

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

Лабораторная работа №1

**Методы численного интегрирования**

Вариант 13

**Выполнил:**

Черепенников Р.М.

3 курс 8 группа

**Преподаватель:**

Будник А.М.

## Содержание

Постановка задачи.....	3
Теория .....	4
Листинг программы .....	7
Вывод программы .....	9
Анализ полученных результатов.....	10

## Постановка задачи

Для вычисления интеграла

$$\int_0^2 \frac{e^{-x^3} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x+1}$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  необходимо:

1. Применить правило Рунге, используя составную квадратурную формулу левых прямоугольников. Определить величину шага  $h$  разбиения исходного отрезка интегрирования, достаточного для достижения точности  $\varepsilon$ .
2. Пользуясь выражением для погрешности интегрирования, определить шаг  $h$  в двух нижеуказанных квадратурных формулах, которые обеспечат требуемую точность результата:
  - а. Составная квадратурная формула трапеций
  - б. Составная квадратурная формула средних прямоугольников
3. Применить квадратурную формулу НАСТ Гаусса при  $n = 5$ . Оценить погрешность интегрирования через формулу остаточного члена  $R_n(f)$ .
4. Провести сравнительный анализ полученных в п.п.1-3 результатов.

## Теория

В качестве точного значения для проверки полученных результатов будем использовать значение, полученное в системе Wolfram Alpha: 0.131787

### Правило Рунге

Обозначим точное значение интеграла через  $I = \int_a^b p(x)f(x)dx$ , а его приближенное значение, полученное по некоторой квадратурной формуле порядка точности  $p$  с шагом  $h_k$  через  $I_k = \sum_{i=0}^{n_k} A_i f(a + h_k i)$ . Тогда имеет место соотношение  $I = I_k + \alpha h_k^p$ .

Вычислим интеграл по указанной квадратурной формуле с шагом  $h_1$  и  $h_2$  получим

$$\begin{cases} I = I_1 + \alpha h_1^p \\ I = I_2 + \alpha h_2^p \end{cases}$$
$$I_2 - I_1 = \alpha(h_1^p - h_2^p)$$
$$\alpha = \frac{I_2 - I_1}{(h_1^p - h_2^p)} = \frac{I_2 - I_1}{h_1^p(1 - (\frac{h_2}{h_1})^p)}$$

Для достижения точности  $\varepsilon$  необходимо чтобы выполнялось соотношение:

$$\left| \frac{I_2 - I_1}{h_1^p(1 - (\frac{h_2}{h_1})^p)} h_1^p \right| = \left| \frac{I_2 - I_1}{(1 - (\frac{h_2}{h_1})^p)} \right| \leq \varepsilon$$

**Составная квадратурная формула левых прямоугольников с использованием правила Рунге**

$$I(f) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f_k, \text{ где } h = \frac{b-a}{N}, f_k = f(a + kh)$$

Изначально возьмем шаг  $h_1 = 1.0$ , и соотношение  $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$ , затем на каждой итерации будем вычислять значения  $I_1$  и  $I_2$  уменьшая шаг в соответствии с

заданным соотношением, пока не выполнится соотношение  $\left| \frac{I_2 - I_1}{(1 - (\frac{h_2}{h_1})^p)} \right| \leq \varepsilon$ ,

для формулы левых прямоугольников  $p = 1$

### Составная квадратурная формула трапеций

$$I(f) \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + h \sum_{k=1}^{N-1} f_k$$

Её погрешность оценивается следующим образом:

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Отсюда шаг, обеспечивающий вычисление интеграла с точностью  $\varepsilon$ , вычисляется следующим образом

$$h \leq \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}}$$

Для нашей задачи:

Input interpretation

extrema	function	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-x^3} \sin(\frac{x}{2})}{1+x}$
	domain	$0 \leq x \leq 2$

Global maximum
More digits
Exact form
☒ Step-by-step solution

$$\max \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-x^3} \sin(\frac{x}{2})}{1+x} \mid 0 \leq x \leq 2 \right\} \approx 0.444602 \text{ at } x \approx 1.30472$$

Global minimum
Enlarge
Data
Customize
Plain Text

$$\min \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-x^3} \sin(\frac{x}{2})}{1+x} \mid 0 \leq x \leq 2 \right\} = -1 \text{ at } x = 0$$

Local maximum
More digits
Exact form
☒ Step-by-step solution

$$\max \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-x^3} \sin(\frac{x}{2})}{1+x} \mid 0 \leq x \leq 2 \right\} \approx -0.771046 \text{ at } x \approx 0.189367$$

$$h \leq \sqrt{\frac{12 * 10^{-5}}{(2-0) * 1}} \approx 0.00775$$

### Составная квадратурная формула средних прямоугольников

$$I(f) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(a + kh + \frac{h}{2})$$

Её погрешность оценивается следующим образом:

$$|R(f)| \leq \left| \frac{(b-a)^3}{24N^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \right|$$

Отсюда шаг, обеспечивающий вычисление интеграла с точностью  $\varepsilon$ , вычисляется следующим образом

$$h \leq \sqrt{\frac{24\varepsilon}{|(b-a) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)||}}$$

Для нашей задачи:

$$h \leq \sqrt{\frac{24 * 10^{-5}}{(2-0) * 7.5685}} \approx 0.01095$$

### ***Квадратурная формула НАСТ Гаусса***

Пусть необходимо вычислить  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ .

Для построения квадратурной формулы НАСТ Гаусса, в качестве узлов  $x_k$  необходимо выбрать корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

А коэффициенты могут быть по формуле

$$A_k = \frac{2(1 - x_k^2)}{n^2 P_{n-1}^2(x_k)}$$

Сведем нашу задачу к задаче вычисления  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ :

$$\int_0^2 \frac{e^{-x^2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x+1} = [t = x - 1; dt = dx] = \int_{-1}^1 \frac{e^{-(t+1)^2} \sin\left(\frac{t+1}{2}\right)}{t+2}$$

## Листинг программы

```
import numpy as np
import scipy.special

def left_triangles(f, a, b, h):
    res = 0.0
    x = a
    while x < b:
        res += f(x)
        x += h
    return h * res

def trapezoid(f, a, b, h):
    res = 0
    left = a
    right = a + h
    while right <= b:
        res += h / 2 * (f(right) + f(left))
        left = right
        right += h
    return res

def mid_rectangles(f, a, b, h):
    res = 0
    x = a
    while x < b:
        res += f(x + h / 2)
        x += h
    return h * res

def runge(f, quad_formula, a, b, p, h=1.0, q=0.5, eps=10 ** (-5)):
    h1 = h
    h2 = h * q
    I_1 = quad_formula(f, a, b, h1)
    I_2 = quad_formula(f, a, b, h2)
    while abs((I_2 - I_1) / (1 - (h2 / h1) ** p)) > eps:
        h1 = h2
        h2 = h2 * q
        I_1 = I_2
        I_2 = quad_formula(f, a, b, h2)
    return I_1, h1

def NAST_Gauss(f, a, b, n):
    X = scipy.special.legendre(n).roots
    res = 0.0
    for x in X:
        res += (2 * (1 - x ** 2)) / (n ** 2 *
np.polyval(scipy.special.legendre(n - 1), x) ** 2) * f(
        (a + b) / 2 + (b - a) / 2 * x)
    return (b - a) / 2 * res

def f(x):
```

```

    return np.exp(-x ** 3) * np.sin(x / 2) / (1 + x)

exact_result = 0.131787

print('Формула левых прямоугольников с использованием правила Рунге:')
I, h = runge(f, left_triangles, 0, 2, 1, h=1.0, q=1 / 2, eps=10 ** (-5))
print('Значение интеграла:', I)
print('Шаг:', h)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
print()

print('Формула трапеций')
I = trapezoid(f, 0, 2, 0.00775)
print('Значение интеграла:', I)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
print()

print('Формула средних прямоугольников:')
I = mid_rectangles(f, 0, 2, 0.01095)
print('Значение интеграла:', I)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))
print()

print('Формула НАСТ Гаусса')
I = NAST_Gauss(f, 0, 2, 5)
print('Значение интеграла:', I)
print('Погрешность:', abs(I - exact_result))

```



## **Вывод программы**

Формула левых прямоугольников с использованием правила Рунге:

Значение интеграла: 0.13178365397609526

Шаг: 0.0078125

Погрешность: 3.3460239047267137e-06

Формула трапеций

Значение интеграла: 0.13178401492961356

Погрешность: 2.985070386429811e-06

Формула средних прямоугольников:

Значение интеграла: 0.13178942772680388

Погрешность: 2.427726803894137e-06

Формула НАСТ Гаусса

Значение интеграла: 0.1317098172313553

Погрешность: 7.718276864468465e-05

## Анализ полученных результатов

Сравнивая результаты со значением, полученным в системе WolframAlpha, что все методы левых прямоугольников, средних прямоугольников и трапеций достигли указанной точности и даже превысили ее. В случаях использования формул трапеций и средних прямоугольников превышение указанной точности связано с тем, что мы оценивали погрешность сверху, то есть  $|R(f)| \leq \left| \frac{(b-a)^3}{const * N^2} * \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \right|$ , в действительности же

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{const * N^2} * f''(\xi), \text{ где } \xi \text{ некоторая точка из отрезка } [a, b].$$

В случае использования правила Рунге и метода левых прямоугольников превышение точности может быть вызвано, тем что на каждой итерации

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$ , но в действительности на последней итерации для достижения поставленной точности могло быть достаточно изменения шага меньше чем в 2 раза.

При использовании формулы НАСТ Гаусса количество отрезков разбиения значительно меньше при почти таком же порядке точности, чем при использовании других методов, рассмотренных в работе. Сложность метода заключается в вычислении самих узлов и коэффициентов, для вычисления которых необходимо строить многочлены Лежандра и искать их корни. Но стоит отметить, что сами узлы не зависят от отрезка интегрирования и функции, а лишь от АСТ формулы, которую мы хотим построить. Это может позволить нам использовать уже готовые таблицы с коэффициентами и узлами.