ИМИТАЦИОННОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы к КР

Задание 1

Моделирование цепи Маркова

Нам даны матрицы Π и P

$$\Pi = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} q & 1-q \\ l & 1-l \end{bmatrix}$$

Матрица Π отвечатет за начальное состояние ξ_0.

$$\xi_0 = \begin{cases} 0, & \alpha_0 \in [0; p) \\ 1, & \alpha_0 \in [p; 1] \end{cases}$$

А матрица P показывает вероятности перехода, то есть p_{ij} - вероятность перехода из состояния i в состояние j.

Пример:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = 0.565, \alpha_1 = 0.818, \alpha_2 = 0.279, \alpha_3 = 0.829$$

Начальное состояние $\xi_0 = 0$ так как $\alpha_0 = 0.565 \in [0; p = 0.6)$.
$\xi_1 = 1$ так как $\alpha_1 = 0.818 \in [0.1; 1.0)$
$\xi_2 = 0$ так как $\alpha_2 = 0.279 \in [0.0; 0.8)$
$\xi_3 = 1$ так как $\alpha_3 = 0.829 \in [0.1; 1.0)$
Итоговая цепь Маркова $0 \to 1 \to 0 \to 1$

Моделирование ДСВ

Если какое-то из стандартных(Бернулли, Биномиальное и т.д.), то см. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям(этот текст - ссылка на книгу).
Если задано

$$P(i = 0) = 0.3, \quad P(i = 1) = 0.5, \quad P(i = 2) = 0.2$$

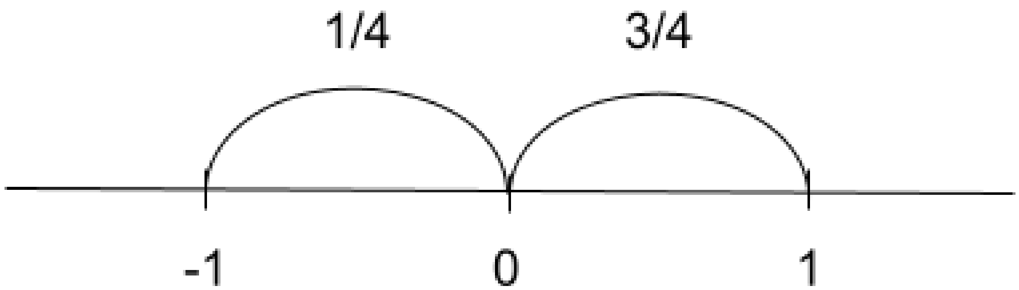
Тогда ξ из БСВ α получаем следующим образом

$$\xi_i = \begin{cases} 0, & \alpha_i \in [0.0; 0.3) \\ 1, & \alpha_i \in [0.3; 0.8) \\ 2, & \alpha_i \in [0.8; 1.0) \end{cases}$$

Задание 2

Моделирование случайного блуждания на прямой

Пример:



$$\xi_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0.107, \quad \alpha_2 = 0.825, \quad \alpha_3 = 0.435$$

$$\xi_{t+1} = \xi_t + h_{t+1}$$

$$h_t = \begin{cases} -1, & \alpha \in [0.0, 0.25) \\ 1, & \alpha \in [0.25, 1.0) \end{cases}$$

$$h_1 = -1 \to \xi_1 = -1$$

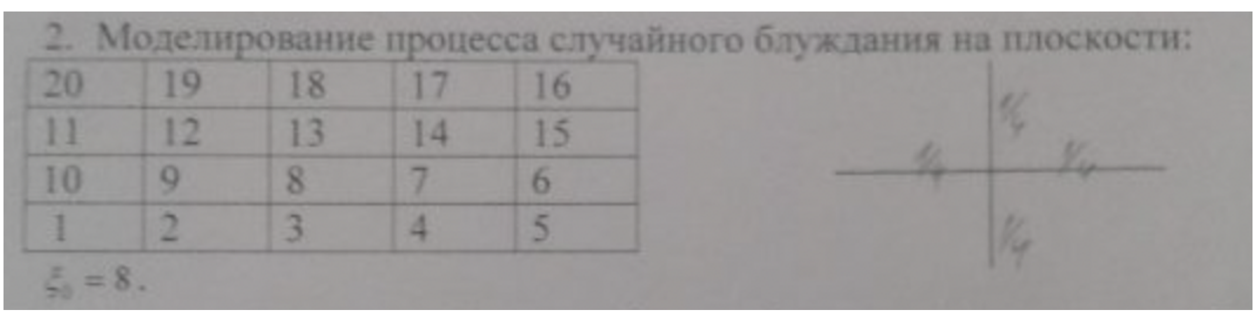
$$h_2 = 1 \to \xi_2 = 0$$

$$h_3 = 1 \to \xi_3 = 1$$

Ответ: $(0; -1; 0; 1)$.

Моделирование случайного блуждания на плоскости

Пример:


2. Моделирование процесса случайного блуждания на плоскости:

20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

$\xi_0 = 8$.

$$\alpha_1 = 0.565, \alpha_2 = 0.818, \alpha_3 = 0.279, \alpha_4 = 0.829$$

$$h_t = \begin{cases} \text{влево}, & \alpha \in [0.0, 0.25) \\ \text{вверх}, & \alpha \in [0.25, 0.5) \\ \text{вправо}, & \alpha \in [0.5, 0.75) \\ \text{вниз}, & \alpha \in [0.75, 1.0) \end{cases}$$

$$h_1 = \text{вправо} \to \xi_1 = 7$$
$$h_2 = \text{вниз} \to \xi_2 = 4$$
$$h_3 = \text{вверх} \to \xi_3 = 7$$
$$h_4 = \text{вниз} \to \xi_4 = 4$$

Ответ: $(8; 7; 4; 7; 4)$.

Задание 3

Моделирование НСВ

Пускай необходимо реализовать НСВ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ или функцией распределения $F_\xi(x)$.
Тогда находится обратная функция $F_\xi^{-1}(x)$, а реализацией НСВ является $\xi = F_\xi^{-1}(\alpha)$, где α - БСВ.

Пример:
Необходимо смоделировать НСВ с плотностью $p(x) = \frac{e^x}{e-1}; \quad 0 \le x \le 1; \quad \alpha_1 = 0.21, \alpha_2 = 0.881, \alpha_3 = 0.431$
Известно, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$$

В нашем случае

$$F_\xi(x) = \int_0^x \frac{e^x}{e-1}, \quad 0 \le x \le 1$$

То есть

$$F_\xi(x) = \frac{e^x - 1}{e-1}$$

$$F_\xi^{-1}(x) = ln((e-1)x + 1)$$

$$\xi_1 = 0.308102, \quad \xi_2 = 0.921798, \quad \xi_3 = 0.554218$$

Задание 4

Моделирование случайного вектора распределенного равномерно по области D

Для моделирования случайного вектора (ξ, η) в области D.

$$g(x) - \text{граница области}$$

Тогда

$$p_\xi(x) = \frac{g(x)}{mesD}$$

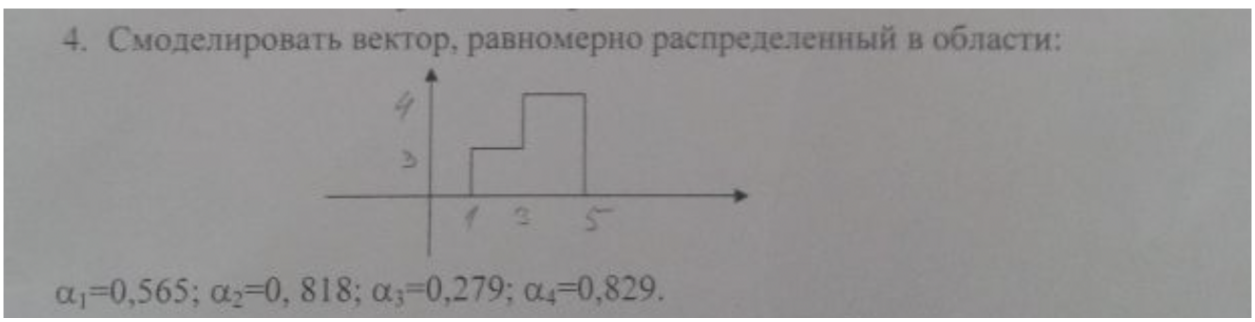
где $mesD$ - мера Лебега(в задачах будет просто площадь).

$$p_{\eta|\xi}(x|y) = \frac{I_{[0;g(x)]}(y)}{g(x)}$$

I_A - индикаторная функция

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

А сами величины ξ, η моделируются как в задании 3.
<u>Пример 1:</u>



$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,5] \\ 3, & x \in [1,3] \\ 4, & x \in [3,5] \end{cases}$$

Тогда

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,5] \\ \frac{3}{14}, & x \in [1,3] \\ \frac{4}{14}, & x \in [3,5] \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1] \\ \frac{3}{14}x - \frac{3}{14}, & x \in (1,3], \\ \frac{4}{14}x - \frac{6}{14}, & x \in (3,5], \\ 1, & x \in (5, +\infty) \end{cases}$$

$$F_\xi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} \frac{14}{3}\alpha + 1, & \alpha \in [0, \frac{6}{14}), \\ \frac{7}{2}\alpha + \frac{3}{2}, & \alpha \in [\frac{6}{14}, 1), \end{cases}$$

А

$$\eta \sim R[0; g(x)] \Rightarrow \eta = g(x) * \beta$$

Где $x = \xi_i$, а β - БСВ.

$$(\xi_1, \eta_1) = (3.478, 3.272)$$

$$(\xi_2, \eta_2) = (2.302, 2.487)$$

Пример 2:
Необходимо смоделировать равномерно распределенный вектор (ξ, η) в круге с центром в (x_0, y_0) и радиусом R.
Пусть даны БСВ α_1, α_2, тогда необходимый вектор моделируется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} * R * cos(2\pi\alpha_2) + x_0 \\ \sqrt{\alpha_1} * R * sin(2\pi\alpha_2) + y_0 \end{bmatrix}$$

Задание 5

Метод Монте-Карло вычисления интегралов

Конечный отрезок

Используется равномерное распределение.
Пример:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{sin(x)}{x} dx$$

Чтобы перевести отрезок $\alpha \in [0; 1]$ в $\xi \in [a; b]$ нужно $\xi = \alpha(b-a) + a$

$-\infty$

α_1=0,533; α_2=0,664; α_3=0,240; α_4=0,965; α_5=0,286; α_6=0,816; α_7=0,027; α_8=0,577; α_9=0,693; α_{10}=0,243; α_{11}=0,574; α_{12}=0,124.

В нашем случае:

$$\xi_1 = 0.066, \xi_2 = 0.328, \xi_3 = -0.52, \xi_4 = 0.93, \xi_5 = -0.428, \xi_6 = 0.632, \xi_7 = -0.946$$

$$\xi_8 = 0.154, \xi_9 = 0.386, \xi_{10} = -0.514, \xi_{11} = 0.148, \xi_{12} = -0.752$$

$$I \approx 2 * \frac{1}{12} \sum_i \frac{sin(\xi_i)}{(\xi_i)} = 1.898$$

Отрезок $0; +\infty$

Используется экспоненциальное распределение с $\lambda = 1$.
Пример:

$$I = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

$$\xi_1 = 0.629, \xi_2 = 0.409, \xi_3 = 1.427, \xi_4 = 0.0356, \xi_5 = 1.2517, \xi_6 = 0.2033, \xi_7 = 3.6119$$

$$\xi_8 = 0.5499, \xi_9 = 0.3667, \xi_{10} = 1.41469, \xi_{11} = 0.5551, \xi_{12} = 2.08747$$

$$I \approx \frac{1}{12} \sum_i \frac{\xi_i e^{-\xi_i^2}}{p_{exp}(\xi_i)} = 1.04$$

где $p_{exp}(x)$ - плотность экспоненциального распределения с $\lambda = 1$, $p_{exp}(x) = e^{-x}$
Причечание 1:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Примечание 2:
Для генерации экспоненциально распределенной СВ ξ из БСВ α используют формулу

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} ln(\alpha)$$

Отрезок $-\infty; +\infty$

Используется нормальное распределение.
Пример:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sqrt{1 + \sqrt{|x|}} dx$$

$$\xi_1 = -0.577, \xi_2 = -0.9619, \xi_3 = 1.64876, \xi_4 = -0.36854, \xi_5 = 0.6375, \xi_6 = -1.4481, \xi_7 = -2.37925$$

$$\xi_8 = -1.25, \xi_9 = 0.03765, \xi_{10} = 0.85558907, \xi_{11} = 0.74973, \xi_{12} = 0.74037$$

$$I \approx \frac{1}{12} \sum_i e^{-\xi_i^2} \sqrt{1 + \sqrt{|\xi_i|}} \frac{1}{p_{Norm}(\xi_i)} = 2.105$$

где $p_{exp}(x)$ - плотность нормального распределения, $p_{Norm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2})$
Примечание:
Для генерации нормально распределенных СВ ξ_1, ξ_2 из БСВ α_1, α_2 используют формулу

$$\xi_1 = \sqrt{-2ln(\alpha_1)} cos(2\pi\alpha_2)$$

$$\xi_2 = \sqrt{-2ln(\alpha_1)} sin(2\pi\alpha_2)$$