



École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

PRB222 Rapport de Projet
Options à Barrière

Auteurs : Charlène Krick - Alexandre Laprerie
Professeur : Guillaume ASTRUC

21 mars 2024

Table des matières

1	Introduction	2
2	Calcul de la solution générale	2
3	Option européenne	2
3.1	Calcul théorique du prix de l'option	2
3.2	Simulation numérique du prix de l'option	3
4	Option à Barrière Down & Out	4
4.1	Calcul analytique	5
4.2	Approximation de P^{DO}	5
4.2.1	Simulation du mouvement brownien	5
4.2.2	Simulation de $P^{DO,\Delta}$	5
4.2.3	Méthode de réduction par variables antithétiques	6
4.2.4	Prix de l'option de vente en fonction de la barrière B	8
4.2.5	Prix de l'option de vente en fonction de la volatilité σ	8
4.2.6	Méthode d'approximation de P^{DO} à partir de $P^{DO,\Delta}$	9
4.2.7	Calcul de la probabilité de non-sortie	12
5	Option à Barrière Down & In	14
A	Calcul détaillé de la solution générale	15
B	Calcul théorique du prix d'une option Put sous le modèle de Black Sholes	16

1 Introduction

Dans ce projet, nous allons étudier le calcul du prix de l'action sur un actif dont l'exercice peut avoir lieu à une date prédéfinie uniquement si le prix de l'actif n'est pas descendu en dessous du niveau prédéfini (barrière).

Nous allons d'abord considérer le modèle sans barrière qui permet d'avoir une solution analytique simple que nous confronterons ensuite au calcul de Monte-Carlo. Nous étudions ensuite le prix de l'option à barrière et l'influence de la discrétisation des observations du franchissement de la barrière.

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t . Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité (supposée constante) et $S(0)$ la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$\begin{aligned}dS(t) &= S(t)(r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S(0) > 0\end{aligned}$$

2 Calcul de la solution générale

On a :

$$\begin{cases} dS(t) &= S(t)(r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S(0). \end{cases}$$

Après les calculs détaillés en annexe A, on obtient comme solution :

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}$$

3 Option européenne

Un Put confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P^{euro} = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S(T))_+]$$

sous probabilité Risque Neutre.

3.1 Calcul théorique du prix de l'option

En utilisant le théorème de Girsanov, on obtient l'expression suivante :

$$P^{euro} = e^{-rT} K F(-d_1) - S(0) F(-d_2)$$

En posant :

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right) \\ d_2 &= d_1 + \sigma\sqrt{T}\end{aligned}$$

Avec les valeurs : $\sigma = 0.15$, $S_0 = 1$, $r = 0.015$, $T = 2$ ans et $K = 1$, on trouve $P^{euro} = 0.0692$

3.2 Simulation numérique du prix de l'option

Pour simuler $W(T)$, on utilise la méthode de Box-Muller : elle utilise les transformations trigonométriques et logarithmiques pour convertir les distributions uniformes en distributions normales, exploitant ainsi les propriétés de la fonction exponentielle et des fonctions sinus et cosinus. Ainsi, en la simulant plusieurs fois, on retrouve une densité gaussienne comme le montre le graphique :

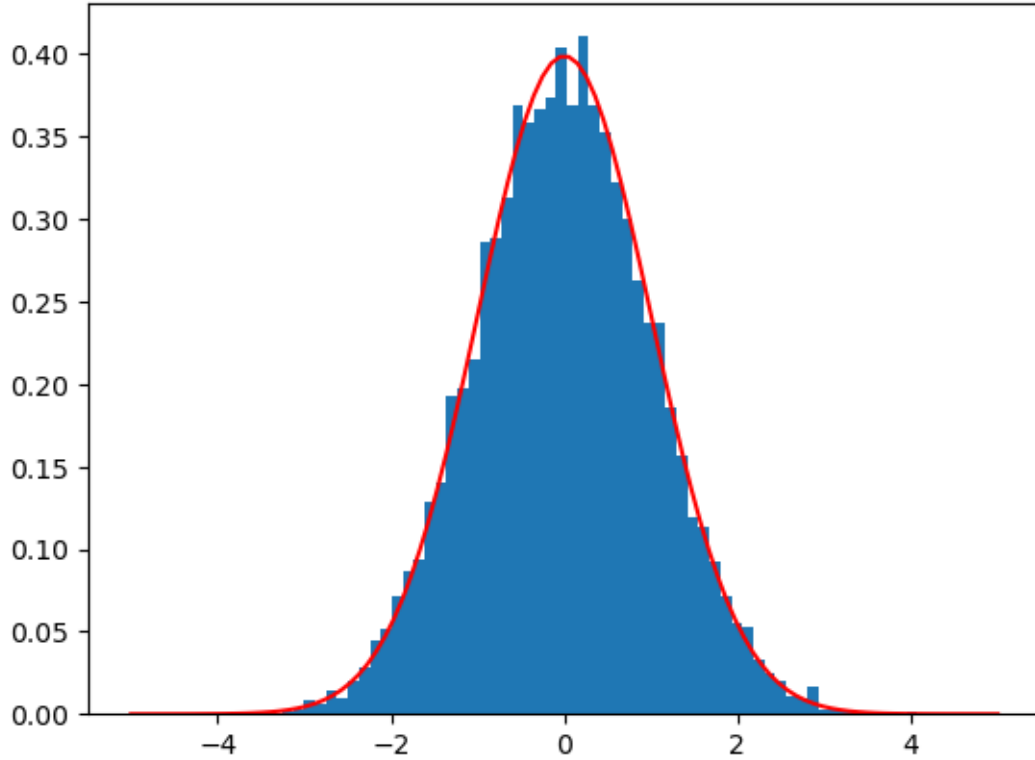


FIGURE 1 – Simulation de variable gaussienne à l'aide de la méthode de Box-Muller

A l'aide de la simulation de variable gaussienne, on peut alors implémenter le calcul du Prix de l'option de vente européenne à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. En effet, on simule $e^{-rT}\mathbb{E}(K - S(T))_+$, en calculant d'abord plusieurs fois $K-S(T)$ à l'aide de l'expression de $S(T)$ calculée plus haut et de la variable gaussienne simulée à l'aide de Box-Muller, on prend le maximum entre 0 et $K-S(T)$ puis, on calcule l'esperance à l'aide de Monte-Carlo. Finalement, on multiplie par e^{-rT} , et on obtient le payoff actualisé.

Le prix de l'option dans notre modèle pour un nombre d'itérations de 1000000 est : 0.06923672070403902

On calcule également l'intervalle de confiance. En effet, on utilise l'estimateur de variance :

$$\overline{\text{var}}(Z) = \frac{n}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Z_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right)^2 \right)$$

L'intervalle de confiance à 90% est donnée par :

$$\left[\bar{P}_{euro} - a \cdot \sqrt{\frac{\overline{\text{var}}(Z)}{n}}, \bar{P}_{euro} + a \cdot \sqrt{\frac{\overline{\text{var}}(Z)}{n}} \right]$$

avec $a = 1.29$

L'intervalle de confiance de Peuro pour un nombre d'itérations de 1000000 est [0.06907399043826784 , 0.0693994509698102]

En simulant pour différents nombre d'itérations l'estiméteur de P_{euro} et la valeur théorique de P_{euro} , on obtient :

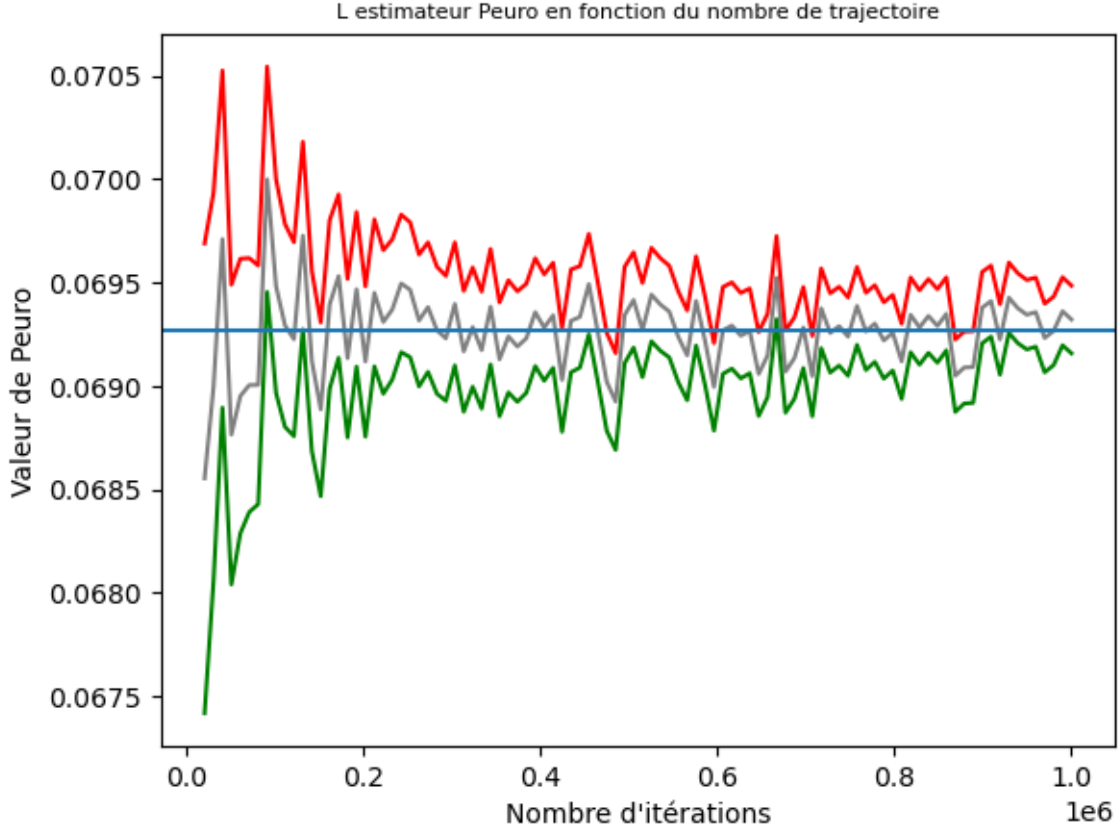


FIGURE 2 – Graphe de l'estimateur du prix de l'option de vente européenne et son intervalle de confiance à 90% à l'aide la méthode de Monte Carlo

On observe alors que, plus le nombre d'itération est grand, plus la valeur de l'estimateur est proche de la vraie valeur de P_{euro} calculé à l'aide de la formule de Black-Sholes. En effet, l'écart type converge également en fonction du nombre d'itérations.

En résumé, le graphique montre l'efficacité de la méthode Monte Carlo dans l'estimation du prix des options, où les fluctuations dues au hasard semblent diminuer avec un nombre croissant de trajectoires, et les simulations tendent vers la valeur théorique (ligne bleue), démontrant la convergence et la fiabilité de cette méthode de simulation dans le pricing des options.

4 Option à Barrière Down & Out

Nous allons dans cette partie nous intéresser à une option à Barrière DownOut. Ce put confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance si le prix de l'actif n'est pas descendu en dessous d'une barrière B avant T .

Le prix de l'option dans ce modèle est donc :

$$P^{DO} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T)) + \mathbb{1}_{\min_{u \leq T} S(u) \geq B} \right]$$

4.1 Calcul analytique

On se place dans le cas où $B \geq K$.

Tout d'abord, si $S \geq B$, alors comme $B \geq K$, on a $(K - S(T))_+ = 0$.

Et si $S \leq B$, alors on a $\mathbb{1}_{\min_{u \leq T} S(u) \geq B} = 0$.

De ce fait, il vient que si $B \geq K$, alors :

$$P^{DO} = 0$$

4.2 Approximation de P^{DO}

La simulation continue de $\min_{u \leq T} S(u)$ n'étant pas possible en pratique, on se propose d'approximer P^{DO} par

$$P^{DO,\Delta} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T)) + \mathbb{1}_{\min_{u \in \{T^i\}_{i=1 \dots N}} S(u) \geq B} \right]$$

avec

$$\begin{cases} N^\Delta &= \text{Ent} \left[\frac{T}{\Delta} \right] \\ \{T^i\}_{i=1 \dots N^\Delta} &= \{i\Delta\}_{i=1 \dots N^\Delta} \end{cases}$$

4.2.1 Simulation du mouvement brownien

Nous allons tout d'abord simuler $(W(T^i))_{i=1 \dots N^\Delta}$.

Pour simuler le mouvement brownien, nous utilisons la décomposition de Cholesky :

On crée une grille de temps T_i où $i = 1, 2, \dots, N$ et $t_i = i \times \Delta$. On initialise Γ , la matrice de covariance, où chaque élément Γ_{ij} est le minimum entre t_i et t_j , ce qui respecte la propriété de covariance d'un mouvement brownien $\Gamma_{ij} = \min(t_i, t_j)$.

On génère un vecteur de variables aléatoires normales G de dimension n en utilisant la transformation de Box-Muller.

On effectue la décomposition de Cholesky de Γ pour obtenir la matrice L telle que $\Gamma = LL^T$.

On simule les incréments ΔW du mouvement brownien comme suit :

$$\Delta W = L \cdot G$$

où ΔW est un vecteur des incréments du mouvement brownien, et G est le vecteur des variables aléatoires normales générées.

On initialise la trajectoire du mouvement brownien W avec $W_0 = 0$. On calcule la trajectoire complète du mouvement brownien en ajoutant itérativement les incréments :

$$W = [W_0, W_0 + \Delta W_1, \dots, \sum_{k=1}^n \Delta W_k]$$

4.2.2 Simulation de $P^{DO,\Delta}$

Pour simuler $P^{DO,\Delta}$, nous avons utilisé la propriété log-normale de $S(t)$. En effet, Une partie du rendement logarithmique est donnée par :

$$\text{Log_returns} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta \cdot \mathbf{1}_{M \times N}$$

où r est le taux sans risque, σ la volatilité, et $\mathbf{1}_{M \times N}$ une matrice de 1 de dimension $M \times N$.

Les chemins de prix logarithmiques sont construits en ajoutant le log du prix initial S_0 à chaque rendement logarithmique et en faisant la somme cumulée pour avoir un temps $t = i \cdot \Delta$ pour construire la trajectoire, on ajoute également les M trajectoires browniennes, simulées sur N temps, multiplié par σ pour obtenir M simulations de :

$$\log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) i \Delta + \sigma W^j(i)$$

pour $i \in [0, N]$ et $j \in [0, M]$

$$\text{Log_Spaths} = \begin{bmatrix} \log(S_0) & \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta + \sigma W^0(1) & \cdots & \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta \cdot N + \sigma W^0(N) \\ \log(S_0) & \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta + \sigma W^1(1) & \cdots & \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta \cdot N + \sigma W^1(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \log(S_0) & \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta + \sigma W^M(1) & \cdots & \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta \cdot N + \sigma W^M(N) \end{bmatrix}$$

Les chemins de prix réels sont obtenus par exponentiation des chemins logarithmiques :

$$S_{\text{paths}} = e^{\text{Log_Spaths}}$$

Les chemins qui restent au-dessus de la barrière B sont identifiés par l'indicatrice :

$$\text{indic} = (\min(S_{\text{paths}}, \text{axis} = 1) \geq B)$$

Le payoff de l'option est calculé pour les chemins satisfaisant la condition de barrière et est actualisé au taux sans risque :

$$\text{payoff} = e^{-rT} \cdot \max(K - S_{\text{paths}[:, -1]}, 0) \cdot \text{indic}$$

Finalement, le prix de l'option estimé par Monte Carlo est la moyenne des payoffs actualisés :

$$\text{Prix_MC} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{payoff}_i$$

Ici, pour un nombre d'itérations de 10000, le prix de l'option dans notre modèle est :

$$0.0472484023049767$$

4.2.3 Méthode de réduction par variables antithétiques

On considère que $P^{DO, \Delta} = \mathbb{E}(g(G))$ où $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donc on peut le simuler $P^{DO, \Delta} = S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(G_i)$.

On peut remarquer que si $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $-G$ suit également une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On peut alors être tenté de considérer

$$S'_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(-G_i)$$

ou même

$$\bar{S}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} g(G_i) + g(-G_i).$$

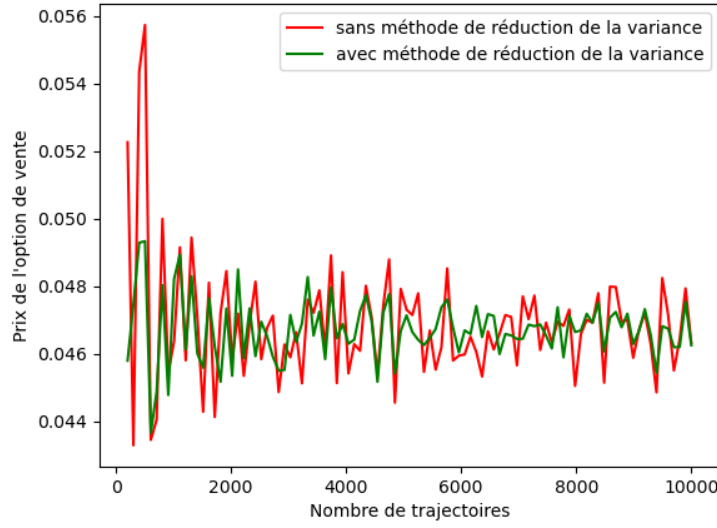
Remarquons que dans l'équation ci dessus, la somme s'arrête a $\lfloor n/2 \rfloor$. En effet la comparaison entre les différents estimateurs doit se faire à taille d'échantillon constante. Calculons la variance de \bar{S}_n .

$$\begin{aligned}\text{Var}(\bar{S}_n) &= \frac{1}{2n}(2\text{Var}(g(G)) + 2\text{Cov}(g(G), g(-G))) \\ &= \text{Var}(S_n) + \frac{1}{n}\text{Cov}(g(G), g(-G))\end{aligned}$$

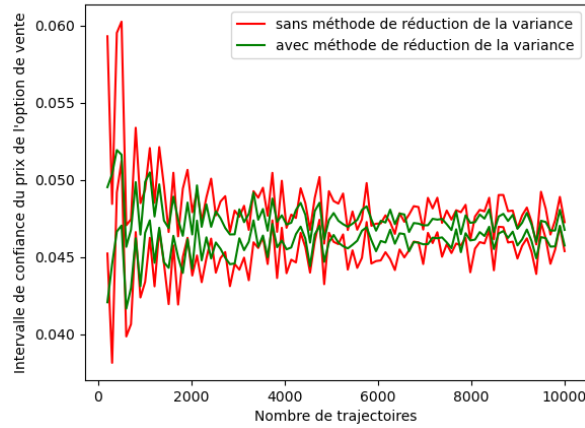
Si $\text{Cov}(g(G), g(-G))$ est négatif, alors la vitesse de convergence de \bar{S}_n est meilleure que celle de S_n .

En utilisant la méthode précédente pour calculer $P^{DO,\Delta}$, on obtient en comparant avec et sans méthode de réduction de variance par variables antithétiques :

Graphique des deux estimateurs (avec/sans méthode antithétique) du prix de l'option de vente Barrière Down & Out



Graphique des deux estimateurs de l'intervalle de confiance (avec/sans méthode antithétique) du prix de l'option de vente Barrière Down & Out



On peut observer que l'intervalle avec la méthode de réduction de la variance est plus fin que l'intervalle sans la méthode. Ainsi, la variance est bien réduite. Pour le reste de l'étude, nous pouvons donc utiliser la méthode des variables antithétiques avec un nombre d'itérations de 10000.

4.2.4 Prix de l'option de vente en fonction de la barrière B

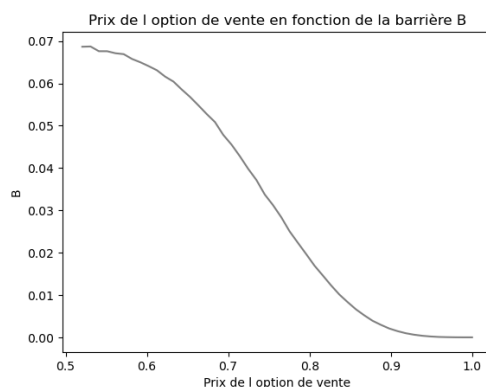


FIGURE 3 – Prix de l'option de vente en fonction de la barrière B pour 10000 itérations

Le graphique montre une courbe décroissante, ce qui suggère que lorsque la valeur de la barrière augmente, le prix de l'option de vente diminue. Cela est intuitif dans le contexte financier car une barrière plus élevée signifie qu'il est moins probable que l'option soit exercée (dans le cas d'une option de vente barrière descendante).

4.2.5 Prix de l'option de vente en fonction de la volatilité σ

On trace en figure 4, le prix de l'option de vente Barrière en fonction de la volatilité pour 10000 itérations et $S_0=1$.

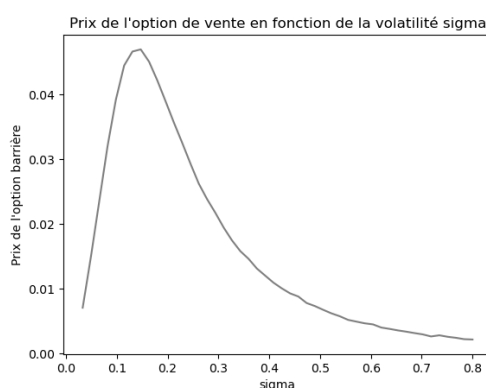


FIGURE 4 – Prix de l'option de vente Barrière en fonction de la volatilité pour 10000 itérations et $S_0=1$

La courbe atteint un pic autour de $\sigma = 0.1$ avant de diminuer, indiquant que le prix de l'option est très sensible à des changements dans la volatilité à ce niveau. Ce pic peut indiquer une volatilité optimale pour laquelle le prix de l'option de vente barrière est maximisé. Pour des valeurs très faibles de σ , le prix de l'option de vente barrière augmente rapidement,

atteignant un maximum, puis diminue à mesure que σ augmente au-delà du point de pic. Cela suggère que, pour des valeurs de volatilité inférieures au pic, une petite augmentation de la volatilité augmente la valeur de l'option, probablement en raison de l'augmentation de la probabilité que le prix de l'actif sous-jacent descendra en dessous de la barrière. Cependant, lorsque la volatilité dépasse un certain seuil, l'augmentation continue de la volatilité semble diminuer la valeur de l'option, peut-être parce que le marché estime que le risque est trop grand.

À des niveaux de volatilité plus élevés (à droite du pic), le prix de l'option diminue progressivement, indiquant que l'option de vente devient moins précieuse à mesure que la volatilité augmente. Cela peut sembler contre-intuitif car les options de vente sont généralement plus précieuses dans des marchés volatils. Cependant, pour une option de vente barrière, une volatilité élevée pourrait signifier une plus grande chance que le prix de l'actif sous-jacent soit en dessous de la barrière à l'expiration, rendant l'option sans valeur.

On trace ensuite en figure 5, le prix de l'option de vente Barrière en fonction de la volatilité pour 10000 itérations et $S_0=0.8$.

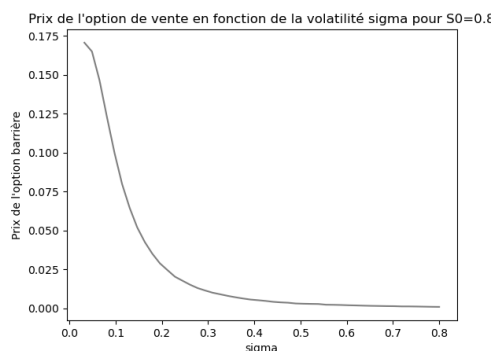


FIGURE 5 – Prix de l'option de vente Barrière en fonction de la volatilité pour 10000 itérations et $S_0=1$

Le prix de l'option de vente diminue de façon plus régulière et continue avec l'augmentation de σ . Le prix ne montre pas de pic comme dans le cas de $\sigma = 1$; il commence à un niveau plus élevé et décroît constamment. La diminution de S_0 de 1 à 0.8 modifie significativement la réaction du prix de l'option à la volatilité. Avec un S_0 plus élevé (dans le premier graphique), l'option atteint un pic de prix avant de décroître, indiquant un niveau de volatilité où les acheteurs sont prêts à payer plus pour se couvrir contre une baisse plus grande dans le prix de l'actif.

La sensibilité du prix des options à la volatilité varie avec S_0 . Un S_0 plus élevé conduit à des comportements de prix plus dynamiques et non linéaires, reflétant des stratégies de couverture contre des risques spécifiques à différents niveaux de volatilité. En revanche, un S_0 plus bas entraîne une décroissance plus stable et prévisible du prix de l'option avec la volatilité croissante, possiblement en raison d'une perception générale de risque moindre. Ces dynamiques peuvent influencer les décisions de gestion des risques et de couverture des options dans des marchés financiers variables.

4.2.6 Méthode d'approximation de P^{DO} à partir de $P^{DO,\Delta}$

Nous souhaitons maintenant approximer P^{DO} à partir de $P^{DO,\Delta}$. Pour ce faire, nous allons utiliser la formule donnée dans l'énoncé, qui est la suivante :

$$\mathbb{P} \left(\inf_{u \in [t_1, t_2]} \{W_u\} < x^* \mid W_{t_1}, W_{t_2} = 1 + \left[e^{-2 \frac{(W_{t_1} - x^*)(W_{t_2} - x^*)}{t_2 - t_1}} - 1 \right] \mathbb{1}_{W_{t_1} \wedge W_{t_2} > x^*} \right)$$

Cette relation nous sera très utile pour le calcul de l'espérance de l'indicatrice dans le calcul de P^{DO} . En effet, on a :

$$\begin{aligned} P^{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E} \left((K - S_T)_+ \mathbb{1}_{\{\min_{u \leq T} S_u \geq B\}} \right) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left((K - S_T)_+ \mathbb{1}_{\{\min_{u \leq T} S_u \geq B\}} \mid W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_N} \right) \right) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left((K - S_T)_+ \mathbb{E} \left(\prod_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} S_u \geq B\}} \mid W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_N} \right) \right) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left((K - S_T)_+ \prod_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} S_u \geq B\}} \mid W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_N} \right) \right) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E} \left((K - S_T)_+ \prod_{k=0}^{N-1} \mathbb{P} \left(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} S_u \geq B \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}} \right) \right) \\ &\simeq e^{-rT} \mathbb{E} \left((K - S_T)_+ \prod_{k=0}^{N-1} \mathbb{P} \left(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} W_u \geq B_k \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}} \right) \right) \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$S_u = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) u + \sigma W_u \right) \simeq S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k + \sigma W_u \right)$$

pour $u \in [t_k, t_{k+1}]$.

Donc en isolant W_u , on obtient :

$$B_k = \frac{1}{\sigma} \left[\log \left(\frac{B}{S_0} \right) + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) * t_k * \Delta \right]$$

Or

$$\mathbb{P} \left(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} W_u \geq B_k \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}} \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} W_u < B_k \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}} \right)$$

car les deux événements forment une partition de l'espace.

Donc en utilisant la relation donnée dans l'énoncé, on peut donc expliciter clairement $\mathbb{P} \left(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} W_u \geq B_k \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}} \right)$.

Pour ce faire, nous allons appliquer la méthode suivante :

Tout d'abord nous simulons le prix en observant plusieurs chemins possible pour le prix de l'actif. Pour chaque chemins, nous allons initialiser une probabilité qui vaut 1 initialement. Cette probabilité correspond à : $\mathbb{P} \left(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} W_u \geq B_k \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}} \right)$.

Ensuite, nous allons discrétiser notre intervalle en N sous-intervalles de même taille. Nous allons ensuite parcourir chaque noeuds de cette intervalle et tester si on a : $W_k \leq B_k$ and $W_{k+1} \leq B_k$.

Si ce test est faux, cela signifie que l'une des deux valeurs est en-dessous de la valeur seuil, donc nous allons appliquer la probabilité 0 à l'événement : $\mathbb{P}(\min_{t_k \leq u \leq t_{k+1}} W_u \geq B_k \mid W_{t_k}, W_{t_{k+1}})$. Ainsi le prix de l'option sera nulle.

Cependant, si la relation est vraie, nous allons utiliser la formule donnée dans l'énoncé pour calculer la probabilité que le minimum de $W_u \geq B_k$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$. Nous multiplions ensuite cette probabilité par la probabilité totale que ce chemin particulier aille en dessous du seuil et nous passons au noeud suivant.

Après avoir parcouru tous les noeuds de chaque mouvement brownien, nous utilisons la méthode de Monte-Carlo pour déterminer P^{DO} .

Après avoir implémenter le code, nous obtenons en utilisant les paramètres de la question 6 ainsi qu'un nombre d'itération de 30 000 :

$$P_{DO} = 0.045079386066$$

Ce résultat est assez proche de celui que nous avons trouvé précédemment.

Nous allons ensuite tracer sur une même figure l'évolution de l'estimation de P_{DO} en fonction du nombre de trajectoire. Nous obtenons le graphique suivant, en utilisant les paramètres de la question 2, et en utilisant $\Delta = \frac{1}{500}$:

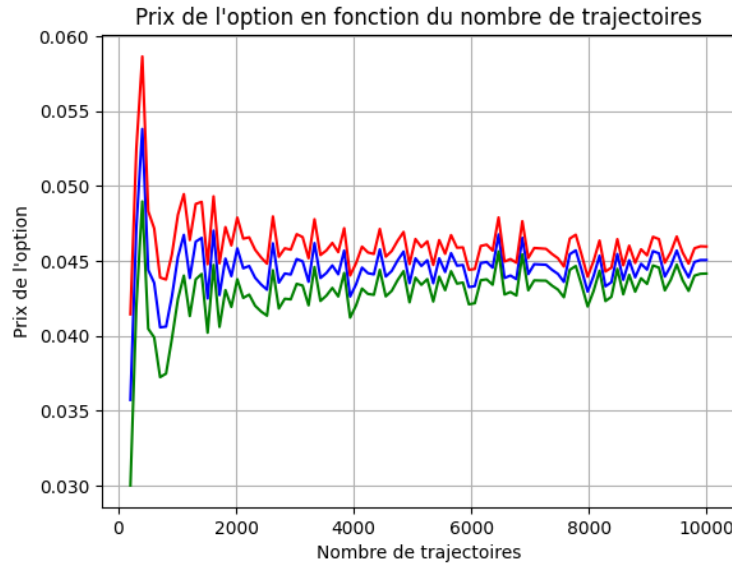


FIGURE 6 – Evolution de l'estimation du prix P^{DO} en fonction du nombre de trajectoire

On observe que l'estimation du prix est précise après environ 8000 trajectoires, et que le prix de l'option converge vers 0,045.

Nous allons ensuite tracer sur un même graphique le prix $P^{DO,\Delta}$ en fonction de Δ pour $\Delta \in \{\frac{1}{250}, \frac{1}{52}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1, 3\}$ et P^{DO} . Nous obtenons le graphique suivant, on rajoutant des valeurs de Δ :

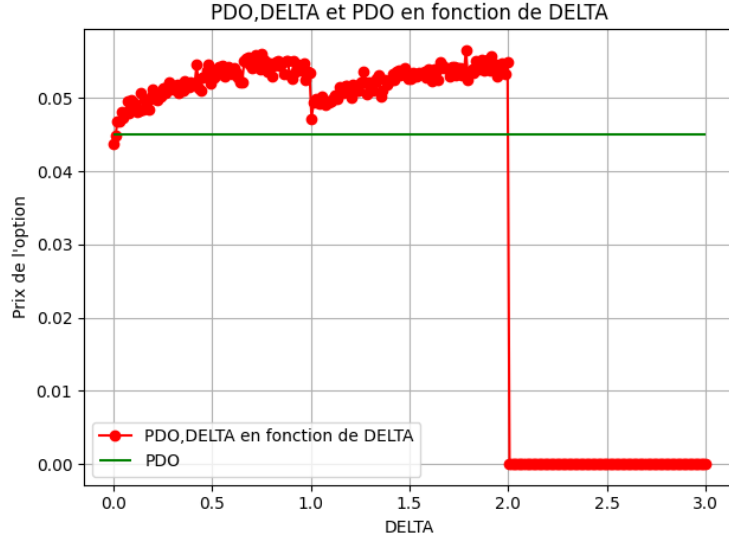


FIGURE 7 – Estimation de P^{DO} en fonction de Δ

On observe aisément que plus le delta est petit, plus l'estimation de P_{DO} est précise. Cela paraît logique car plus la subdivision de l'intervalle est grande, plus nous avons de précision quant au calcul du minimum de S . On observe également un palier de prix égal à 0 pour les Δ supérieur ou égal à 2, ainsi qu'une discontinuité à 2 et à 1. Le palier s'explique par le fait que lorsque Δ est supérieur ou égal à 2, l'espace n'est pas divisé, en plusieurs sous-espaces. Ainsi, il n'y a pas de noeud, donc pas de calcul de prix.

4.2.7 Calcul de la probabilité de non-sortie

Nous allons maintenant nous intéresser à l'approximation de la probabilité de non-sortie, et tracer $\zeta^{DO, \Delta} = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\min_{u \in \{T^i\}_{i=1..N}} S(u) \geq B}]$ en fonction de Δ et ζ^{DO} . D'après son expression, ζ^{DO} représente la probabilité conditionnelle moyenne que les mouvements browniens restent au dessus de la barrière imposée. Pour calculer cette valeur, nous allons utiliser la même démarche que dans la question précédente pour déterminer ζ^{DO} et $\zeta^{DO, \Delta}$ en ne prenant simplement pas en compte le pay-off. Nous allons donc simuler les trajectoires, et tracer l'évolution de la probabilité de non-sortie en fonction de delta. On obtient le graphique suivant :

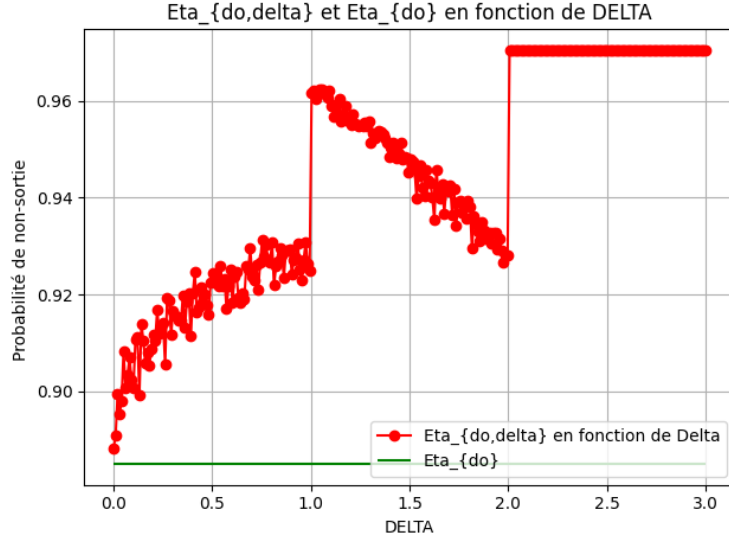


FIGURE 8 – Probabilité de non-sortie en fonction de Delta sur l'intervalle $[0.001, 3]$

On observe donc sur ce graphique plusieurs phases.

$[0.001, 1]$: Tout d'abord, nous observons dans l'intervalle $[0.001, 1]$, que lorsque delta tends vers 0, $\zeta^{DO,\Delta}$ tend vers ζ^{DO} . Cela est intuitif car lorsque l'on diminue Δ , on diminue la taille de l'intervalle et donc on augmente la précision de nos calculs.

$[1, 2]$ Ensuite sur l'intervalle $[1,2]$, nous observons un résultat assez étrange. En effet, lorsque Δ tend vers 1, on observe une augmentation de la probabilité de non-sortie. Nous nous attendions à avoir une fonction continue qui tend vers 0 quand delta tends vers 0, or on observe 2 discontinuités de la fonction. Ces deux discontinuités viennent sûrement du fait

$[2,3]$ lorsque delta est supérieur à 2, nous observons un plateau de probabilité 1. Cela est cohérent avec les résultats que nous avons trouvé car dans ce cas l'intervalle n'est pas subdiviser car

Intuitivement, si nous prenons une valeur initiale égale à 1, nous savons que la valeur de probabilité de non-sortie va converger vers 1 quand la barrière va tendre vers 0. Donc pour valider notre modèle, nous allons tracer la probabilité de non-sortie en fonction de la valeur de la barrière B. On obtient le graphique suivant :

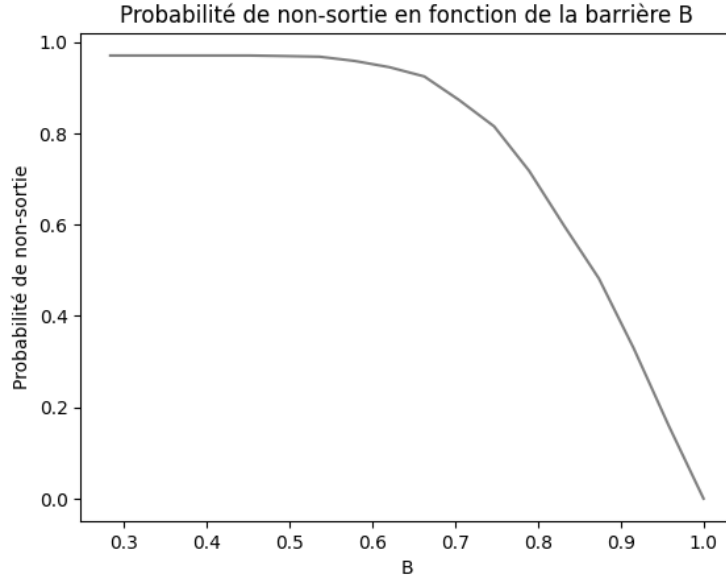


FIGURE 9 – Probailité de non-sortie en fonction de la valeur de la barrière B

Sur le graphique, on observe bien que plus la barrière, plus la probabilité que le prix de l'option reste au dessus est proche de 1. Et à l'inverse, plus la barrière B est élevée, plus la probabilité que le prix n'aille pas en dessous du seuil est nulle. Cela permet de valider une partie de notre modèle.

5 Option à Barrière Down & In

Un Put à Barrière de type Down & In confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance uniquement si le prix de l'actif est descendu en dessous d'une barrière B avant T . Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P^{DI} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(K - S(T)) + \mathbb{1}_{u \leq T} \min_{u \leq T} S(u) \leq B \right]$$

sous probabilité Risque Neutre.

On souhaite tout d'abord calculer $P^{DO} + P^{DI}$. D'un côté P^{DO} devient nul si le prix de l'actif devient en dessous de B. A l'inverse, P^{DI} n'a de valeur que s'il est inférieur à B. Ainsi ces deux scénarios couvrent toutes les possibilités possibles. On a alors :

$$P^{DO} + P^{DI} = P^{euro}$$

A Calcul détaillé de la solution générale

On a :

$$\begin{cases} dS(t) &= S(t) (r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S(0). \end{cases}$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $(S(t))_{t \in [0, T]}$ tel que $\int_0^t S(s) ds$ et $\int_0^t S(s) dW(s)$ aient un sens, et qui vérifie

$$S(t) = S(0) + \int_0^t r S(s) ds + \int_0^t \sigma S(s) dW(s), \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{Pp.s.}$$

En particulier, $(S(t))$ sera un processus d'Ito. Essayons d'abord de trouver une solution. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une solution strictement positive (si elle existe) de notre problème. Nous procédons d'abord par un calcul (qui peut sembler) formel car $f(x) = \log(x)$ n'est pas de classe $C^2(\mathbb{R})$. On a

$$\log(S(t)) = \log(S(0)) + \int_0^t \frac{dS(s)}{S(s)} + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{-1}{S(s)^2} \right) \sigma^2 S(s)^2 ds$$

Soit en posant $Y(t) = \log S(t)$

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dW(s).$$

On en déduit que

$$Y(t) = \log S(t) = \log S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t).$$

Il semble donc que

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}$$

soit une solution de notre problème. Vérifions rigoureusement cela. Posons

$$\begin{aligned} f(s, x) &= S(0) \cdot \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma x \right\}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) &= \sigma f(s, x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x) &= \sigma^2 f(s, x) \\ \frac{\partial f}{\partial s}(s, x) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(s, x) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
S(t) = f(t, W(t)) &= \underbrace{f(0, 0)}_{S(0)} + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, W(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W(s)) dW(s) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W(s)) d[W, W]_s \\
&= S(0) + \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(s, W(s)) ds + \int_0^t \sigma f(s, W(s)) dW(s) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f(s, W(s)) ds \\
&= S(0) + r \int_0^t ds S(s) + \sigma \int_0^t S(s) dW(s).
\end{aligned}$$

De plus, par unicité de la solution, on a :

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}$$

B Calcul théorique du prix d'une option Put sous le modèle de Black Sholes

On fait un premier calcul analytique :

Premièrement, le pay-off peut s'écrire :

$$(K - S(T))_+ = (K - S(T)) \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)}$$

A l'aide de l'expression calculée plus haut.

On remplace S(T) par l'expression trouvée en (2) :

$$(K - S(T)) \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)} = (K - S(0)) \cdot \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right\} \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
P^{euro} &= e^{-rT} \mathbb{E}((K - S(0)) \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)}) \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)} \\
&= e^{-rT} K \mathbb{P}(W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)) - S(0) \mathbb{E}(e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W(T)} \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)}) \\
&= e^{-rT} K \mathbb{P}(W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)) - S(0) \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt + \int_0^T \sigma dW(t)} \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)}) \\
&= e^{-rT} K \mathbb{F}\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)\right) - S(0) \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt + \int_0^T \sigma dW(t)} \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)})
\end{aligned}$$

car $W = \sqrt{T}G$, G suivant la loi gaussienne centrée, et F la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée

D'après le théorème de Girsanov :

Soit $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré avec un horizon fini T . On suppose que la filtration \mathcal{F} est complétée et continue à droite. Soit $(W(t))_{0 \leq t \leq T}$ un \mathcal{F} -mouvement Brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^d et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ un processus progressivement mesurable à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que $\int_0^T |\theta_t|^2 dt < \infty$ p.s.. Le processus L^θ défini par

$$L_t^\theta = \exp \left(- \int_0^t \theta_s \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\theta_s|^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

est une martingale locale. Si L^θ est une martingale sous la probabilité \mathbb{Q} de densité par rapport à \mathbb{P} définie par $\frac{d}{d\mathbb{P}} = L_T^\theta$, alors le processus B défini par

$$B_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

est un \mathcal{F} -mouvement Brownien standard sous \mathbb{Q} à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Ici, on pose $\theta_s = -\sigma$, on obtient alors

$$L_t = \exp \left(\int_0^t \sigma \cdot dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

Or, comme σ est constant, on a :

$$E \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \right\} = E \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds \right) \right\} = E \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \right\} < \infty$$

Donc d'après Novikov, L est une martingale sous la probabilité \mathbb{Q} de densité par rapport à \mathbb{P}

Donc, d'après le théorème de Girsanov, $B(t) = W(t) - \sigma t$ est un mouvement brownien standard.

De plus, sous la probabilité \mathbb{Q} , on obtient :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt + \int_0^T \sigma dW(t)} \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)} \right) = \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left(\mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)} \right)$$

Soit :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt + \int_0^T \sigma dW(t)} \mathbb{1}_{W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)} \right) = \mathbb{P}^\mathbb{Q} \left(W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T) \right)$$

En revenant à la martingale définie plus haut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\mathbb{Q} \left(W(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T) \right) &= \mathbb{P}^\mathbb{Q} \left(B(T) \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T) - \sigma T \right) \\ &= F \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T) - \sigma \sqrt{T} \right) \end{aligned}$$

car $B = \sqrt{T}G$, G suivant une loi gaussienne centrée et F la fonction de répartition de la loi gaussienne.

Donc :

$$P^{euro} = e^{-rT} K F \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T) \right) - S(0) F \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} (\ln(\frac{K}{S(0)}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T) - \sigma \sqrt{T} \right)$$

En posant :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right)$$
$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T}$$

On obtient :

$$\boxed{P^{euro} = e^{-rT} K F(-d_1) - S(0) F(-d_2)}$$