

Must know

17 июня 2014 г.

## Часть I

# Распределения случайных величин

## 1 Дискретные распределения

### 1.1 Биномиальное распределение

#### 1.1.1 Определение

$$\xi \sim \text{Bin}(n, p), n \in \mathbb{N}, p \in [0; 1]$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

#### 1.1.2 Математическое ожидание

Математическое ожидание посчитаем с помощью познаний в комбинаторике

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot [(n-1)-(k-1)]!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ &= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\ &= n \cdot p \cdot [p + (1-p)]^{n-1} = n \cdot p \cdot 1^{n-1} = n \cdot p \end{aligned}$$

#### 1.1.3 Дисперсия

Дисперсию же выведем из знания того, что такое биномиальное распределение, а также с помощью свойств дисперсии. Биномиальное распределение — серия независимых испытаний Бернулли (подкидывание асимметричной монетки).

Если случайная величина  $\xi$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$  ( $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$ ), то  $\mathbb{P}(\xi = k)$  — вероятность того, что в серии

из  $n$  экспериментов удачными окажутся ровно  $k$ , а сама случайная величина — сумма случайных величин  $\xi_i \sim \text{Bin}(1, p), i = \overline{1, n}$ .

Таким образом, получаем

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Помним, что дисперсия суммы независимых случайных величин — сумма их дисперсий. Найдём дисперсию  $\xi_i$ :

$$D \xi_i = M \xi_i^2 - (M \xi_i)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - [1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)]^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p)$$

Значит, теперь достаточно просто найти и дисперсию  $\xi$

$$D \xi = D \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n D \xi_i = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Обозначив вероятность “неудачи” через  $q = 1-p$ , получим симпатичную формулу

$$D \xi = n \cdot p \cdot q$$

#### 1.1.4 Характеристическая функция

Характеристическую функцию считать не так сложно, как математическое ожидание и дисперсию

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(t) &= M e^{i \cdot t \cdot \xi} = \sum_{k=0}^n e^{i \cdot t \cdot k} \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (p \cdot e^{i \cdot t})^k \cdot (1-p)^{n-k} = (p \cdot e^{i \cdot t} + 1-p)^n \end{aligned}$$

С заменой  $q = 1-p$  характеристическая функция принимает вид

$$\varphi_\xi(t) = (p \cdot e^{i \cdot t} + q)^n$$

#### 1.1.5 Итоги

$$\xi \sim \text{Bin}(n, p), n \in \mathbb{N}, p \in [0; 1]$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$M \xi = n \cdot p$$

$$D \xi = n \cdot p \cdot q$$

$$\varphi_\xi(t) = (p \cdot e^{i \cdot t} + q)^n$$

## 1.2 Геометрическое распределение

### 1.2.1 Определение

$$\xi \sim \text{Geom}(p), p \in [0, 1]$$
$$\mathbb{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

### 1.2.2 Математическое ожидание

Начнём с определения

$$\mathbb{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Дальше возьмём производную

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1 - p)^{k-1} \cdot p = -p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^k$$

И вспомним, чему равна сумма бесконечного степенного ряда

$$-p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^k = -p \cdot \frac{d}{dp} \left( \frac{1 - p}{1 - (1 - p)} \right)$$

Дальше сокращаем и берём производную

$$\begin{aligned} -p \cdot \frac{d}{dp} \left( \frac{1 - p}{1 - (1 - p)} \right) &= -p \cdot \frac{d}{dp} \left( \frac{1 - p}{p} \right) = \\ &= -p \cdot \frac{-p - (1 - p)}{p^2} = -p \cdot \frac{-1}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

### 1.2.3 Дисперсия

Возьмём две производные от суммы

$$\frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k - 1) (1 - p)^{k-2}$$

Разложим на две суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k - 1) (1 - p)^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1 - p)^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-2}$$

Теперь можем составить уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1 - p)^{k-2} = \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-2}$$

Берём производную от первой суммы справа (которую считали выше), а также умножаем и делим на  $(1-p)^2$  вторую

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-2} = \frac{d}{dp} \left( \frac{-1}{p^2} \right) + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

Берём вторую производную, а также снова вспоминаем сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-2} = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \frac{1-p}{p}$$

Умножим обе части на  $(1-p)$ , чтобы слева получалось  $\frac{M \xi^2}{p}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-2 \cdot p}{p^3} + \frac{1}{p}$$

Складываем дроби с правой стороны

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-2 \cdot p + p^2}{p^3}$$

Видим квадрат разности в сумме с единицей

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{(1-p)^2 + 1}{p^3}$$

Теперь считаем дисперсию по определению

$$D \xi = M \xi^2 - (M \xi)^2 = p \cdot \frac{(1-p)^2 + 1}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{(1-p)^2 + 1 - 1}{p^2}$$

Заменяв  $(1-p)$  на  $q$ , получаем такой ответ

$$D \xi = \frac{q}{p^2}$$

#### 1.2.4 Характеристическая функция

Начнём с определения

$$\varphi_{\xi}(t) = M e^{i \cdot t \cdot \xi} = \sum_{k=1}^n e^{i \cdot t \cdot k} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Умножим и поделим на  $(1-p)$ , внесём экспоненты в скобки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{i \cdot t \cdot k} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p &= \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^n [e^{i \cdot t} \cdot (1-p)]^k \\ \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^n [e^{i \cdot t} (1-p)]^k &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}{1 - e^{i \cdot t} \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

$$\frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}{1 - e^{i \cdot t} \cdot (1-p)} = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}$$

Снова заменим  $q = 1 - p$  и получаем результат

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot q}$$

### 1.2.5 Итоги

$$\xi \sim \text{Geom}(p), p \in [0, 1], q = 1 - p$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$$

$$\mathbb{M} \xi = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D} \xi = \frac{q}{p^2}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot q}$$

## 1.3 Пуассоновское распределение

### 1.3.1 Определение

$$\xi \sim \text{Pois}(\lambda), \lambda > 0$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

### 1.3.2 Математическое ожидание

Тут всё элементарно: разложение экспоненты в ряд Тейлора. Также суммировать начинаем не с нуля, а с единицы, так как при  $k = 0$  всё слагаемое обращается в нуль

$$\mathbb{M} \xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Далее выполняем замену  $r = k - 1$ , суммирование начинается с нуля. Получаем разложение экспоненты в ряд Тейлора (Маклорена)

$$e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

### 1.3.3 Дисперсия

Начнём с расчёта второго момента

$$M \xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Разложим на две суммы, чтобы красиво сократить факториалы и проделать тот же трюк, что и выше

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Последняя сумма является математическим ожиданием, равным  $\lambda$ , а другую продолжим преобразовывать дальше

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

Пользуясь теми же принципами (сделав сумму по  $r = k-2$  от 0 до  $\infty$ ), снова получаем  $e^{-\lambda}$ , которая сокращается. Теперь у нас есть второй момент

$$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda = \lambda \cdot (\lambda + 1)$$

Теперь можно посчитать дисперсию

$$D \xi = M \xi^2 - (M \xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

### 1.3.4 Характеристическая функция

Тут всё тоже предельно просто

$$\varphi_{\xi}(t) = M e^{i \cdot t \cdot \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i \cdot t \cdot k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^{i \cdot t})^k}{k!}$$

Опять ряд Маклорена для экспоненты и всё выглядит почти красиво (за исключением экспоненты в экспоненте)

$$e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^{i \cdot t})^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \exp(\lambda \cdot e^{i \cdot t}) = \exp\{\lambda \cdot (e^{i \cdot t} - 1)\}$$

### 1.3.5 Итоги

$$\xi \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$M \xi = D \xi = \lambda$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \exp\{\lambda \cdot (e^{i \cdot t} - 1)\}$$

## 2 Непрерывные распределения

### 2.1 Равномерное распределение

#### 2.1.1 Определение

$$\xi \sim Un([a, b]), a < b \in \mathbb{R}$$
$$p(x) = \frac{\mathbb{1}(x \in [a, b])}{b - a} = \frac{1}{b - a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a, b])$$

#### 2.1.2 Математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{b - a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a, b]) \, dx = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b x \, dx = \\ &= \frac{1}{b - a} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{b - a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \\ &= \frac{1}{b - a} \cdot \frac{(b - a) \cdot (b + a)}{2} = \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

#### 2.1.3 Дисперсия

Снова начнём с поиска второго момента

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= \int_a^b \frac{x^2}{b - a} \, dx = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b - a)} = \frac{(b - a) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)}{3 \cdot (b - a)} = \\ &= \frac{a^2 + a \cdot b + b^2}{3} = \frac{(a + b)^2 - a \cdot b}{3} \end{aligned}$$

А теперь считаем дисперсию

$$\begin{aligned} D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(a + b)^2 - a \cdot b}{3} - \frac{(a + b)^2}{4} = \\ &= \frac{4 \cdot (a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot b}{12} - \frac{3 \cdot (a + b)^2}{12} = \frac{(a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot b}{12} = \\ &= \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b}{12} = \frac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{12} = \frac{(a - b)^2}{12} \end{aligned}$$



### 2.1.4 Характеристическая функция

Берём интеграл от экспоненты

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi}(t) &= \mathbb{M} e^{i \cdot t \cdot \xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a, b]) \, dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b e^{i \cdot t \cdot x} \, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{i \cdot t} \cdot \int_a^b e^{i \cdot t \cdot x} d(x \cdot i \cdot t) = \\ &= \frac{1}{i \cdot t \cdot (b-a)} \cdot e^{i \cdot t \cdot x} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{i \cdot t \cdot b} - e^{i \cdot t \cdot a}}{i \cdot t \cdot (b-a)}\end{aligned}$$

### 2.1.5 Итоги

$$\xi \sim Un([a, b]), a < b \in \mathbb{R}$$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a, b])$$

$$\mathbb{M} \xi = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{D} \xi = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{e^{i \cdot t \cdot b} - e^{i \cdot t \cdot a}}{i \cdot t \cdot (b-a)}$$

## 2.2 Экспоненциальное распределение

### 2.2.1 Определение

$$\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$$

$$p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$$

### 2.2.2 Математическое ожидание

Начнём с определения, избавимся от индикатора

$$\mathbb{M} \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0) \, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \, dx$$

Очевидно, что нужно взять интеграл по частям

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \\ du = dx, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} dv = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \, dx \\ dv = e^{-\lambda \cdot x} d(\lambda \cdot x) \\ v = -e^{-\lambda \cdot x} \end{array} \right| = \\ &= -e^{-\lambda \cdot x} \cdot x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-\lambda \cdot x}) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot x} \, dx\end{aligned}$$

Дальше есть как минимум два выхода

1. Под знаком интеграла видим плотность экспоненциального распределения, делённую на  $\lambda$ . Поскольку интеграл от плотности равен единице, то этот интеграл будет равен  $\frac{1}{\lambda}$
2. Можно проинтегрировать, применив свои знания и навыки

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot x} dx &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot x} d(-\lambda \cdot x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \cdot (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{\lambda} \cdot (-e^0) = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}\end{aligned}$$

### 2.2.3 Дисперсия

Ищем второй момент, снова интегрируя по частям

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & dv = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx \\ du = 2 \cdot x \cdot dx, & \Rightarrow dv = e^{-\lambda \cdot x} d(\lambda \cdot x) \\ & v = -e^{-\lambda \cdot x} \end{array} \right| = \\ &= -e^{-\lambda \cdot x} \cdot x^2 \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2 \cdot x \cdot (-e^{-\lambda \cdot x}) dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \\ &= \frac{2}{\lambda} \cdot M\xi = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

И считаем дисперсию

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^{-2}$$

### 2.2.4 Характеристическая функция

$$\begin{aligned}\varphi_\xi = M e^{i \cdot t \cdot \xi} &= \int_0^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} e^{x \cdot (i \cdot t - \lambda)} dx = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - i \cdot t} \cdot \int_0^{+\infty} (\lambda - i \cdot t) \cdot e^{-x \cdot (\lambda - i \cdot t)} dx\end{aligned}$$

Видим, что получился интеграл от плотности экспоненциального распределения  $Exp(\lambda - i \cdot t)$ , а это значит, что он равен единице

$$\frac{\lambda}{\lambda - i \cdot t} \cdot \int_0^{+\infty} (\lambda - i \cdot t) \cdot e^{-x \cdot (\lambda - i \cdot t)} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i \cdot t}$$

### 2.2.5 Итоги

$$\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$$

$$p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$$

$$M\xi = \lambda^{-1}$$

$$D\xi = \lambda^{-2}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - i \cdot t}$$

## 2.3 Нормальное распределение

### 2.3.1 Определение

$$\xi \sim N(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}$$

### 2.3.2 Математическое ожидание

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot x \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx$$

Разобьём экспоненту на три части

$$\exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}$$

Последняя экспонента не зависит от  $x$ , поэтому её можно вынести за знак интеграла

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot x \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx \end{aligned}$$

Возьмём интеграл по частям. Чтобы не засорять пространство и не создавать путаницу, проведём промежуточные вычисления отдельно.

В качестве  $u$  возьмём последнюю экспоненту, а в качестве  $dv$ , очевидно, всё остальное

$$u = \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} \Rightarrow du = \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx$$

$$\begin{aligned} dv &= x \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} d \frac{x^2}{2} = \\ &= -\sigma^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} d \left( -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) = \\ &= -\sigma^2 d \left( \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \right) \Rightarrow v = -\sigma^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

Теперь можно вернуться к интегралу

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx = \\ & = \exp \left\{ -\frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} \cdot \sigma^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx \end{aligned}$$

Первое слагаемое обращается в нуль, а под знаком интеграла сокращаются  $\sigma^2$ . Перепишем первоначальный интеграл с константами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx \end{aligned}$$

Видим, что изменилось лишь одно — вместо  $x$  появилась константа  $a$ , что очень облегчает жизнь. Свернём обратно экспоненты и увидим, что получилось очень красивое выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{x \cdot a}{\sigma^2} \right\} dx = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot a \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = \\ & = a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx \end{aligned}$$

Видим интеграл от плотности нормального распределения, который равен единице, а это значит, что математическое ожидание посчитано правильно и оно действительно равно первому параметру  $a$

$$a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = a$$

### 2.3.3 Дисперсия

В этот раз лучше считать дисперсию по определению

$$D \xi = M (\xi - M \xi)^2$$

Помним, что математическое ожидание было посчитано выше и равняется оно  $a$ . В таком случае получаем формулу

$$M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma^2} \cdot \exp \left\{ \frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx$$

Выполним замену  $t = \frac{x - a}{\sqrt{2} \cdot \sigma}$ , тогда  $dt = \frac{dx}{\sqrt{2} \cdot \sigma}$ , а значит, что  $dx = dt \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma$ , и видим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma^2} \cdot \exp \left\{ \frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot \sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot t^2 \cdot e^{t^2} dt$$

Дальше проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot t^2 \cdot e^{-t^2} dt &= \left| \begin{array}{l} u = t, \\ du = dt, \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = 2 \cdot t \cdot e^{-t^2} dt \\ \Rightarrow dv = e^{-t^2} dt^2 \\ v = -e^{-t^2} \end{array} \right| = \\ &= -e^{-t^2} \cdot t^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Получили ожидаемый ответ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot t^2 \cdot e^{t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2$$

### 2.3.4 Характеристическая функция

$$\varphi_{\xi}(t) = M e^{i \cdot t \cdot \xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx$$

Далее этап промежуточных вычислений можно разбить на несколько шагов, которые будут нумероваться во избежание большой путаницы

1. Поработаем с экспонентами. У нас есть произведение экспонент, которое превращается в экспоненту суммы

$$e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} = \exp \left\{ i \cdot t \cdot x - \frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}$$

2. Пока что экспонента нас не интересует (да и много места занимает), поэтому окупимся в то выражение, которое экспонируется. Раскроем скобки и внесём слагаемое  $i \cdot t \cdot x$  в дробь

$$i \cdot t \cdot x - \frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} = \frac{i \cdot t \cdot x \cdot 2 \cdot \sigma^2 - (x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2)}{2 \cdot \sigma^2}$$

3. Рассмотрим числитель

(а) Раскроем скобки и сгруппируем множители возле  $2 \cdot x$

$$i \cdot t \cdot x \cdot 2 \cdot \sigma^2 - (x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2) = -x^2 + 2 \cdot x \cdot (a + i \cdot t \cdot \sigma^2) - a^2$$

(b) Далее выделим полный квадрат разности. Для этого нужно чтобы последнее слагаемое было квадратом множителя, что стоит при  $2 \cdot x$

$$(a + i \cdot t \cdot \sigma^2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot i \cdot t \cdot \sigma^2 - t^2 \cdot \sigma^4$$

Поскольку  $a^2$  уже есть, нужно лишь отнять всё остальное

$$\begin{aligned} & -x^2 + 2 \cdot x \cdot (a + i \cdot t \cdot \sigma^2) - a^2 = \\ & = -[x - (a + i \cdot t \cdot \sigma^2)]^2 + 2 \cdot a \cdot i \cdot t \cdot \sigma^2 - t^2 \cdot \sigma^4 \end{aligned}$$

4. Соединим всё снова воедино.

(а) Вернём числителю дробь и сократим её

$$\begin{aligned} & i \cdot t \cdot x - \frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} = \\ & = \frac{-[x - (a + i \cdot t \cdot \sigma^2)]^2 + 2 \cdot a \cdot i \cdot t \cdot \sigma^2 - t^2 \cdot \sigma^4}{2 \cdot \sigma^2} = \\ & = \frac{-[x - (a + i \cdot t \cdot \sigma^2)]^2}{2 \cdot \sigma^2} + a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \end{aligned}$$

(b) Вернёмся к экспоненте

$$\begin{aligned} & e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} = \exp \left\{ i \cdot t \cdot x - \frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} = \\ & = \exp \left\{ \frac{-[x - (a + i \cdot t \cdot \sigma^2)]^2}{2 \cdot \sigma^2} + a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \right\} = \\ & = \exp \left\{ \frac{-[x - (a + i \cdot t \cdot \sigma^2)]^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \right\} \end{aligned}$$

(с) Выражение стало очень громоздким, поэтому введём две замены.

Одну для выражения в квадрате

$$\mu(t) = a + i \cdot t \cdot \sigma^2$$

Вторую для второй экспоненты

$$\phi(t) = \exp \left\{ a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \right\}$$

И мы добились своей цели: имеем более изящные выражения

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{-[x - (a + i \cdot t \cdot \sigma^2)]^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \right\} = \\ = \exp \left\{ -\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \phi(t) \end{aligned}$$

Обозначения именно такие, потому что  $\mu(t)$  окажется средним для распределение, которое возникло в результате преобразования; также выяснится, что  $\phi(t)$  и есть искомая характеристическая функция

Теперь можно смело продолжать работать с интегралом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \phi(t) dx \end{aligned}$$

Убираем из-под знака интеграла функцию  $\phi(t)$ , потому что она не зависит от  $x$ . Под интегралом остаётся плотность нормального распределения с параметрами  $\mu(t)$  и  $\sigma^2$ . Поскольку интегрирование проходит по всему пространству  $\mathbb{R}$ , то интеграл равен единице и не будем тратить на него времени (будем считать, что нас не беспокоит комплексная составляющая в первом параметре)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \phi(t) dx = \\ = \phi(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} dx = \\ = \phi(t) = \exp \left\{ a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \right\} \end{aligned}$$

### 2.3.5 Итоги

$$\xi \sim N(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}$$

$$M \xi = a$$

$$D \xi = \sigma^2$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \exp \left\{ a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \right\}$$

### 3 Всё вместе

$\xi \sim Bin(n, p),$	$n, p : n \in \mathbb{N}, p \in [0; 1]$ $\mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $M\xi = n \cdot p$ $D\xi = n \cdot p \cdot q$ $\varphi_\xi(t) = (p \cdot e^{i \cdot t} + q)^n$
$\xi \sim Geom(p)$	$p, q : p \in [0, 1], q = 1 - p$ $\mathbb{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$ $M\xi = \frac{1}{p}$ $D\xi = \frac{q}{p^2}$ $\varphi_\xi(t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot q}$
$\xi \sim Pois(\lambda)$	$\lambda : \lambda > 0$ $\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $M\xi = \lambda$ $D\xi = \lambda$ $\varphi_\xi(t) = \exp\{\lambda \cdot (e^{i \cdot t} - 1)\}$
$\xi \sim Un([a, b])$	$a, b : a < b \in \mathbb{R}$ $p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a, b])$ $M\xi = \frac{a+b}{2}$ $D\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$ $\varphi_\xi(t) = \frac{e^{i \cdot t \cdot b} - e^{i \cdot t \cdot a}}{i \cdot t \cdot (b-a)}$
$\xi \sim Exp(\lambda)$	$\lambda : \lambda > 0$ $p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$ $M\xi = \lambda^{-1}$ $D\xi = \lambda^{-2}$ $\varphi_\xi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - i \cdot t}$
$\xi \sim N(a, \sigma^2)$	$a, \sigma : a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$ $M\xi = a$ $D\xi = \sigma^2$ $\varphi_\xi(t) = \exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\}$



## Часть II

# Свойства условного математического ожидания

I Формула полной вероятности

$$M M [\eta | \mathfrak{F}_1] = M \eta$$

II Условное математическое ожидание неотрицательной случайной величины неотрицательно почти наверное

$$\eta \geq 0 \Rightarrow M [\eta | \mathfrak{F}_1] \geq 0$$

III Неравенство Йенсена. Если функция  $\varphi$  выпуклая вниз, то

$$\varphi (M [\eta | \mathfrak{F}_1]) \leq M [\varphi (\eta) | \mathfrak{F}_1]$$

IV Теорема о трёх перпендикулярах

$$\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1 \Rightarrow M [M (\eta | \mathfrak{F}_1 | \mathfrak{F}_2)] = M [\eta | \mathfrak{F}_2]$$

V Если случайная величина  $\eta$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_1$ , то её условное математическое ожидание равно ей самой

$$M [\eta | \mathfrak{F}_1] = \eta$$

VI Если случайная величина  $\eta$  измерима относительно  $\mathfrak{F}_1$ , то для любой случайной величины  $\xi$

$$M [\eta \cdot \xi | \mathfrak{F}_1] = \eta \cdot M [\xi | \mathfrak{F}_1]$$

VII Если  $\eta$  не зависит от  $\mathfrak{F}_1$ , то её условное математическое ожидание равно простому математическому ожиданию

$$\forall \Delta \in \mathfrak{B}, A \in \mathfrak{F}_1 : \mathbb{P} (\{\eta \in \Delta\} | A) = \{\eta \in \Delta\} \Rightarrow M [\eta | \mathfrak{F}_1] = M \eta$$

VIII Условное математическое ожидание линейно

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : M [a \cdot \xi + b \cdot \eta | \mathfrak{F}_1] = M [a \cdot \xi | \mathfrak{F}_1] + M [b \cdot \eta | \mathfrak{F}_1]$$

IX Сохраняется теорема Лебега о возможности предельного перехода под знаком условного математического ожидания

$$|\xi_n| \leq \eta, M \eta < \infty, \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \xi \Rightarrow M [\xi_n | \mathfrak{F}_1] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} M [\xi | \mathfrak{F}_1]$$

Пара полезных частных случаев неравенства Йенсена

$$\begin{aligned} \varphi(x) = |x| : \quad & |M [\eta | \mathfrak{F}_1]| \leq M [|\eta| | \mathfrak{F}_1] \\ \varphi(x) = x^2 : \quad & (M [\eta | \mathfrak{F}_1])^2 \leq M [\eta^2 | \mathfrak{F}_1] \end{aligned}$$

# Содержание

<b>I</b>	<b>Распределения случайных величин</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Дискретные распределения</b>	<b>1</b>
1.1	Биномиальное распределение . . . . .	1
1.1.1	Определение . . . . .	1
1.1.2	Математическое ожидание . . . . .	1
1.1.3	Дисперсия . . . . .	1
1.1.4	Характеристическая функция . . . . .	2
1.1.5	Итоги . . . . .	2
1.2	Геометрическое распределение . . . . .	3
1.2.1	Определение . . . . .	3
1.2.2	Математическое ожидание . . . . .	3
1.2.3	Дисперсия . . . . .	3
1.2.4	Характеристическая функция . . . . .	4
1.2.5	Итоги . . . . .	5
1.3	Пуассоновское распределение . . . . .	5
1.3.1	Определение . . . . .	5
1.3.2	Математическое ожидание . . . . .	5
1.3.3	Дисперсия . . . . .	6
1.3.4	Характеристическая функция . . . . .	6
1.3.5	Итоги . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Непрерывные распределения</b>	<b>7</b>
2.1	Равномерное распределение . . . . .	7
2.1.1	Определение . . . . .	7
2.1.2	Математическое ожидание . . . . .	7
2.1.3	Дисперсия . . . . .	7
2.1.4	Характеристическая функция . . . . .	8
2.1.5	Итоги . . . . .	8
2.2	Экспоненциальное распределение . . . . .	8
2.2.1	Определение . . . . .	8
2.2.2	Математическое ожидание . . . . .	8
2.2.3	Дисперсия . . . . .	9
2.2.4	Характеристическая функция . . . . .	9
2.2.5	Итоги . . . . .	9
2.3	Нормальное распределение . . . . .	10
2.3.1	Определение . . . . .	10
2.3.2	Математическое ожидание . . . . .	10
2.3.3	Дисперсия . . . . .	11
2.3.4	Характеристическая функция . . . . .	12
2.3.5	Итоги . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Всё вместе</b>	<b>15</b>
<b>II</b>	<b>Свойства условного математического ожидания</b>	<b>15</b>

