

ΕΜΠ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ρομποτική Ι

Ανάλυση - Έλεγχος - Εργαστήριο

Εξαμηνιαία Εργασία

«Ρομποτικός χειριστής τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας»

ΑΚ.ΕΤΟΣ 2016-2017

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

Καλαβρυτινός Χαράλαμπος

ΑΜ: 03112024

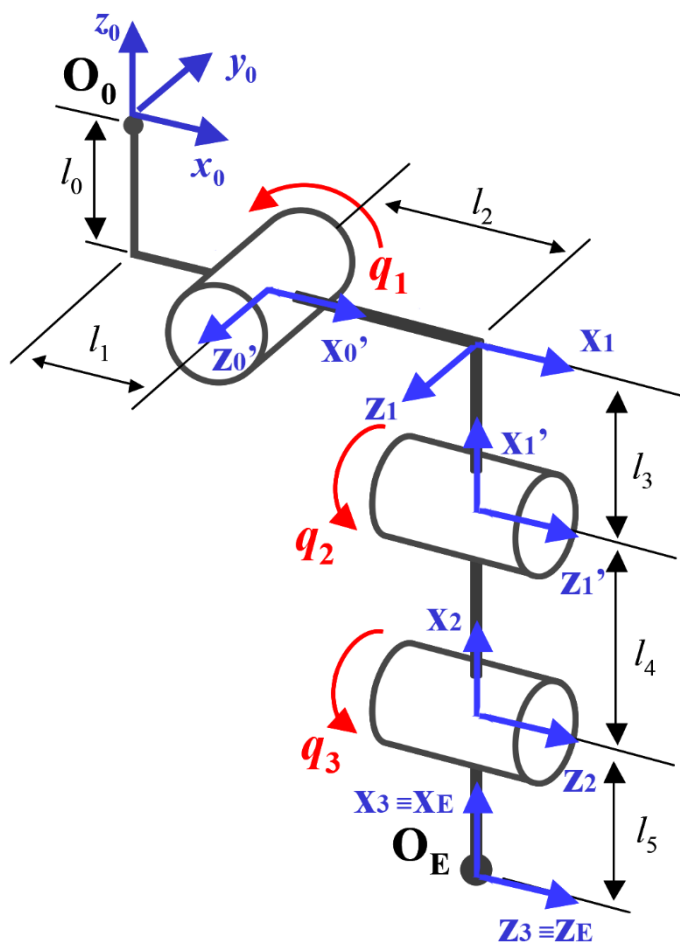
1) Εισαγωγή

Στην εξαμηνιαία εργασία δίνεται η κινηματική δομή ενός ρομποτικού χειριστή τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας $\{q_1, q_2, q_3\}$ με μήκη συνδέσμων $\{l_0, l_1, \dots, l_5\}$. Η κινηματική διάταξη αρχικοποίησης είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα Σχ.1. Αρχικά ζητείται να γίνει θεωρητική ανάλυση του μηχανισμού και να βρεθούν ο πίνακας των παραμέτρων DH, το ευθύ και ανάστροφο γεωμετρικό μοντέλο του ρομπότ, η Ιακωβιανή μήτρα και το ευθύ και ανάστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο. Έπειτα, ζητείται να γίνει η κινηματική προσομοίωση του ρομπότ για ευθύγραμμη τροχιά κίνησης με χρήση *Matlab*.

2) Θεωρητική ανάλυση

α) Προσδιορισμός παραμέτρων Denavit-Hartenberg

Η τοποθέτηση των αξόνων στο ρομποτικό μηχανισμό σύμφωνα με τη γνωστή μέθοδο φαίνεται στο σχήμα Σχ.1 και οι παράμετροι DH φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Το πλαίσιο αναφοράς του τελικού στοιχείου δράσης δε δίνεται οπότε επιλέγεται για διευκόλυνση αυτό που φαίνεται στο σχήμα.



Σχ.1. Οι άξονες στο ρομποτικό μηχανισμό σύμφωνα με τη μέθοδο DH

DHparameters

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
$0'$	$-l_0$	0	l_1	90°
1	0	q_1	l_2	0
$1'$	0	90°	$-l_3$	90°
2	0	q_2	$-l_4$	0
$3 \equiv E$	0	q_3	$-l_5$	0

β) Κινηματική εξίσωση (ευθύ γεωμετρικό μοντέλο)

Υπολογίζουμε τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων ανάμεσα στα διαδοχικά πλαίσια αναφοράς των συνδέσμων: $A_i^{i-1}(q_i)$ η μήτρα μετασχηματισμού από το πλαίσιο $i-1$ στο πλαίσιο i για $i=1,2,3$.

$$\text{Είναι: } A_{0'}^0 = Tra(z, -l_0) \cdot Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \cdot Tra(x, l_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1'}^1 = Rot(z, q_1) \cdot Tra(x, l_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & c1 \cdot l_2 \\ s1 & c1 & 0 & s1 \cdot l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1'}^1 = Rot\left(z, \frac{\pi}{2}\right) \cdot Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \cdot Tra(x, -l_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2'}^2 = Rot(z, q_2) \cdot Tra(x, -l_4) =$$

$$= \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & 0 \\ s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & -c2 \cdot l_4 \\ s2 & c2 & 0 & -s2 \cdot l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = Rot(z, q_3) \cdot Tra(x, -l_5) =$$

$$= \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & 0 \\ s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & -c3 \cdot l_5 \\ s3 & c3 & 0 & -s3 \cdot l_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^0 = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & c1 \cdot l_2 \\ s1 & c1 & 0 & s1 \cdot l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & l_1 + c1 \cdot l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & -l_0 + s1 \cdot l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = A_1^{1'} \cdot A_2^{1'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & -c2 \cdot l_4 \\ s2 & c2 & 0 & -s2 \cdot l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c2 & -s2 & 0 & -l_3 - c2 \cdot l_4 \\ s2 & c2 & 0 & -s2 \cdot l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & l_1 + c1 \cdot l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & -l_0 + s1 \cdot l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c2 & -s2 & 0 & -l_3 - c2 \cdot l_4 \\ s2 & c2 & 0 & -s2 \cdot l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -s1c2 & s1s2 & c1 & l_1 + c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 \\ -s2 & -c2 & 0 & s2 \cdot l_4 \\ c1c2 & -c1s2 & s1 & -l_0 + s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = A_E^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 = A_2^0 \cdot A_3^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -s1c2 & s1s2 & c1 & l_1 + c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 \\ -s2 & -c2 & 0 & s2 \cdot l_4 \\ c1c2 & -c1s2 & s1 & -l_0 + s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & -c3 \cdot l_5 \\ s3 & c3 & 0 & -s3 \cdot l_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

=

$$\begin{bmatrix} -s1c2c3 + s1s2s3 & s1s3c2 + s1s2c3 & c1 & s1c2c3l_5 - s1s2s3l_5 + c1l_2 + l_1 + s1c2l_4 + s1l_3 \\ -s2c3 + s3c2 & s2s3 - c2c3 & 0 & s2c3l_5 + s3c2l_5 + s2l_4 \\ c1c2c3 - s2s3c1 & -c1c2s3 - s2c1c3 & s1 & -l_0 - c1c2c3l_5 + c1s2s3l_5 - c1c2l_4 - c1l_3 + s1l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -s1c23 & s1s23 & c1 & l_1 + c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ -s23 & -c23 & 0 & s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ c1c23 & -c1s23 & s1 & -l_0 + s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα είναι } \mathbf{p}_E^0 = \begin{bmatrix} l_1 + c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ -l_0 + s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_E^0 = \begin{bmatrix} -s1c23 & s1s23 & c1 \\ -s23 & -c23 & 0 \\ c1c23 & -c1s23 & s1 \end{bmatrix}$$

γ) Υπολογισμός Ιακωβιανής

Ο ρομποτικός μηχανισμός έχει τρεις στροφικές αρθρώσεις οπότε οι διαστάσεις της Ιακωβιανής γνωρίζουμε ότι θα είναι 6x3. Για τον υπολογισμό του πίνακα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που περιέχεται στις σημειώσεις του μαθήματος και τους πίνακες που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο ερώτημα. Υπενθυμίζουμε ότι \mathbf{b}_{i-1} είναι ο **άξονας της άρθρωσης i**. Για το πρόβλημά μας οι άξονες είναι $i = 0, 1, 2$. Εστω για διευκόλυνση ότι τα ονομάζουμε b_0, b_1, b_2 και r_{0E}, r_{1E}, r_{2E}

$$\begin{bmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,E} \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου } \mathbf{b}_{i-1} = \mathbf{R}_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{i-1,E} = \mathbf{A}_n^0(q_1, q_2, q_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathbf{A}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Και άρα για τα δεδομένα του προβλήματος θα είναι:

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} c1 \\ 0 \\ s1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,E} = \begin{bmatrix} s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ -c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} c1 \\ 0 \\ s1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2,E} = \begin{bmatrix} s1c23 \cdot l_5 \\ s23 \cdot l_5 \\ -c1c23 \cdot l_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_0 \times \mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} -s1 \cdot l_2 + c1 \cdot l_3 + c1c2 \cdot l_4 + c1c23 \cdot l_5 \\ 0 \\ c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}_{1,E} = \begin{bmatrix} -s1s2 \cdot l_4 - s1s23 \cdot l_5 \\ c2 \cdot l_4 + c23 \cdot l_5 \\ s2c1 \cdot l_4 + s23c1 \cdot l_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}_{2,E} = \begin{bmatrix} -s1s23 \cdot l_5 \\ c23 \cdot l_5 \\ c1s23 \cdot l_5 \end{bmatrix}$$

Επομένως η Ιακωβιανή θα είναι:

$$J = \begin{bmatrix} -s1 \cdot l_2 + c1 \cdot l_3 + c1c2 \cdot l_4 + c1c23 \cdot l_5 & -s1s2 \cdot l_4 - s1s23 \cdot l_5 & -s1s23 \cdot l_5 \\ 0 & c2 \cdot l_4 + c23 \cdot l_5 & c23 \cdot l_5 \\ c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 & s2c1 \cdot l_4 + s23c1 \cdot l_5 & c1s23 \cdot l_5 \\ 0 & c1 & c1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s1 & s1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } J_L = \begin{bmatrix} \alpha & \kappa & x \\ 0 & \lambda & y \\ \beta & \mu & z \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -s1 \cdot l_2 + c1 \cdot l_3 + c1c2 \cdot l_4 + c1c23 \cdot l_5 \\ \beta &= c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ \kappa &= -s1s2 \cdot l_4 - s1s23 \cdot l_5 \\ \lambda &= c2 \cdot l_4 + c23 \cdot l_5 \\ \mu &= s2c1 \cdot l_4 + s23c1 \cdot l_5 \\ x &= -s1s23 \cdot l_5 \\ y &= c23 \cdot l_5 \\ z &= c1s23 \cdot l_5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} V_E \\ \omega_E \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

δ) Όσον αφορά τις ιδιομορφίες της διάταξης αρκεί να βρούμε τις ορίζουσες των $\begin{bmatrix} J_L \\ J_A \end{bmatrix}$. Είναι:

$\det(J_A) = c1s1 - c1s1 = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι το τελικό στοιχείο δράσης χάνει πάντα ένα βαθμό ελευθερίας και φαίνεται και από το ότι ο πίνακας J_A έχει 2 μόνο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Δεν υπάρχουν άλλες περιπτώσεις στη διάταξη κατά τις οποίες χάνεται κάποιος βαθμός ελευθερίας.

$$\det(J_L) = a(\lambda z - \mu y) + \beta(\kappa y - \lambda y) = W + Q$$

$$\begin{aligned} W &= a(\lambda z - \mu y) = a[(c2 \cdot l_4 + c23 \cdot l_5)s23c1 \cdot l_5 - (s2c1 \cdot l_4 + s23c1 \cdot l_5)c23 \cdot l_5] \\ &= a(s23c1c2 \cdot l_4l_5 + s23c1c23 \cdot l_5^2 - s2c1c23 \cdot l_4l_5 - s23c1c23 \cdot l_5^2) \\ &= a(c1 \cdot l_4l_5(c2s23 - s2c23)) = a \cdot s3c1 \cdot l_4l_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \beta(\kappa y - \lambda y) = \beta[-(s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5)s1c23 \cdot l_5 + (c2 \cdot l_4 + c23 \cdot l_5)s1s23 \cdot l_5] \\ &= \beta(-s1s2c23 \cdot l_4l_5 + s1s23c23 \cdot l_5^2 - s1s23c2 \cdot l_4l_5 - s1s23c23 \cdot l_5^2) \\ &= \beta(s1 \cdot l_4l_5(c2s23 - s2c23)) = \beta \cdot s1s3 \cdot l_4l_5 \end{aligned}$$

$$\text{Τότε } \det(J_L) = 0 \Leftrightarrow W + Q = s3 \cdot l_4l_5 (\alpha \cdot c1 + \beta \cdot s1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s3 \cdot l_4l_5 = 0 \\ \alpha \cdot c1 + \beta \cdot s1 = 0 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει απλώς $s3 = 0 \Rightarrow q_3 = 0$ ή π

Και είναι:

$$\alpha \cdot c1 + \beta \cdot s1 = 0 \Leftrightarrow c1^2 \cdot l_3 + c1^2 c2 \cdot l_4 + c1^2 c23 \cdot l_5 + s1^2 \cdot l_3 + s1^2 c2 \cdot l_4 + s1^2 c23 \cdot l_5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c1^2 + s1^2) l_3 + (c1^2 + s1^2) c2 \cdot l_4 + (c1^2 + s1^2) c23 \cdot l_5 = 0 \Rightarrow$$

$$l_3 + c2 \cdot l_4 + c23 \cdot l_5 = 0$$

Αντίστροφο διαφορικό μοντέλο:

Όσον αφορά το αντίστροφο διαφορικό πρόβλημα, αρκεί να βρούμε τον αντίστροφο πίνακα

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = J_L^{-1} \cdot \mathbf{v}_E. \text{ Για μεγαλύτερη διευκόλυνση μπορούμε απλώς να εισάγουμε τον πίνακα της}$$

Ιακωβιανής στο Matlab και να βρούμε άμεσα τον αντίστροφο πίνακα. Στις ιδιόμορφες διατάξεις που βρέθηκαν νωρίτερα δεν μπορούμε να βρούμε τις ταχύτητες των αρθρώσεων αν γνωρίζουμε την ταχύτητα του τελικού σημείου δράσης αφού ο πίνακας δεν αντιστρέφεται.

Η λύση του αντίστροφου διαφορικού μοντέλου περιέχεται στο αρχείο `inverse_Jacobian.m`

Αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο:

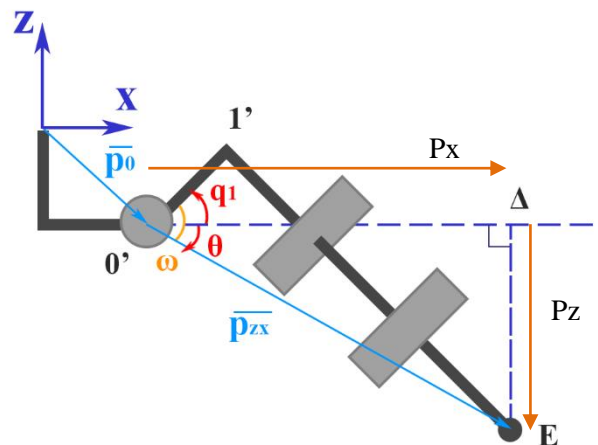
Για την εύρεση του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου θεωρούμε ότι γνωρίζουμε το τελικό

διάνυσμα $\mathbf{p}_E^0 = \begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix}$ και ψάχνουμε τις περιστροφές q_1, q_2 και q_3 που οδηγούν το τελικό σημείο

του βραχίονα στην τελική δοσμένη θέση. Αρχικά μπορούμε να βρούμε από τη γεωμετρία της διάταξης τη γωνία q_1 .

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε μία τυχαία διάταξη του ρομποτικού μηχανισμού. Θα είναι

$\mathbf{p}_{0'E} + \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_E^0$ όπου $\mathbf{p}_{0'E}$ είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο O' και τέλος το τελικό σημείο E . Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η προβολή του διανύσματος αυτού στο zx επίπεδο \mathbf{p}_{zx} , και βλέπουμε μόνο την όψη της διάταξης στο επίπεδο αυτό.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O'\Delta E$ για τη γωνία θ είναι: $\tan(\theta) = \frac{\text{απέναντι πλευρά}}{\text{προσκειμένη}} = \frac{p_z}{p_x}$ όπου

$p_x = p_{Ex} - l_1$, $p_z = p_{Ez} + l_0$, και όλα τα p χρησιμοποιούνται με πρόσημο (αλγεβρικές τιμές).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο **Θ'Ι'Ε** : $\cos(\omega) = \frac{l_2}{\sqrt{p_x^2 + p_z^2}}$, και είναι $\omega = q_1 - \theta$

επειδή θ αρνητικό στην περίπτωση του σχήματος. Τελικά είναι:

$$q_1 = \omega + \theta = \pm \left(\cos^{-1} \left(\frac{l_2}{\sqrt{(p_{Ex} - l_1)^2 + (p_{Ez} + l_0)^2}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{p_{Ez} + l_0}{p_{Ex} - l_1} \right) \right)$$

Με βάση αυτό θα προχωρήσουμε για την εύρεση των υπολοίπων περιστροφών αλγεβρικά ως εξής:

$$\begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ -l_0 + s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{Ex} = l_1 + c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ p_{Ey} = s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ p_{Ez} = -l_0 + s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = p_{Ex} - l_1 = c1 \cdot l_2 + s1 \cdot l_3 + s1c2 \cdot l_4 + s1c23 \cdot l_5 \\ K_2 = p_{Ey} = s2 \cdot l_4 + s23 \cdot l_5 \\ K_3 = p_{Ez} + l_0 = s1 \cdot l_2 - c1 \cdot l_3 - c1c2 \cdot l_4 - c1c23 \cdot l_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1^2 = c1^2 l_2^2 + s1^2 l_3^2 + 2s1c1 l_2 l_3 + s1^2 c2^2 l_4^2 + s1^2 c23^2 l_5^2 + 2s1^2 c2c23 l_4 l_5 \\ K_2^2 = s2^2 l_4^2 + s23^2 l_5^2 + 2s1s23 l_4 l_5 \\ K_3^2 = s1^2 l_2^2 + c1^2 l_3^2 - 2s1c1 l_2 l_3 - c1^2 c2^2 l_4^2 - c1^2 c23^2 l_5^2 - 2c1^2 c2c23 l_4 l_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1^2 + K_3^2 = l_2^2 + l_3^2 + (s1^2 - c1^2)c2^2 l_4^2 + (s1^2 - c1^2)c23^2 l_5^2 + 2(s1^2 - c1^2)c2c23 l_4 l_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = K_1^2 + K_3^2 - l_2^2 - l_3^2 = (s1^2 - c1^2) \cdot (c2^2 l_4^2 + c23^2 l_5^2 + 2 \cdot c2c23 l_4 l_5), \quad (T1)$$

$$\text{Είναι } K_2^2 \cdot (s1^2 - c1^2) = (s1^2 - c1^2)(s2^2 l_4^2 + s23^2 l_5^2 + 2 \cdot s2s23 l_4 l_5) \quad (T2)$$

$$(T1) + (T2) = W + K_2^2 \cdot (s1^2 - c1^2) = (s1^2 - c1^2)(l_4^2 + l_5^2 + 2 \cdot c3 l_4 l_5) \Rightarrow$$

$$W - K_2^2 \cos(2q_1) = -\cos(2q_1) (l_4^2 + l_5^2 + 2 \cdot c3 l_4 l_5) \Rightarrow$$

$$q_3 = \pm \cos^{-1} \left(\frac{-\frac{W}{\cos(2q_1)} + K_2^2 - l_4^2 - l_5^2}{2l_4 l_5} \right)$$

Και τότε θα είναι:

$$p_{Ey} = s2l_4 + s23l_5 = s2(l_4 + c3l_5) + c2 s3l_5 = A \cdot s2 + B \cdot c2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot s2 + B \cdot c2 - p_{Ey} = 0, \text{ με } A = (l_4 + c3l_5), B = s3l_5$$

Με την αντικατάσταση $\sin\theta = \frac{2\tau}{1+\tau^2}, \cos\theta = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \tau = \tan\frac{\theta}{2}$ προκύπτει

$$(B + p_{Ey})\tau^2 - 2A\tau + (p_{Ey} - B) = 0, \quad \Delta = 4(A^2 - p_{Ey}^2 + B^2)$$

$$\tau = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - p_{Ey}^2 + B^2}}{B + p_{Ey}}$$

$$q_2 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 - p_{Ey}^2 + B^2}}{B + p_{Ey}} \right)$$

3) Κινηματική Προσομοίωση

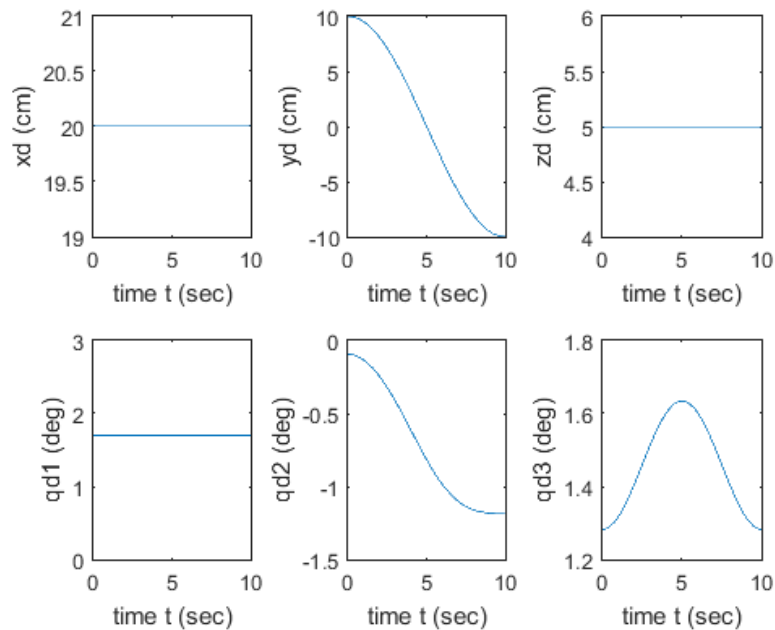
Στο τελευταίο μέρος της εργασίας ζητείται να γίνει κινηματική προσομοίωση του ρομποτικού βραχίονα. Ζητείται το τελικό σημείο δράσης του βραχίονα να εκτελεί **ευθύγραμμη κίνηση** ξεκινώντας από ένα δεδομένο **σημείο A** και καταλήγοντας σε ένα άλλο **σημείο B**.

Θεωρούμε ότι το ρομπότ θα πρέπει να έχει διανύσει την τροχιά μέσα σε **10 δευτερόλεπτα** και ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, το τελικό σημείο του ρομπότ βρίσκεται στο σημείο A.

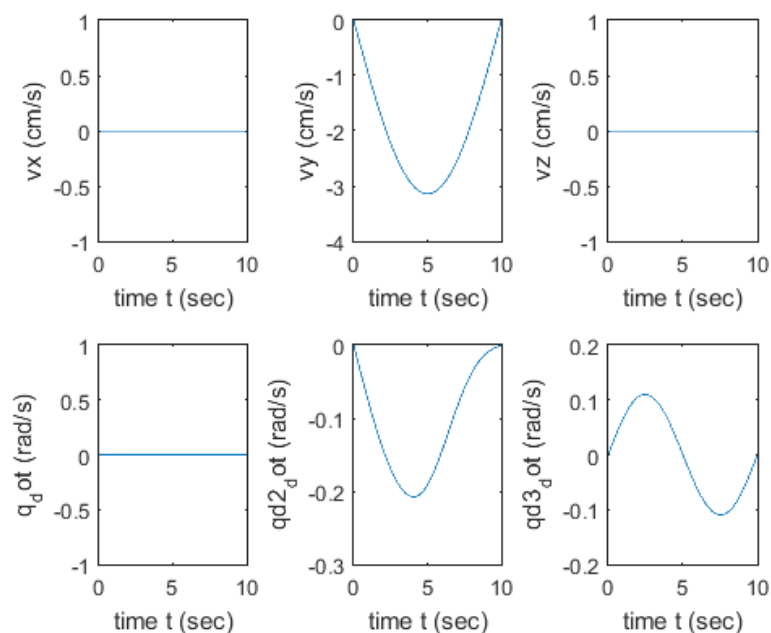
Η κινηματική προσομοίωση του βραχίονα έγινε μέσα από το **περιβάλλον Matlab**. Για την προσομοίωση, όπως φαίνεται και στον κώδικα που περιέχεται στην παρούσα εργασία, έχει θεωρηθεί ότι το μήκος **l3** είναι **μηδενικό**. Στον κώδικα υπάρχει η δυνατότητα εισαγωγής των **συντεταγμένων των δύο σημείων, A και B**. Χρειάζεται όμως ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή των δύο σημείων διότι υπάρχει η δυνατότητα να βρίσκονται εκτός του χώρου εργασίας του ρομπότ. Ο χώρος εργασίας του ρομπότ περιορίζεται και από τα μήκη των συνδέσμων και τις ιδιόμορφες διατάξεις. Επιπλέον, για την εύρεση των γωνιών των αρθρώσεων (*αντίστροφη κινηματική*) δεν έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι περιπτώσεις που προκύπτουν από το συνδυασμό λύσεων που βρέθηκαν παραπάνω κατά την θεωρητική ανάλυση.

Για παράδειγμα, για την εύρεση του q_1 χρησιμοποιείται το **θετικό** πρόσημο, πράγμα που σημαίνει ότι η άρθρωση q_1 κινείται περιορισμένα σε εύρος γωνιών $[-90, 90]$. Το ίδιο συμβαίνει και για την άρθρωση q_3 , ενώ για την q_2 χρησιμοποιείται η μία εκ των δύο λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι στη συγκεκριμένη προσομοίωση θεωρείται ότι οι αρθρώσεις **δε μπορούν να περιστραφούν πλήρως** σε 360 μοίρες. Αν θέλαμε να λάβουμε κάτι τέτοιο υπόψιν θα έπρεπε να επεκτείνουμε τον κώδικα ώστε να περιλαμβάνει όλες τις λύσεις του αντίστροφου κινηματικού μοντέλου και να επιλέγει τις σωστές κάθε φορά.

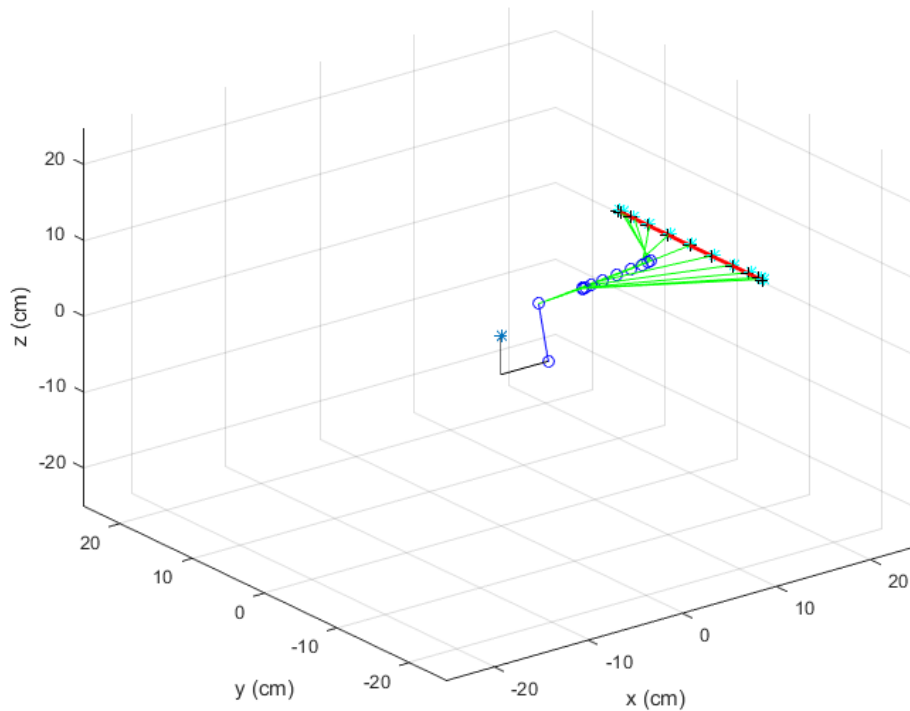
Ζητείται να δοθεί διάγραμμα που να φαίνεται η **επιθυμητή θέση του τελικού άκρου** ως προς το χρόνο και η **επιθυμητή γραμμική του ταχύτητα**. Ακόμα ζητείται διάγραμμα που να δείχνει τις **γωνίες περιστροφής** ως προς το χρόνο και τις **γωνιακές ταχύτητες**. Τέλος ζητείται ένα διάγραμμα που να δείχνει **την κίνηση του βραχίονα**. Σημειώνεται εδώ ότι η κίνηση του βραχίονα γίνεται στο χώρο, όπως θα φανεί και στα αποτελέσματα και ότι το τελικό σημείο δράσης ξεκινά και τελειώνει πάντα με μηδενική ταχύτητα. Παρακάτω παρουσιάζονται τα ζητούμενα σε ενδεικτικές περιπτώσεις.



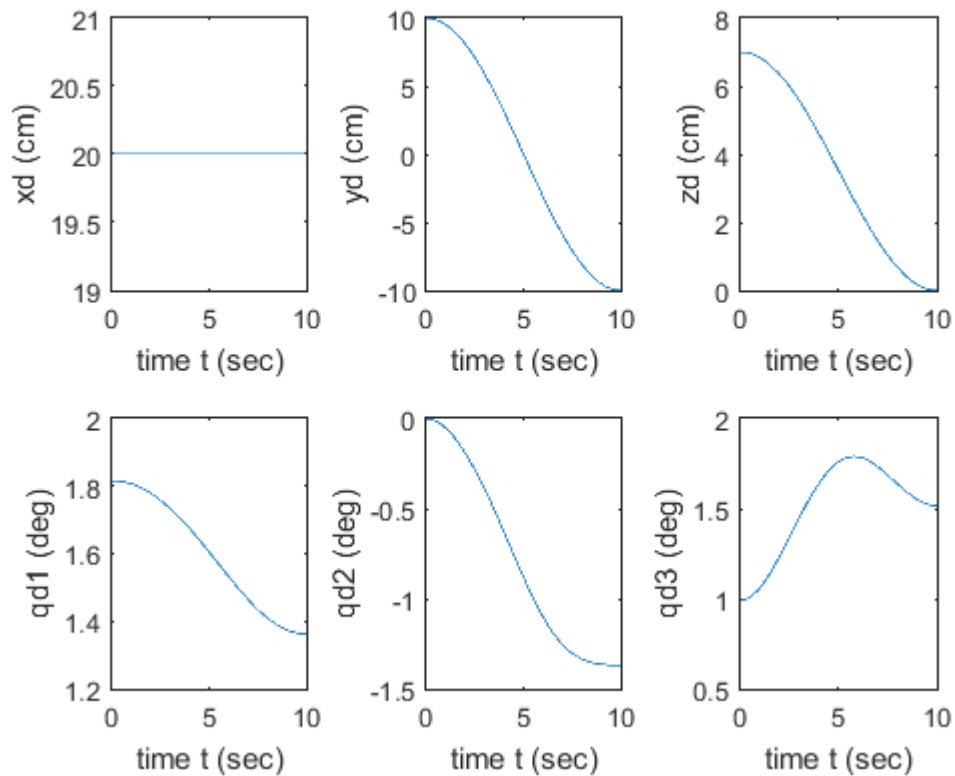
Εικόνα 3.1.α. Περίπτωση 1: για $A(20,10,5)$ και $B(20,-10,5)$. Διάγραμμα επιθυμητής τελικής θέσης ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες q_1, q_2, q_3 (κάτω)



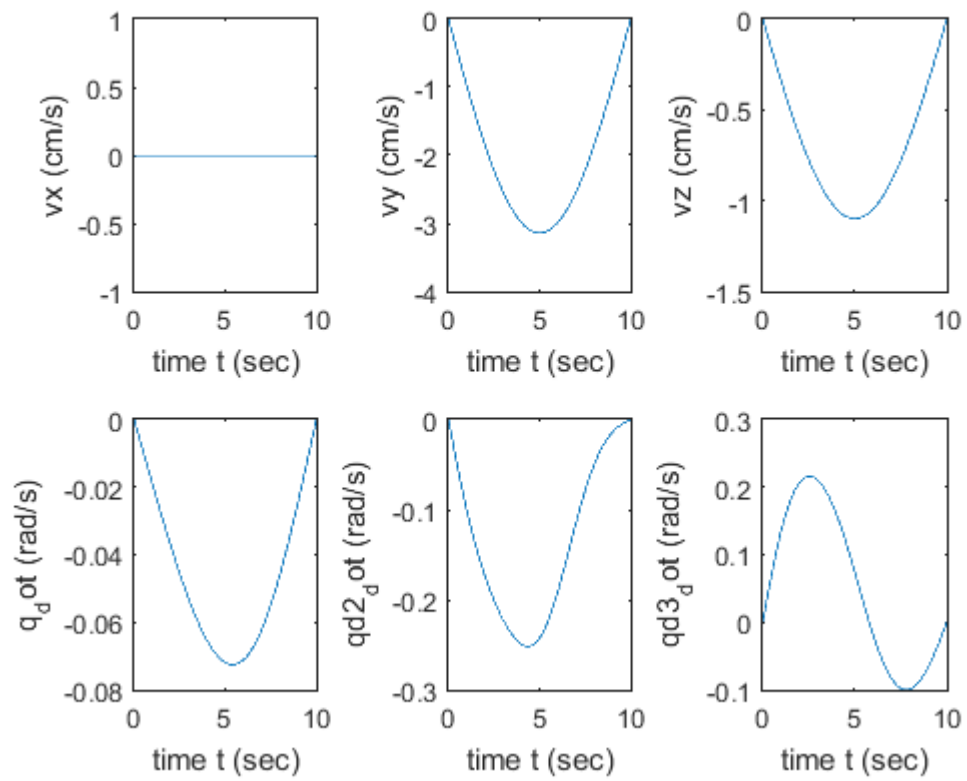
Εικόνα 3.1.β. Περίπτωση 1: για $A(20,10,5)$ και $B(20,-10,5)$. Διάγραμμα ταχύτητας τελικού σημείου ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ (κάτω)



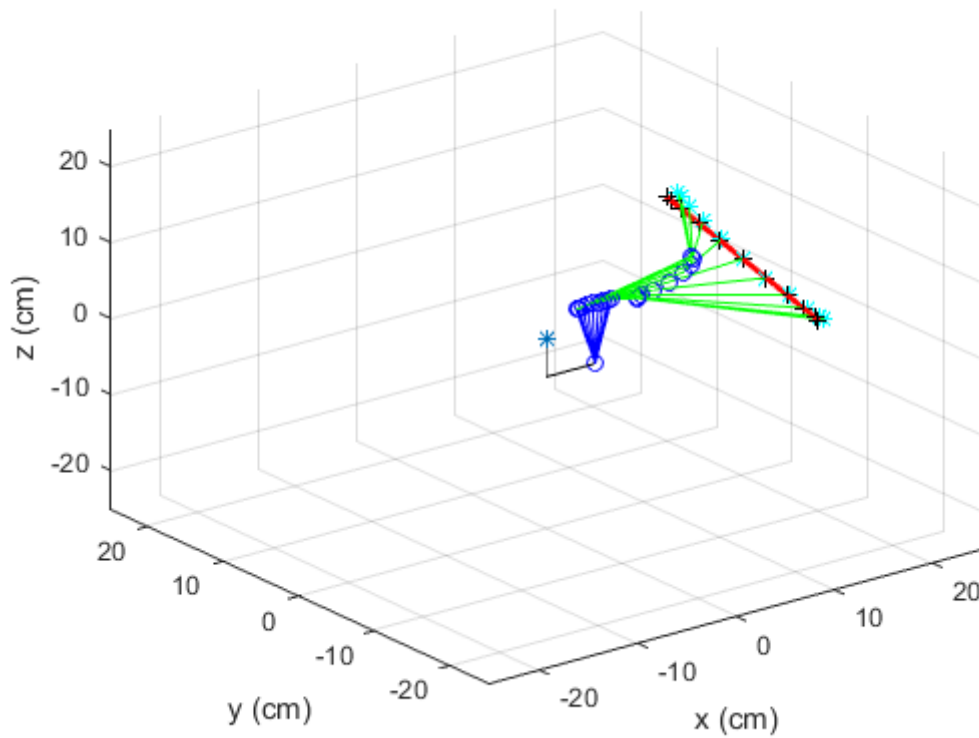
Εικόνα 3.1.ε. Περίπτωση 1: για $A(20,10,5)$ και $B(20,-10,5)$. Προσομοίωση κίνησης του βραχίονα. Ο μαύρος σταυρός είναι η επιθυμητή τελική θέση και ο μπλε αστερίσκος η πραγματική. Οι σύνδεσμοι του βραχίονα εμφανίζονται με μπλε και πράσινο χρώμα, ενώ οι αρθρώσεις είναι οι μπλε κύκλοι. Η επιθυμητή τροχιά είναι η κόκκινη γραμμή



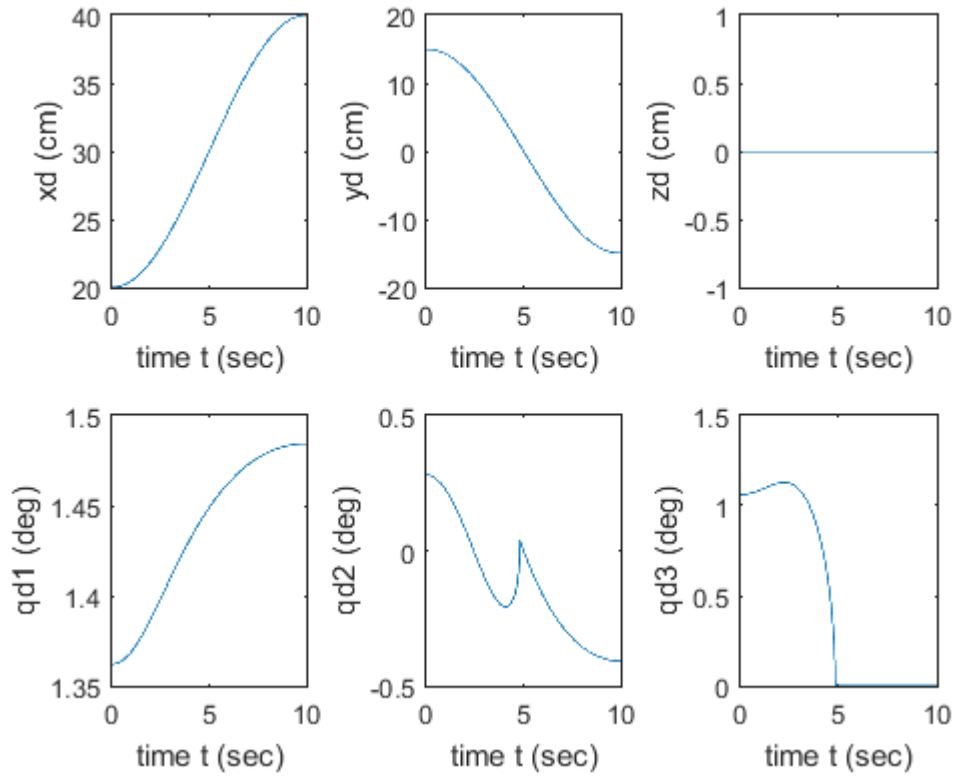
Εικόνα 3.2.α. Περίπτωση 2: για $A(20,10,7)$ και $B(20,-10,0)$. Διάγραμμα επιθυμητής τελικής θέσης ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες q_1 , q_2 , q_3 (κάτω)



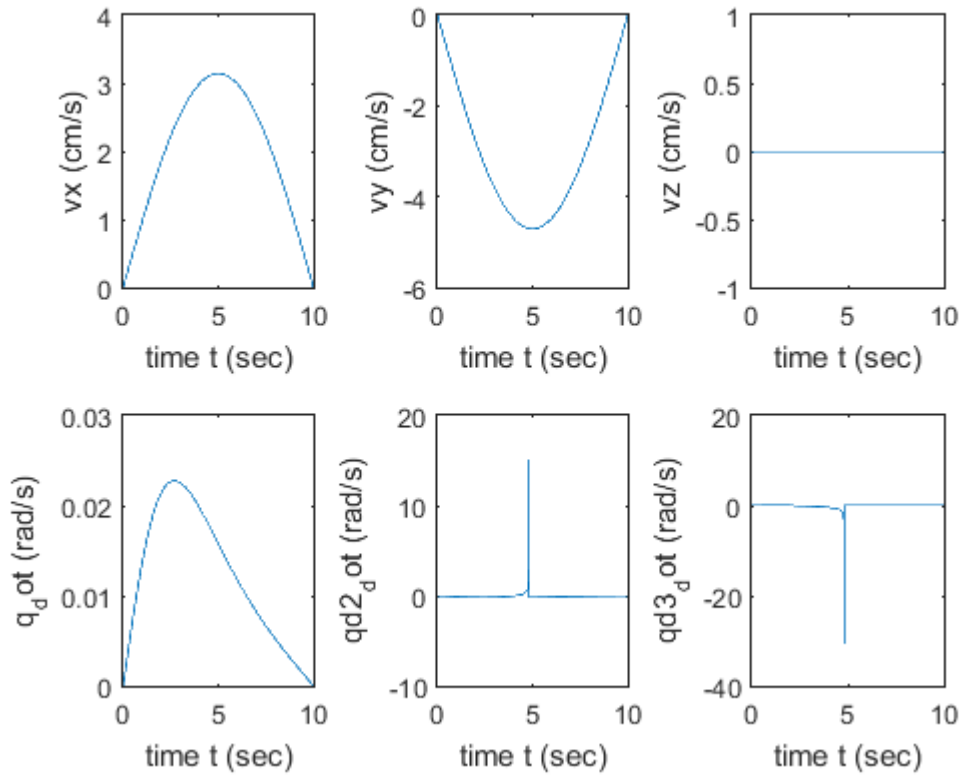
Εικόνα 3.2.β. Περίπτωση 2: για $A(20,10,7)$ και $B(20,-10,0)$. Διάγραμμα ταχύτητας τελικού σημείου ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ (κάτω)



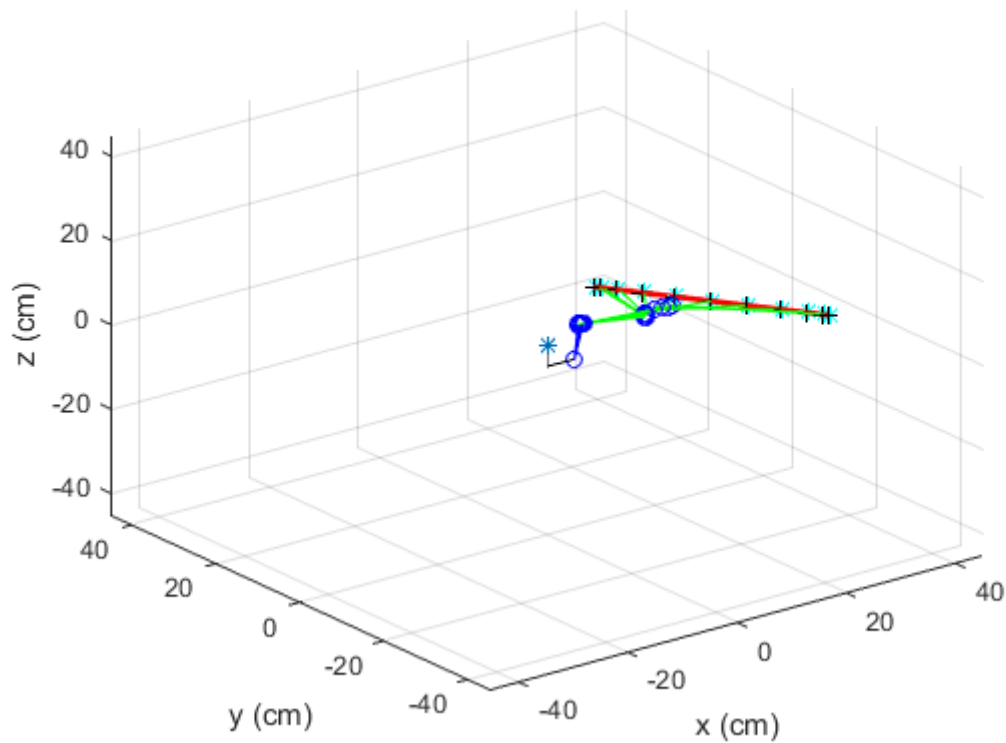
Εικόνα 3.2.γ. Περίπτωση 2: για $A(20,10,7)$ και $B(20,-10,0)$. Προσομοίωση κίνησης του βραχίονα. Ο μαύρος σταυρός είναι η επιθυμητή τελική θέση και ο μπλε αστερίσκος η πραγματική.



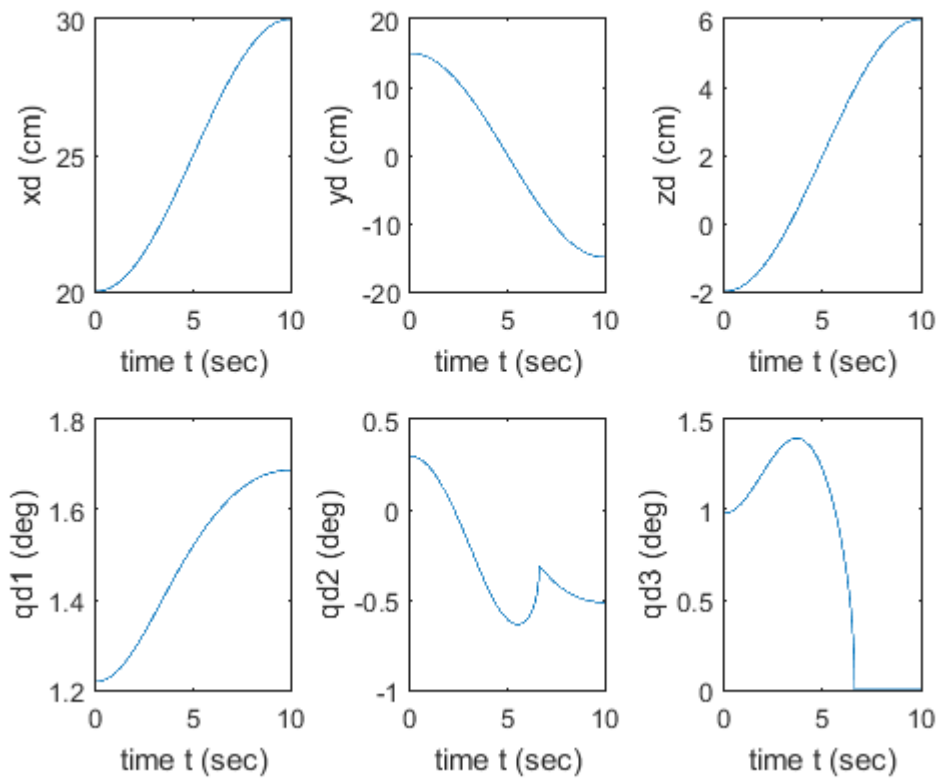
Εικόνα 3.3.α. Περίπτωση 3: για $A(20,15,0)$ και $B(40,-15,0)$. Διάγραμμα επιθυμητής τελικής θέσης ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες q_1 , q_2 , q_3 (κάτω)



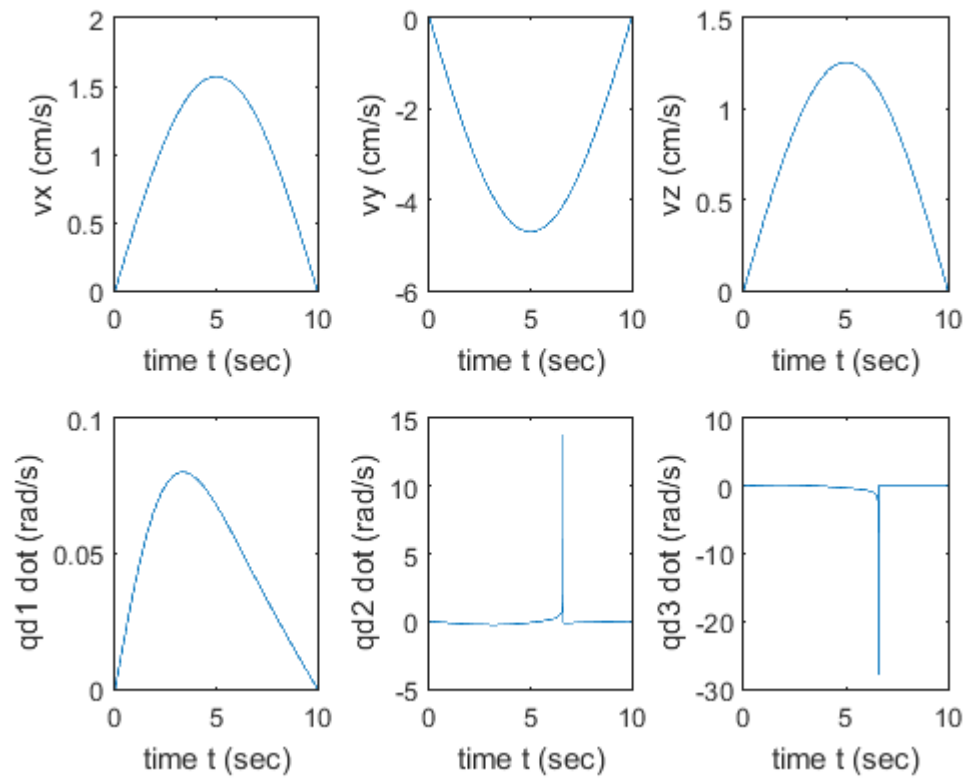
Εικόνα 3.3.β. Περίπτωση 3: για $A(20,15,0)$ και $B(40,-15,0)$. Διάγραμμα ταχύτητας τελικού σημείου ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \dot{q}_3 (κάτω)



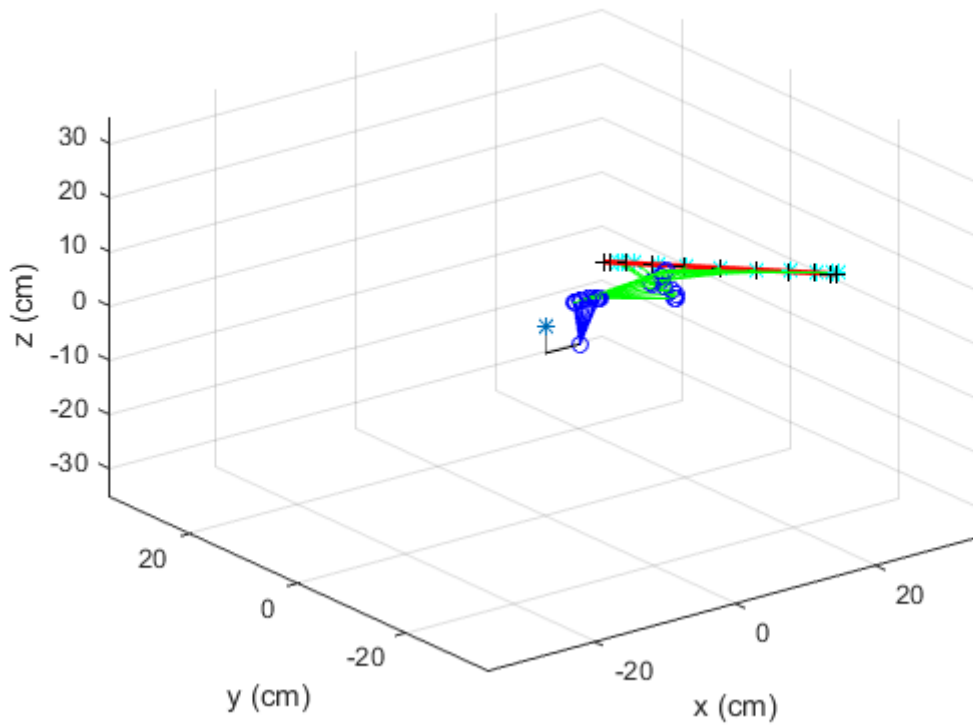
Εικόνα 3.3.ε. Περίπτωση 3: για $A(20,15,0)$ και $B(40,-15,0)$. Προσομοίωση κίνησης του βραχίονα. Ο μαύρος σταυρός είναι η επιθυμητή τελική θέση και ο μπλε αστερίσκος η πραγματική.



Εικόνα 3.4.α. Περίπτωση 4: για $A(20,15,0)$ και $B(30,-15,0)$. Διάγραμμα επιθυμητής τελικής θέσης ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες q_1 , q_2 , q_3 (κάτω)



Εικόνα 3.4.β. Περίπτωση 4: για $A(20,15,0)$ και $B(30,-15,0)$. Διάγραμμα ταχύτητας τελικού σημείου ως προς το χρόνο (πάνω) και γωνίες $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ (κάτω)



Εικόνα 3.4.γ. Περίπτωση 4: για $A(20,15,0)$ και $B(30,-15,0)$. Προσομοίωση κίνησης του βραχίονα. Ο μαύρος σταυρός είναι η επιθυμητή τελική θέση και ο μπλε αστερίσκος η πραγματική.

Σημείωση: Παραπάνω παρατηρούμε διάφορες περιπτώσεις κίνησης του βραχίονα. Σε κάποιες περιπτώσεις βλέπουμε πως η γωνιακή ταχύτητα (παράγωγος των q_1, q_2, q_3) παρουσιάζει **κάποιες περίεργες παραμορφώσεις** (απειρίζεται σε κάποια σημεία). Αυτό συμβαίνει διότι όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα οι συναρτήσεις των γωνιών **δεν είναι παραγωγίσιμες** σε εκείνα τα σημεία. Επιπλέον να σημειωθεί ότι το τελικό σημείο δράσης φτάνει στο επιθυμητό σημείο B με **μηδενική ταχύτητα κάθε φορά** (η ταχύτητα και η θέση αλλάζει ημιτονικά).

Τα παραπάνω διαγράμματα μαζί με κάποια επιπλέον βρίσκονται και στο φάκελο *figures* της παρούσας εργασίας. Για εκτέλεση της προσομοίωσης και έλεγχο του κώδικα απευθυνθείτε στο αρχείο με τίτλο *simulation.m*

References

- [1] B. Siciliano, L.Sciavicco, L. Villani, G.Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Springer, 2009