Случайные процессы

3 сентября 2014 г.

Глава 1

Азы

1.1 Определение случайного процесса

Определение 1.1.1: Случайный процесс

Случайные процесс с параметрическим множеством T — совокупность случайных величин ξ_t, зафиксированных элементами t множества T

То есть, случайный процесс является отображением из декартового произведения множества элементарных исходов и параметрического множества на множество действительных чисел

$$\xi : \Omega \times T \to \mathbb{R}$$

Также можно представить случайный процесс как случайную величину в вероятностном пространстве

$$\left(\Omega \times T, \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right), \mathbb{P}\right),$$

где множество «случайных событий» построено следующим образом

$$\forall t \in T, \omega \in \Omega : \qquad \left\{(t, \omega) \mid \xi_t\left(\omega\right) \in \Delta\right\} \in \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right)$$

Замечание 1.1.2: Случайный процесс с дискретным временем

Если $T = \mathbb{N}$ или $T = \mathbb{Z}$, то ξ — случайный процесс с дискретным временем.

Замечание 1.1.3: Случайный процесс с непрерывным временем

Если же $T = [0; +\infty]$, $T = [a; b]$ или $T = \mathbb{R}$, то ξ — случайный процесс с непрерывным временем.

Определение 1.1.4: Траектория случайного процесса

Для фиксированного $\omega_0 \in \Omega$ функция $\xi(\omega_0)$ назывывается реализацией или траекторией случайного процесса, соответствующей исходу ω_0

Определение 1.1.5: Сечение случайного процесса

Если $t_0 \in T$ фиксировано, то случайная величина ξ_{t_0} называется сечением случайного процесса в точке t_0

Пример 1.1.6

Пусть $\xi_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин. Тогда ξ — случайный процесс с параметрическим множеством $\mathbb{N}$

Пример 1.1.7

Рассмотрим процесс появления случайного события с параметрическим множеством $T = [0; +\infty)$. Пусть τ — неотрицательная случайная величина, а случайный процесс ξ определён следующим образом

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau(\omega) \\ 0, & t < \tau(\omega) \end{cases}$$

или же, что то же

$$\xi_t = \mathbb{1}\{\tau \leq t\}$$

Проверим, что ξ_t действительно является случайной величиной при любом $t \in T$. Рассмотрим множество A

$$A = \{\omega \mid \tau(\omega) \leq t\}$$

Оно является случайным событием по определению, так как τ является случайной величиной. Рассмотрим прообразы индикатора случайного события A

$$\{\mathbb{1}_A \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ \overline{A}, & 0 \leq x < 1 \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases}$$

Это значит, что

$$\xi_t = \mathbb{1}\{\tau \leq t\}$$

действительно является случайной величиной.

Пример 1.1.8

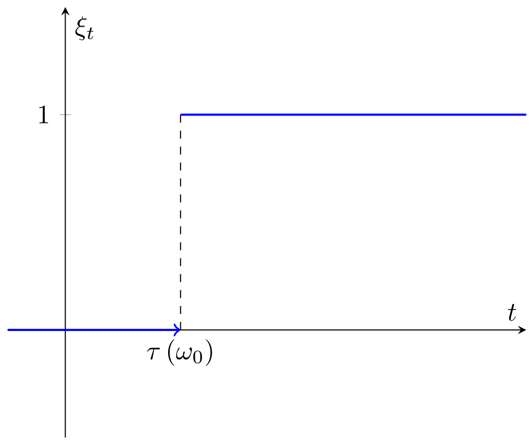

Рис. 1.1: Траектория случайного процесса, соответствующая элементарному исходу ω_0 в примере 1.1.7

Пускай случайный процесс определён следующим образом

$$\xi_t = t \cdot \eta,$$

где случайная величина η имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$

$$\eta\ U([0; 1]),$$

а параметрическое пространство — тоже отрезок $[0; 1]$

$$t \in [0; 1] = T$$

Предметный указатель

Оглавление