

Récupération d'énergie par dispositifs piézoélectriques vibrants

Projet GIM1

Henri BAUDRY et Arthur CHARDON



Objectif du projet :

- Caractériser le comportement d'un matériau piézoélectrique
- Optimiser la récupération de l'énergie vibratoire d'un objet (machine, turbine...) à l'aide des convertisseurs piézoélectriques.

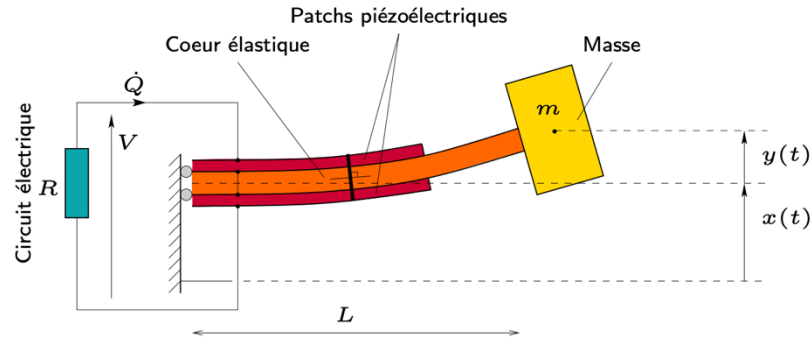
Table des matières

1) Etude théorique	2
a) Modélisation du système.....	2
b) Optimisation des conditions d'utilisation du patch piézoélectrique.....	6
2) Etude expérimentale.....	7
a) Confirmation du modèle mécanique.....	7
b) Confirmation du modèle électrique	10
c) Recherche des conditions optimales.....	11
3) Conclusion.....	15

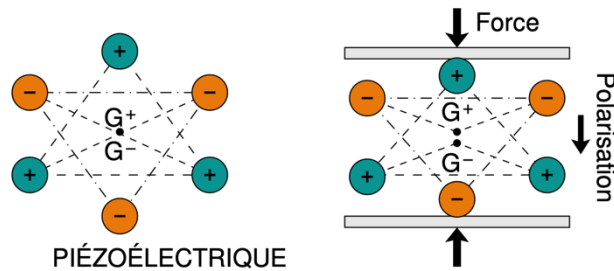
1) Etude théorique

a) Modélisation du système

On s'intéresse dans ce projet à un convertisseur piézoélectrique constitué d'une plaque élastique en flexion, excitée à sa base est munie de patches piézoélectriques connectés à un circuit électrique.



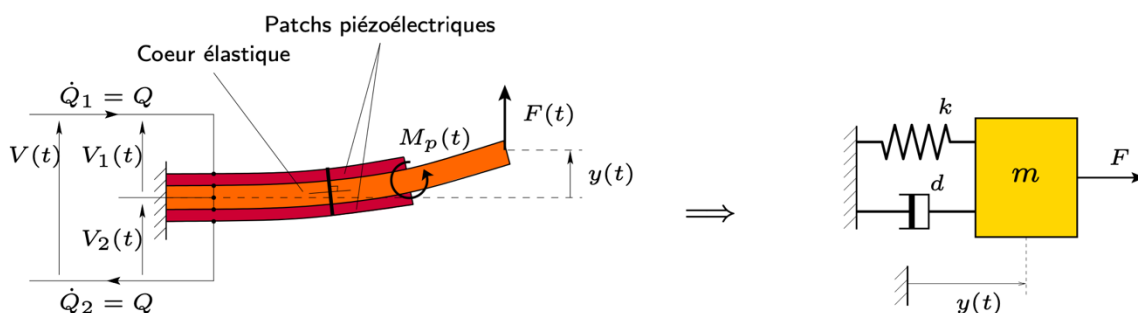
Un matériau est dit piézoélectrique s'il possède une structure cristalline telle que lorsque le cristal se déforme, les barycentres des charges ne sont plus confondus et il apparaît une polarisation (effet direct). Aussi lorsqu'on lui applique un champ électrique extérieur, le déplacement des charges qui en découle crée une déformation : il s'agit de l'effet inverse.



Lorsque l'on impose une déformée initiale au bimorphe, on constate en mesurant la tension aux bornes des patches piézoélectriques que ce-dernier se comporte comme un oscillateur amorti.

MODELE DYNAMIQUE D'UNE POUTRE EN FLEXION+MASSE

On décide alors de modéliser dans un premier temps le système par un système masse/ressort/amortisseur.



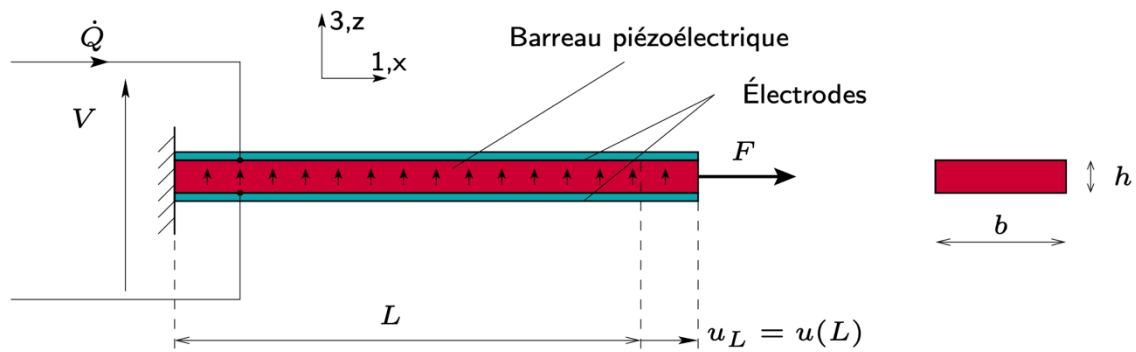
Après une étude théorique de ce système on obtient les résultats suivants :
Le Principe Fondamental de la Dynamique nous fournit l'équation suivante,

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F}{m}$$

Le système se modélise donc par un système du second ordre de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de coefficient d'amortissement $\xi = \frac{d}{2\omega_0 m} = \frac{d}{2\sqrt{km}}$. Ce dernier caractérise la qualité du système, s'il est très amorti ou non.

BARREAU CYLINDRIQUE EN TRACTION COMPRESSION

Pour prendre en compte en compte l'effet piézoélectrique il faut aller plus loin dans la théorie. Pour ce faire, on considère un barreau piézoélectrique soumis à une force F de traction et une différence de potentiel V . Le déplacement terminal u_L et la charge électrique dans l'électrode supérieure est Q . Par influence, l'électrode inférieure est chargée avec $-Q$. On néglige l'effet mécanique des électrodes, considérées infiniment minces.



► Loi de comportement

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{13}^E & s_{23}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \epsilon_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{22}^\sigma & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La poutre étant en traction/compression seuls $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}$ sont non nuls. De plus, les seules composantes non nulles du champ et du déplacement électrique sont $E_3 = E_z$ et $D_3 = D_z$.

D'après la loi de comportement on a alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^E \sigma_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} \sigma_1 + \epsilon_{33}^\sigma E_3 \end{cases}$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma_1 = Y_p \varepsilon_1 - Y_p d_{31} E_3 \\ D_3 = Y_p d_{31} \varepsilon_1 + \epsilon_{33}^\varepsilon E_3 \end{cases}$$

Avec $Y_p = \frac{1}{s_{11}^E}$ et $\epsilon_{33}^\varepsilon = \epsilon_{33}^\sigma - Y_p d_{31}^2$.

A partir des lois de comportement piézoélectrique (liant notamment les constantes de souplesses, les constantes piézoélectriques et les permittivités) et les lois d'Euler-Bernoulli sur les poutres en traction/compression ($\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}$, $F = \iint_{section} \sigma_1 dS$, $E_3 = -\frac{V}{h}$, $Q = -\iint_{electrode} D_3 dS$), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} F = k_u u_L + \Xi V \\ Q = -\Xi u_L + C_0 V \end{cases}$$

Avec $k_u = \frac{bhY_p}{L}$ la raideur du système quand $V=0$ (en CC), $\Xi = bd_{31}Y_p$ coefficient de couplage piézo-électrique et $C_0 = \frac{\epsilon_{33}^\varepsilon bL}{h}$ une capacité équivalente du système électrique (capacité à déplacement nul).

La polarisation des patches piézoélectriques est liée à la grandeur C_0 . En effet cette-dernière dépend de la géométrie du barreau. Ainsi si le barreau se déforme, C_0 va évoluer et va modifier la polarisation du barreau.

Si $V>0$, le barreau s'allonge, si $V<0$ le barreau se comprime (par lecture des équations précédentes).

De plus, on a $V = \frac{Q + \Xi u_L}{C_0} = \frac{Q}{C_0} + \frac{\Xi}{C_0} u_L$

Or $u_C = \frac{Q}{C_0}$ est équivalent à la tension aux bornes d'un condensateur, et $e = \frac{\Xi}{C_0} u_L$ est équivalent à une force électromotrice.

D'un point de vue électrique on peut donc modéliser le patch piézoélectrique de la manière suivante :

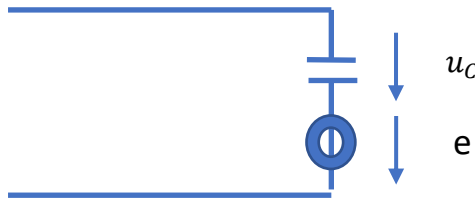


Figure 1 : Schéma électrique équivalent du patch piézoélectrique

En court-circuit (CC), $V=0$, donc $Q = -\Xi u_L$ et $F = k_u u_L$
Ainsi en court-circuit, la raideur du barreau vaut $k_u^{CC} = k_u$.

En circuit-ouvert (CO), $Q=0$, donc $V = \frac{\Xi}{C_0} u_L$ et $F = (k_u + \frac{\Xi^2}{C_0}) u_L$

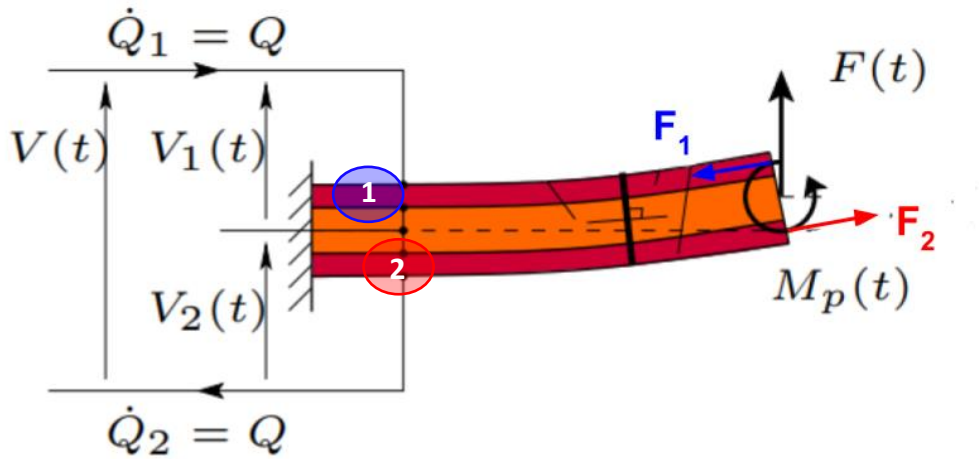
Ainsi en circuit-ouvert, la raideur du barreau vaut $k_u^{CO} = k_u + \frac{\Xi^2}{C_0}$.

En ajoutant une masse à l'extrémité du barreau et en s'intéressant à l'équation différentielle vérifiée par le déplacement $u_L(t)$ de la masse m , on constate que les pulsations propres du système sont différentes en CC et en CO. En effet en CC la pulsation propre du système vaut $\omega_0^{cc} = \sqrt{\frac{k_u^{cc}}{m}}$ et en CO elle vaut $\omega_0^{co} = \sqrt{\frac{k_u^{co}}{m}}$.

On peut ainsi calculer le facteur de couplage électromécanique $\kappa = \sqrt{\frac{\omega_{co}^2 - \omega_{cc}^2}{\omega_{cc}^2}} = \frac{\Xi}{\sqrt{C_o k_u}}$
 κ^2 correspond donc à un écart relatif entre les pulsations en CC et en CO.

Avec les données du fabricant, on trouve pour le piézoélectrique doux PIC 255/PIC252 un facteur de couplage électromécanique $\kappa = 0,38$.

BIMORPHE EN FLEXION



Les 2 patches doivent être polarisés dans le même sens afin que le schéma électrique ci-contre soit vérifié.

On décompose la force \vec{F} en deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 telles que $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Ainsi on peut raisonnablement faire l'approximation que les patches piézoélectrique 1 et 2 sont respectivement en compression et traction. Dès lors, on peut se placer dans la modélisation précédente, et en développant les calculs, on trouve les mêmes lois de comportement :

$$\begin{cases} F = k^v y - \chi V \\ Q = \chi y + C^v V \end{cases}$$

Avec $\chi = 0,0045 \text{ C.m}^{-1}$ et $C^v = 1,87.10^{-8} \text{ F}$.

Le facteur de couplage électromécanique $\kappa = 0,38$ S.U lui n'a pas changé, ce qui est cohérent car il traduit l'efficacité de conversion du matériau piézoélectrique : plus le coefficient s'approche de 1, mieux le matériau convertit l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement plus il est proche de 0 et moins il la convertie en énergie électrique. Or ici ce sont les patches chacun en traction compression qui convertissent l'énergie piézoélectrique donc la conversion d'énergie reste la même.

b) Optimisation des conditions d'utilisation du patch piézoélectrique.

D'après les deux études précédentes, on obtient trois équations résultant du couplage électromécanique du bimorphe piézoélectrique ainsi que de l'étude mécanique (PFD) et électrique (loi de Joule) :

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}) = -ky - d\dot{y} + \frac{\chi}{C}Q$$

$$-\frac{\chi}{C}y + \frac{Q}{C} = V = -R\dot{Q}$$

$$\text{D'où} \quad \ddot{y} + 2\xi\omega_{CC}\dot{y} + \omega_{CO}^2 y = \frac{\chi}{mC}Q + -\ddot{x} \quad (1)$$

$$\tau_e \dot{Q} + Q = \chi y \quad (2)$$

avec $\tau_e = RC$ une constante de temps caractéristique de la variation de charge dans le système et R la résistance ajoutée en série des patchs piézoélectriques.

Ce qui peut se mettre sous la forme matricielle, lorsque l'on passe en régime harmonique :

$$\begin{pmatrix} \hat{y}e^{j\Omega t} \\ \hat{Q}e^{j\Omega t} \end{pmatrix} = \frac{1}{D(\Omega)} \cdot \begin{pmatrix} 1 + j\Omega\tau_e & \frac{\chi}{mC} \\ \chi & (j\Omega)^2 + 2\xi\omega_{CC}j\Omega + \omega_{CO}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}e^{j\Omega t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{avec } \hat{D}(\Omega) = \omega_{CC}^2 - (1 + 2\tau_e\xi\omega_{CC})\Omega^2 + j\Omega(\tau_e\omega_{CO}^2 + 2\xi\omega_{CC} - \tau_e\Omega^2)$$

$$\text{D'où } \hat{y} = -\frac{1+j\tau_e\Omega}{\hat{D}(\Omega)}\hat{F} \quad (4) \quad \text{et} \quad \hat{Q} = -\frac{\chi}{\hat{D}(\Omega)}\hat{F} \quad (5)$$

Ce qui nous permet de détailler l'expression de la puissance moyenne en prenant la norme :

$$P_J = \frac{R|\dot{I}|^2}{2} = \frac{R\Omega^2|\hat{Q}|^2}{2} = \frac{R\Omega^2\chi^2|\hat{F}|^2}{2|\hat{D}(\Omega)|^2} = \frac{\kappa^2\bar{\tau}_e\bar{\Omega}^2}{|\hat{D}(\Omega)|^2} \cdot \frac{m|\hat{F}|^2}{2} \quad \text{car } R\chi^2 = mRC\kappa^2\omega_{CC}^2 = m\bar{\tau}_e\kappa^2$$

On sait que l'accélération de la déformation longitudinale est maximale quand on se place à la pulsation de résonnance. Donc pour maximiser la puissance moyenne reçue, il faut maximiser le

$$\text{terme } \bar{P} = \frac{\kappa^2\bar{\tau}_e\bar{\Omega}^2}{|\hat{D}(\Omega)|^2}.$$

2) Etude expérimentale

a) Confirmation du modèle mécanique

On cherche à vérifier que la plaque piézoélectrique se modélise mécaniquement par le système masse/ressort/amortisseur théorisé précédemment.

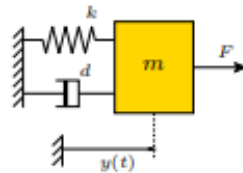


Figure 1 : modélisation de la plaque piézoélectrique

Pour cela, nous allons partir de l'hypothèse qu'une telle modélisation est correcte, et nous allons tenter d'identifier les paramètres du modèle. Si nous y parvenons, alors cela confirmera le modèle théorisé. Sinon, on aboutit à une contradiction qui réfute le modèle.

Les paramètres recherchés sont m , d , et k .

Le matériel à disposition pour réaliser l'expérience était le suivant :

- Bimorphe
- Pot vibrant
- Générateur de signaux
- 2 accélérateurs et un conditionneur
- Un oscilloscope

Ainsi on alimente le système en régime sinusoïdale périodique et on relève les signaux d'entrée et de sortie. En faisant varier la fréquence d'entrée on détermine la fréquence de résonance du système grâce à la méthode de l'ellipse.

Obtention de la masse (m) et du facteur d'amortissement (k)

On procède des relevés expérimentaux de V_p (tension aux bornes du piézoélectrique) et Γ (accélération) ce qui nous permet de tracer $\frac{V_p}{\Gamma}$ et de déduire les valeurs de ω_0 et ξ , grandeurs caractéristiques d'une fonction de transfert du second ordre.

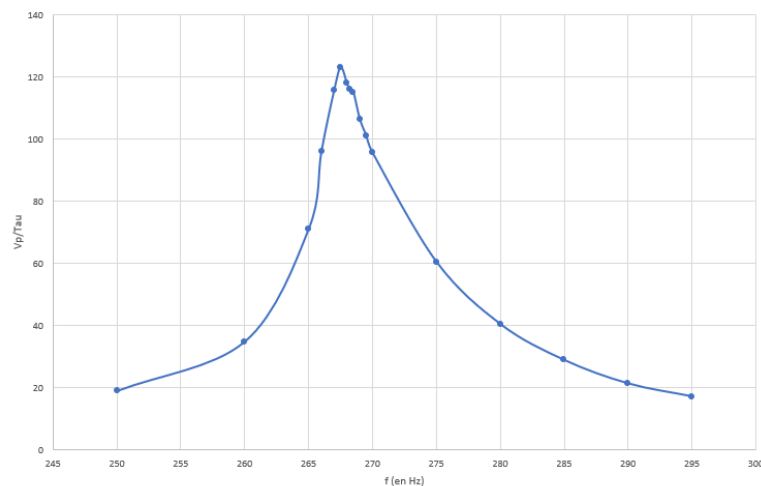


Figure 2 : Evolution de $\frac{V_p}{\Gamma}$ en fonction de la fréquence

On mesure $f_r = 267,5 \text{ Hz}$.

La bande passante est définie à partir des 2 valeurs de fréquences de coupures. Ce sont

Les fréquences qui vérifient : $\frac{V_p}{\Gamma}(f_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{123}{\sqrt{2}} = 87,0$

On trouve alors la bande passante qui vaut $\Delta\omega = 32,7 \text{ rad/s}$

De plus, on a $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, soit une équation en ξ tel que $\frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-\xi^2}\Delta\omega}$.

On en déduit que $\xi = 0,0097$ soit $Q = 51,5$. On en déduit que $f_0 = 268,2 \text{ Hz}$

On procède au même exercice une seconde fois en ajoutant une masse de $m' = 4,5 \text{ g}$ sur la plaque piézo.

D'après l'étude théorique, $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

On obtient un système de 2 équations à 2 inconnues grâce aux 2 relevés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{r,1} = \sqrt{\frac{k}{m}}(1-\xi^2) \\ \omega_{r,2} = \sqrt{\frac{k}{m+m'}}(1-\xi^2) \end{array} \right. \quad i.e. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi f_{r,1} = \sqrt{\frac{k}{m}}(1-\xi^2) \\ 2\pi f_{r,2} = \sqrt{\frac{k}{m+m'}}(1-\xi^2) \end{array} \right.$$

$$i.e. \quad \left\{ \begin{array}{l} (2\pi f_{r,1})^2 \cdot m + (1-\xi^2) \cdot k = 0 \\ (2\pi f_{r,2})^2 \cdot m + (1-\xi^2) \cdot k = (2\pi f_{r,2})^2 m' \end{array} \right.$$

On en déduit les valeurs de $k = 7,1 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et $m = 2,5 \text{ g}$.

On peut maintenant également obtenir la valeur de d grâce à l'étude expérimentale, $d = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}$.

On cherche maintenant à évaluer le gain H de la fonction de transfert qui vaut F/m . Pour cela superposons les courbes expérimentales et théoriques :

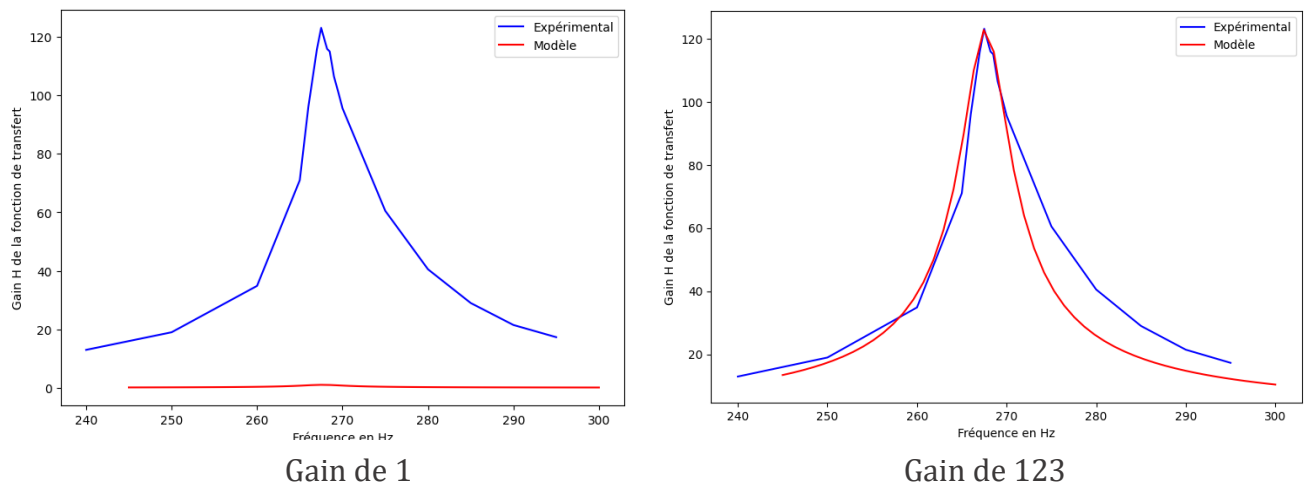


Figure 3 : Gains expérimentaux et théoriques en fonctions de la fréquence d'excitation, pour deux gains statiques de 1 et de 123 (pour le modèle).

Regardons si l'écart relatif entre ces deux courbes est convenable ou non :

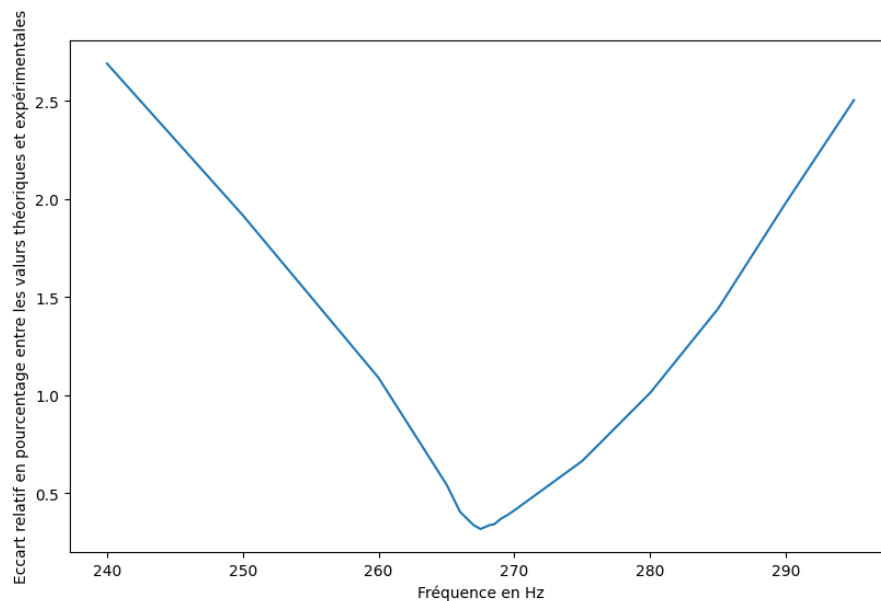


Figure 4 : Ecarts relatifs en % entre les valeurs théoriques et expérimentales en fonction de la fréquence d'utilisation.

Dans la plage de fréquence observée qui, comme on le montrera plus loin, correspond amplement à la plage de fréquence d'utilisation du système, on ne dépasse pas un écart relatif entre les 2 courbes de 2,5% ce qui est très satisfaisant pour ce genre d'approche.

Donc H vaut 123 d'où F vaut 0.31N, avec F la force équivalente appliqué sur la masse m comme représentée sur le schéma.

De plus, comme la courbe de gain établie à l'aide du modèle se superpose à 2,5% maximum, avec la courbe expérimentale, sur la plage de fréquence choisie, alors on peut raisonnablement conclure que la modélisation du système obtenue est valide.

b) Confirmation du modèle électrique

L'étude théorique à prouver l'existence d'un facteur de couplage κ et l'on a montré que

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_{co}^2 - \omega_{cc}^2}{\omega_{cc}^2}}$$

Lors des précédentes mesures, nous nous étions placés en circuit ouvert. Nous allons maintenant utiliser un vibromètre laser afin de mesurer le déplacement du capteur piézoélectrique en court-circuit, et non plus en circuit ouvert.

Nous faisons varier la fréquence de vibration du pot afin de se placer à la fréquence de résonance, à laquelle l'amplitude des vibrations est maximale.

	f (en Hz)	w0 (en rad/s)
Ouvert	267.5	1679.9
Fermé	258	1620.24

On en déduit $\kappa = 0,274 S.U.$. La théorie prévoyait, pour le piézoélectrique doux PIC 255/PIC252, une valeur de 0,39 donc c'est plutôt cohérent.

c) Recherche des conditions optimales

Nous allons désormais faire différents tests, afin d'identifier les conditions optimales de la récupération d'énergie, et de quantifier la puissance récupérée.

Pour ce faire nous utilisons :

- un pot vibrant et son amplificateur pour générer l'excitation mécanique
- un accéléromètre et son conditionneur
- un oscilloscope
- une plaquette de résistance

Comme la fois précédente, nous relevons la tension aux bornes du récupérateur piézoélectrique ainsi que l'accélération du récupérateur piézoélectrique.

Nous cherchons le maximum d'énergie récupérable. Pour ce faire, pour chaque valeur de résistance, on cherche tout d'abord à se placer à la fréquence de résonance électrique. En effet nous avons repéré lors de la première partie expérimentale, que l'énergie émise est maximale à cette fréquence.

Nous calculons la puissance Joule grâce aux valeurs de tension relevées pour chaque résistance,

$$P = \frac{U^2}{2 \cdot R}$$

Pour les grandes valeurs de résistances, la méthode de l'ellipse est applicable pour trouver la résonance électrique, mais très rapidement cette méthode n'est plus pertinente et l'on préfère chercher la résonance directement à l'aide des valeurs des amplitudes crêtes à crêtes.

Remarque : Comme la méthode de l'ellipse est défaillante, on en déduit que la résistance intervient dans la phase de la fonction de transfert $\frac{V_P}{I}$.

En se plaçant à la fréquence de résonance pour chaque valeur de résistance on en déduit la puissance récupérée.

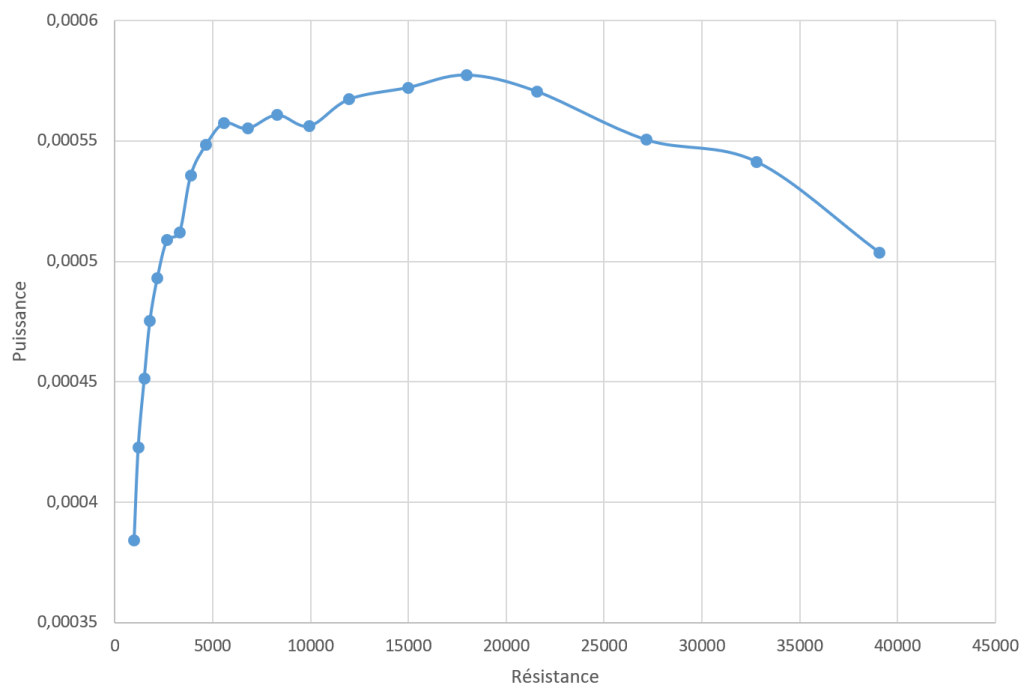


Figure 5 : Graphe donnant l'évolution de la puissance en fonction de la résistance

Comparons ces résultats avec une modélisation issue de la théorie.

Nous avons démontré que nous devons maximiser $\bar{P} = \frac{\kappa^2 \bar{\tau}_e \bar{\Omega}^2}{2|\bar{D}(\Omega)|^2}$

Avec $\bar{D}(\Omega) = 1 - (1 + 2\bar{\tau}_e \xi) \bar{\Omega}^2 + j\bar{\Omega}(\bar{\tau}_e \bar{\omega}_{C0}^2 + 2\xi - \bar{\tau}_e \Omega^2)$ où $\bar{\tau}_e$ est proportionnel à la résistance.

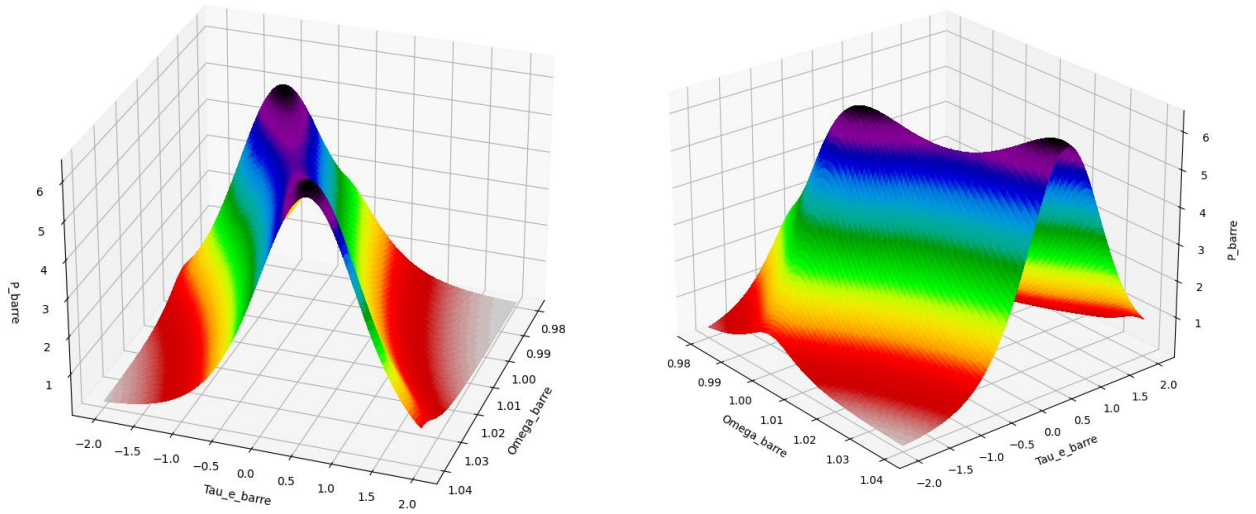
En effet, $\tau_e = RC_0 \omega_{CC}$. Or en ordre de grandeur, $C_0 = \frac{\epsilon_{33} bL}{h_p} = 1500 * 8,85.10^{-12} *$

$$\frac{18,0 * 27,8.10^{-3}}{0,19 * 2} = 1,75.10^{-7}$$

$$\text{Donc } \tau_e = 1640 * 1,75.10^{-7} . R = 2,8.10^{-4}$$

Etant donné que nous connaissons désormais les paramètres de notre système, nous pouvons calculer $\bar{\omega}_{CO} = \frac{\omega_{CO}}{\omega_{CC}} = \sqrt{1 + \kappa^2} = 1,04$ et $\xi = 9,73.10^{-3}$. Et nous modélisons la courbe ci-contre.

Figure 6 : Graphe donnant l'évolution du terme \bar{P} en fonction de $\bar{\Omega}$ et de $\bar{\tau}_e$ (2 vues différentes)



Puis nous nous plaçons à $\Omega = \omega_{\text{résonance}}$ i.e. à $\bar{\Omega} = 1,0026$ et nous passons à la puissance en multipliant les valeurs en ordonnée par $\frac{m|\hat{F}|^2}{2} \sim 2,5 \cdot 10^{-3} * \frac{(10^{-1})^2}{2} = 10^{-4} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-4}$ (car $|\hat{F}|$ a été relevé à une valeur presque constante de $0,02 \text{ m.s}^{-2}$).

D'où nous obtenons,

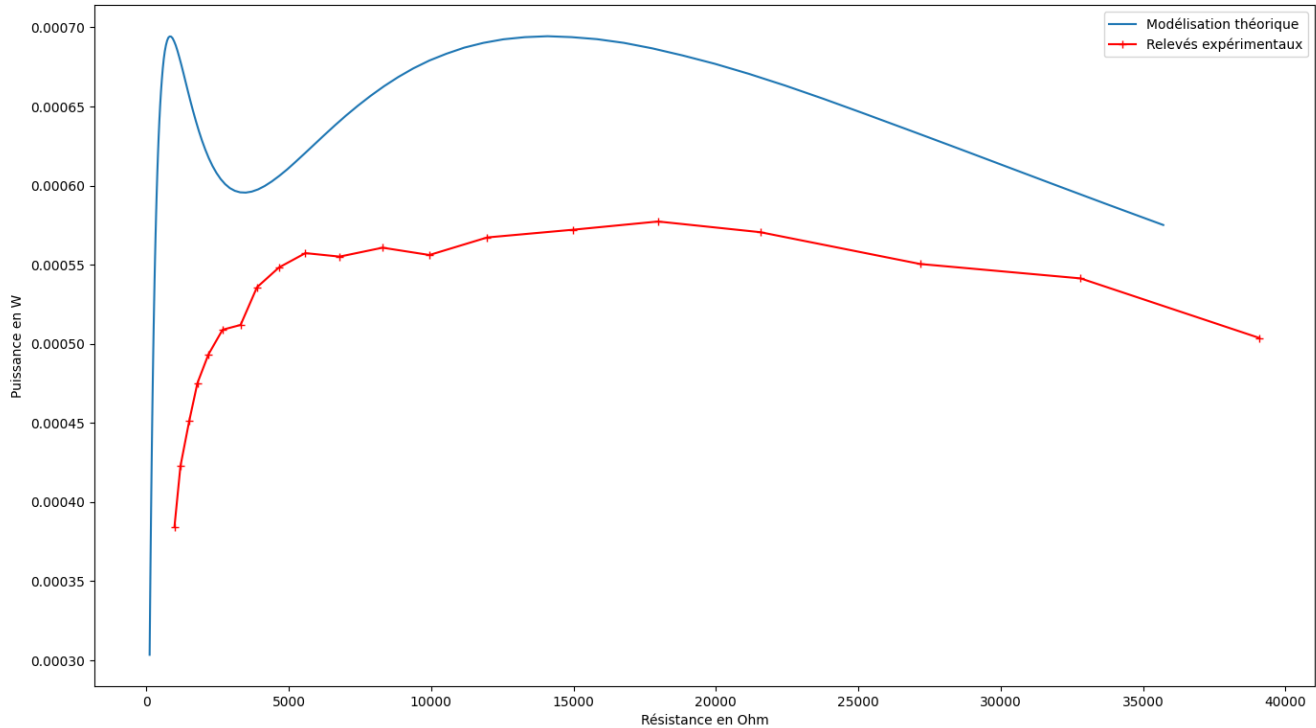


Figure 7 : Puissance récupérer à la fréquence de résonance en fonction de la valeur de la résistance.

Les valeurs obtenues sont plutôt cohérentes puisque l'allure des deux courbes est semblable. On remarque une translation vers le haut de la courbe de puissance.

Expérimentalement on a relevé une puissance maximale récupérable P_{max} de $5,8 \cdot 10^{-4} \text{ W}$ pour une résistance de 17970Ω . La théorie prévoyait une puissance maximale de $6,9 \cdot 10^{-4} \text{ W}$ avec une résistance circuit de $14 \text{ k}\Omega$ environ.

$$\text{Calcul d'un écart relatif : } \varepsilon = \left| \frac{P_{\text{max,exp}} - P_{\text{max,théor}}}{P_{\text{max,exp}}} \right| = 19 \%$$

Il s'agit d'un écart plutôt significatif entre la théorie et l'expérimental. Cependant il ne faut pas oublier que nous parlons ici d'énergie et que celle-ci se dissipe facilement en fonction des conditions expérimentales qui ne sont pas toujours les mêmes. On pourra donc se satisfaire du résultat obtenu.

Afin d'étendre l'usage de cette courbe à tout type d'accélération, on normalise P par l'accélération au carré :

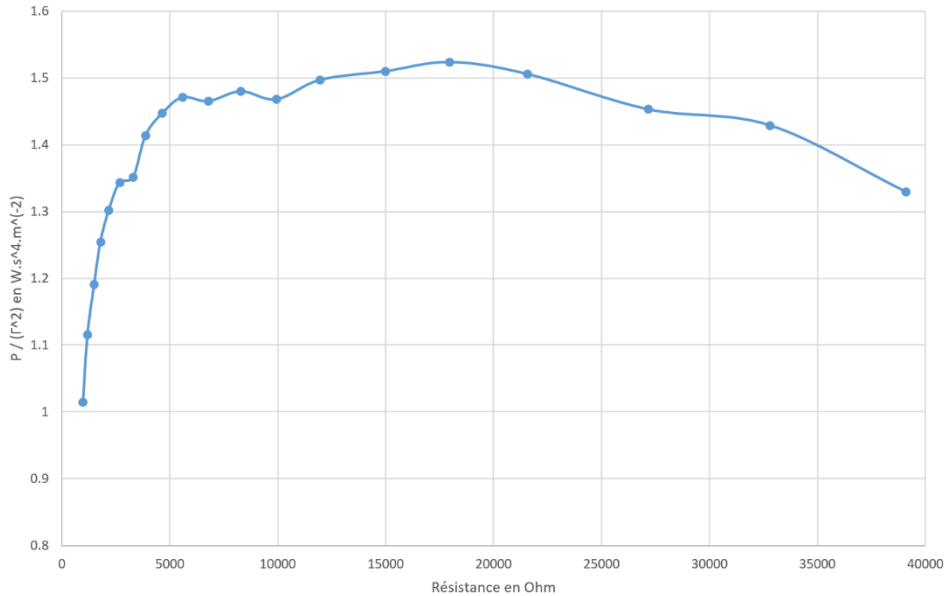


Figure 8 : Prédiction de la puissance grâce à l'accélération

Pour finir, dans l'objectif de proposer à l'usage cette plaquette recouverte de patches piézoélectriques, nous devons donner à l'utilisateur la bande-passante dans laquelle la puissance récupérée reste convenable. Comme nous voulons une tension $V > V_{eff}$ avec $V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$, cela revient à choisir une puissance dans l'intervalle $\left[\frac{P_{max}}{2}, P_{max}\right] = [2,9 ; 5,8] \cdot 10^{-4} W$.

Pour cela, nous nous plaçons avec une résistance de 17970Ω qui permet de récupérer un maximum d'énergie. Nous procédons à un balayage en fréquence, comme nous avons pu le faire précédemment (§ 2.a).

On relève une valeur minimale de $f_{min} = 261,1 Hz$ et une valeur maximale de $f_{max} = 277,2 Hz$, ce qui correspond à un encadrement de la fréquence de résonance, d'où le choix de se placer à cette fréquence précédemment.

Ainsi on préconisera une utilisation du capteur piézoélectrique sur la plage de fréquence de $[261,1 ; 277,2] Hz$ ce qui introduit une bande passante de $16,1 Hz$.

Enfin, il est à noter que le facteur κ dépend du matériau piézoélectrique. Il est donc possible de jouer sur ce facteur pour optimiser la puissance récupérable par le système. On trace alors pour $\kappa=0,1$ et $\kappa=0,3$ la puissance fonction de la pulsation, pour différente valeur de τ_e (différentes couleurs). On constate alors que l'on augmente d'un facteur 10 la puissance récupérée, en passant d'un matériau de coefficient de couplage $\kappa = 0,1$ à un matériau de coefficient $\kappa = 0,3$. Il est donc intéressant de prendre en considération cette grandeur avant de choisir le matériau.

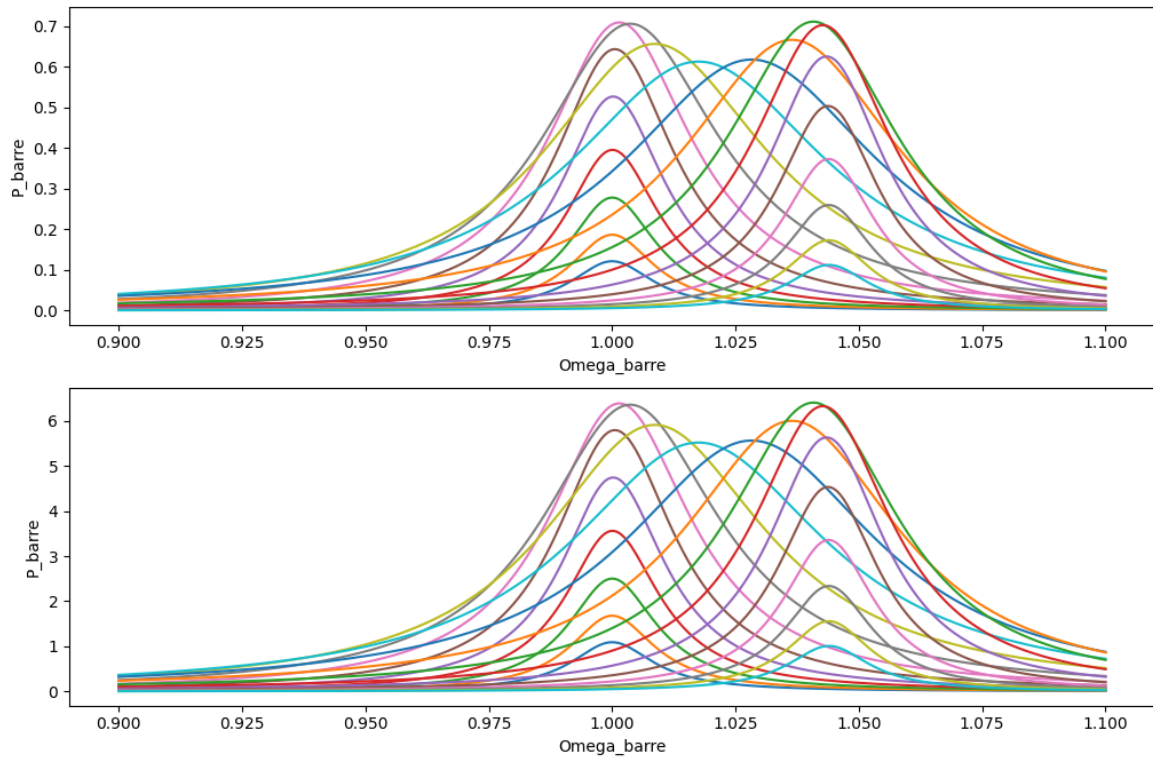


Figure 9 : Représentation de \bar{P} en fonction de $\bar{\Omega}$ pour différents $\bar{\tau}_e$ (couleurs) pour des valeurs successivement de $\kappa=0.1$ et $\kappa=0.3$

En perspective d'amélioration du montage, on conseillera de bien choisir le matériau piézoélectrique impactant directement la valeur de kappa.

3) Conclusion

Après avoir validé le modèle, nous avons mesuré les paramètres de celui-ci afin de pouvoir par la suite modéliser la récupération d'énergie. Nous observons un écart non négligeable entre la puissance récupérée théorique et expérimentale. Cependant, les résultats obtenus nous permettent de déduire la valeur de la résistance à mettre dans notre circuit si l'on souhaite récupérer un maximum d'énergie. Nous avons dès lors optimisé la récupération d'énergie pour notre montage.

Cependant, on observe des valeurs de puissance de l'ordre de 10^{-3} W, ce qui est très faible. Nous pouvons donc nous interroger sur le cadre d'utilisation d'un tel dispositif, qui sera en tout cas choisi pour de la production d'énergie électrique à toute petite échelle, d'autant plus qu'il devra s'accompagner de systèmes de stockage de l'énergie qui viendront alourdir le montage et fonction des situations potentiellement dégrader les performances.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib import cm
4 import matplotlib.ticker as tkr
5 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
6
7
8 "Détermination du gain expérimental"
9
10 exp_H=[12.95334765,18.9696542,34.83128596,70.98679794,95.96800753,115.6914713,123.0637935,117.8336786,115.849218,114.9872316,106.3935156,101.1043794,
11 95.55003001,60.48814263,40.49944059,28.97113448,21.45267398,17.29245916]
12 exp_f=[240,250,260,265,266,267,267.5,268,268.2,268.5,269,269.5,270,275,280,285,290,295]
13
14 m=0.0025
15 k=7100
16
17 H=1
18 khi=0.009719626
19 Q=51.44230769
20 w0=2*np.pi*267.5
21 d=2*np.sqrt(k*m)*khi
22
23 n=len(exp_H)
24
25 def f(x):
26     return(H/np.sqrt(1+(Q*(x/w0-w0/x))**2))
27
28 F=np.linspace(245,300,50)
29 W=[2*3.14*f for f in F]
30 mod=[f(w) for w in W]
31
32 plt.plot(exp_f,exp_H,'b',label='Expérimental')
33 plt.plot(F,mod,'r',label='Modèle')
34 plt.legend(loc='best')
35 plt.xlabel('Fréquence en Hz')
36 plt.ylabel('Gain H de la fonction de transfert')
37 plt.show()
38
39 "Mesure de l'écart théorie/expérimental"
40
41 mod2=[f(x) for x in exp_f]
42 Eccart=[(1-(exp_H[i]-mod2[i])/exp_H[i])*100 for i in range(n)]
43
44
45 plt.plot(exp_f,Eccart)
46 plt.xlabel('Fréquence en Hz')
47 plt.ylabel('Eccart relatif en pourcentage entre les valeurs théoriques et expérimentales')
48 plt.show()
49
50 "Optimisation en énergie"
51 """ 2D """
52
53 """en faisant varier ksi et kappa"""
54 ksi=[0.01,0.005]
55 kappa=[0.1,0.3]
56
57 fig, axs=plt.subplots(2,2)
58
59 Omega_b=np.linspace(0.9,1.1,1000)
60 Tau_e_b=np.logspace(-2,2,20)
61 for i in range(len(ksi)):
62     for j in range(len(kappa)):
63         Omega_co=np.sqrt(1+kappa[j]**2)
64
65         for T in Tau_e_b:
66             y=kappa[j]**2*T*Omega_b**2/(2*abs(1-(1+2*T*ksi[i])*Omega_b**2+1j*Omega_b*(T*(1+kappa[i]**2)+2*ksi[i]-T*Omega_b**2))**2))
67             axs[i,j].plot(Omega_b,y)
68
69 plt.show()
70
71 "en faisant varier kappa"
72 fig, axs=plt.subplots(2,1)
73
74 Omega_b=np.linspace(0.9,1.1,1000)
75 Tau_e_b=np.logspace(-2,2,20)
76 for j in range(len(kappa)):
77     Omega_co=np.sqrt(1+kappa[j]**2)
78     ksi = 0.0097
79     for T in Tau_e_b:
80         y=kappa[j]**2*T*Omega_b**2/(2*abs(1-(1+2*T*ksi)*Omega_b**2+1j*Omega_b*(T*(1+kappa[j]**2)+2*ksi-T*Omega_b**2))**2))
81         axs[j].plot(Omega_b,y)
82

```



```

83
84 axs[0].set_xlabel('Omega_barre')
85 axs[0].set_ylabel('P_barre')
86 axs[1].set_xlabel('Omega_barre')
87 axs[1].set_ylabel('P_barre')
88 plt.show()
89
90
91 """ 3D """
92
93 fig=plt.figure()
94 ax = fig.gca(projection='3d')
95
96 Omega_b=np.linspace(0.98,1.04,100)
97 Tau_e_b=np.logspace(-2,2,100)
98 X,Y = np.meshgrid(Omega_b,Tau_e_b)
99
100 def f(Om,T,kappa_v,ksi_v):
101     return kappa_v**2*T*Om**2/(2*abs(1-(1+2*T*ksi_v)*Om**2+1j*Om*(T*(1+kappa_v**2)+2*ksi_v-T*Om**2))**2)
102
103
104 P=f(X,Y,0.285,0.0015)
105 surf=ax.plot_surface(X,np.log10(Y),P,
106                     rstride=1,
107                     cstride=1,
108                     cmap=cm.nipy_spectral_r,
109                     linewidth=0,
110                     antialiased=False)
111
112 ax.set_ylabel(r'Tau_e_barre',labelpad=7)
113 ax.set_xlabel(r'Omega_barre',labelpad=7)
114 ax.set_zlabel('P_barre',labelpad=7)
115
116 ax.xaxis.set_major_locator(tkr.AutoLocator())
117 ax.yaxis.set_major_locator(tkr.AutoLocator())
118 ax.zaxis.set_major_locator(tkr.AutoLocator())
119
120 ax.get_xaxis().get_major_formatter().set_useOffset(True)
121 ax.get_xaxis().get_major_formatter().set_useOffset(True)
122 ax.get_xaxis().get_major_formatter().set_useOffset(True)
123
124 fig.colorbar(surf, shrink=0.7, aspect=20, pad=0.12)
125
126 plt.show()
127
128 """ recherche du max sur la pulsation pour tracer puissance/R """
129
130 Omega_b=np.linspace(0.98,1.04,100)
131 Tau_e_b=np.logspace(-1.5,1,100)
132 Resistance = [x/(2.8*10**(-4)) for x in Tau_e_b]
133
134 """valeurs théoriques"""
135
136 Puissance_th=[0.000384213,0.000422605,0.000451205,0.000475174,0.000493158,0.000508879,0.000511884,0.000535736,0.000548261,0.000557299,0.000555107,
137 0.000560729,0.000556118,0.000567219,0.000572083,0.000577296,0.000570538,0.000550421,0.000541323,0.000503653]
138 Résistance_th=[985,1195,1504,1792,2176,2675,3307,3884,4658,5585,6787,8295,9940,11970,14980,17970,21560,27180,32810,39090]
139
140 def f(Om,T,kappa_v,ksi_v):
141     return kappa_v**2*T*Om**2/(2*abs(1-(1+2*T*ksi_v)*Om**2+1j*Om*(T*(1+kappa_v**2)+2*ksi_v-T*Om**2))**2)
142
143 L=[]
144 for tau in Tau_e_b:
145     H = [ f(om,tau,0.285,0.00973) for om in Omega_b ]
146     L.append( max (H)*4.75*10**(-5) )
147
148 plt.plot(Resistance,L,label='Modélisation théorique')
149 plt.plot(Résistance_th,Puissance_th,'-r+',label='Relevés expérimentaux')
150 plt.xlabel('Résistance en Ohm')
151 plt.ylabel('Puissance en W')
152 plt.legend(loc='best')
153 plt.grid()
154 plt.show()
155
156
157 """ recherche du max """
158
159 fig=plt.figure()
160 ax = fig.gca(projection='3d')
161
162 L_ksi=np.linspace(0.1,1,100)
163 L_kappa=np.linspace(0.005,0.5,100)
164

```

```

165 n=len(L_ksi)
166 p=len(L_kappa)
167 Pmax=np.zeros((n,p))
168
169 for ks in range(n):
170     for kp in range(p):
171         Pt=f(X,Y,L_kappa[kp],L_ksi[ks])
172         ind = np.unravel_index(np.argmax(Pt, axis=None), Pt.shape)
173         Pmax[ks,kp]=P[ind]
174
175 X1,Y1=np.meshgrid(L_ksi,L_kappa)
176
177 sf=ax.plot_surface(X1,Y1,Pmax,
178                  rstride=1,
179                  cstride=1,
180                  cmap=cm.nipy_spectral_r,
181                  linewidth=0,
182                  antialiased=False)
183
184 ax.set_ylabel(r'\Kappa',labelpad=7)
185 ax.set_xlabel(r'\Ksi',labelpad=7)
186 ax.set_zlabel('Puissance maximum',labelpad=7)
187
188 ax.xaxis.set_major_locator(tkr.AutoLocator())
189 ax.yaxis.set_major_locator(tkr.AutoLocator())
190 ax.zaxis.set_major_locator(tkr.AutoLocator())
191
192 ax.get_xaxis().get_major_formatter().set_useOffset(True)
193 ax.get_xaxis().get_major_formatter().set_useOffset(True)
194 ax.get_xaxis().get_major_formatter().set_useOffset(True)
195
196 fig.colorbar(sf, shrink=0.7, aspect=20, pad=0.12)
197
198 plt.show()
199

```