БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Контролируемая самостоятельная работа

Черепенникова Романа Михайловича
студента 2 курса 8 группы

Преподаватель:
Доцент кафедры КТС ФПМИ,
кандидат физико-математических
наук Чеб Елена Сергеевна

Минск, 2021

Оглавление

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 3
ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 5
Теория 5
Задание 1 6
Листинг программы 7
Вывод программы 8
ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ 9
Теория 9
Задание 2 11
Листинг программы 11
Вывод программы 12
ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 13
Теория 13
Задание 3 14
Пространство $C[0,1]$ 14
Листинг программы (пространство $C[0,1]$) 15
Вывод программы (пространство $C[0,1]$) 15
Сравнение с точным решением (пространство $C[0,1]$) 15
Пространство $L2[0,1]$ 16
Листинг программы (пространство $L2[0,1]$) 16
Вывод программы (пространство $L2[0,1]$) 16
Сравнение с точным решением (пространство $L2[0,1]$) 16
Задание 4 17
Решение 17
ВЫВОД 19

Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах

Пусть в банаховом пространстве E действует отображение f .

Определение 1. Точка x^* называется неподвижной точкой отображения f,если $f(x^*) = x^*$.

Таким образом, неподвижные точки f - это решения уравнения

$$x = f(x)$$

а поскольку к такому виду очень часто удается преобразовать уравнение $F(x) = 0$, где F действует из банахова пространства X в банахово пространство Y, то важность определения неподвижных точек не вызывает сомнения.

Определение 2. Будем говорить, что отображение f является сжимающим, если существует константа $0 < \alpha < 1$, такая что

$$\| f(x) - f(y) \|_E \leq \alpha \| x - y \|_E, \qquad \forall x, y \in E$$

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений).

Пусть отображение f отображает замкнутое в банаховом пространстве E множество M в себя и является на M сжимающим с коэффициентом сжатия α. Тогда на множестве M отображение f имеет единственную неподвижную точку x^*, которая может быть найдена методом последовательных приближений

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1,2 \ldots$$

где $(x_n) \subset M$ и $x_n \to x^*$при $n \to \infty$. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\| x_n - x^* \| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \| x_0 - x_1 \|$$

Следствие 1.

Пусть f отображает банахово пространство E на само себя и является сжатием. Тогда f имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Следствие 2.

Пусть f определено на $B[a, r_0] \subset E$, E - банахово пространство. Пусть f является на $B[a, r_0]$ сжатием и выполнено условие $\| f(x) - a \| \leq (1 - \alpha) r_0$. Тогда в шаре $B[a, r_0]$ существует единственная неподвижная точка отображения f, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Следствие 3.

Пусть отображение f отображает замкнутое выпуклое множество М$\subset E$ в себя, причем на M оно непрерывно дифференцируемо и $\| f'(x) \|_E \leq \alpha < 1$. Тогда справедливы утверждения теоремы 1.

Теорема 2.

Пусть отображение f отображает замкнутое множество М$\subset E$ в себя и при некотором $m \in N$ отображение $f^m(x)$ является на M сжатием. Тогда в M существует единственная неподвижная точка f.

Применение принципа сжимающих отображений для решения уравнений

Теория

Пусть задано уравнение $x = f(x)$ где $f\colon [a,b] \to [a,b]$. Сформулируем для него принцип сжимающих отображений.

Теорема 3.

Пусть f удволетворяет условию Липшица с константой $L < 1$ Тогда уравнение $x = f(x)$ имеет единственное решение $x^* \in [a,b]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений

$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad n = 1,2 \dots$$

Если $g(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке выполнены следующие ограничения

$$0 < k_1 \le f'(x) \le k_2$$

Тогда уравнение $g(x) = 0$ можно записать в следующем виде

$$x = x - \lambda\, g(x) \quad \text{или} \quad x = f(x)$$

Имеем что

$$1 - \lambda k_2 \le f'(x) = 1 - \lambda g'(x) \le 1 - \lambda k_2$$

В качетсве параметра λ можно взять точку минимума функции

$$h(\lambda) = \max\{|1 - \lambda k_1|, |1 - \lambda k_2|\}$$

т.е.

$$\lambda^* = \frac{2}{k_1 + k_2}$$

В этом случае

$$|f'(x)| \leq \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} < 1$$

Так как уравнение $x = f(x)$ имеет решение, то $a < f(a),\ b > f(b)$, а это означает, что $f: [a, b] \to [a, b]$. Следовательно к уравнению $x = x - \lambda\, g(x)$ применим принцип сжимающих отображений. Для вычисления коэффициента сжатия можно воспользоваться оценкой на производную.

Задание 1

Приведя уравнение $g(x) = 0$ к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$3x - cos(2x + 1) + 6x - 15 = 0$$

Необходимо привести уравнение к виду $x = f(x)$.

Сделаем это следующим образом:

Функция $3x - cos(2x + 1) + 6x - 15 = 0$ непрерывно дифференцируема на $[0,2]$ и

$$0 < 7 \leq f'(x) \leq 11$$

в качестве λ возьмем

$$\lambda = \frac{2}{7 + 11} = \frac{1}{9} \leq 0.112$$

Получим уравнение следующего вида

$$x = x - \lambda g(x) = x - 0.112(3x - \cos(2x + 1) + 6x - 15)$$

Для производной $f'(x)$ верна оценка

$$|f'(x)| = |-0.224 \sin(2x + 1) - 0.008| \leq \frac{11-7}{7+11} = \frac{4}{18} \leq 0.25$$

Тогда априорное число итераций можно вычислить по формуле

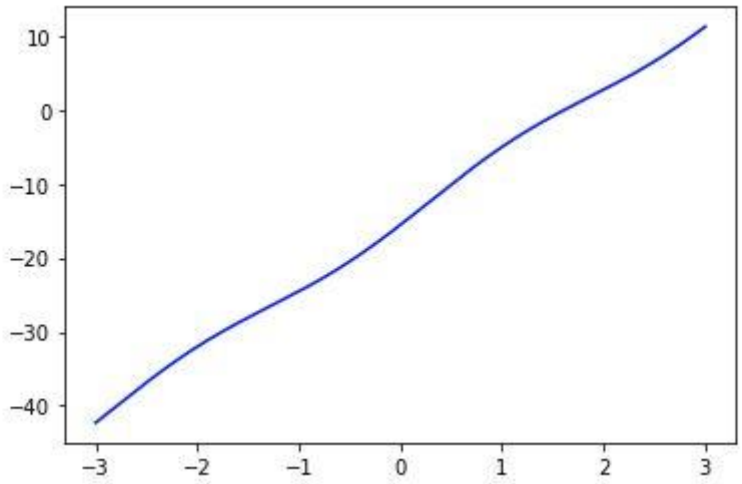
$$n_{apr} = [log_\alpha \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\| x_0 - x_1 \|}] + 1$$

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 1$

Листинг программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy


def f(x):
    return x - 0.112 * (3 * x - np.cos(2 * x + 1) + 6 * x - 15)


def iterations(start_approx, f, alpha, eps):
    x0 = start_approx
    x1 = f(x0)
    delta = abs(x1 - x0)
    x0 = x1
    apriori_iterations = np.ceil(np.log(eps * (1 - alpha) / delta) / np.log(alpha))
    real_iterations = 1
    while delta > eps:
        x1 = f(x0)
        delta = alpha/(1-alpha) * abs(x1 - x0)
        x0 = x1
        real_iterations += 1
    return x0, real_iterations, apriori_iterations


#Построение графика g(x)
x = np.linspace (-3,3,10000)
y = 3*x - np.cos(2*x + 1) + 6*x - 15

plt.plot(x,y,'b')
plt.show()

x = 1.0
solution, real, apriori = iterations(x, f, 0.25, 0.0001)
print('Solution:', solution)
print('Real iterations:', real)
print('Apriori iterations', apriori)
```

Вывод программы



Solution: 1.6150842023465826
Real iterations: 5
Apriori iterations 7.0

Применение принципа сжимающих отображений для решения СЛАУ

Теория

Пусть дана СЛАУ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

которую можно записать в матричном виде

$$AX = B$$

Предположим, что определитель матрицы A $detA \neq 0$ тогда существует единственное решение системы. Для применения принципа сжимающих отображений перепишем систему в виде

$$X = CX + D$$

Обозначим через $F(X) = CX + D$, тогда отображение $F: R^m \to R^m$ задается системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} x_j c_{ij} + d_i \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

Отображение F является сжатием в следующих случаях:

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| < 1 \qquad (1)$$

$$\alpha = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}| < 1 \qquad (2)$$

Теорема 5.

Если матрица C системы $X = CX + D$ такова, что $0 \le \alpha < 1$, где величина α определяется формулой (1) или (2), то система уравнений имеет единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений

$$x_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{m} x_j^n c_{ij} + d_i \quad (i = 1,2,\dots,m)$$

а в качестве $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ можно взять любую точку из R^m. Скорость сходимости итерационного процесса оценивается неравенством

$$\| x_n - x^* \| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \| x_0 - x_1 \|$$

Рассмотрим случай, когда матрица C является симметрической, тогда процесс последовательных приближений для решения СЛАУ сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы C меньше единицы по абсолютной величине.

Рассмотрим способ приведения системы $AX = B$ к виду $X = CX + D$.

Пусть A^T - транспонированная к A матрица, E - единичная матрица, $\lambda(A^T A)$ - максимальное собственное значение матрицы $A^T A$. Тогда исходное уравнение можно записать так:

$$X = \left(E - \frac{A^T A}{\lambda(A^T A)}\right) X + \frac{A^T B}{\lambda(A^T A)}$$

Тогда

$$C = \left(E - \frac{A^T A}{\lambda(A^T A)}\right), \; D = \frac{A^T B}{\lambda(A^T A)}$$

Если матрица C получена таким образом, то все ее собственные значения положительны и меньше единицы.

Задание 2

Найти решение СЛАУ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \end{cases}$$

Листинг программы

```
def solve_system(A,B,eps):
    #Приведение к виду X = CX + D
    eigvals = np.linalg.eigvals(np.dot(A.T,A))
    l = np.amax(eigvals)
    C = np.identity(A.shape[0]) - np.dot(A.T,A)/l
    D = np.dot(A.T,B)/l
    print('Матрица C:')
    print(C)
    print('Матрица D:')
    print(D)
    alpha = np.linalg.norm(C,ord=2)
    print('Коэффициент сжатия:', alpha)
    x0 = np.zeros(B.shape)
    x1 = np.dot(C, x0) + D
    delta = alpha / (1-alpha) * np.linalg.norm(x0 - x1, ord = 2)
    x0 = x1
    apriori_iterations = apriori_iterations = np.ceil(np.log(eps
* (1 - alpha) / delta) / np.log(alpha))
    real_iterations = 1
    while delta > eps:
        x1 = np.dot(C, x0) + D
        delta = alpha / (1-alpha) * np.linalg.norm(x0 - x1, ord
= 2)
        x0 = x1
        real_iterations += 1
    return x0, real_iterations, apriori_iterations
A = np.array([
    [2, 0, -2, 1],
    [3, 4, 5, 8],
    [7, 7, -7, -2],
    [2, 2, 2, 1]
])
b = np.array([
    [-1],
    [60],
    [5],
    [27]
])
sys_solution, real_it, apr_it = solve_system(A,b,0.001)
print('Solution:', sys_solution, sep='\n')
print('Real iterations:', real_it)
```

```
print('Apriori iterations:', apr_it)
```

Вывод программы

```
Матрица C:
[[ 0.57872352 -0.41489351  0.21702122 -0.08936168]
 [-0.41489351  0.55957458  0.15957443 -0.12765954]
 [ 0.21702122  0.15957443  0.47659588 -0.34468076]
 [-0.08936168 -0.12765954 -0.34468076  0.55319161]]
Матрица D:
[[1.70425487]
 [2.09999945]
 [2.04893563]
 [3.16595661]]
Коэффициент сжатия: 0.9925727413471924
Solution:
[[5.13661722]
 [1.87964522]
 [6.06012258]
 [0.84640177]]
Real iterations: 1131
Apriori iterations: 2447.0
```

Применение принципа сжимающих отображений для решения интегральных уравнений

Теория

Теорема 7.

Пусть $K(t,s)$ непрерывная функция на множестве $[a,b]\times[a,b]=\Omega$ и $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega}|K(t,s)|$, тогда для любого λ такого что $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение для любой правой части $y(t) \in C[a,b]$. Причем решение может быть найдено методом последовательных приближений следующим образом:

$$x_n(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\,x_{n-1}(s)ds + y(t)$$

Теорема 8.

Пусть $K(t,s;z)$ - непрерывная функция переменных t,s,z удовлетворяющая условию Липшица по переменной z с константой $L>0$. Если выполнено условие $L(b-a)|\lambda| < 1$ то интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda\int_a^b K(t,s)\,x(s)ds = y(t)$$

имеет единственное решение для любой правой части $y(t) \in C[a,b]$.

Теорема 9.

Пусть $K(t,s)$ - непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой $y(t) \in C[a,b]$ и любого λ из поля P интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение.

Задание 3

Выяснить при каких значениях параметра $\lambda \neq 0$ к интегральному уравнения Фредгольма второго рода применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[a,b]$ и в пространстве $L_2[a,b]$. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$и сравнить его с точным решением.

$$a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 t^3 s x(s) ds = t^2$$

Приведем уравнение к виду $x = F(x)$, тогда можно будет применить принцип сжимающих отображений при условии, что в банаховых пространствах $C[0,1]$, $L_2[0,1]$отображение является сжимающим.

Пусть $F(x) = \lambda \int_0^1 t^3 s x(s) ds + t^2$

Пространство $C[0,1]$

Рассмотрим пространство $C[0,1]$. Отображение F задает отображение $C[0,1]$на $C[0,1]$так как представляет собой сумму двух непрерывных функций. Покажем, что отображение является сжимающим:

$$\| F(x) - F(y) \|_{C[0,1]} = \max_{0 \le t \le 1} \left| \lambda \int_0^1 t^3 s\big(x(s) - y(s)\big) ds \right| \le$$

$$\le |\lambda| \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)| \int_0^1 s ds = \frac{|\lambda|}{2} \| x - y \|_{c[0,1]}$$

Тогда при $|\lambda| < 2$ отображение является сжатием.

В качестве λ_0 рассмотрим 1. В таком случае коэффициент сжатия $\alpha = 0.5$. Оценим количетсво приближений необходимое для достижения точности $\varepsilon =$ $= 10^{-3}$:

$$\| x_n - x \| \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \| x_0 - x_1 \|$$

Пусть $x_0(t) = 0$, тогда $x_1(t) = F(x_0) = t^2$, $\|x_0 - x_1\| = 1$. Для определения числа итераций необходимо решить неравенство $0.5^{n-1} <$ $< 10^{-3}$. Откуда $n = 11$.

Листинг программы (пространство $C[0,1]$)

```
x[s_] := 0;
lambda = 1;
iterations = 11;
F[x_] := t^2 + lambda * t^3 * Integrate[t*x, {t, 0, 1}]
For[ i = 0 , i < iterations, ++i, x[t] = F[x[t]]; Print[(x[t])]]
```

Вывод программы (пространство $C[0,1]$)

$$t^2$$

$$t^2 + \frac{t^3}{4}$$

$$t^2 + \frac{3\,t^3}{10}$$

$$t^2 + \frac{31\,t^3}{100}$$

$$t^2 + \frac{39\,t^3}{125}$$

$$t^2 + \frac{781\,t^3}{2500}$$

$$t^2 + \frac{1953\,t^3}{6250}$$

$$t^2 + \frac{19\,531\,t^3}{62\,500}$$

$$t^2 + \frac{24\,414\,t^3}{78\,125}$$

$$t^2 + \frac{488\,281\,t^3}{1\,562\,500}$$

$$t^2 + \frac{1\,220\,703\,t^3}{3\,906\,250}$$

Сравнение с точным решением (пространство $C[0,1]$)

Точное решение уравнения имеет вид: $x(t) = 0.3125t^3 + t^2$

Полученное решение: $x_{11}(t) = \frac{1220703}{3906250}t^3 + t^2$

$$\| x_{11}(t) - x(t) \|_{C[0,1]} = \max_{0 \le t \le 1} \left| \left(\frac{1220703}{3906250} - 0.3125 \right) t^3 \right| \le 4 * 10^{-8}$$

Пространство $L_2[0,1]$

Рассмотрим пространство $L_2[0,1]$. Оценим ядро $K(t,s) = \lambda t^3 s$:

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)|^2 dtds = |\lambda|^2 \int_0^1 \int_0^1 t^6 s^2 dtds = |\lambda|^2 \frac{1}{21}$$

Таким образом отображение сжимающее при $|\lambda| < \sqrt{21}$. Поэтому при $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ можно применить принцип сжимающих отображений в пространстве $L_2[0,1]$. Пусть $x_0 = 0, x_1 = t^2$.

$$\| x_0(t) - x_1(t) \|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |x_0(t) - x_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Коэффициент сжатия $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{21}}$. Тогда можно вычислить число n необходимых итераций. $n = 3$.

Листинг программы (пространство $L_2[0,1]$)

```
x[s_] := 0;
lambda = 1/2;
iterations = 3;
F[x_] := t^2 + lambda*t^3*Integrate[t*x, {t, 0, 1}]
For[i = 0, i < iterations, ++i, x[t] = F[x[t]]; Print[(x[t])]]
```

Вывод программы (пространство $L_2[0,1]$)

$$t^2$$

$$t^2 + \frac{t^3}{8}$$

$$t^2 + \frac{11\,t^3}{80}$$

Сравнение с точным решением (пространство $L_2[0,1]$)

Точное решение уравнения имеет вид: $x(t) = \frac{5}{36}t^3 + t^2$

Полученное решение: $x_3(t) = \frac{11}{80}t^3 + t^2$

$$\| x_3(t) - x(t) \|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |x_3(t) - x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq 5 * 10^{-4}$$

Задание 4

Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода в пространстве $C[0,1]$.

$$x(t) + \int_0^t tx(s)ds = 2t^2 + 2$$

Решение

Приведем уравнение к виду $x = F(x)$:

$$x(t) = -\int_0^t tx(s)ds + 2t^2 + 2$$

Ядро – непрерывная функция, следовательно, это уравнение Вольтерра имеет единственное решение и к нему применим метод сжимающих отображений.

Выполним несколько шагов итерационного процесса:

```
In[4]:= x0[t] = 0
        x1[t] = -∫_0^t t*0 ds + 2 t^2 + 2
```

$$\text{Out[4]= } 0$$

$$\text{Out[5]= } 2 + 2\,t^2$$

```
In[9]:= x2[t] = -∫_0^t t*(2 + 2 s^2) ds + 2 t^2 + 2
```

$$\text{Out[9]= } 2 - \frac{2\,t^4}{3}$$

```
In[10]:= x3[t] = -∫_0^t t*(2 - 2 s^4 / 3) ds + 2 t^2 + 2
```

$$\text{Out[10]= } 2 + \frac{2\,t^6}{15}$$

```
In[12]:= x4[t] = -∫_0^t t*(2 + 2 s^6 / 15) ds + 2 t^2 + 2
```

$$\text{Out[12]= } 2 - \frac{2\,t^8}{105}$$

Можно заметить, что

$$x_n(t) = \frac{(-1)^n * 2t^{2n}}{(2n-1)!!} + 2$$

Тогда точное решение уравнения

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = 2$$

Вывод

Метод сжимающих отображений – достаточно универсальный решения различных видов уравнений и систем уравнений. Метод прост в своей реализации на компьютере. Это, безусловно, является преимуществами данного метода.

Но, нельзя не отметить, что для применения метода сжимающих отображений необходимо заранее проверить применим ли метод в конкретной ситуации. Исследование сходимости метода сжимающих отображений может оказаться сложным, что является недостатком.