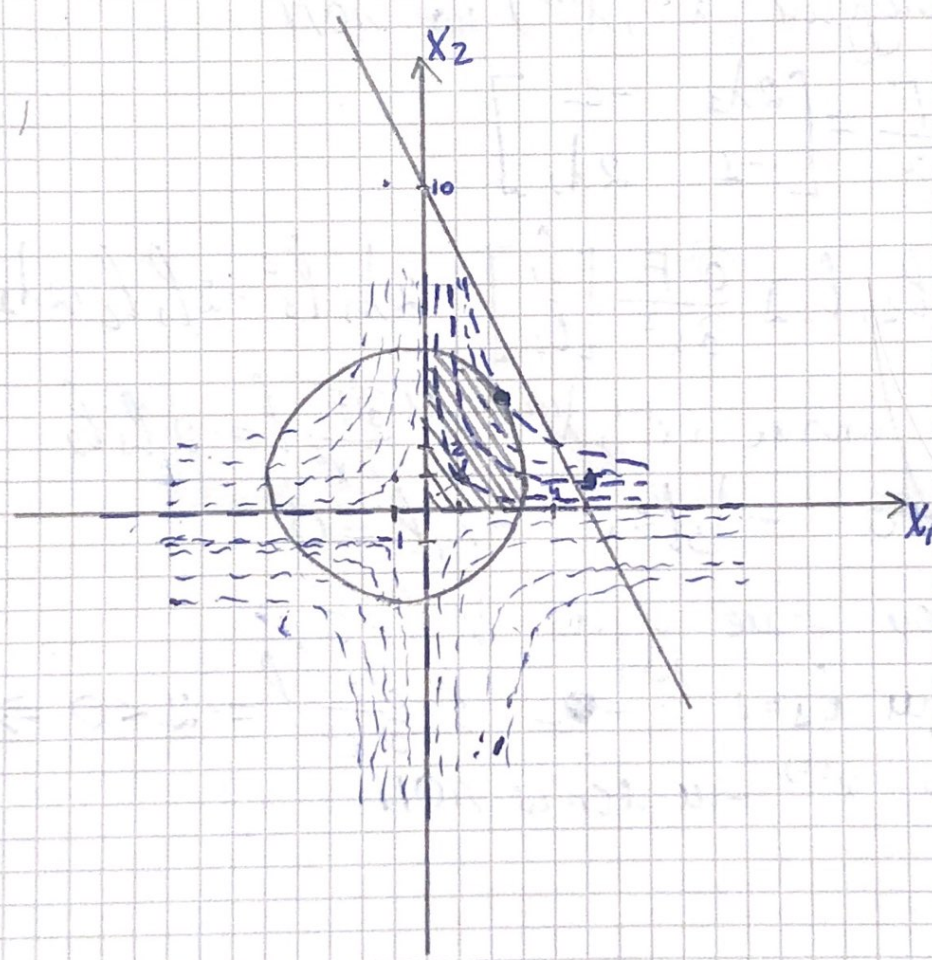
:iTechArt ЛР №4 Черепенников 8гр

$x_1 x_2 \to extr$

$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 \le 14$

$2x_1 + x_2 \le 10$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$



$x_1 x_2 \to extr$

$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \le 0$

$2x_1 + x_2 \le 10$

$-x_1 \le 0 \quad -x_2 \le 0$

проверим регулярность мн-ва планов

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0 \quad g_1 \text{ - выпуклая}$$

g_2, g_3, g_4 - так же выпуклы

т.е. все ограничения выпуклы, проверим условие Слейтера

$\exists\, x^* = (1, 1) : \; g(x^*) < 0$

Таким образом мн-во планов регулярно

Также $x_1 x_2$ непрерывна и ограничена на заданном мн-ве, которое явл-ся компактом $\to$ $x_1 x_2$ достигает своих экстр. значений

Исследование на минимум

Заметим, что при наложенных ограничениях целевая функция $x_1 x_2 \geq 0$ причем она обращается в 0 лишь при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, таким образом точками глобального минимума будут следующие точки:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 \in [0,\ 1+\sqrt{15}]$$

$$x_1 \in [0, \sqrt{15}-1] \qquad x_2 = 0$$

в дальнейшем будем исследовать лишь на локальные оптимальные планы

$$x_1 x_2 \to \min$$

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 - 10 \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0 \qquad -x_2 \leq 0$$

$$F(x, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda_1 (x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14) +$$
$$+ \lambda_2 (2x_1 + x_2 - 10) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda_1 x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$\lambda_1 g_1(X) = \lambda_1(x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2-14)=0$

$\lambda_2 g_2(X) = \lambda_2(2x_1+x_2-10)=0$

$\lambda_3 g_3(X) = -\lambda_3 x_1 = 0$

$\lambda_4 g_4(X) = -\lambda_4 x_2 = 0$

$\lambda_i \geq 0 \quad i=\overline{1,4}$

т.к. точки в которых или $x_1=0$ или $x_2=0$ нами уже рассмотрены и явл-ся ГОП, то их не рассматриваем, таким образом $\lambda_3=0$ $\lambda_4=0$ и получаем след. с-му для поиска условно-стац. планов

$$\begin{cases} \cancel{x_2+2\lambda_1 x_1+x_2^2\ 2} \\ x_2+2\lambda_1 x_1+2\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ x_1+2\lambda_1 x_2-2\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1(x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2-14)=0 \\ \lambda_2(2x_1+x_2-10)=0 \\ \lambda_1\geq 0 \quad \lambda_2\geq 0 \quad \lambda_3=0 \quad \lambda_4=0 \\ x_1\neq 0 \quad x_2\neq 0 \quad x_1>0 \quad x_2>0 \\ x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2-14\leq 0, \quad 2x_1+x_2-10\leq 0 \end{cases}$$

которая не имеет решений $\Rightarrow$ ЛОП нет

Исследование на максимум

$-x_1 x_2 \to min$

$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \le 0$

$2x_1 + x_2 - 10 \le 0$

$-x_1 \le 0 \qquad -x_2 \le 0$

ф-ия Лагранжа

$F(x,\lambda) = -x_1 x_2 + \lambda_1(x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14) + \lambda_2(2x_1 + x_2 - 10) -$
$- \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -x_2 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -x_1 + 2\lambda_1 x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$\lambda_1 g_1(x) = \lambda_1(x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14) = 0$

$\lambda_2 g_2(x) = \lambda_2(2x_1 + x_2 - 10) = 0$

$\lambda_3 g_3(x) = -\lambda_3 x_1 = 0 \qquad \lambda_4 g_4(x) = -\lambda_4 x_2 = 0$

$\lambda_i \ge 0 \qquad i = \overline{1,4}$

условно-стац. планы:

$(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$(x^{(2)}, \lambda^{(2)}) = \left(\frac{\sqrt{31}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$

:iTechArt

$f(x^{(1)})=0$

$f(x^{(2)})=\frac{15}{2} \Rightarrow x=\left(\frac{\sqrt{31}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{31}}{2}+\frac{1}{2}\right)$ - точка глобального максимума

исследуем $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ на ЛОП

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\begin{bmatrix} 2\lambda_1 & -1 \\ -1 & 2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$[l_1, l_2]\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}=2\lambda_1 l_1^2-2l_1 l_2+2\lambda_1 l_2^2$$

на плане $(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ $l'\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}l=-2l_1 l_2$

$\begin{cases} l\neq 0 & -\lambda_3 l\leq 0 & -\lambda_4 l\leq 0 \end{cases}$

этой с-ме удовл $\forall l\neq 0$,

н/м $l_1=1$ $l_2=1$ $l'\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}l=-2<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x^{(1)}$ - не явл-ся ЛОП