ECOLE SUPERIEURE DE GENIE INFORMATIQUE
DEVOIR A LA MAISON
EXERCICES DE LOGIQUE FORMELLE

Charles Marchetti

November 5, 2024

Ces exercices de logique formelle sont à rédiger proprement.

1 Introduction

On donne trois définitions :

Definition 1.1 *Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est dite*

- *réflexive : pour tout $x \in E$, $x \mathcal{R} x$,*
- *symértrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \mathcal{R} y$ alors $y \mathcal{R} x$,*
- *transitive : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $x \mathcal{R} z$.*

Definition 1.2 *La relation $\mathcal{R}$ est d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symetrique et transitive.*

Definition 1.3 *Une propriété* **P** *est dite* **héréditaire** *à partir d'un certain rang : si la propriété* **P** *est vraie pour un entier k, alors elle est vraie pour l'entier $k + 1$.*

On notera $\mathbf{P(k)}$ *, la propriété est vrai au rang k.*

Definition 1.4 *Le principe du raisonnement par récurrence est tel que :*

- *la propriété $\mathbf{P(n)}$ est vraie au rang n_0, c'est l'étape de l'initialisation,*
- *héréditaire à partir du rang n alors la propriété $\mathbf{P(n)}$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

2 Les exercices

Exercice N°1

On considère les propositions suivantes :

a- *Anna se mariera,*

b- *le mari de Anna sera très beau,*

c- *le mari de Anna sera très riche,*

d- *Anna sera actrice,*

e- *Anna sera célèbre.*

Donnez la négation de la proposition **P :** *Si Anna se marie, ce sera avec un homme très beau ou très riche, à moins qu'elle ne devienne actrice et célèbre.*

Exercice N°2

On considère la proposition suivante **P :** *En hivers, il fait froid ou il pleut, et quand il pleut, les routes qui ne sont pas inondées sont encombrées.* Donner sa négation.

Exercice N°3

La proposition **P :** *Quand les vaches voleront, les poules auront des dents* est-elle vraie ou fausse?

EXERCICEExercice N°4

Démontrer le syllogisme suivant **P :** *Socrate est un homme, tous les hommes sont mortels, donc Socrate est mortel.*

Exercice N°5

Pourquoi les mathématiciens confondent-ils **Halloween** avec **Noel**?

Exercice N°6

Montrer que la proposition **P :** *Dans le plan, tout triangle rectangle est isocèle* est fausse.

Exercice N°7

Sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{S}$ en posant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire réflexive, symétrique et transitive.
2. Quel est le graphe de $\mathcal{S}$?
3. Déterminer les classes d'équivalence des nombres 0, 1, 2, $\frac{1}{2}$.

Exercice N°8

Soit E l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de E définie par :

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in E.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique ou transitive?

Exercice N°9

Laquelle des assertions est-elle correcte? Sont-elles équivalentes?

P : *Il a mis ses chaussettes et (il a mis) ses chaussures.*

Q : *Il a mis ses chaussures et (il a mis) ses chaussettes.*

Exercice N°10

On considère les deux énoncés suivants :

P : *Les marées se produisent parce que l'attraction universelle s'exerce.*

Q : *Les marées se produisent et l'attraction universelle s'exerce.*

Remplacez dans ces énoncés la phrase *l'attraction universelle s'exerce* par la phrase suivante *la neige est blanche.* Qu'obtient-on?

Exercice N°11

On considère l'expression suivante :

$$(2 + 2 = 5) \Longrightarrow (\sqrt{2} = 2).$$

Cette proposition est-elle vraie?

Exercice N°12

Démontrer la proposition **P** suivante par un raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(\mathbf{n}) : 2^n > n.$$

Exercice N°13

Soit la proposition **P** : $((\neg q) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow p$ et la proposition **Q** : $(p \vee (q \vee (\neg r)))$.
Montrer que l'on a :

$$P \Leftrightarrow Q.$$