# Must know

6 іюня 2014 г.

Часть I

# Распределения случайных величин

## 1 Дискретные распределения

### 1.1 Биномиальное распределение

#### 1.1.1 Определение

$$\xi \sim Bin\left(n, p\right), n \in \mathbb{N}, p \in [0; 1]$$

$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k}$$

#### 1.1.2 Математическое ожидание

Математическое ожидание посчитаем с помощью познаний в комбинаторике

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\
= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\
= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\
= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot [(n-1) - (k-1)]!} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\
= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot \left(1 - p\right)^{n-k} = \\
= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^{k-1} \cdot \left(1 - p\right)^{(n-1)-(k-1)} = \\
= n \cdot p \cdot \left[p + (1-p)\right]^{n-1} = n \cdot p \cdot 1^{n-1} = n \cdot p
\end{aligned}$$

#### 1.1.3 Дисперсия

Дисперсию же выведем из знания того, что такое биномиальное распределение, а также с помощью свойств дисперсии. Биномиальное распределение — серия независимых испытаний Бернулли (подкидывание асимметричной монетки).

Если случайная величина $\xi$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n$ и $k$ ($\xi \sim Bin\left(n, p\right)$), то $\mathbb{P}\left(\xi = k\right)$ — вероятность того, что в серии из $n$ экспериментов удачными окажутся ровно $k$, а сама случайная величина — сумма случайных величин $\xi_i \sim Bin\left(1,p\right), i=\overline{1,n}$.

Таким образом, получаем

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Помним, что дисперсия суммы независимых случайных величин — сумма их дисперсий. Найдём дисперсию $\xi_i$:

$$\mathrm{D}\xi_i = \mathrm{M}\xi_i^2 - \left(\mathrm{M}\xi_i\right)^2 = 1^2\cdot p + 0^2\cdot(1-p) - \left[1\cdot p + 0\cdot(1-p)\right]^2 = p - p^2 = p\cdot(1-p)$$

Значит, теперь достаточно просто найти и дисперсию $\xi$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{D}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}\xi_i = n\cdot p\cdot(1-p)$$

Обозначив вероятность "неудачи" через $q = 1-p$, получим симпатичную формулу

$$\mathrm{D}\xi = n\cdot p\cdot q$$

### 1.1.4 Характеристическая функция

Характеристическую функцию считать не так сложно, как математическое ожидание и дисперсию

$$\varphi_\xi\left(t\right) = \mathrm{M}e^{i\cdot t\cdot\xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{i\cdot t\cdot k}\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(p\cdot e^{i\cdot t}\right)^k\cdot(1-p)^{n-k} = \left(p\cdot e^{i\cdot t} + 1 - p\right)^n$$

С заменой $q = 1-p$ характеристическая функция принимает вид

$$\varphi_\xi\left(t\right) = \left(p\cdot e^{i\cdot t} + q\right)^n$$

### 1.1.5 Итоги

$$\xi \sim Bin\left(n,p\right), n\in\mathbb{N}, p\in[0;1]$$

$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$\mathrm{M}\xi = n\cdot p$$

$$\mathrm{D}\xi = n\cdot p\cdot q$$

$$\varphi_\xi\left(t\right) = \left(p\cdot e^{i\cdot t} + q\right)^n$$

## 1.2 Геометрическое распределение

### 1.2.1 Определение

$$\xi \sim Geom\left(p\right), p \in [0,1]$$
$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p$$

### 1.2.2 Математическое ожидание

Начнём с определения

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p$$

Дальше возьмём производную

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p = -p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k}$$

И вспомним, чему равна сумма бесконечного степенного ряда

$$-p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k} = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right)$$

Дальше сокращаем и берём производную

$$-p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right) = -p \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p}\right) =$$
$$= -p \cdot \frac{-p-(1-p)}{p^2} = -p \cdot \frac{-1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

### 1.2.3 Дисперсия

Возьмём две производные от суммы

$$\frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(k-1\right) \left(1-p\right)^{k-2}$$

Разложим на две суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(k-1\right) \left(1-p\right)^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(1-p\right)^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k-2}$$

Теперь можем составить уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(1-p\right)^{k-2} = \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-p\right)^{k-2}$$

Берём производную от первой суммы справа (которую считали выше), а также умножаем и делим на $(1-p)^2$ вторую

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-2} = \frac{d}{dp}\left(\frac{-1}{p^2}\right) + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

Берём вторую производную, а также снова вспоминаем сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-2} = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \frac{1-p}{p}$$

Умножим обе части на $(1-p)$, чтобы слева получалось $\dfrac{\mathrm{M}\xi^2}{p}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-2\cdot p}{p^3} + \frac{1}{p}$$

Складываем дроби с правой стороны

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{2-2\cdot p + p^2}{p^3}$$

Видим квадрат разности в сумме с единицей

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{(1-p)^2+1}{p^3}$$

Теперь считаем дисперсию по определению

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = p \cdot \frac{(1-p)^2+1}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{(1-p)^2+1-1}{p^2}$$

Заменив $(1-p)$ на $q$, получаем такой ответ

$$\mathrm{D}\xi = \frac{q}{p^2}$$

### 1.2.4 Характеристическая функция

Начнём с определения

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}e^{i\cdot t\cdot \xi} = \sum_{k=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot k} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Умножим и поделим на $(1-p)$, внесём экспоненты в скобки

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot k} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[e^{i\cdot t} \cdot (1-p)\right]^k$$

$$\frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[e^{i\cdot t} (1-p)\right]^k = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{i\cdot t} \cdot (1-p)}{1 - e^{i\cdot t} \cdot (1-p)}$$

$$\frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}{1-e^{i \cdot t} \cdot (1-p)} = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1-e^{i \cdot t} \cdot (1-p)}$$

Снова заменим $q = 1 - p$ и получаем результат

$$\varphi_\xi (t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1-e^{i \cdot t} \cdot q}$$

### 1.2.5 Итоги

$$\xi \sim Geom\left(p\right), p \in \left[0,1\right], q = 1-p$$
$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$$
$$\mathrm{M}\xi = \frac{1}{p}$$
$$\mathrm{D}\xi = \frac{q}{p^2}$$
$$\varphi_\xi (t) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1-e^{i \cdot t} \cdot q}$$

## 1.3 Пуассоновское распределение

### 1.3.1 Определение

$$\xi \sim Pois\left(\lambda\right), \lambda > 0$$
$$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

### 1.3.2 Математическое ожидание

Тут всё элементарно: разложение экспоненты в ряд Тейлора. Также суммировать начинаем не с нуля, а с единицы, так как при $k = 0$ всё слагаемое обращается в нуль

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Далее выполняем замену $r = k - 1$, суммирование начинается с нуля. Получаем разложение экспоненты в ряд Тейлора (Маклорена)

$$e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

### 1.3.3 Дисперсия

Начнём с расчёта второго момента

$$\mathrm{M}\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Разложим на две суммы, чтобы красиво сократить факториалы и проделать тот же трюк, что и выше

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Последняя сумма является математическим ожиданием, равным $\lambda$, а другую продолжим преобразовывать дальше

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

Пользуясь теми же принципами (сделав сумму по $r = k - 2$ от 0 до $\infty$), снова получаем $e^{\lambda}$, которая сокращается. Теперь у нас есть второй момент

$$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda = \lambda \cdot (\lambda + 1)$$

Теперь можно посчитать дисперсию

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

### 1.3.4 Характеристическая функция

Тут всё тоже предельно просто

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}e^{i \cdot t \cdot \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i \cdot t \cdot k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \cdot e^{i \cdot t}\right)^k}{k!}$$

Опять ряд Маклорена для экспоненты и всё выглядит почти красиво (за исключением экспоненты в экспоненте)

$$e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \cdot e^{i \cdot t}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \exp\left(\lambda \cdot e^{i \cdot t}\right) = \exp\left\{\lambda \cdot \left(e^{i \cdot t} - 1\right)\right\}$$

### 1.3.5 Итоги

$$\xi \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathrm{M}\xi = \mathrm{D}\xi = \lambda$$

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{\lambda \cdot \left(e^{i \cdot t} - 1\right)\right\}$$

# 2 Непрерывные распределения

## 2.1 Равномерное распределение

### 2.1.1 Определение

$$\xi \sim Un\left([a,b]\right), a < b \in \mathbb{R}$$
$$p\left(x\right) = \frac{\mathbb{1}(x \in [a,b])}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a,b])$$

### 2.1.2 Математическое ожидание

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a,b])\ dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_{a}^{b} x\,dx =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

### 2.1.3 Дисперсия

Снова начнём с поиска второго момента

$$\mathrm{M}\xi^2 = \int\limits_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)} = \frac{(b-a)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3\cdot(b-a)} =$$
$$= \frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3} = \frac{(a+b)^2 - a\cdot b}{3}$$

А теперь считаем дисперсию

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \frac{(a+b)^2 - a\cdot b}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$= \frac{4\cdot(a+b)^2 - 4\cdot a\cdot b}{12} - \frac{3\cdot(a+b)^2}{12} = \frac{(a+b)^2 - 4\cdot a\cdot b}{12} =$$
$$= \frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot a\cdot b}{12} = \frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

### 2.1.4 Характеристическая функция

Берём интеграл от экспоненты

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}e^{i\cdot t\cdot\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\cdot t\cdot x} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a,b])\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b e^{i\cdot t\cdot x}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{i\cdot t} \cdot \int\limits_a^b e^{i\cdot t\cdot x}\, d(x\cdot i\cdot t) =$$

$$= \frac{1}{i\cdot t\cdot(b-a)} \cdot e^{i\cdot t\cdot x}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{i\cdot t\cdot b} - e^{i\cdot t\cdot a}}{i\cdot t\cdot(b-a)}$$

### 2.1.5 Итоги

$$\xi \sim Un([a,b]),\, a < b \in \mathbb{R}$$
$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a,b])$$
$$\mathrm{M}\xi = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathrm{D}\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$$
$$\varphi_\xi(t) = \frac{e^{i\cdot t\cdot b} - e^{i\cdot t\cdot a}}{i\cdot t\cdot(b-a)}$$

## 2.2 Экспоненциальное распределение

### 2.2.1 Определение

$$\xi \sim Exp(\lambda),\, \lambda > 0$$
$$p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda\cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$$

### 2.2.2 Математическое ожидание

Начнём с определения, избавимся от индикатора

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\, dx$$

Очевидно, что нужно взять интеграл по частям

$$\int\limits_0^{+\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = x, & dv = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\, dx \\ & \Rightarrow dv = e^{-\lambda\cdot x}\, d(\lambda\cdot x) \\ du = dx, & v = -e^{-\lambda\cdot x} \end{array} \right| =$$

$$= -e^{-\lambda\cdot x}\cdot x\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \left(-e^{-\lambda\cdot x}\right) dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\cdot x}\, dx$$

Дальше есть как минимум два выхода

1. Под знаком интеграла видим плотность экспоненциального распределения, делённую на $\lambda$. Поскольку интеграл от плотности равен единице, то этот интеграл будет равен $\dfrac{1}{\lambda}$
2. Можно проинтегрировать, применив свои знания и навыки

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\cdot x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\cdot x}\,d\left(-\lambda\cdot x\right) = -\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}\Big|_0^{+\infty} =$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\cdot\left(e^{-\infty}-e^0\right) = -\frac{1}{\lambda}\cdot\left(-e^0\right) = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}$$

### 2.2.3 Дисперсия

Ищем второй момент, снова интегрируя по частям

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, & dv = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx \\ & \Rightarrow dv = e^{-\lambda\cdot x}\,d\left(\lambda\cdot x\right) \\ du = 2\cdot x\cdot dx, & v = -e^{-\lambda\cdot x}\end{matrix}\right| =$$
$$= -e^{-\lambda\cdot x}\cdot x^2\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} 2\cdot x\cdot\left(-e^{-\lambda\cdot x}\right)\,dx = 2\cdot\int\limits_0^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx =$$
$$= \frac{2}{\lambda}\cdot \mathrm{M}\xi = \frac{2}{\lambda^2}$$

И считаем дисперсию

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\xi^2 - \left(\mathrm{M}\xi\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^{-2}$$

### 2.2.4 Характеристическая функция

$$\varphi_\xi = \mathrm{M}e^{i\cdot t\cdot\xi} = \int\limits_0^{+\infty} e^{i\cdot t\cdot x}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx = \lambda\cdot\int\limits_0^{+\infty} e^{x\cdot(i\cdot t-\lambda)}\,dx =$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda - i\cdot t}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\left(\lambda - i\cdot t\right)\cdot e^{-x\cdot(\lambda - i\cdot t)}\,dx$$

Видим, что получился интеграл от плотности экспоненциального распределения $Exp\left(\lambda - i\cdot t\right)$, а это значит, что он равен единице

$$\frac{\lambda}{\lambda - i\cdot t}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\left(\lambda - i\cdot t\right)\cdot e^{-x\cdot(\lambda - i\cdot t)}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\cdot t} =$$
$$= \frac{1}{1-\frac{i\cdot t}{\lambda}} = \left(1 - \frac{i\cdot t}{\lambda}\right)^{-1}$$

### 2.2.5 Итоги

$$\xi \sim Exp\left(\lambda\right), \lambda > 0$$
$$p\left(x\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$$
$$\mathrm{M}\xi = \lambda^{-1}$$
$$\mathrm{D}\xi = \lambda^{-2}$$
$$\varphi_{\xi}\left(t\right) = \left(1 - \frac{i \cdot t}{\lambda}\right)^{-1}$$

## 2.3 Нормальное распределение

### 2.3.1 Определение

$$\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$
$$p\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$$

### 2.3.2 Математическое ожидание

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot x \cdot \exp\left\{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx$$

Разобьём экспоненту на три части

$$\exp\left\{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$$

Последняя экспонента не зависит от $x$, поэтому её можно вынести за знак интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot x \cdot \exp\left\{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx$$

Возьмём интеграл по частям. Чтобы не засорять пространство и не создавать путаницу, проведём промежуточные вычисления отдельно.

В качестве $u$ возьмём последнюю экспоненту, а в качестве $dv$, очевидно, всё остальное

$$u = \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} \Rightarrow du = \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx$$

$$dv = x \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx = \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} d\frac{x^2}{2} =$$

$$= -\sigma^2 \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} d\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) =$$

$$= -\sigma^2\, d\left(\exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}\right) \Rightarrow v = -\sigma^2 \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$$

Теперь можно вернуться к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx =$$

$$= \exp\left\{-\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} \cdot \sigma^2 \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}\Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx$$

Первое слагаемое обращается в нуль, а под знаком интеграла сокращаются $\sigma^2$. Перепишем первоначальный интеграл с константами

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx$$

Видим, что изменилось лишь одно — вместо $x$ появилась константа $a$, что очень облегчает жизнь. Свернём обратно экспоненты и увидим, что получилось очень красивое выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{x \cdot a}{\sigma^2}\right\} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot a \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx =$$

$$= a \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx$$

Видим интеграл от плотности нормального распределения, который равен единице, а это значит, что математическое ожидание посчитано правильно и оно действительно равно первому параметру $a$

$$a \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx = a$$

### 2.3.3 Дисперсия

В этот раз лучше считать дисперсию по определению

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}\left(\xi - \mathrm{M}\xi\right)^2$$

Помним, что математическое ожидание было посчитано выше и равняется оно $a$. В таком случае получаем формулу

$$\mathrm{M}\left(\xi - \mathrm{M}\xi\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} \cdot \exp\left\{\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\} dx$$

Выполним замену $t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$, тогда $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$, а значит, что $dx = dt\cdot\sqrt{2}\cdot\sigma$, и видим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} \cdot \exp\left\{\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot t^2 \cdot e^{t^2}\, dt$$

Дальше проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\cdot t^2\cdot e^{-t^2}\, dt = \left|\begin{array}{ll} u = t, & \begin{array}{c} dv = 2\cdot t\cdot e^{-t^2}\, dt \\ \Rightarrow dv = e^{-t^2}\, dt^2 \end{array} \\ du = dt, & \quad v = -e^{-t^2} \end{array}\right| =$$

$$= -e^{-t^2}\cdot t^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

Получили ожидаемый ответ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cdot\sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot t^2\cdot e^{t^2}\, dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2$$

### 2.3.4 Характеристическая функция

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}e^{i\cdot t\cdot\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{i\cdot t\cdot x} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\} dx$$

Далее этап промежуточных вычислений можно разбить на несколько шагов, которые будут нумероваться во избежание большой путаницы

1. Поработаем с экспонентами. У нас есть произведение экспонент, которое превращается в экспоненту суммы

$$e^{i\cdot t\cdot x} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\} = \exp\left\{i\cdot t\cdot x - \frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\}$$

2. Пока что экспонента нас не интересует (да и много места занимает), поэтому окунёмся в то выражение, которое экспонируется. Раскроем скобки и внесём слагаемое $i \cdot t \cdot x$ в дробь

$$i \cdot t \cdot x - \frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} = \frac{i \cdot t \cdot x \cdot 2 \cdot \sigma^2 - \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2\right)}{2 \cdot \sigma^2}$$

3. Рассмотрим числитель

   (a) Раскроем скобки и сгруппируем множители возле $2 \cdot x$

   $$i \cdot t \cdot x \cdot 2 \cdot \sigma^2 - \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2\right) = -x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right) - a^2$$

   (b) Далее выделим полный квадрат разности. Для этого нужно чтобы последнее слагаемое было квадратом множителя, что стоит при $2 \cdot x$

   $$\left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot i \cdot t \cdot \sigma^2 - t^2 \cdot \sigma^4$$

   Поскольку $a^2$ уже есть, нужно лишь отнять всё остальное

   $$\begin{aligned} & -x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right) - a^2 = \\ = & -\left[x - \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)\right]^2 + 2 \cdot a \cdot i \cdot t \cdot \sigma^2 - t^2 \cdot \sigma^4 \end{aligned}$$

4. Соединим всё снова воедино.

   (a) Вернём числителю дробь и сократим её

   $$\begin{aligned} & i \cdot t \cdot x - \frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2} = \\ = & \frac{-\left[x - \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)\right]^2 + 2 \cdot a \cdot i \cdot t \cdot \sigma^2 - t^2 \cdot \sigma^4}{2 \cdot \sigma^2} = \\ = & \frac{-\left[x - \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)\right]^2}{2 \cdot \sigma^2} + a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \end{aligned}$$

   (b) Вернёмся к экспоненте

   $$\begin{aligned} & e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} = \exp\left\{i \cdot t \cdot x - \frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} = \\ = & \exp\left\{\frac{-\left[x - \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)\right]^2}{2 \cdot \sigma^2} + a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\} = \\ = & \exp\left\{\frac{-\left[x - \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)\right]^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

   (c) Выражение стало очень громоздким, поэтому введём две замены. Одну для выражения в квадрате

   $$\mu(t) = a + i \cdot t \cdot \sigma^2$$

Вторую для второй экспоненты

$$\phi(t) = \exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\}$$

И мы добились своей цели: имеем более изящные выражения

$$\exp\left\{\frac{-\left[x - \left(a + i \cdot t \cdot \sigma^2\right)\right]^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \phi(t)$$

Обозначения именно такие, потому что $\mu(t)$ окажется средним для распределение, которое возникло в результате преобразований; также выяснится, что $\phi(t)$ и есть искомая характеристическая функция

Теперь можно смело продолжать работать с интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \phi(t)\ dx$$

Убираем из-под знака интеграла функцию $\phi(t)$, потому что она не зависит от $x$. Под интегралом остаётся плотность нормального распределения с параметрами $\mu(t)$ и $\sigma^2$. Поскольку интегрирование проходит по всему пространству $\mathbb{R}$, то интеграл равен единице и не будем тратить на него времени (будем считать, что нас не беспокоит комплексная составляющая в первом параметре)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{-(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} \cdot \phi(t)\ dx =$$
$$= \phi(t) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - \mu(t))^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\} dx =$$
$$= \phi(t) = exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\}$$

### 2.3.5 Итоги

$$\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$$

$$\mathrm{M}\xi = a$$
$$\mathrm{D}\xi = \sigma^2$$
$$\varphi_\xi\left(t\right) = exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\}$$

# 3 Всё вместе

| | |
|---|---|
| $\xi \sim Bin\left(n,p\right),$ | $n,p \ : \ n \in \mathbb{N}, p \in [0;1]$<br>$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \left(1-p\right)^{n-k}$<br>$\mathrm{M}\xi = n \cdot p$<br>$\mathrm{D}\xi = n \cdot p \cdot q$<br>$\varphi_\xi\left(t\right) = \left(p \cdot e^{i \cdot t} + q\right)^n$ |
| $\xi \sim Geom\left(p\right)$ | $p,q \ : \ p \in \left[0,1\right], q = 1-p$<br>$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = \left(1-p\right)^{k-1} \cdot p = p \cdot q^{k-1}$<br>$\mathrm{M}\xi = \frac{1}{p}$<br>$\mathrm{D}\xi = \frac{q}{p^2}$<br>$\varphi_\xi\left(t\right) = \frac{e^{i \cdot t} \cdot p}{1 - e^{i \cdot t} \cdot q}$ |
| $\xi \sim Pois\left(\lambda\right)$ | $\lambda \ : \ \lambda > 0$<br>$\mathbb{P}\left(\xi = k\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$<br>$\mathrm{M}\xi = \lambda$<br>$\mathrm{D}\xi = \lambda$<br>$\varphi_\xi\left(t\right) = \exp\left\{\lambda \cdot \left(e^{i \cdot t} - 1\right)\right\}$ |
| $\xi \sim Un\left([a,b]\right)$ | $a,b \ : \ a < b \in \mathbb{R}$<br>$p\left(x\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}(x \in [a,b])$<br>$\mathrm{M}\xi = \frac{a+b}{2}$<br>$\mathrm{D}\xi = \frac{\left(a-b\right)^2}{12}$<br>$\varphi_\xi\left(t\right) = \frac{e^{i \cdot t \cdot b} - e^{i \cdot t \cdot a}}{i \cdot t \cdot (b-a)}$ |
| $\xi \sim Exp\left(\lambda\right)$ | $\lambda \ : \ \lambda > 0$<br>$p\left(x\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}(x \geq 0)$<br>$\mathrm{M}\xi = \lambda^{-1}$<br>$\mathrm{D}\xi = \lambda^{-2}$<br>$\varphi_\xi\left(t\right) = \left(1 - \frac{i \cdot t}{\lambda}\right)^{-1}$ |
| $\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ | $a,\sigma \ : \ a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$<br>$p\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}$<br>$\mathrm{M}\xi = a$<br>$\mathrm{D}\xi = \sigma^2$<br>$\varphi_\xi\left(t\right) = exp\left\{a \cdot i \cdot t - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}\right\}$ |

## Часть II

# Свойства условного математического ожидания

I Формула полной вероятности

$$\mathrm{M}\mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right] = \mathrm{M}\eta$$

II Условное математическое ожидание неотрицательной случайной величины неотрицательно почти наверное

$$\eta \geq 0 \Rightarrow \mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right] \geq 0$$

III Неравенство Йенсена. Если функция $\varphi$ выпуклая вниз, то

$$\varphi\left(\mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right]\right) \leq \mathrm{M}\left[\varphi\left(\eta\right) \mid \mathfrak{F}_1\right]$$

IV Теорема о трёх перпендикулярах

$$\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1 \Rightarrow \mathrm{M}\left[\mathrm{M}\left(\eta \mid \mathfrak{F}_1 \mid \mathfrak{F}_2\right)\right] = \mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_2\right]$$

V Если случайная величина $\eta$ измерима относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{F}_1$, то её условное математическое ожидание равно ей самой

$$\mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right] = \eta$$

VI Если случайная величина $\eta$ измерима относительно $\mathfrak{F}_1$, то для любой случайной величины $\xi$

$$\mathrm{M}\left[\eta \cdot \xi \mid \mathfrak{F}_1\right] = \eta \cdot \mathrm{M}\left[\xi \mid \mathfrak{F}_1\right]$$

VII Если $\eta$ не зависит от $\mathfrak{F}_1$, то её условное математическое ожидание равно простому математическому ожиданию

$$\forall \Delta \in \mathfrak{B}, A \in \mathfrak{F}_1 : \mathbb{P}\left(\{\eta \in \Delta\} \mid A\right) = \{\eta \in \Delta\} \Rightarrow \mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right] = \mathrm{M}\eta$$

VIII Условное математическое ожидание линейно

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \mathrm{M}\left[a \cdot \xi + b \cdot \eta \mid \mathfrak{F}_1\right] = \mathrm{M}\left[a \cdot \xi \mid \mathfrak{F}_1\right] + \mathrm{M}\left[b \cdot \eta \mid \mathfrak{F}_1\right]$$

IX Сохраняется теорема Лебега о возможности предельного перехода под знаком условного математического ожидания

$$|\xi_n| \leq \eta,\ \mathrm{M}\eta < \infty,\ \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \xi \Rightarrow \mathrm{M}\left[\xi_n \mid \mathfrak{F}_1\right] \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \mathrm{M}\left[\xi \mid \mathfrak{F}_1\right]$$

Пара полезных частных случаев неравенства Йенсена

$$\begin{array}{lrcl} \varphi\left(x\right) = |x| : & \left|\mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right]\right| & \leq & \mathrm{M}\left[|\eta| \mid \mathfrak{F}_1\right] \\ \varphi\left(x\right) = x^2 : & \left(\mathrm{M}\left[\eta \mid \mathfrak{F}_1\right]\right)^2 & \leq & \mathrm{M}\left[\eta^2 \mid \mathfrak{F}_1\right] \end{array}$$

# Содержание