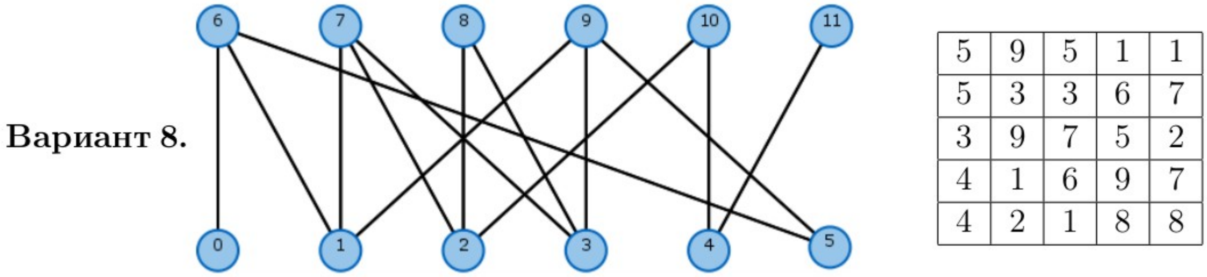
Лабораторная работа №6

Вариант 8

Черепенников Роман 3 курс, 8 группа

Задание:
1. Найдите максимальное паросочетание и минимальное вершинное покрытие в двудольном графе
2. Решите задачу о назначения

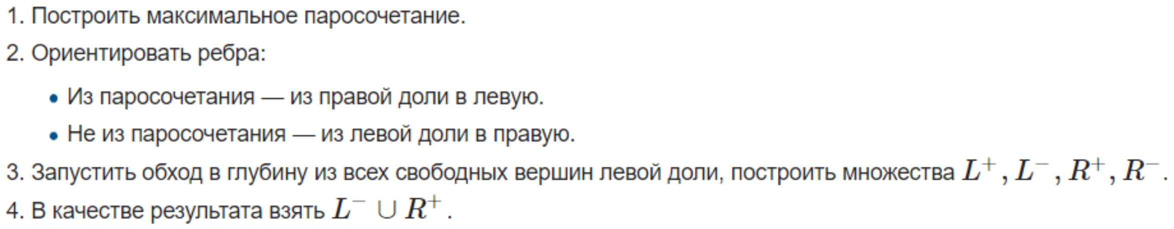


Вариант 8.

5	9	5	1	1
5	3	3	6	7
3	9	7	5	2
4	1	6	9	7
4	2	1	8	8

Описание решения:

Для решения задачи о максимальном паросочетании используется алгоритм Форда-Фалкерсона. Знание максимального паросочетания позволяет легко получить минимальное вершинное покрытие следующим образом:



1. Построить максимальное паросочетание.
2. Ориентировать ребра:
   - Из паросочетания — из правой доли в левую.
   - Не из паросочетания — из левой доли в правую.
3. Запустить обход в глубину из всех свободных вершин левой доли, построить множества L^+, L^-, R^+, R^-.
4. В качестве результата взять $L^- \cup R^+$.

А для задачи о назначениях используется венгерский алгоритм.

Листинг программы:

```
def find_max_matching(graph):
    colors = split_graph(graph)
    net = build_net(graph, colors)
    matching = []
    while True:
        path = find_dfs_path(net, 's', 't')
        if path is None:
            break
        net['s'].remove(path[1])
        net[path[-2]].remove('t')
        for i in range(1, len(path) - 2):
            net[path[i]].remove(path[i + 1])
            net[path[i + 1]].append(path[i])
            edge = tuple(sorted([path[i], path[i + 1]]))
            if edge in matching:
                matching.remove(edge)
            else:
                matching.append(edge)

    return matching
```

```
def dfs(graph, start_node, visited=None, from_=None):
    if visited is None:
        visited = set()

    if from_ is None:
        from_ = {key: None for key in graph.keys()}
        from_[start_node] = start_node

    visited.add(start_node)
    for neighbor in graph[start_node]:
        if neighbor not in visited:
            from_[neighbor] = start_node
            dfs(graph, neighbor, visited, from_)

    return visited, from_


def find_dfs_path(graph, start_node, end_node):
    _, from_ = dfs(graph, start_node)
    node = end_node
    path = []
    while True:
        if from_[node] is None:
            return None
        if from_[node] != node:
            path.append(node)
            node = from_[node]
        else:
            break

    path.append(start_node)
    return list(reversed(path))


def split_graph(graph):
    if len(graph) == 0:
        raise ValueError('graph should be non empty dict')
    colors = {key: None for key in graph.keys()}

    def set_color(node):
        cur_color = colors[node]
        neighbor_color = 'r' if cur_color == 'l' else 'l'
        for g in graph[node]:
            if colors[g] is not None:
                if colors[g] != neighbor_color:
                    raise ValueError('Graph is not bipartite')
            else:
                colors[g] = neighbor_color
                set_color(g)

    for node in graph.keys():
        if colors[node] is None:
            colors[node] = 'l'
            set_color(node)

    res = {'l': [], 'r': []}
    for key, value in colors.items():
        if value == 'l':
            res['l'].append(key)
        else:  # value == 'r' or value is None
            res['r'].append(key)
    return res


def build_net(graph, colors):

    net = {key: [] for key in graph.keys()}

    net['s'] = colors['l']
    net['t'] = []
    for u in colors['r']:
        net[u].append('t')

    for u in colors['l']:
        for v in graph[u]:
            net[u].append(v)

    return net


def find_min_coverage(graph, max_matching):
    colors = split_graph(graph)
    help_graph = build_help_graph(graph, colors, max_matching)
    L = set(colors['l'])
    R = set(colors['r'])
    match_set = set()
    for edge in max_matching:
        match_set.add(edge[0])
        match_set.add(edge[1])
    visited = set()
    for v in (L - match_set):
        vis, _ = dfs(help_graph, v, visited=visited)
        visited = vis | visited

    return list((L - visited) | (R & visited))


def build_help_graph(graph, colors, max_matching):
    new_graph = {key: [] for key in graph.keys()}
    edges = get_all_edges_of_bipartite_graph(graph, colors)
    for edge in edges:
        start = edge[0]
        end = edge[1]
        if edge in max_matching:
            if start in colors['l']:
                new_graph[end].append(start)
            else:
                new_graph[start].append(end)
        else:
            if start in colors['l']:
                new_graph[start].append(end)
            else:
                new_graph[end].append(start)
    return new_graph


def get_all_edges_of_bipartite_graph(graph, colors):
    edges = []
    for u in colors['l']:
        for v in graph[u]:
            edges.append(tuple(sorted([u, v])))
    return edges


graph = {
    0: [6],
    1: [6, 7, 9],
    2: [7, 8, 10],
    3: [7, 8, 9],
    4: [10, 11],
    5: [6, 9],
    6: [0, 1, 5],
    7: [1, 2, 3],
    8: [2, 3],
    9: [1, 3, 5],
    10: [2, 4],
    11: [4, ],

}

max_matching = find_max_matching(graph)
```

```
min_coverage = find_min_coverage(graph, max_matching)
print(f'Максимальное паросочетание: {max_matching}')
print(f'Минимальное покрытие: {min_coverage}')


import numpy as np

def hungurian_assignment(a: np.ndarray):
    n, m = a.shape
    a = np.vstack([np.zeros((1, m), dtype=int), a])
    a = np.hstack([np.zeros((n+1, 1), dtype=int), a])
    u = np.zeros(n + 1, dtype=int)
    v = np.zeros(m + 1, dtype=int)
    p = np.zeros(m + 1, dtype=int)
    way = np.zeros(m + 1, dtype=int)
    for i in range(1, n + 1):
        p[0] = i
        j0 = 0
        minv = np.zeros(m + 1, dtype=int) + np.inf
        used = np.zeros(m + 1, dtype=bool)

        while True:
            used[j0] = True
            i0 = p[j0]
            delta = np.inf
            j1 = None

            for j in range(1, m+1):
                if not used[j]:
                    cur = a[i0][j] - u[i0]-v[j]
                    if cur < minv[j]:
                        minv[j] = cur
                        way[j] = j0
                    if minv[j] < delta:
                        delta = minv[j]
                        j1 = j

            for j in range(m + 1):
                if used[j]:
                    u[p[j]] += delta
                    v[j] -= delta
                else:
                    minv[j] -= delta
            j0 = j1
            if p[j0] == 0:
                break

        while True:
            j1 = way[j0]
            p[j0] = p[j1]
            j0 = j1
            if not j0:
                break

    cost = -v[0]
    ans = np.zeros(n + 1)
    for j in range(1, m+1):
        ans[p[j]] = j

    return cost, ans[1: ]


a = np.array([
    [5, 9, 5, 1, 1],
    [5, 3, 3, 6, 7],
    [3, 9, 7, 5, 2],
    [4, 1, 6, 9, 7],
    [4, 2, 1, 8, 8],
])
cost, ans = hungurian_assignment(a)
print(f'Стоимость:{cost}')
print(f'Назначения: {ans}')
```

Вывод программы:

```
Максимальное паросочетание: [(0, 6), (5, 9), (1, 7), (3, 8), (2, 10), (4, 11)]
Минимальное покрытие: [0, 1, 2, 3, 4, 5]

Стоимость: 10
Назначения: [4. 1. 5. 2. 3.]
```

Здесь в назначениях указан номер столбца (для каждой строки), который мы взяли:

```
 5 9 5 1 1
 5 3 3 6 7
 3 9 7 5 2
 4 1 6 9 7
 4 2 1 8 8
```