли все события из исходной последовательности.

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Некоторые свойства:

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\subset \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \\ \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} &= \varliminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n} \\ \overline{\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n} &= \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}\end{aligned}$$

## 1.4 Классический вероятностный эксперимент

**Определение 1.4.1.** *Классический вероятностный эксперимент — такой, у которого конечное число исходов, ни один из которых не является более предпочтительным, чем другой.*

У нас появилось желание приписывать числовые характеристики событиям.

$|\Omega| < +\infty$ , все элементарные исходы равновероятны,  $\Omega \supset A$  — случайное событие.

**Определение 1.4.2** (Вероятность). *Вероятность того, что случайное событие  $A \subset \Omega$  произошло, является отношением мощности множества  $A$  к мощности множества  $\Omega$ :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

*Свойства:*

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$\text{Частный случай: } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$$

Рецепт вычисления вероятности классического эксперимента:

1. Описать  $\Omega$
2. Описать события  $A$  (исходы, благоприятный событию  $A$ , состоят в том, что ...)
3. Найти  $|\Omega|, |A|, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

**Теорема 1.4.1** (Формула включения-исключения). *Есть  $n$  случайных событий:  $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ . Вероятность того, что произошло хотя бы одно событие, считается по формуле:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^n \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2}^n \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^3 A_{i_k}\right) - \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \left[ (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k}^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^k A_{i_t}\right) \right]\end{aligned}$$

**Пример 1.4.1** (Задача о конвертах). Дано  $n$  писем и  $n$  конвертов. Письма раскладываются случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по правильному адресу.

Случайно раскладываем  $n$  писем по  $n$  конвертам — получаем перестановки.

$\Omega$  — все перестановки чисел от 1 до  $n$

$A_i$  — событие, состоящее в том, что  $i$ -е письмо попало по правильному адресу

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{i_1 < i_2} \frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \\ &= \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} + \\ &+ \dots = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

## 1.5 Геометрический вероятностный эксперимент

**Пример 1.5.1** (Простейший геометрический эксперимент).  $G \subset D \subset \mathbb{R}^n$ , наугад выбираем точку  $M \in D$ . Событие  $A$  состоит в том, что  $M \in A$ . Тогда вероятность события  $G$ :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|G|}{|D|}$$

$|D|$  — длина, площадь, объём  $D$  (в зависимости от  $n$ )

Вероятность в геометрическом эксперименте обладает теми же свойствами, что и в классическом, но появились ненулевые события с нулевой вероятностью

$$(\exists A \subset \Omega)(A \neq \emptyset) : \mathbb{P}(A) = 0$$

**Пример 1.5.2** (Непустое событие с нулевой вероятностью). Вероятность, события  $A$ , состоящего в том, что точка попадёт на линию (или точку) в трёхмерном пространстве, равна нулю, так как объём линии (точки) равен нулю (но такое событие возможно)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0}{|D|} = 0$$

**Определение 1.5.1.** Для  $A \subset \mathbb{R}$

$$A + x = \{y + x \mid y \in A\}$$

Свойства длины. Разбиваем числовую прямую на непересекающиеся отрезки  $A_k$ :

$$A_k = [a_k; b_k], a_k < b_k < a_{k+1}$$

1. Аддитивность

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

2. Однородность Эвклидова пространства: длина множества, сдвинутого на  $x$ , равна длине исходного множества

$$|A + x| = |A|$$

**Утверждение 1.5.1.** *Нельзя определить функцию множества, обладающую свойствами 1 и 2, на всех подмножествах числовой прямой.*

*Доказательство.* Пусть  $|\cdot|$  определена на всех подмножествах  $\mathbb{R}$  и обладает свойствами 1 и 2.

Возьмём отрезок  $[0; 1]$  и введём отношение эквивалентности “ $\sim$ ”. Будем считать эквивалентными числа, разность между которыми — число рациональное.

$$\forall x, y \in [0; 1] : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Тогда множество классов эквивалентности  $\{K_\alpha\}$  будет разбиением отрезка  $[0; 1]$ :

$$\bigcup_{\alpha} K_{\alpha} = [0; 1]$$

$$K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \alpha_1 \neq \alpha_2$$

$A$  — множество, в котором находится по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Значит,  $|A| \leq 1$ .

Введём  $\{r_k\}$  — множество рациональных чисел на отрезке  $[-1; 1]$ :

$$\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap [-1; 1]$$

Поскольку в  $A$  содержится по одному представителю из каждого класса эквивалентности  $K_\alpha$ , разность между числами в каждом классе — число рациональное, а сами числа взяты из отрезка  $[0; 1]$ , то разность между двумя числами не может быть больше, чем 1 и меньше, чем  $-1$ , и является числом рациональным. Значит, объединив все возможные суммы чисел из  $A$  с числами из  $\{r_k\}$ , точно можно получить все числа из каждого класса  $K_\alpha$ , а, следовательно, и отрезок  $[0; 1]$ :

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \supset [0; 1]$$

Очевидно, что произвольное число  $x$  из отрезка  $[0; 1]$  будет принадлежать какому-то классу эквивалентности  $K_\alpha$  и найдётся такое число  $y$  из этого класса, принадлежащее множеству  $A$  (по определению множества  $A$ ):

$$x \in [0; 1] \Rightarrow \exists \alpha : \begin{cases} x \in K_\alpha \\ \exists y \in A \cap K_\alpha \end{cases}$$

Это в свою очередь означает, что разность  $x$  и  $y$  — рациональное число из множества  $\{r_k\}$ , так как они принадлежат одному классу эквивалентности  $K_\alpha$ :

$$x - y = r_k \Rightarrow x \in A + r_k$$

**Примечание** к применению свойства 2: множество  $\{A + r_k\}$  необязательно является разбиением, поэтому мощность объединений его элементов может быть меньше суммы их мощностей

$$|[0; 1]| = 1 \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |A + r_k| = \sum_{k \geq 1} |A| \quad (1.1)$$

Поскольку все числа из  $A$  попадают на отрезок  $[0; 1]$ , а  $r_k \in [-1; 1]$ , то ни одно из чисел множества  $\{A + r_k\}$  не попадёт за пределы отрезка  $[-1; 2]$ :

$$\bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \subset [-1; 2] \Rightarrow \left| \bigcup_{k \geq 1} (A + r_k) \right| \leq 3 \Rightarrow \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| \leq 3, \forall n \geq 1$$

Если взять два разных рациональных числа  $r_{k_1}$  и  $r_{k_2}$ , то  $A + r_{k_1}$  и  $A + r_{k_2}$  не будут иметь одинаковых элементов, так как, если разность между двумя числами — число рациональное, то они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, но множество  $A$  содержит лишь по одному представителю каждого класса эквивалентности  $K_\alpha$ :

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow r_{k_1} \neq r_{k_2} \Rightarrow A + r_{k_1} \cap A + r_{k_2} = \emptyset$$

А это значит, что множество  $\{A + r_k\}$  является разбиением и к нему применимо свойство 2:

$$3 \geq \left| \bigcup_{k=1}^n (A + r_k) \right| = \sum_{k=1}^n |A + r_k| = n \cdot |A|, \forall n \geq 1$$

Поскольку это действительно для любого натурального  $n$ , то  $|A|$  может равняться лишь нулю, чтобы произведение не могло превышать 3, но из (1.1) имеем, что эта сумма (произведение) это значение должно быть не меньше, чем 1:

$$|A| = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |A| = 0 \not\geq 1$$

Противоречие. □

Пока что не будут разглядываться непустые множества без длины.



# Глава 2

## 2.1 Условная вероятность

$A, B$  — случайные события,  $\mathbb{P}(B) > 0$

**Определение 2.1.1.** Условная вероятность события  $A$  при условии  $B$  (при условии, что  $B$  произошло)

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Очевидные свойства:

1.  $\mathbb{P}(B | B) = 1$
2.  $\mathbb{P}(\Omega | B) = 1$
3.  $\mathbb{P}(\emptyset | B) = 0$

**Определение 2.1.2.**  $A$  и  $B$  независимы, если вероятность того, что они произошли одновременно, равна произведению их вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$$

**Пример 2.1.1.** Игральный кубик подбрасывается два раза. Событие  $A$  состоит в том, что сумма очков равна 9. Событие  $B$  состоит в том, что во второй раз выпадет чётная цифра.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) \mid i, j = \overline{1, 6}\} && \Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \\ A &= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} && \Rightarrow |A| = 4 \\ B &= \{(i, k) \mid i = \overline{1, 6}, k = 2, 4, 6\} && \Rightarrow |B| = 6 \cdot 3 = 18 \\ A \cap B &= \{(3, 6), (5, 4)\} && \Rightarrow |A \cap B| = 2 \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{18} \\ \mathbb{P}(A | B) &= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

## 2.2 Формула полной вероятности

**Определение 2.2.1.** Набор событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$  называется *полным набором гипотез*, если выполняются следующие условия:

1. Вероятность ни одного из них не равна нулю

$$\mathbb{P}(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$$

2. Они попарно не пересекаются

$$H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$$

3. Их объединение составляет вероятностное пространство

$$\bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$$

Свойства очень похожи на определение разбиения множества, но с одной поправкой: условие 1 более сильное, так как ранее было показано, что бывают непустые множества, вероятность которых равна нулю.

**Лемма 2.2.1.** Если набор  $H_1, \dots, H_n$  является разбиением множества  $\Omega$ , то для его произвольного непустого подмножества  $A \subset \Omega$  семейство  $G = \{H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$  будет разбиением.

*Доказательство.* Обозначим через  $m$  количество элементов в множестве  $G$

$$m = |G|$$

Первое свойство очевидно выполняется по построению: в семейство входят только ненулевые множества.

Выполнение второго свойства показывает просто

$$G_i \cap G_j = (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (H_i \cap H_j) \cap A = \emptyset, i \neq j$$

Чтобы показать то, что выполняется и третье свойство, нужно немного подумать

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{A \cap H_k \neq \emptyset} (A \cap H_k)$$

Поскольку объединение любого множества  $A$  с пустым даст исходное множество ( $A \cup \emptyset = A$ ), то к объединению можно добавить и пустые пересечения — те  $A \cap H_k$ , которые не содержат элементов, от чего и не попали в  $G$

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k)$$

А дальше всё тривиально

$$\bigcup_{k=1}^m G_k = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k) = A \cap \left( \bigcup_{k=1}^n H_k \right) = A \cap \Omega = A$$

□

**Лемма 2.2.2** (Формула полной вероятности).  $\Omega$  — вероятностное пространство,  $\Omega \supset A$  — случайное событие,  $\Omega \supset H_1, \dots, H_n$  — полный набор гипотез. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

*Доказательство.* Когда  $\mathbb{P}(A) = 0$ , то доказательство очевидно, так как  $\mathbb{P}(A \mid H_k) = 0, \forall H_k$ .

Займёмся случаем, когда  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . Поскольку  $\{H_k \mid k = \overline{1, n}\}$  — разбиение  $\Omega$ , то семейство  $G = \{A \cap H_k \mid A \cap H_k \neq \emptyset\}$  — разбиение  $A$  ( $|G| = m$ ), а это значит, что сумма мощностей всех  $G_k$  равняется мощности их объединения, а их объединение — это и есть множество  $A$

$$\sum_{k=1}^m |G_k| = \left| \bigcup_{k=1}^m G_k \right| = |A|$$

Перепишем по-другому это равенство, пользуясь тем, что добавление нуля к сумме ничего не меняет: ведь могут быть такие пересечения  $A \cap H_k$ , которые являются пустыми множествами, а это значит, что их мощность равна 0 ( $A \cap H_k = \emptyset \Rightarrow |A \cap H_k| = 0$ )

$$|A| = \sum_{k=1}^m |G_k| = \sum_{A \cap H_k \neq \emptyset} |A \cap H_k| = \sum_{k=1}^n |A \cap H_k|$$

Поделим обе части на мощность вероятностного пространства  $|\Omega|$

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^n \frac{|A \cap H_k|}{|\Omega|}$$

Теперь видим вероятность события  $A$  слева и сумму вероятностей того, что это событие произошло вместе с каждой гипотезой  $H_k$ , справа

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap H_k)$$

Умножаем правую часть на единицу и получаем желаемый результат

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \left( \mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k)}{\mathbb{P}(H_k)} \cdot \mathbb{P}(H_k) \right)$$

Последняя дробь по определению является вероятностью  $A$  при условии того, что произошло событие  $H_k$ . Таким образом, лемма доказана

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)$$

□

## 2.3 Формула Байеса

Постановка задачи: Имеется вероятностное пространство  $\Omega$ , случайное событие  $A \subset \Omega$ ,  $H_1, \dots, H_n$  — полный набор гипотез, вероятности  $\mathbb{P}(H_k)$  и  $\mathbb{P}(A | H_k)$  известны для каждой гипотезы. Нужно найти  $\mathbb{P}(H_k | A)$ .

**Лемма 2.3.1** (Формула Байеса).

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

*Доказательство.* Начнём с определения условной вероятности

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Распишем знаменатель по формуле полной вероятности, а числитель умножим на 1

$$\frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_k) \cdot \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_k)}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

В числителе получилась условная вероятность, умноженная на вероятность гипотезы — формула Байеса доказана

$$\mathbb{P}(H_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_k) \cdot \mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

□

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Основы</b>	<b>3</b>
1.1	Предисловие . . . . .	3
1.2	Вероятностный эксперимент . . . . .	3
1.3	Случайные события и действия над ними . . . . .	4
1.4	Классический вероятностный эксперимент . . . . .	5
1.5	Геометрический вероятностный эксперимент . . . . .	6
<b>2</b>		<b>9</b>
2.1	Условная вероятность . . . . .	9
2.2	Формула полной вероятности . . . . .	10
2.3	Формула Байеса . . . . .	12