БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №1

Методы численного интегрирования

Вариант 13

Выполнил:
Черепенников Р.М.
3 курс 8 группа

Преподаватель:
Будник А.М.

2021

Содержание

Постановка задачи

Для вычисления интеграла

$$\int_0^2 \frac{e^{-x^3}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x+1}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ необходимо:

1. Применить правило Рунге, используя составную квадратурную формулу левых прямоугольников. Определить величину шага h разбиения исходного отрезка интегрирования, достаточного для достижения точности ε.
2. Пользуясь выражением для погрешности интегрирования, определить шаг h в двух нижеуказанных квадратурных формулах, которые обеспечат требуемую точность результата:
    a. Составная квадратурная формула трапеций
    b. Составная квадратурная формула средних прямоугольников
3. Применить квадратурную формулу НАСТ Гаусса при $\mathrm{n} = 5$. Оценить погрешность интегрирования через формулу остаточного члена $R_n(f)$.
4. Провести сравнительный анализ полученных в п.п.1-3 результатов.

Теория

В качестве точного значения для проверки полученных результатов будем использовать значение 0.13178657039

Правило Рунге

Обозначим точное значение интеграла через $I = \int_a^b f(x)dx$, а его приближенное значение, полученное по некоторой квадратурной формуле порядка точности p с шагом h_k через $I_k = \sum_{i=0}^{n_k} A_i f(a + h_k i)$. Тогда имеет место соотношение $I = I_k + \alpha h_k^{\ p}$.

Вычислим интеграл по указанной квадратурной формуле с шагом h_1и h_2 получим

$$\begin{cases} I = I_1 + \alpha h_1^p \\ I = I_2 + \alpha h_2^p \end{cases}$$

$$I_2 - I_1 = \alpha\left(h_1^p - h_2^p\ \right)$$

$$\alpha = \frac{I_2 - I_1}{\left(h_1^p - h_2^p\ \right)} = \frac{I_2 - I_1}{h_1^p(1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p\ )}$$

Для достижения точности ε необходимо чтобы выполнялось соотношение:

$$\left|\frac{I_2 - I_1}{h_1^p(1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p\ )} h_1^p\right| = \left|\frac{I_2 - I_1}{(1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p\ )}\right| \le \varepsilon$$

Составная квадратурная формула левых прямоугольников с использованием правила Рунге

$$I(f) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, , \text{где } h = \frac{b - a}{N}, f_k = f(a + kh)$$

Изначально возьмем шаг $h_1 = 1.0$, и соотношение $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$, затем на каждой итерации будем вычислять значения I_1и I_2 уменьшая шаг в соответствии с заданным соотношением, пока не выполнится соотношение $\left|\frac{I_2 - I_1}{(1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p\ )}\right| \le \varepsilon$, для формулы левых прямоугольников $p = 1$

Составная квадратурная формула трапеций

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + h \sum_{k=1}^{N-1} f_k$$

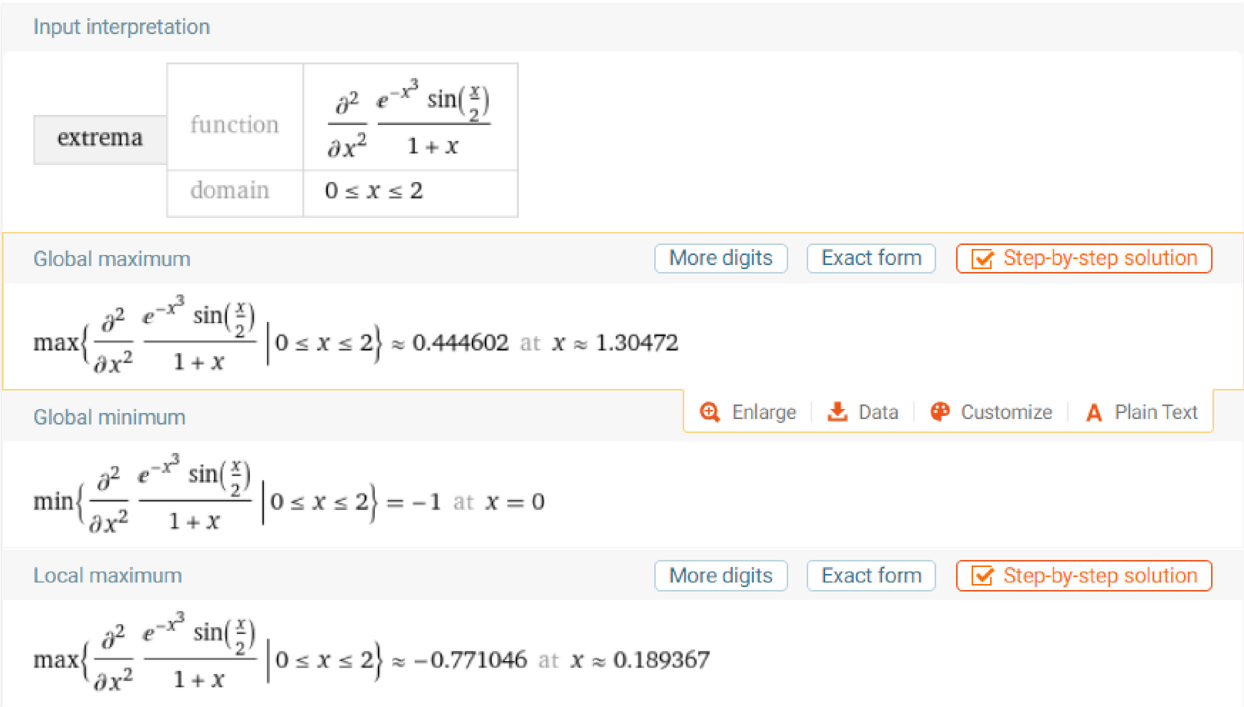
Её погрешность оценивается следующим образом:

$$|R(f)| \leq \left| \frac{(b-a)^3}{12N^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \right|$$

Отсюда шаг, обеспечивающий вычисление интеграла с точностью ε, вычисляется следующим образом

$$h \leq \sqrt{\frac{12\varepsilon}{\left|(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\right|}}$$

Для нашей задачи:



$$h \leq \sqrt{\frac{12 * 10^{-5}}{(2-0) * 1}} \approx 0.00775$$

Составная квадратурная формула средних прямоугольников

$$I(f) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(a + kh + \frac{h}{2})$$

Её погрешность оценивается следующим образом:

$$|R(f)| \leq \left| \frac{(b-a)^3}{24N^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \right|$$

Отсюда шаг, обеспечивающий вычисление интеграла с точностью ε, вычисляется следующим образом

$$h \leq \sqrt{\frac{24\varepsilon}{|\,(b-a)\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|\,|}}$$

Для нашей задачи:

$$h \leq \sqrt{\frac{24 * 10^{-5}}{(2-0) * 7.5685}} \approx 0.01095$$

Квадратурная формула НАСТ Гаусса

Пусть необходимо вычислить $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Для построения квадратурной формулы НАСТ Гаусса, в качестве узлов x_k необходимо выбрать корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

А коэффициенты могут быть вычислены по формуле

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2 P_{n-1}^2(x_k)}$$

Задачу вычисления интеграла по любому отрезку можно свести к задаче вычисления $\int_{-1}^{1} f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, dx = \frac{b-a}{2}dt\right]$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \bar{f}(t)dt =$$

Погрешность вычисления можно оценить следующим образом

$$|R(f)| \leq \frac{2^{n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3} \max_{\xi\in[-1,1]} \left|\bar{f}^{(2n)}(\xi)\right|$$

Листинг программы

```
import numpy as np
import scipy.special


def left_rectangles(f, a, b, h):
    res = 0.0
    x = a
    while x < b:
        res += f(x)
        x += h
    return h * res


def trapezoid(f, a, b, h):
    res = 0
    left = a
    right = a + h
    while right <= b:
        res += h / 2 * (f(right) + f(left))
        left = right
        right += h
    return res


def mid_rectangles(f, a, b, h):
    res = 0
    x = a
    while x < b:
        res += f(x + h / 2)
        x += h
    return h * res


def runge(f, quad_formula, a, b, p, h=1.0, q=0.5, eps=10 ** (-5)):
    h1 = h
    h2 = h * q
    I_1 = quad_formula(f, a, b, h1)
    I_2 = quad_formula(f, a, b, h2)
    while abs((I_2 - I_1) / (1 - (h2 / h1) ** p)) > eps:
        h1 = h2
        h2 = h2 * q
        I_1 = I_2
        I_2 = quad_formula(f, a, b, h2)
    return I_1, h1


def NAST_Gauss(f, a, b, n):
    X = scipy.special.legendre(n).roots
    res = 0.0
    for x in X:
        res += (2 * (1 - x **2 )) / (n ** 2 *
np.polyval(scipy.special.legendre(n - 1), x) ** 2) * f(
            (a + b) / 2 + (b - a) / 2 * x)
    return (b - a) / 2 * res


def f(x):
```

```
    return np.exp(-x ** 3) * np.sin(x / 2) / (1 + x)


exact_result = 0.13178657039

print('Формула левых прямоугольников с использованием правила Рунге:')
I, h = runge(f, left_rectangles, 0, 2, 1, h=1.0, q=1 / 2, eps=10 ** (-5))
print('Значение интеграла:', I)
print('Шаг:', h)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
print()

print('Формула трапеций')
I = trapezoid(f, 0, 2, 0.00775)
print('Значение интеграла:', I)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
print()

print('Формула средних прямоугольников:')
I = mid_rectangles(f, 0, 2, 0.01095)
print('Значение интеграла:', I)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
print()

print('Формула НАСТ Гаусса')
I = NAST_Gauss(f, 0, 2, 5)
print('Значение интеграла:', I)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
```

Вывод программы

Формула левых прямоугольников с использованием правила Рунге:

Значение интеграла: 0.13178365397609526

Шаг: 0.0078125

Погрешность: 2.9164139047355153e-06

Формула трапеций

Значение интеграла: 0.13178401492961356

Погрешность: 2.5554603864386127e-06

Формула средних прямоугольников:

Значение интеграла: 0.13178942772680388

Погрешность: 2.8573680388853353e-06

Формула НАСТ Гаусса

Значение интеграла: 0.1317098172313553

Погрешность: 7.675315864469345e-05

Анализ полученных результатов

Сравнивая результаты с точным значением, в что все методы достигли указанной точности и даже превысили ее. В случаях использования формул трапеций и средних прямоугольников превышение указанной точности связано с тем, что мы оценивали погрешность сверху, то есть $|R(f)| \leq |\frac{(b-a)^3}{const*N^2} * \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \,|$, в действительности же

$R(f) = \frac{(b-a)^3}{const*N^2} * f''(\xi)$, где ξ некоторая точка из отрезка $[a, b]$.

В случае использования правила Рунге и метода левых прямоугольников превышение точности может быть вызвано, тем что на каждой итерации

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$, но в действительности на последней итерации для достижения поставленной точности могло быть достаточно изменения шага меньше чем в 2 раза.

При использовании формулы НАСТ Гаусса количество отрезков разбиения значительно меньше при почти такой же точности, чем при использовании других методов, рассмотренных в работе. Сложность метода заключается в вычислении самих узлов и коэффициентов, для вычисления которых необходимо строить многочлены Лежандра и искать их корни. Но стоит отметить, что сами узлы не зависят от отрезка интегрирования и функции, а лишь от АСТ формулы, которую мы хотим построить. Это может позволить нам использовать уже готовые таблицы с коэффициентами и узлами.