Jeux à champ moyen et contrôle optimal stochastique dans l'espace des mesures de probabilité.

Charles Bertucci

Table des matières

1 Introduction

1.1 Introduction générale

L'objet principal de ces notes est l'étude de deux équations aux dérivées partielles (EDP) posées sur un espace de mesures de probabilité. Pour simplifier la discussion à venir, je considérerai ici l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ des mesures de probabilité sur le tore d dimensionnel $\mathbb{T}^d$.

La première équation étudiée ici est appelée équation maîtresse, ou master equation en anglais (anglicisme que je vais utiliser). Cette équation a un rôle central dans la théorie des jeux à champ moyen (MFG, pour l'anglais mean field games). Je présenterai notamment des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité pour ce type d'équations. Afin de mieux appréhender la structure de ces master equations, je commencerai par étudier une classe de master equations posées non pas sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ mais sur un compact de $\mathbb{R}^N$.

La seconde partie de ces notes porte sur l'étude d'une classe d'équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. Ces équations ont été extrêmement étudiées, notamment pour leurs applications en contrôle optimal, jeux dynamiques, grandes déviations... L'étude de ces équations repose habituellement sur la théorie des solutions de viscosités. Je présenterai donc une théorie de solutions de viscosités pour ces équations. J'introduirai également un problème de contrôle optimal stochastique sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ dont l'étude nécessite a priori d'analyser l'équation de HJB associée.

1.2 Notations

Dans ces notes, on notera $\mathbb{T}^d$ le tore d dimensionnel et $\mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ l'ensemble des mesures boréliennes sur $\mathbb{T}^d$ dont la norme canonique est

$$|\mu| := \int_{\mathbb{T}^d} d\mu^+ + \int_{T^d} d\mu^-, \tag{1}$$

où μ^+ et μ^- sont respectivement les parties positives et négatives de la mesure μ. Je noterai également $\mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d) := \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d), \mu \geq 0\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d) := \{\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d), |\mu| = 1\}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d) := \{\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d), |\mu| \leq 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, la masse de Dirac en x est notée δ_x.

À moins que je précise autrement, la distance entre deux mesures sera toujours ici la distance de Monge-Kantorovich (ou distance de Wasserstein 1) qui est donnée par

$$\mathbf{d}_1(\mu, \mu') := \sup_{\substack{\|\phi\|_{Lip} \leq 1, \\ |\phi(0)| \leq 1}} \int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)(\mu - \mu')(dx). \tag{2}$$

La notation $\langle a, b \rangle$ fera référence au produit de dualité canonique entre a et b. C'est à dire au produit scalaire usuel si $a, b \in \mathbb{R}^d$, mais aussi par exemple à l'intégrale d'une fonction continue contre une mesure. Par exemple, si $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^d)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$, alors, en notant Δ le Laplacien

$$\langle \phi, \Delta\mu \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} \Delta\phi(x)\mu(dx). \tag{3}$$

Une application A d'une partie X d'un espace vectoriel normé E dans son dual topologique E' est monotone si

$$\forall x, y \in X, \langle A(x) - A(y), x - y \rangle_{E',E} \geq 0. \tag{4}$$

La mesure image d'une mesure m par une application T est notée $T_\# m$.

Pour un n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ on note π_k la projection sur le k-ième terme, c'est à dire $\pi_k(x_1, x_2, ...x_n) = x_k$.

Étant données deux mesures $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, on appelle couplage entre μ et ν une mesure $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^{2d})$ telle que $(\pi_1)_\# \gamma = \mu$ et $(\pi_2)_\# \gamma = \nu$. On note $\Pi(\mu, \nu)$ l'ensemble des couplages entre μ et ν.

La distance de Wasserstein d'ordre k entre $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, notée W_k est définie par

$$W_k^k(\mu, \nu) = \inf_\gamma \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} |x-y|^k \gamma(dx, dy), \tag{5}$$

où l'infimum est pris sur les $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$. L'ensemble des couplages optimaux pour W_2 est noté $\Pi^o(\mu, \nu)$.

L'abréviation sci est faite pour semi-continue inférieurement et scs pour semi-continue supérieurement.

Pour une fonction localement bornée $u : E \to \mathbb{R}$ avec E munie d'une topologie (on ne s'intéressera qu'à des espaces métriques), on définit

$$u^*(x) = \limsup_{y \to x} u(y), \qquad u_*(x) = \liminf_{y \to x} u(y). \tag{6}$$

1.3 Calcul différentiel sur l'espace des mesures

Les objets d'intérêts de ces notes étant des équations aux dérivées partielles sur l'espace des mesures, la notion de dérivée par rapport à un argument mesure est ici centrale.

Soient une fonction $U : \mathcal{M}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$, $m \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ et $x \in \mathbb{T}^d$. Je noterai, lorsque cela est bien défini,

$$\nabla_m U(m, x) = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{U((1-\theta)m + \theta \delta_x) - U(m)}{\theta}. \tag{7}$$

La quantité $\nabla_m U(m, x)$ est donc la valeur de la dérivée de U dans la (demie) direction $\delta_x - m$. Par extension, la fonction $\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}, x \to \nabla_m U(m, x)$ est le gradient de U par rapport à l'argument mesure. Si U est une fonction régulière, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^d} \nabla_m U(\mu, x)(\nu - \mu)(dx) = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{U((1-\theta)\mu + \theta\nu) - U(\mu)}{\theta}. \tag{8}$$

Comme $\mathcal{M}_+(\mathbb{T}^d), \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$ et $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ sont convexes et que toutes les masses de Dirac sont comprises dans tous ces espaces, on définit de la même façon $\nabla_m U$ pour des fonctions définies sur ces espaces.

Comme le gradient de U par rapport à l'argument mesure est une fonction de la variable d'espace x, on peut également prendre les dérivées de ce gradient par rapport à cette variable d'espace. Je noterai

$$D_m U : \mathcal{M}(\mathbb{T}^d) \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d, (m, x) \to \nabla_x \nabla_m U(m, x). \tag{9}$$

Cet élément est parfois appelé la dérivée intrinsèque de U en m. Cette dérivée intrinsèque vérifie pour toute fonction $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ régulière la relation

$$\int_{\mathbb{T}^d} D_m U(m, x) \cdot \phi(x) m(dx) = \lim_{h \to 0} \frac{U((Id + h\phi)_\# m) - U(m)}{h}. \tag{10}$$

Ces deux dérivées reposent donc sur deux notions de chemins différents dans l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. La première considère simplement des combinaisons convexes de deux mesures, et la seconde utilise les chemins de la forme $((T_h)_\# m)_{h>0}$ pour une suite de fonction $(T_h)_{h>0}$.

Première partie . Master equations des jeux à champ moyen

2 De brefs éléments de contexte

La théorie des jeux à moyen est essentiellement un cadre théorique qui permet l'étude mathématique de jeux non atomiques dynamiques. Ce cadre théorique repose principalement sur les travaux de Lasry et Lions [31, 32, 33, 34]. Bien entendu, les premières études de ce genre de jeux sont antérieures à ces travaux, on peut par exemple mentioner les modèles économiques de Krusell et Smith [30], Scheinkman et Weiss [44] ou bien les travaux de Huang, Caines et Malhamé [25, 26, 27]. La théorie des MFG est à l'heure actuelle principalement centrée sur l'étude des équilibres de Nash de ces jeux.

De part son grand pouvoir de modélisation, cette théorie est actuellement très étudiée par de nombreux mathématiciens et est utilisée dans de nombreux domaines comme l'ingénierie, la finance, l'économie ou encore les sciences sociales de façon plus générale.

L'élément central dans la théorie des MFG est probablement la master equation, qui est en général une EDP non linéaire posée sur un espace de mesures. C'est cette équation que je vais étudier ici. Pour une présentation générale de la théorie des MFG et le rôle que joue la master equation, je renvoie au livre complet de Carmona et Delarue [15].

3 Un premier regard sur les master equations

3.1 Master equation et équilibres de Nash

La master equation typique à laquelle je vais m'intéresser est la suivante

$$\begin{aligned}\partial_t U - &\langle \nabla_m U(t,x,m,\cdot), \operatorname{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x U(t,\cdot,m))m) + \sigma\Delta m\rangle \\ &- \sigma\Delta_x U + H(x,\nabla_x U) = f(m)(x) \text{ dans } (0,\infty)\times\mathbb{T}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d),\end{aligned} \tag{11}$$

où $U : [0,\infty)\times\mathbb{T}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)\to\mathbb{R}$ est l'inconnue , $H : \mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)\to(\mathbb{T}^d\to\mathbb{R})$ sont des fonctions données. Le deuxième terme de (10) se comprend comme

$$\begin{aligned}-&\langle \nabla_m U(t,x,m,\cdot), \operatorname{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x U(t,\cdot,m))m) + \sigma\Delta m\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} D_mU(t,x,m,y)\cdot D_pH(y,\nabla_x U(t,y,m)) - \sigma\Delta_x U(t,y,m)m(dy).\end{aligned} \tag{12}$$

L'équation (10) est associée à la condition initiale

$$U(0,x,m) = U_0(m)(x) \text{ dans } \mathbb{T}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d), \tag{13}$$

où $U_0 : \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to (\mathbb{T}^d \to \mathbb{R})$ est une autre donnée du problème. La master equation est liée à son système de caractéristiques qui est donné par

$$\begin{aligned} \partial_t u - \sigma\Delta u + H(x, \nabla_x u) &= f(m)(x) \text{ dans } (0,T) \times \mathbb{T}^d, \\ -\partial_t m - \sigma\Delta m - \operatorname{div}(D_p H(x, \nabla_x u)m) &= 0 \text{ dans } (0,T) \times \mathbb{T}^d, \\ u(0,x) &= U_0(m_0)(x_0) \text{ dans } \mathbb{T}^d, m_T = \mu \text{ donné}, \end{aligned} \tag{14}$$

où $T > 0$ et $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ sont des données du système. Ce précédent système modélise les équilibres de Nash du MFG alors que la master equation (10) est l'équation satisfaite par la valeur du MFG (concept de valeur qui n'est pas clairement défini de façon générale).

Le lien entre (10) et (13) est le suivant : étant donné une solution régulière U de (10)-(12) et une solution (u, m) de (13), on a la relation

$$\forall t \in [0,T], x \in \mathbb{T}^d, U(t, x, m_t) = u(t, x). \tag{15}$$

Cette relation est aisément obtenue en différentiant en temps les deux côtés de l'égalité précédente. Elle fait apparaître la difficulté majeure liée à l'étude de (10) : lorsque il y a plus d'une solution au système (13), U n'est pas bien définie. Notons que cela n'a rien à voir avec la régularité des différentes fonctions H, f et U_0.

3.2 Monotonie et unicité des solutions régulières

Le régime monotone est un ensemble d'hypothèses sous lesquelles on peut garantir l'unicité des solutions de (13), et donc espérer définir une solution de (10) de façon relativement simple. Ce régime sera ici représenté par les hypothèses suivantes.

Hypothèse 3.1. — *Le Hamiltonien H est convexe en son deuxième argument.*
— *La fonction f est monotone.*
— *La fonction U_0 est monotone.*

Lasry et Lions ont montré : i) que sous des hypothèses très légèrement plus restrictives, on avait un résultat d'unicité général pour le système (13), ii) on peut établir une preuve d'unicité des solutions de la master equation dans ce régime.

Ils ont en particulier montré que

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* (3.1), *il existe au plus une solution régulière de* (10) *avec pour condition initiale U_0.*

Démonstration. Soit U et V deux solutions classiques de (10). On définit la fonction

$$W(t,\mu,\nu) := \langle U(t,\cdot,\mu) - V(t,\cdot,\nu), \mu - \nu\rangle. \tag{16}$$

En remarquant que

$$\nabla_\mu W(t,\mu,\nu,x) = U(t,x,\mu) - V(t,x,\nu) + \langle \nabla_m U(t,\cdot,\mu,x), \mu-\nu\rangle, \tag{17}$$

avec une relation analogue pour $\nabla_\nu W$, on obtient que W est solution de

$$\begin{aligned}\partial_t W - &\langle \nabla_\mu W(t,\mu,\nu,\cdot), \mathrm{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x U(t,\cdot,\mu))\mu) + \sigma\Delta\mu\rangle\\ &- \langle \nabla_\nu W(t,\mu,\nu,\cdot), \mathrm{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x V(t,\cdot,\nu))\nu) + \sigma\Delta\nu\rangle\\ = \quad &\langle f(\mu) - f(\nu), \mu-\nu\rangle + \langle \sigma\Delta U - H(\cdot,\nabla_x U(t,\cdot,\mu)), \mu-\nu\rangle\\ &\quad + \langle \sigma\Delta V - H(\cdot,\nabla_x V(t,\cdot,\nu)), \nu-\mu\rangle\\ &- \langle U(t,\cdot,\mu) - V(t,\cdot,\nu), \mathrm{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x U(t,\cdot,\mu))\mu) + \sigma\Delta\mu\rangle\\ &- \langle V(t,\cdot,\nu) - U(t,\cdot,\mu), \mathrm{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x V(t,\cdot,\nu))\nu) + \sigma\Delta\nu\rangle\,.\end{aligned} \tag{18}$$

L'équation précédente s'obtient en intégrant l'équation satisfaite par U contre $\mu-\nu$ et celle par V contre $\nu-\mu$. Les termes en σ du membre de droite s'annulent, puis en utilisant la convexité du Hamiltonien et la monotonie de f, on aboutit à

$$\begin{aligned}\partial_t W - &\langle \nabla_\mu W(t,\mu,\nu,\cdot), \mathrm{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x U(t,\cdot,\mu))\mu) + \sigma\Delta\mu\rangle\\ &- \langle \nabla_\nu W(t,\mu,\nu,\cdot), \mathrm{div}(D_pH(\cdot,\nabla_x V(t,\cdot,\nu))\nu) + \sigma\Delta\nu\rangle\\ &\geq 0.\end{aligned} \tag{19}$$

On souhaite montrer que $W \geq 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $Z : t,\mu,\nu \to W(t,\mu,\nu) + \delta t$ ne soit également pas positive.

Pour tout $t \geq 0$, considérons un point (μ,ν) de minimum de $W(t,\cdot,\cdot)$. En ce point on a $D_\mu W(t,\mu,\nu,x) = 0$ pour μ presque tout $x \in \mathbb{T}^d$ et également, $D_\nu W(t,\mu,\nu,x) = 0$ pour ν presque tout $x \in \mathbb{T}^d$. En effet, pour toute fonction $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ régulière

$$\langle D_\mu W(t,\mu,\nu,\cdot)\cdot\phi, \mu\rangle = \lim_{h\to 0} \frac{W(t,(Id+h)_{\#}\mu,\nu) - W(t,\mu,\nu)}{h} \geq 0. \tag{20}$$

On déduit donc de (18) que

$$\frac{d}{dt}\min_{\mu,\nu} Z(t,\mu,\nu) \geq \delta. \tag{21}$$

U_0 étant monotone, on en déduit que $Z|_{t=0} = W|_{t=0} \geq 0$, on aboutit donc à une contradiction et au fait que $W \geq 0$.

Soit $t \geq 0, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. Pour tout $\theta \in (0,1), \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$

$$\langle U(t,\cdot,(1-\theta)\mu + \theta\nu) - V(t,\cdot,\mu), \theta(\nu - \mu)\rangle \geq 0. \tag{22}$$

En divisant par θ et faisant tendre θ vers 0, on obtient finalement que

$$\langle U(t,\cdot,\mu) - V(t,\cdot,\mu), \nu - \mu\rangle \geq 0. \tag{23}$$

L'inégalité précédente étant vérifiée pour tout $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, on en déduit donc que $\nabla_x U = \nabla_x V$. En injectant cette égalité dans les équations satisfaites par U et V on en déduit finalement que $U = V$. □

Remarque 3.3. *En fait, la monotonie n'est pas du tout nécessaire ici dans la mesure où la régularité de U et V suffit pour entraîner l'égalité des deux fonctions en utilisant des estimées de type Grönwall sur $\nabla_x(U - V)$.*

Remarque 3.4. *D'autres régimes que le régime monotone peuvent être proposés pour obtenir l'unicité des solutions de* (13) *ou le caractère bien posé de* (10)*. On peut par exemple citer le régime dit monotone par déplacement, que je ne présenterai pas ici et pour lequel je renvoie à [24, 38]. Il est également important de noter qu'il semble clair qu'un certain ensemble d'hypothèses géométriques doivent être formulées et qu'il semble vain de vouloir parler de la solution d'une master equation dans un cas général.*

Une part importante de ces notes est consacrée à généraliser la preuve précédente à des fonctions U et V qui ne sont pas régulières en m. Cela est fait afin de pouvoir conserver un résultat d'unicité de solutions de la master equation pour des notions de solutions qui sont plus faibles que des solutions classiques.

4 Master equations dans le cas d'un espace d'états fini

Afin d'illustrer clairement le concept de solutions monotones que je vais introduire plus tard, j'introduis ici une version simplifiée de la master equation. Dans cette version simplifiée, l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ est remplacé par un ensemble convexe fermé $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Le choix le plus naturel d'ensemble Ω pourrait être de prendre $\{x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1\}$, cependant, on préférera prendre un ensemble Ω de la forme du simplexe de $\mathbb{R}^N$, c'est à dire l'ensemble $\{q_i \geq 0, \sum_{i=1}^N q_i \leq 1\}$, qui correspond à une représentation de l'espace des mesures de probabilité sur un ensemble fini à $N+1$ éléments, ou alors à une représentation de l'ensemble des mesures positives de masse au plus 1 sur un ensemble à N éléments.

Nous allons donc remplacer la variable $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ par une variable $q \in \Omega$. De la même façon, la variable dite d'état $x \in \mathbb{T}^d$ va donc être remplacée par une variable finie dimensionnelle $i \in \{1, ..., N\}$. Dans ce genre de modèle, la forme typique de la master equation est donnée par

$$\partial_t U(t,q) + (F(q, U(t,q)) \cdot \nabla_q) U(t,q) = G(q, U(t,q)) \text{ dans } (0,\infty) \times \Omega, \tag{24}$$

où l'inconnue U est une fonction $U : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ et où F et G sont deux fonctions du type $\Omega \ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Le terme $(F(q, U(t,q)) \cdot \nabla_q)$ est donc compris comme une dérivée en q dans la direction $F(q, U(t,q))$.

La condition initiale est donnée par

$$U|_{t=0} = U_0, \tag{25}$$

où $U_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

Remarque 4.1. *Dans ce cas plus simple, les dérivées présentes dans* (10) *par rapport à x ont disparue et celles en m sont des dérivées classiques en dimension finie. Par ailleurs, si on avait écrit la master equation* (10) *avec de tels opérateurs F et G, alors ceux-ci auraient été des opérateurs différentiels dans ce cas infini dimensionnel.*

4.1 Solutions monotones des master equations en espace d'états fini

L'objectif est ici de définir une notion de solution pour (23), basée sur l'idée de la preuve du Théorème 3.2.

Dans ce nouveau cadre, la fonction W définie en (15) dans la preuve du Théorème 3.2 devient [1]

$$W(t,q,p) = \langle U(t,q) - V(t,p), q - p \rangle. \tag{26}$$

L'unicité des solutions de (10) a été obtenue en montrant la positivité de W par un argument de type principe de comparaison. L'utilisation de cet argument nécessitait formellement 3 étapes :

— Utiliser la relation (16) qui devient ici, pour tout $i \in \{1, ...N\}$,

$$\partial_{q_i} W(t,q,p) = \langle D_{q_i} U(t,q), q - p \rangle + U^i(t,q) - V^i(t,p), \tag{27}$$

ainsi que l'équation vérifiée par U (ainsi que l'analogue pour V) pour obtenir une équation en W.

— Considérer un point de minimum de W.

— Utiliser (26) en ce point de minimum pour arriver à une contradiction.

1. Ici, la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fait référence au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$.

Donc, pour conserver cette stratégie, on a besoin d'information sur U uniquement au point de minimum de W. De part le doublement de variable, on a besoin d'information sur U aux points qui seront des minimums de fonctions du type $q \to \langle U(t,q) - V, q - p\rangle$ pour $V \in \mathbb{R}^N, p \in \Omega$.

De plus, à un tel point de minimum, l'équation (23) satisfaite par U est utilisée uniquement pour avoir de l'information sur les variations de $\langle U(t,q), q-p\rangle$.

Pour illustrer le propos précédent, considérons le cas suivant : soit $t \geq 0, V \in \mathbb{R}^N, p \in \Omega$, et q_* point de minimum de $q \to \langle U(t,q) - V, q-p\rangle$, on a en utilisant que U est solution de (23)

$$\partial_t \langle U(t,q_*), q_* - p\rangle + F(q_*, U(t,q_*)) \cdot D_q U(t,q_*) \cdot (q_* - p) = \langle G(q_*, U(t,q_*)), q_* - p\rangle. \tag{28}$$

Supposons que q_* est dans l'intérieur de Ω. Il est alors vrai que

$$0 = U(t,q_*) - V + \langle D_q U(t,q_*), q_* - p\rangle. \tag{29}$$

Cela est bien sûr l'analogue de (26). On en déduit donc que

$$\partial_t \langle U(t,q_*), q_* - p\rangle = \langle G(q_*, U(t,q_*)), q_* - p\rangle + \langle F(q_*, U(t,q_*)), U(t,q_*) - V\rangle. \tag{30}$$

C'est précisément ce type d'information qui va être encodée dans la définition des solutions dites monotones. Avant de donner cette définition, il convient de remarquer que le cas où q_* est sur le bord de Ω est plus problématique. Je vais supposer pour l'intégralité de ces notes l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.2. *L'ensemble Ω est un convexe fermé borné d'intérieur non vide régulier. Pour tout $q \in \partial\Omega, V \in \mathbb{R}^N$,*

$$\langle F(q,V), \eta(q)\rangle \geq 0, \tag{31}$$

où $\eta(q)$ est le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$ au point q.

Sous cette hypothèse, on peut alors faire le même développement que précédemment dans le cas $q_* \in \partial\Omega$, et on récupère à la place de (29)

$$\partial_t \langle U(t,q_*), q_* - p\rangle \geq \langle G(q_*, U(t,q_*)), q_* - p\rangle + \langle F(q_*, U(t,q_*)), U(t,q_*) - V\rangle. \tag{32}$$

Il est maintenant possible de faire la remarque fondamentale que la relation précédente ne fait pas intervenir les dérivées de U par rapport à q ! En faisant appel à la théorie des solutions de viscosités, initiée par Crandall et Lions [18], on va traiter le terme de dérivée par rapport au temps en utilisant une fonction test. Pour se faire, remarquons que si ϑ est une fonction régulière de t et que (t_*, q_*) est un point de minimum de $(t,q) \to \langle U(t,q) - V, q-p\rangle - \vartheta(t)$, alors on peut remplacer le premier terme dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\vartheta'(t_*) \geq \langle G(q_*, U(t_*, q_*)), q_* - p\rangle + \langle F(q_*, U(t_*, q_*)), U(t_*, q_*) - V\rangle. \tag{33}$$

Il est maintenant naturel d'introduire la définition suivante.

Définition 4.3. *Une fonction continue $U : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ est une solution monotone de* (23) *si pour tout $T > 0, V \in \mathbb{R}^N, p \in \Omega, \vartheta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $(t_*, q_*) \in (0,\infty) \times \Omega$ point de minimum strict de $(t,q) \to \langle U(t,q) - V, q-p\rangle - \vartheta(t)$ sur $[0,T] \times \Omega$,*

$$\vartheta'(t_*) \geq \langle G(q_*, U(t_*, q_*)), q_* - p\rangle + \langle F(q_*, U(t_*, q_*)), U(t_*, q_*) - V\rangle. \tag{34}$$

Remarque 4.4. *On se contente de demander que la relation soit vérifiée uniquement aux points de minimum stricte pour deux raisons : la première est que cela est suffisant comme nous allons le voir, la seconde est que dans certains cas il n'est pas clair que cela soit vrai peu importe le point de minimum, voir par exemple [3].*

4.2 Quelques résultats sur les solutions monotones

Au vu des calculs qui ont précédé la Définition 4.3, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Soit U une solution classique de* (23)*, alors U est également une solution monotone de* (23) *au sens de la Définition 4.3.*

Vu le choix de Définition qui a été fait, un résultat d'unicité ne devrait pas non plus surprendre la lectrice ou le lecteur. On précise ici le cadre monotone que l'on définit dans ce cas fini dimensionnel.

Hypothèse 4.6. *La fonction $(G,F) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2N}$ est monotone. La fonction $U_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est monotone.*

Remarque 4.7. *Cette hypothèse est en fait plus générale que l'hypothèse 3.1 dans la mesure où un lien plus précis est imposé entre G, F dans le cas de la master equation* (10)*. Je renvoie à Lions et Souganidis [36] pour une plus ample discussion sur ce sujet.*

Proposition 4.8. *Sous les hypothèses 4.2 et 4.6, il existe au plus une solution monotone de* (23) *au sens de la définition 4.3. De plus, si une telle solution existe, alors elle est monotone pour tout temps.*

Démonstration. Soit deux solutions monotones U et V. On montre dans un premier temps que W définie par (25) est positive.

On raisonne par l'absurde. Alors il existe $(T, q, p) \in (0, \infty) \times \Omega^2$ tel que

$$W(T, q, p) < 0. \tag{35}$$

On en déduit donc qu'il existe $\kappa, \epsilon > 0$, tel que pour tout $\alpha > 0$,

$$\inf_{t,s \in [0,T], p, q} \langle U(t, q) - V(s, p), q - p\rangle + \alpha(t - s)^2 + \epsilon(t + s) \leq -\kappa < 0. \tag{36}$$

D'après le Lemme de Stegall [2], pour tout $\eta > 0$, il existe $a, b \in \mathbb{R}^N, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ tels que $|a| + |b| + |\xi_1| \; + |\xi_2| \leq \eta$ et

$$(t, s, q, p) \to \langle U(t, q) - V(s, p), q - p\rangle + \alpha(t - s)^2 + \epsilon(t + s) + \langle a, q\rangle + \langle b, p\rangle + \xi_1 t + \xi_2 s \tag{37}$$

a un point de minimum strict dans $[0, T]^2 \times \Omega^2$ en (t_*, s_*, q_*, p_*). Supposons dans un premier temps que $t_* > 0$ et $s_* > 0$. Comme U est solution monotone de (23), on en déduit donc que

$$-\epsilon - 2\alpha(t_* - s_*) - \xi_1 \geq \langle G(q_*, U(t_*, q_*)), q_* - p_*\rangle + \langle F(q_*, U(t_*, q_*)), U(t_*, q_*) - V(s_*, p_*) + a\rangle. \tag{38}$$

La relation analogue pour V donne

$$-\epsilon - 2\alpha(s_* - t_*) - \xi_2 \geq \langle G(p_*, V(s_*, p_*)), p_* - q_*\rangle + \langle F(p_*, V(s_*, p_*)), V(s_*, p_*) - U(t_*, q_*) + b\rangle. \tag{39}$$

En sommant les deux inégalités précédentes, on arrive alors à

$$\begin{aligned} -2\epsilon \geq & \langle G(q_*, U(t_*, q_*)) - G(p_*, V(s_*, p_*)), q_* - p_*\rangle \\ & + \langle F(q_*, U(t_*, q_*)) - F(p_*, V(s_*, p_*)), U(t_*, q_*) - V(s_*, p_*)\rangle + O(\eta). \end{aligned} \tag{40}$$

En utilisant la monotonie de (G, F), on arrive donc à $\epsilon < 0$ quitte à prendre η suffisamment petit. On arrive donc à une contradiction et sommes donc ramenés au cas $t_* = 0$ ou $s_* = 0$.

Considérons le premier des deux derniers cas (le deuxième étant parfaitement symétrique). En reprenant la définition de (t_*, s_*, q_*, p_*), on trouve

$$\langle U_0(q_*) - V(s_*, p_*), q_* - p_*\rangle + \alpha(s_*)^2 + \epsilon s_* + \langle a, q_*\rangle + \langle b, p_*\rangle + \xi_2 s_* \leq -\frac{\kappa}{2}. \tag{41}$$

Or cela implique entre autre que s_* est de l'ordre de $\sqrt{\alpha}$. Or V est continue et vérifie la condition initiale. Donc

$$\liminf_{s \to 0} \langle U_0(q_*) - V(s, p_*), q_* - p_*\rangle \geq 0. \tag{42}$$

2. Le Lemme de Stegall est habituellement énoncé en dimension infinie et la version finie dimensionnelle que nous utilisons ici est simplement un résultat classique d'optimisation. Ce Lemme est discuté plus en détails plus loin dans ces notes.

On arrive donc à une contradiction quitte à prendre α suffisamment grand, de part la monotonie de U_0.

On a donc montré que $W \geq 0$. Prenons maintenant $t \geq 0$ et q dans l'intérieur de Ω, et $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que, pour tout $p \in \mathbb{R}^N$, $|p| \leq 1$, $q \pm \epsilon p \in \Omega$. On alors

$$\langle U(t,q) - V(t, q - \epsilon p), \epsilon p \rangle \geq 0. \tag{43}$$

En divisant par ϵ puis en faisant tendre ϵ vers 0, on trouve alors

$$\langle U(t,q) - V(t,q), p \rangle \geq 0. \tag{44}$$

Donc $U(t,q) = V(t,q)$ et l'égalité est aussi vrai sur le bord de Ω par continuité. Prenant $U = V$ on remarque que l'on a également montré la monotonie de U. $\square$

Remarque 4.9. *Le Lemme de Stegall auquel je fais référence plus haut est un résultat d'optimisation perturbée du à Stegall [45, 46], qui est en fait vrai dans un contexte beaucoup plus général. Je renvoie au livre de Phelps [42] pour une présentation plus précise de ce résultat. Un énoncé et une preuve sont fournis dans ces notes dans le cas infini dimensionnel plus bas.*

On peut aussi établir des résultats de stabilité des solutions monotones comme le résultat suivant.

Proposition 4.10. *Soit une suite de couples de fonctions $(G_n, F_n)_{n\geq 0}$ qui converge localement uniformément vers un couple de fonctions $(G, F) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2N}$. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de solutions monotones de* (23) *où U_n est associée à (G_n, F_n) telle que $(U_n)_{n\geq 0}$ converge localement uniformément vers une fonction U. Alors U est solution monotone de* (23).

Démonstration. Soit $T > 0, V \in \mathbb{R}^N, p \in \Omega$, ϑ une fonction réelle régulière et $(t_*, q_*) \in (t_*, q_*) \in (0,T] \times \Omega$ un point de minimum strict de $(t,q) \to \langle U(t,q) - V, q - p \rangle - \vartheta(t)$ dans $[0,T] \times \Omega$. Pour tout $n \geq 0$, d'après le Lemme de Stegall, on peut considérer $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(\xi_n)_{n\geq 0}$ deux suites à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ telles que $|a_n| + |\xi_n| \leq n^{-1}$ et pour tout n,

$$(t,q) \to \langle U_n(t,q) - V - a_n, q - p \rangle - \vartheta(t) - \xi_n t \tag{45}$$

admet un minimum strict dans $[0,T] \times \Omega$. On note ce point (t_n, q_n). Comme U_n est solution monotone d'une certaine master equation, on en déduit que, si $t_n > 0$,

$$\vartheta'(t_n) + \xi_n \geq \langle G_n(q_n, U_n(t_n, q_n)), q_n - p \rangle + \langle F_n(q_n, U_n(t_n, q_n)), U_n(t_n, q_n) - V - a_n \rangle. \tag{46}$$

Comme (t_*, q_*) a été défini comme un point de minimum strict, on en déduit que $(t_n, q_n)_{n\geq 0}$ converge vers (t_*, q_*) lorsque $n \to \infty$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient le résultat annoncé. $\square$

Remarque 4.11. *Le fait que l'on s'intéresse à des points de minimum strict est très utile dans ce résultat. En effet, il n'est pas clair que tout point de minimum (non strict donc) peut être limite de points de minimum, alors que cela est bien sûr vrai pour des minimums stricts.*

Remarque 4.12. *D'autres résultats de stabilités peuvent être établis, comme par exemple dans Bertucci et Cecchin [7], où la convergence des solutions de* (23) *vers les solutions de* (10) *est établie lorsque $N \to \infty$ pour un choix judicieux de G et F.*

5 Solutions monotones de master equation en dimension infinie

Je présente ici comment étendre la notion précédente au cas de (10). Par de nombreux aspects, la notion de solution monotone pour (10) est similaire à celle pour (23), c'est pourquoi je m'attarderai ici uniquement sur les points techniques qui nécessitent un argument différent de ceux donnés dans la section précédente.

L'idée principale est de reprendre la définition de la section précédente en faisant cette fois l'analogie

$$\begin{aligned} G^i(q,U) &\leftarrow f(m)(x) - H(x, \nabla_x U) + \sigma \Delta_x U, \\ F^i(q,U) &\leftarrow -\mathrm{div}(D_p H(x, \nabla_x U)m) - \sigma \Delta m, \end{aligned} \tag{47}$$

où i est à mettre en relation avec x et q avec m. La principale différence est maintenant que, si dans la partie précédente on a pu considérer des solutions U qui sont simplement continues, la régularité de U par rapport à la variable d'état x va jouer un rôle différent. De plus, je vais présenter ici une notion de solution pour la master equation dans l'espace $\mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$ plutôt que dans $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, afin d'éviter des détails techniques sans importance. Ainsi, vue la partie précédente, une définition raisonnable est celle que je propose maintenant.

Définition 5.1. *Une fonction continue $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$ est une solution monotone de* (10) *si*
- *Pour tout $t > 0, m \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$, $U(t,\cdot,m) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R})$.*
- *Pour tout $T > 0, \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}), \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d), \vartheta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $(t_*, m_*) \in (0,T] \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$ point de strict minimum de $(t,m) \to \langle U(t,\cdot,m) - \phi, m - \nu\rangle - \vartheta(t)$ dans $[0,T] \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$, on a*

$$\begin{aligned} \vartheta'(t_*) \geq &\langle f(m_*) - H(\cdot, \nabla_x U(t_*,\cdot,m_*)) + \sigma \Delta_x U(t_*,\cdot,m_*), m_* - \nu \ \rangle \\ &+ \langle U(t_*,\cdot,m_*) - \phi, -div(D_p H(\cdot, \nabla_x U(t_*,\cdot,m_*))m_*) - \sigma \Delta m_* \rangle. \end{aligned} \tag{48}$$

Remarque 5.2. *Cette définition d'une solution de la master equation ne nécessite que de la continuité par rapport à la variable m.*

Remarque 5.3. *La régularité de la fonction U par rapport à la variable x est un point qui peut être le sujet d'amélioration. En effet, on peut dans un premier temps remarquer que seule une régularité de type $W^{2,\infty}$ en x est nécessaire pour pouvoir écrire la relation* (47). *Dans un second temps, on pourrait vouloir aller plus loin en demandant moins de régularité. Pour se faire, on peut remarquer que les termes en $\langle \Delta_x U, m_* \rangle$ se simplifient dans la relation* (47) *et que le seul terme du second ordre à traiter est $\langle \Delta_x U, \nu \rangle$. Ce terme est bien défini, peu importe la régularité de x, si ν est suffisamment régulier. Il serait alors intéressant de voir si une définition de solution monotone qui demande simplement de l'information pour des ν plus réguliers, et qui permettrait donc de considérer des U qui le sont moins, conduirait à considérer les mêmes solutions.*

Voici l'analogue des deux résultats donnés dans le cas fini dimensionnel.

Proposition 5.4. *Sous l'Hypothèse 3.1 il existe au plus une solution monotone de* (10) *au sense de la Définition 5.1 avec pour condition initiale U_0.*

Proposition 5.5. *Soit $(H_n)_{n\geq 0}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergeant localement uniformément vers H et f dans respectivement $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}$. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de solutions monotones de* (10) *associées à H_n et f_n telle que $(U_n, \nabla_x U_n, \Delta_x U_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $(U, \nabla_x U, \Delta_x U)$ pour une fonction $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$. Alors, U est solution monotone de* (10).

La démonstration de la Proposition 5.5 est entièrement similaire à celle de son analogue fini dimensionnel. Le seul point clef à vérifier est le fait que, dans ce contexte également, on peut utiliser le résultat d'optimisation approchée (le Lemme de Stegall), ce que je fais maintenant.

Lemme 5.6. *Soit $F : \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, telle que $\|\phi\|_2 \leq \epsilon$, et $\mu \to F(\mu) + \langle \phi, \mu \rangle$ admet un minimum strict sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.*

Démonstration. Soit $m > 6d$ et $H^m(\mathbb{T}^d)$ l'espace de Sobolev associé. On a $H^m(\mathbb{T}^d) \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^d)$. Considérons l'opérateur (multivoque) $A : H^m(\mathbb{T}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ définie par

$$A(\phi) = \{\mu, F(\mu) + \langle \phi, \mu \rangle = \inf_{\nu} F(\nu) + \langle \phi, \nu \rangle\}. \tag{49}$$

Comme F est semi continue inférieurement et que $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ est compact, pour tout $\phi \in H^m$, $A(\phi)$ est non vide. Notons que A est à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \subset (H^m(\mathbb{T}^d))^*$. Comme $H^m(\mathbb{T}^d)$ est un espace de Hilbert, on va associer à l'opérateur A, l'opérateur

$B = I \circ A$ où I est l'injection canonique $(H^m)^* \to H^m$. On veut montrer que $-A$ (ou de façon équivalente $-B$) est un opérateur cycliquement monotone. Soit une suite cyclique $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n = \phi_0$ d'éléments de H^m et une suite $(\mu_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $\mu_i \in A(\phi_i)$. Pour une telle suite, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \phi_i - \phi_{i-1}, \mu_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_i, \mu_i - \mu_{i+1} \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} F(\mu_{i+1}) - F(\mu_i) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{50}$$

Donc $-B$ est un opérateur cycliquement monotone de l'espace de Hilbert séparable $H^m(\mathbb{T}^d)$. Il existe donc une fonction convexe $\Phi : H^m \to \mathbb{R}$ telle que $-B = \partial^- \Phi$, le sous différentiel de Φ, qui est une fonction convexe (propre) de H^m, et qui est donc différentiable sur un ensemble de points dense dans H^m. Comme en chaque point de différentiabilité, le sous-différentiel est réduit à un singleton, on en déduit le résultat annoncé. □

Remarque 5.7. *Le résultat précédent n'est pas nouveau dans la littérature, je renvoie aux références mentionnées dans le cas en dimension finie.*

Comme nous l'avons dit, armés de ce Lemme, la démonstration de la Proposition 5.5 est la même que celle du cas fini dimensionnel. Pour ce qui est de la démonstration de la Proposition 5.4, même si elle est également similaire à son analogue fini dimensionnel, je présente ici une partie de l'argument, notamment afin de souligner l'intérêt de travailler dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$ plutôt que dans $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.

Démonstration. (De la Proposition 5.4) En procédant exactement de la même façon que dans le cas fini dimensionnel, on aboutit à la conclusion que

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d), t \geq 0, W(t, \mu, \nu) = \langle U(t, \mu) - V(t, \nu), \mu - \nu \rangle \geq 0. \tag{51}$$

En raisonnant de manière analogue à la preuve du Théorème 3.2, on aboutit au fait que pour tout $t \geq 0, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$, on a

$$\nabla_x U(t, x, \mu) = \nabla_x V(t, x, \mu). \tag{52}$$

Donc en particulier $U(t, x, \mu) = V(t, x, \mu) + c(t, \mu)$ pour une certaine fonction continue c. Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$ telle que $|\mu| \in (0, 1)$. Par la positivité de W, on obtient que pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit

$$\langle U(t, \mu + \epsilon\lambda) - V(t, \mu), \epsilon\lambda \rangle \geq 0, \tag{53}$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$. En divisant par $\epsilon > 0$ et en faisant tendre ϵ vers 0 on obtient

$$c(t, \mu) \geq 0. \tag{54}$$

Par symétrie, on a donc $c(t, \mu) = 0$ pour tout $t \geq 0, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d), |\mu| \in (0, 1)$. D'où finalement, par continuité de U et V, on obtient $U = V$. $\square$

Remarque 5.8. *Si on définit simplement les solutions monotones de la master equation posée sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, à la place de (50), on obtient que cette inégalité est seulement vérifiée pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. Comme je l'ai mentionné plus haut, cela conduit seulement à $\nabla_x U = \nabla_x V$. On peut alors retrouver $U = V$ en faisant des hypothèses plus restrictives, notamment sur la monotonie de f.*

6 Existence de solutions monotones de master equation

L'existence de solutions de la master equation est une question qui s'avère être délicate, notamment si on s'intéresse à prouver l'existence de solutions classiques de cette équation. Je renvoie au livre de Cardaliaguet et al. [14] sur ce sujet.

Cependant, si on s'intéresse simplement à l'existence de solutions faibles, ayant une forme de régularité Lipschitz par exemple, alors le problème devient beaucoup plus simple. C'est notamment ce que nous avons mis en évidence avec J.-M. Lasry et P.-L. Lions dans [9].

6.1 Existence de solutions Lipschitz et monotones en espace d'états fini

Je considère ici l'équation (23). On peut remarquer que cette équation est de la forme

$$\partial_t U(t, x) + (V(t, x) \cdot \nabla_x) U(t, x) = B(t, x) \text{ dans } (0, \infty) \times \Omega, \tag{55}$$

avec V et B qui sont données par $V(t, x) = F(t, U(t, x))$ et $B(t, x) = G(x, U(t, x))$. Or, pour des équations du type de (54), on dispose de formules de représentations. En effet, étant données V et B (suffisamment réguliers), l'unique solution de (54), avec condition initiale U_0 est donnée par

$$U(t, x) = \int_0^t B(t - s, x(s)) ds + U_0(x(t)), \tag{56}$$

où $(x(s))_{s \in [0,t]}$ est la solution de

$$\frac{d}{ds} x(s) = -V(t - s, x(s)), \tag{57}$$

avec condition initiale $x(0) = x$.[3] Remarquons que cette formule des caractéristiques est bien définie dès lors que V est Lipschitz en sa deuxième variable, uniformément par rapport à sa première variable. En notant $\Phi(V, B)$ fonction donnée par (55)-(56), on peut introduire la définition suivante.

Définition 6.1. *Soit $T > 0$. Une fonction $U : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une solution Lipschitz de* (23) *sur* $[0, T]$ *si*

— *Il existe $C > 0$, tel que pour tout $t \in [0, T], x \in \Omega, |D_x U(t, x)| \leq C$.*

— $U = \Phi(F(\cdot, U(\cdot, \cdot)), G(\cdot, U(\cdot, \cdot)))$.

Pour une telle notion de solution, je reproduis ici un résultat de [9].

Proposition 6.2. *Supposons que U_0, F et G sont uniformément Lipschitz. Alors il existe $T > 0$ et U, unique solution Lipschitz de* (23) *sur* $[0, T]$.

Démonstration. Soit $T > 0$. Soit, pour $C > 0$ l'ensemble

$$E_C := \{U : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}, \|U\|_\infty \leq C, \|D_x U\|_\infty \leq C\}. \tag{58}$$

Soit $\Psi := \Phi(F(\cdot, U(\cdot, \cdot)), G(\cdot, U(\cdot, \cdot)))$. On montre d'abord que si C est assez grand et T assez petit, alors $\Psi(E_C) \subset E_C$. Soit $U \in E_C$, $t \in [0, T]$ et $x, y \in \Omega$. Calculons

$$\begin{aligned}|\Psi(U)(t,x) - \Psi(U)(t,y)| &= \left| \int_0^t G(x(s), U(t-s, x(s))) - G(y(s), U(t-s, y(s)))ds \right.\\ &\qquad \left. + U_0(x(t)) - U_0(y(t)) \right| \\ &\leq \left(t(\|D_x G\|_\infty + \|D_p G\|_\infty \|D_x U\|_\infty) + \|D_x U_0\|_\infty \right) \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|\end{aligned} \tag{59}$$

où $(x(s))_{s\in[0,T]}$ et $(y(s))_{s\in[0,T]}$ sont les solutions de

$$\frac{d}{ds} X(s) = -F(X(s), U(t-s, X(s))) \tag{60}$$

avec condition initiale respective x et y. La règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{d}{ds}|x(s) - y(s)| \leq \|D_x F\|_\infty |x(s) - y(s)| + \|D_p F\|_\infty \|D_x U\|_\infty |x(s) - y(s)|. \tag{61}$$

On déduit donc du Lemme de Grönwall que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)| \leq e^{t(\|D_x F\|_\infty + \|D_p F\|_\infty \|D_x U\|_\infty)} |x - y|. \tag{62}$$

3. Il y a ici un abus de notation car la trajectoire $(x_s)_{s\in[0,t]}$ dépend évidemment de t.

D'où on déduit facilement que $\Psi(E_C) \subset E_C$ pour T suffisamment petit, pourvu que C soit suffisamment grand.

On veut maintenant montrer que Ψ est une contraction pour la norme du suprémum. Soit U et V dans E_C. On peut calculer pour $t \in [0,T], x \in \ \Omega$

$$\begin{aligned}|\Psi(U)(t,x) - \Psi(V)(t,x)| &= \Bigg| \int_0^t G(x(s), U(t-s, x(s))) - G(y(s), V(t-s, y(s)))ds \\ &\qquad + U_0(x(t)) - U_0(y(t)) \Bigg| \\ &\leq \left(t(\|D_x G\|_\infty + \|D_p G\|_\infty \|D_x U\|_\infty) + \|D_x U_0\|_\infty \right) \sup_{0\leq s\leq t} |x(s) - y(s)| \\ &\quad + t\|D_p G\|_\infty \|U - V\|_\infty,\end{aligned} \tag{63}$$

où $(x(s))_{s\in[0,T]}$ est la solution de

$$\frac{d}{ds}X(s) = -F(X(s), U(t-s, X(s))) \tag{64}$$

avec condition initiale x et $(y(s))_{s\in[0,T]}$ est la solution de la même équation lorsqu'on a remplacé U par V, toujours avec condition initiale x. Par un calcul similaire à ce que l'on a fait dans la première partie de la preuve, on aboutit à

$$\frac{d}{ds}|x(s)-y(s)| \leq (\|D_x F\|_\infty + \|D_p F\|_\infty C)|x(s)-y(s)| + \|D_p F\|_\infty \|U-V\|_\infty. \tag{65}$$

Le Lemme de Grönwall implique donc que

$$|x(s) - y(s)| \leq (e^{(\|D_x F\|_\infty + \|D_p F\|_\infty C)s} - 1)\frac{\|D_p F\|_\infty \|U - V\|_\infty}{\|D_x F\|_\infty + \|D_p F\|_\infty C}. \tag{66}$$

On peut donc déduire que, quitte à prendre T plus petit, Ψ est une contraction pour la norme du suprémum. Par une méthode classique d'itérations de Picard, on peut alors montrer que pour tout $U \in E_C$, $(\Psi^k(U))_{k\geq 0}$ a une limite, pourvu que C soit assez grand et T assez petit. Cette limite est unique car Ψ est une contraction. □

L'intérêt de ce résultat par rapport à la partie précédente réside notamment dans le fait que les solutions Lipschitz sont également des solutions monotones.

Proposition 6.3. *Soit U une solution Lipschitz de* (23) *sur* $[0,T]$*, alors U est une solution monotone de* (23) *sur* $[0,T]$.

Démonstration. Soit $V \in \mathbb{R}^d, \tilde{q} \in \Omega$, une fonction réelle régulière ϑ et $(t_0, q_0) \in (0,T] \times \Omega$ un point de minimum strict de $(t,q) \to \langle U(t,q) - V, q - \tilde{q}\rangle - \vartheta(t)$ sur $[0,T] \times \Omega$. On a donc pour tout $t \in [0,T], q \in \Omega$,

$$\langle U(t,q) - V, q - \tilde{q}\rangle - \vartheta(t) \geq \langle U(t_0, q_0) - V, q_0 - \tilde{q}\rangle - \vartheta(t_0). \tag{67}$$

Introduisons $(q(s))_{s\in[0,t_0]}$ la solution de

$$\frac{d}{ds} q(s) = -F(q(s), U(t_0 - s, q(s))), \tag{68}$$

avec condition initiale q_0. En évaluant (66) en $t_0 - \epsilon, q(\epsilon)$ pour $\epsilon > 0$, on aboutit à

$$\langle U(t_0 - \epsilon, q(\epsilon)) - V, q(\epsilon) - \tilde{q}\rangle - \vartheta(t_0 - \epsilon) \geq \langle U(t_0, q_0) - V, q_0 - \tilde{q}\rangle - \vartheta(t_0). \tag{69}$$

On peut réarranger cette dernière équation en

$$\langle U(t_0 - \epsilon, q(\epsilon)) - U(t_0, q_0), q(\epsilon) - \tilde{q}\rangle + \vartheta(t_0) - \vartheta(t_0 - \epsilon) \geq \langle U(t_0, q_0) - V, q_0 - q(\epsilon)\rangle. \tag{70}$$

Comme U est solution Lipschitz de (23), on en déduit que

$$\begin{aligned} &\langle -\int_{t_0-\epsilon}^{t_0} G(q(t_0 - s), U(t_0 - s, q(t_0 - s)))ds, q(\epsilon) - \tilde{q}\rangle + \vartheta(t_0) - \vartheta(t_0 - \epsilon) \\ &\qquad \geq \langle U(t_0, q_0) - V, q_0 - q(\epsilon)\rangle. \end{aligned} \tag{71}$$

En divisant par ϵ et en prenant la limite $\epsilon \to 0$, on retrouve alors la relation que doivent satisfaire les solutions monotones grâce à la définition de $(q(s))_{s\in[0,t_0]}$.

Par ailleurs, la continuité de U est immédiate. U est donc bien une solution monotone de (23). $\square$

6.2 Existence de solutions Lipschitz en dimension infinie

Le même genre de technique que celle que l'on vient de présenter peut être utilisée pour traiter l'existence de solutions à (10). Je passe ici relativement rapidement sur cette généralisation et renvoie à [9] pour plus de détails. La principale difficulté à généraliser le cas précédent réside bien entendu dans le fait que (10) fait intervenir des dérivées de U par rapport à x. Dans ce cas, on peut alors remarquer que l'équation satisfaite par $W := \nabla_x U$ est

$$\begin{aligned} &\partial_t W - \langle \nabla_m W(t,x,m,\cdot), \operatorname{div}(D_p H(\cdot, W(t,\cdot,m))m) + \sigma\Delta m\rangle \\ &- \Delta_x W + D_x H(x,W) + D_x W \cdot D_p H(x,W) = \nabla_x f(m)(x) \text{ dans } (0,\infty) \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d). \end{aligned} \tag{72}$$

Cette équation ne fait intervenir que des termes linéaires dans les dérivées de W en x. On peut donc donner une définition analogue de solution Lipschitz dans ce cas.

Définition 6.4. *Soit $T > 0$. Une fonction $W : [0,T] \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}^d$ est une solution Lipschitz de (71) avec condition initiale $\nabla_x U_0$ si*

— *W est Lipschitz en (x, m), uniformément en $t \in [0,T]$.*

— *Pour tout $(t, x, m_0) \in [0,T] \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$,*

$$W(t,x,m_0) = \mathbb{E}\Bigg[\int_0^t \nabla_x f(m(s))(X_s) - D_x H(X_s, W(t-s, X_s, m(s)))ds + \nabla_x U_0(X_t, m(t))\Bigg], \tag{73}$$

où $(X_s, m(s))_{s\in[0,T]}$ est la solution forte de

$$\begin{cases} dX_s = -D_p H(X_s, W(t-s, X_s, m(s)))ds + \sqrt{2\sigma}dB_s \text{ pour } s \in (0,t) \\ \partial_s m - \sigma\Delta m - div(D_p H(x, W(t-s,x,m(s)))m(s)) = 0 \text{ dans } (0,t) \times \mathbb{T}^d, \end{cases} \tag{74}$$

avec condition initiale (x, m_0) et où $(B_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement Brownien sur un espace probabilisé standard.

On a le résultat suivant.

Proposition 6.5. *Supposons que $\nabla_x U_0, D_x H, D_p H$ sont Lipschitiz en (x, m). Alors, il existe $T > 0$ et $W : [0,T] \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}^d$ tels que W est solution Lipschitz de (71) sur $[0,T]$.*

Je renvoie à [9] pour la preuve de ce résultat.

On reconstruit alors les solutions de (10) comme dans la définition suivante.

Définition 6.6. *Soit $T > 0$ et $U : [0,T] \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$. On dit que U est solution Lipschitz de (10) sur $[0,T]$ si*

— *U est dérivable en x. On note $W = \nabla_x U$.*

— *W est solution Lipschitz de (71) sur $[0,T]$.*

— *Pour tout $(t, x, m) \in [0,T] \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_1(\mathbb{T}^d)$*

$$U(t,x,m) = \mathbb{E}\Bigg[\int_0^t f(m(s))(X_s) - H(X_s, W(t-s, X_s, m(s)))ds + U_0(X_t, m(t))\Bigg], \tag{75}$$

où $(X_s, m(s))_{s\in[0,T]}$ est la solution forte de

$$\begin{cases} dX_s = -D_p H(X_s, W(t-s, X_s, m(s)))ds + \sqrt{2\sigma}dB_s \text{ pour } s \in (0,t) \\ \partial_s m - \sigma\Delta m - div(D_p H(x, W(t-s,x,m(s)))m(s)) = 0 \text{ dans } (0,t) \times \mathbb{T}^d, \end{cases} \tag{76}$$

avec condition initiale (x, m_0) *et où* $(B_s)_{s\geq 0}$ *est un mouvement Brownien sur un espace probabilisé standard.*

On a alors un résultat similaire du lien entre solutions Lipschitz et solutions monotones.

Proposition 6.7. *Soit* U *une solution Lipschitz de* (10) *sur* $[0, T]$*. Alors* U *est également solution monotone de* (10) *sur* $[0, T]$*.*

J'omets la démonstration de ce résultat car elle est la même que dans le cas en espace d'états fini.

6.3 Vers l'obtention de résultats d'existence plus généraux

Deux commentaires très importants doivent être faits ici sur les résultats d'existence que je viens de présenter.

— L'existence de solution Lipschitz est a priori uniquement garantie en temps court (T peut être arbitrairement petit).

— Si on utilise toujours des solutions qui sont Lipschitz, pourquoi ne pas utiliser cette régularité pour les solutions monotones ?

La réponse naturelle à ces deux commentaires est la suivante. Afin d'obtenir des résultats d'existence pour des intervalles de temps arbitrairement grand, il faut utiliser des hypothèses de type monotonie. Sous ce genre d'hypothèses, on peut obtenir des estimées a priori, comme expliqué dans Lions [34], Cardaliaguet et al. [14] ou Bertucci [4]. On peut alors étendre le temps d'existence T.

Pour ce qui est de la question de la régularité, on peut obtenir, toujours dans le régime monotone, des estimées a priori sur des régularités plus faibles que Lipschitz pour des solutions de master equation. On est alors contraint dans ces cas de travailler avec les solutions monotones plutôt qu'avec les solutions Lipschitz.

Dans tous les cas, le résultat de stabilité donné par la Proposition 5.5 est l'ingrédient essentiel pour justifier ce genre de résultats, que je ne présente pas dans ce cours par manque de temps.

7 Extensions à des MFG plus généraux

Comme mentionné dans l'introduction, les MFG représentent plus une classe de modèle qu'un ensemble d'équations bien défini. J'indique donc ici des extensions naturelles des résultats précédents à des cas de MFG plus généraux.

7.1 Le cas de bruits communs

L'extension la plus naturelle des résultats précédents concerne sans aucun doute le cas des master equations modélisant des MFG avec un bruit dit "commun". En fait, lorsque ce genre de bruit n'est pas présent, l'étude de la master equation n'est en général pas nécessaire et on peut se contenter d'étudier des systèmes forward-backward comme (13).

Bien que cette catégorisation ne soit pas un standard, il me semble que l'on peut identifier trois types généraux de bruits (ou d'aléas) communs.

— Le cas où les aléas communs induisent une dynamique aléatoire de la variable mesure de la master equation qui se traduit par des termes d'ordre 0 dans la master equation. On peut par exemple penser à des temps aléatoires auxquels la mesure "saute" dans un autre état, je renvoie par exemple à [3, 8]. Ces modèles font en général intervenir des termes de type intégro-différentiels dans la master equation.

  Pour les master equations associées, l'analyse mathématique est similaire à celle présentée ici. Des hypothèses doivent être faites sur les termes supplémentaires afin de préserver la propagation de la monotonie. Si les questions d'existence sont sensiblement plus délicates, dès lors qu'on dispose d'estimées a priori, des techniques standards de points fixes permettent de conclure. De tels résultats sont présentés dans [3].

— Le cas où les aléas communs induisent une dynamique aléatoire de la variable mesure qui se traduit par l'ajout de termes d'ordre 1 ou 2 dans la master equation. Dans ces modèles, l'étude mathématique du terme additionnel d'ordre 2 est en général délicate. Des résultats importants concernant les solutions classiques de telles équations sont présentés dans Cardaliaguet et al. [14]. J'ai montré que l'on pouvait considérer des solutions simplement $\mathcal{C}^1$ par rapport à l'argument mesure (et non $\mathcal{C}^2$) dans [4] avec des techniques similaires à celles présentées ici. Cardaliaguet et Souganidis ont obtenu dans [13] des résultats pour des solutions seulement continue par rapport à l'argument mesure en se plaçant dans le cas $\sigma = 0$ pour reprendre les notations de cette partie. Le cas général est à l'heure actuelle un problème ouvert.

— Le cas où les aléas communs ne portent pas directement sur la dynamique de la mesure sous-jacente mais sur certains paramètres de l'équation. Dans ces cas, la solution de la master equation dépend d'une variable supplémentaire qui regroupe les valeurs de ces paramètres qui évoluent de façon stochastique. Les termes supplémentaires sont alors des termes faisant intervenir les dérivées de la valeur du MFG par rapport à cette nouvelle variable. Des résultats partiels sur ces modèles sont présentés dans [3]. Cependant ces modèles restent à l'heure actuelle relativement peu étudiés et de nombreuses questions les concernants sont ouvertes.

7.2 Des MFG plus singuliers

Comme je l'ai montré plus haut, les solutions monotones des master equations sont particulièrement utiles pour donner un sens de solution faible à des master equations. Dans certains cas où la master equation est particulièrement singulière, cette technique est particulièrement utile.

En effet, dans certains MFG, lorsque les joueurs peuvent décider de sortir du jeu par exemple, il n'est pas clair que la master equation puisse s'écrire à l'aide d'opérateurs différentiels classiques. En revanche, à l'aide des solutions monotones, on peut donner une caractérisation des solutions. Cette idée est notamment présentée dans [3] pour des problèmes d'arrêt optimal et de contrôle impulsionnel ainsi que dans [5] pour des opérateur maximaux monotones généraux.

8 Commentaires bibliographiques

Comme je l'ai indiqué plus haut, les MFG sont principalement issus des travaux de Lasry et Lions [31, 32, 33, 34], bien que des modèles de tels jeux soient antérieurs, comme ceux de Krusell et Smith [30], Scheinkman et Weiss [44] ou bien les travaux de Huang, Caines et Malhamé [25, 26, 27].

De nombreux travaux ont portés sur l'étude de systèmes forward-backward comme (13). Ces travaux sont trop nombreux à l'heure actuelle pour être mentionnés ici, et je renvoie pour cela au livre de Carmona et Delarure [15], qui est probablement la référence la plus complète sur la théorie des MFG.

La master equation a été introduite par Lions, suite à ces travaux avec Lasry, dans son cours au Collège de France [34] en 2008. Les premiers résultats sur la master equation ont alors été obtenus via l'approche dite Hilbertienne introduite par Lions, et présentée dans ce même cours. Le travail de Chassagneux et al. [17] (datant de 2014), a présenté une étude probabiliste de la master equation. Le travail de Cardaliaguet et al. [14] a ensuite fait référence sur ce sujet, en adoptant une utilisation systématique du système de caractéristiques pour l'étude de la master equation. Cardaliaguet et Porretta se sont intéressés au comportement en temps long de la master equation dans [11]. Tous les résultats précédents sont obtenus soit avec des hypothèses soit de temps court soit de monotonie.

Des travaux ont ensuite porté sur l'étude de la master equation dans des régimes différents. On peut par exemple mentionner les travaux portant sur le cas dit monotone par déplacement de Gangbo et al. [24], des cas moins réguliers comme Mou et Zhang [40], des hypothèses d'anti-monotonie comme dans Mou et Zhang [41] ou dans Lions et Seeger [35], ou encore dans le cas dit potentiel comme dans Gangbo et al. [24] ou dans Cecchin et Delarue [16].

Les solutions monotones, qui sont l'objet principal d'étude de cette partie, ont été introduites dans Bertucci [3, 4]. Elles ont été reprises dans Cardaliaguet et Souganidis [13] pour traiter un cas avec bruit commun et $\sigma = 0$. Elles ont également été utilisées dans Bertucci et Cecchin [7] pour étudier la convergence de MFG à espace d'états fini vers un cas avec un espace d'états continu.

Les solutions Lipschitz qui sont le sujet de la fin de cette première partie sont introduites dans Bertucci et al. [9]. Des idées proches de cette définition de solution étaient présentes dans par exemple Chassagneux et al. [17].

Deuxième partie . Contrôle optimal stochastique et équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman dans l'espace des mesures de probabilité

Cette deuxième partie du cours porte principalement sur l'étude d'une version stochastique du problème classique de transport optimal. Le contenu de cette partie est essentiellement tiré de l'article récent [6].

9 Rappels sur le transport optimal

Le problème de transport optimal est un des problèmes les plus étudiés des mathématiques. Je ne vais donc pas retracer l'historique des contributions sur ce sujet ni l'étendue des applications de cette théorie. Je renvoie pour cela aux livres de Villani [47] et Santambrogio [43].

Brièvement, je rappelle que le problème de transport optimal, dans sa version originale, et dans $\mathbb{T}^d$, consiste à trouver une application $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ qui envoie la mesure μ sur la mesure ν est qui minimise le coût donné, pour une certaine fonction c, par

$$\int_{\mathbb{T}^d} c(x, T(x))\mu(dx). \tag{77}$$

D'une certaine façon, ce problème n'est pas "bien posé". La relaxation naturelle (dite de Kantorovich) du problème consiste à trouver un couplage γ sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ dont la première marginale $(\pi_1)_\#\gamma$ est μ et la deuxième$(\pi_2)_\#\gamma$ est ν et qui minimise

$$\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} c(x, y)\gamma(dx, dy). \tag{78}$$

Cette relaxation en est effectivement une dans le mesure où on ne se restreint pas pas dans cette deuxième approche à des couplages de la forme $(Id, T)_\#\mu$.

9.1 Formulation dynamique du transport optimal

Une formulation classique du transport optimal est la formulation dynamique de Benamou et Brenier introduite dans [2], dont je présente ici quelques aspcets. Soient deux mesures $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ et une fonction de coût $L : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Le problème est ici de transporter la mesure μ vers ν en temps 1 en minimisant le coût

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha(t, x))m_t(dx)dt, \tag{79}$$

où $\alpha : [0,1] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ est la vélocité avec laquelle on transporte μ vers ν et $(m_t)_{t\in[0,1]}$ est solution faible de l'équation de continuité

$$\partial_t m + \mathrm{div}(\alpha m) = 0 \text{ dans } (0,1) \times \mathbb{T}^d, \tag{80}$$

qui doit donc satisfaire $m_0 = \mu$ et $m_1 = \nu$. La trajectoire $(m_t)_{t\in[0,1]}$ représente l'évolution de l'état du problème. Cependant, si α n'est pas suffisamment régulier, on ne peut pas parler de la solution de l'équation précédente car elle peut admettre plusieurs solutions. Pour palier cette possible indétermination, on s'intéresse en général au problème

$$\inf_{\alpha,m} \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha(t,x)) m_t(dx) dt, \tag{81}$$

où l'infimum est pris sur toutes les paires (α, m) telles que $\alpha : [0,1] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ est mesurable et $m \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ satisfait $m_0 = \mu$ et $m_1 = \nu$, et telles que de plus l'équation (79) est vérifiée dans un sens faible.

La fonction de coût $L : (x,p) \to L(x,p)$ est en général prise convexe par rapport à p et souvent indépendante de x. Si on note $C(\mu,\nu)$ la valeur du problème de minimisation (80), on obtient que

- $C(\mu,\nu) = \mathbf{d}_1(\mu,\nu)$ si $L(x,p) = |p|$.
- De façon plus générale, $C(\mu,\nu) = W_k^k(\mu,\nu)$ si $L(x,p) = |p|^k$, où W_k est la distance de Wasserstein d'ordre k.

9.2 Programmation dynamique et transport optimal

Un autre point de vue que l'on peut avoir sur le problème de transport optimal consiste à le regarder comme un problème de contrôle optimal dynamique avec contrainte d'état au temps final. La variable d'état que l'on contrôle est alors la mesure m et la contrainte d'état au temps final ν. Comme d'habitude lorsqu'on prend une approche par programmation dynamique, on introduit la fonction valeur d'un tel problème. On définit donc $U : [0,T] \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$ par

$$U(t,\mu,\nu) = \inf_{\alpha,m} \int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha(s,x)) m_s(dx) ds, \tag{82}$$

où l'infimum est pris sur toutes les paires (α, m) telles que $\alpha : [t,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ est mesurable et $m \in \mathcal{C}([t,T], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ satisfait $m_t = \mu$ et $m_T = \nu$, et telle que de plus l'équation (79) est vérifiée au sens des distributions sur $(t,T) \times \mathbb{T}^d$. Ici, $T > 0$ est un paramètre qui indique l'horizon du problème, c'est à dire que l'état mesure doit être arrivé à la condition terminale ν à l'instant T.

Remarque 9.1. *J'insiste sur le fait qu'ici la valeur U dépend de la condition terminale ν.*

En supposant que U est régulière, on peut montrer qu'elle satisfait l'équation d'HJB suivante.

$$-\partial_t U(t,\mu,\nu) + \int_{\mathbb{T}^d} H(x, D_\mu U(t,\mu,\nu))\mu(dx) = 0 \text{ dans } (0,T)\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d). \tag{83}$$

Dans l'EDP précédente, H est le Hamiltonien du problème qui est défini par

$$H(x,p) = \sup_{\alpha\ \in\mathbb{R}^d}\{-L(x,\alpha) - \alpha\cdot p\}. \tag{84}$$

Proposition 9.2. *Supposons que U définie par* (81) *soit une fonction régulière, finie en tout point de* $(0,T)\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ *et que H soit régulier, alors U satisfait* (83)*.*

Remarque 9.3. *Je ne présente pas tous les détails de cette preuve dans la mesure où le but est simplement de dériver l'équation. On verra une notion de solution plus précise un peu plus loin.*

Démonstration. Soit $(t,m)\in(0,T)\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. Soit $t'\in(t,T)$. Par construction de U

$$\begin{aligned} U(t,m,\nu) &= \inf_{\alpha,m}\int_t^T\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x))m_s(dx)ds \\ &= \inf_{\alpha,m}\left\{\int_t^{t'}\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x))m_s(dx)ds + \int_{t'}^T\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x))m_s(dx)ds\right\}. \end{aligned} \tag{85}$$

Par la propriété de semi-groupe de l'équation de continuité, on en déduit que

$$U(t,m,\nu) = \inf_{\alpha,m}\left\{\int_t^{t'}\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x))m_s(dx)ds + U(t',m_{t'},\nu)\right\}, \tag{86}$$

où l'infimum est maintenant pris sur toutes les paires (α,m) telle que $\alpha:[t,t']\times\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}^d$ est mesurable et $m\in\mathcal{C}([t,t'],\mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ satisfait $m_t=m$, et telle que de plus l'équation (79) est vérifiée au sens des distributions sur $(t,t')\times\mathbb{T}^d$. Notons que comme U est finie partout, on peut oublier la contrainte au temps terminal T.

Soit (α,m) telle que (79) soit vérifiée sur (t,t'). Comme U est régulière, on peut faire le développement

$$\begin{aligned} U(t,m_{s_1},\nu) - U(t,m_{s_2},\nu) &= \int_0^1\int_{\mathbb{T}^d}\nabla_\mu U(t,(1-\theta)m_{s_2}+\theta m_{s_1},\nu,x)(m_{s_1}-m_{s_2})(x)d\theta \\ &= \int_0^1\int_{s_2}^{s_1}\int_{\mathbb{T}^d} D_\mu U(t,(1-\theta)m_{s_2}+\theta m_{s_1},\nu,x)\cdot\alpha(s',x)m_{s'}(dx)ds'd\theta. \end{aligned} \tag{87}$$

On peut donc réécrire (85)

$$
\begin{aligned}
0 &= \inf_{\alpha,m}\left\{\int_t^{t'}\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x))m_s(dx)ds + U(t',m_{t'},\nu) - U(t,m,\nu)\right\} \\
&= \inf_{\alpha,m}\left\{\int_t^{t'}\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x))m_s(dx)ds + \partial_t U(t,m_{t'},\nu)(t'-t) + o(t'-t)\right. \\
&\qquad \left. + \int_0^1\int_t^{t'}\int_{\mathbb{T}^d} D_\mu U(t,(1-\theta)m_t+\theta m_{t'},\nu,x)\cdot\alpha(s,x)m_s(dx)dsd\theta\right\}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

On divise alors par $t'-t$ puis on en déduit en faisant tendre t' vers t que

$$
-\partial_t U - \int_{\mathbb{T}^d}\inf_{\alpha\in\mathbb{R}^d}\{L(x,\alpha)+D_\mu U(t,\mu,\nu,x)\cdot\alpha(x)\}\mu(dx) = 0. \tag{89}
$$

□

En général, on s'attend à ce que la valeur U définie en (81) ne soit pas régulière, et donc le résultat précédent n'a pas d'autre intérêt que de justifier la forme de l'équation d'HJB. En effet, dans le cas où $H(x,p) = L(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2$, on connait explicitement U par la formule

$$
U(t,\mu,\nu) = \frac{W_2^2(\mu,\nu)}{2(T-t)}. \tag{90}
$$

Or on sait que la distance de Wasserstein 2 au carré n'est pas régulière sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. Je renvoie à l'article d'Alfonsi et Jourdain [1] pour plus de détails sur cette question.

Il nous faudra donc introduire une notion de solution plus faible pour cette EDP. C'est ce que je ferai un peu plus tard via la théorie des solutions de viscosité. On peut aussi noter que, vu l'expression de U dans ce cas quadratique, on s'attend à voir apparaître une singularité en $t=T$. De façon plus générale, on s'attend à ce que la valeur satisfasse en $t=T$

$$
U(T,\mu,\nu) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu=\nu \\ +\infty \text{ sinon.}\end{cases} \tag{91}
$$

10 Transport optimal avec cible stochastique

10.1 Présentation du problème

Le problème d'intérêt principal de cette partie est une extension du problème de transport optimal classique présenté ci-dessus. Dans cette extension, on se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et on se donne un processus Markovien $(\nu_t)_{t\geq 0}$ appelé cible. Le problème est alors essentiellement le même que précédemment si ce n'est que la contrainte terminale sur l'état $m_T = \nu$ est ici remplacée par $m_T = \nu_T$. Pour que le problème ne se réduise pas trivialement en le précédent, il faut évidemment restreindre l'espace des contrôles autorisés à être mesurables par rapport à la filtration générée par $(\nu_t)_{t\geq 0}$. Étant donné que je vais adopter une approche par programmation dynamique, j'introduis donc la valeur

$$U(t, \mu, \nu) = \inf_{\alpha, m} \mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha_s(x)) m_s(dx) ds \,\middle|\, \nu_t = \nu\right], \tag{92}$$

où l'infimum est pris sur toutes les paires (α, m) telles que

- $\alpha : \Omega \to ([t, T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d)$ est presque sûrement adapté
- $m : \Omega \to \mathcal{C}([t, T], \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$ est presque sûrement adapté et vérifie presque sûrement $m_t = \mu$ et $m_T = \nu_T$.
- Presque sûrement, le couple (α, m) est solution au sens faible de l'équation de continuité
$$\partial_t m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0 \text{ dans } (t, T) \times \mathbb{T}^d. \tag{93}$$

Dans ce cas stochastique, si on connait le générateur du processus cible, alors on peut également écrire une équation d'HJB associée à ce problème de contrôle (stochastique donc).

10.2 Deux cas modèles de cible stochastique

On considérera dans ces notes deux cas différents de cible stochastique que je liste et présente ci-dessous.

10.2.1 Une cible avec des sauts

Dans ce cas, la cible $(\nu_t)_{t\geq 0}$ est donnée par un processus de saut dont les temps de sauts sont Poissoniens d'intensité $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}_+$. À chacun de ces sauts t_i, la cible saute de ν_{t_i} à $\mathcal{T}\nu_{t_i}$. Ici, $\mathcal{T} : \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ et λ sont des données du modèle. L'opérateur de saut peut être très général, on reviendra sur ce point plus loin.

Le générateur associé à cette évolution, évalué en une fonction $\phi : [0, T] \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$, est

$$\lambda(t)(\phi(t, m) - \phi(t, \mathcal{T}m)). \tag{94}$$

Ainsi, l'équation d'HJB associée au problème de transport optimal stochastique est donc

$$-\partial_t U(t,\mu,\nu) + \int_{\mathbb{T}^d} H(x, D_\mu U(t,\mu,\nu,x))\mu(dx) + \lambda(t)(U(t,\mu,\nu) - U(t,\mu,\mathcal{T}\nu)) = 0 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)^2. \tag{95}$$

10.2.2 Une cible Brownienne

Dans ce cas, la cible $(\nu_t)_{t\geq 0}$ est donnée par

$$\nu_t = (\tau_{W_t})_\# \bar{\nu}, \tag{96}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté, τ_v la translation de vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ et $\bar{\nu} \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ une mesure fixée. La forme de la mesure cible est donc connue dès le début du problème de contrôle, c'est $\bar{\nu}$, mais celle-ci est constamment translatée par le processus $(W_t)_{t\geq 0}$. Pour simplifier la discussion à venir, je vais toujours supposer que $(W_t)_{t\geq 0}$ est la solution forte de

$$dW_t = \sigma(t)dB_t, \tag{97}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard d dimensionnel et $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application régulière donnée.

Dans ce cas, vu que la cible est connue à une translation près, il est plus commode de définir la valeur U comme une fonction du temps t, de l'état μ et de la translation w telle que la valeur du processus cible est $(\tau_w)_\#\bar{\nu}$. L'équation d'HJB associée à ce problème est alors

$$-\partial_t U(t,\mu,w) + \int_{\mathbb{T}^d} H(x, D_\mu U(t,\mu,w,x))\mu(dx) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\Delta_w U(t,\mu,w) = 0 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)\times\mathbb{T}^d. \tag{98}$$

11 Contrôlabilité du problème de transport optimal stochastique

Une première propriété qu'il convient de vérifier est que la valeur définie par (91) est bien finie, ce qui revient à montrer que le problème est contrôlable en espérance. On va également essayer d'obtenir un comportement relativement précis de la valeur du problème près de la singularité.

Des hypothèses doivent être faites sur la fonction de coût L. Pour illustrer différents comportements possibles, donnons la forme de la valeur dans le cas déterministe. Supposons qu'il existe $k \geq 1$, tel que pour tout $x \in \mathbb{T}^d, p \in \mathbb{R}^d$,

$$L(x,p) = |p|^k. \tag{99}$$

En faisant un changement de variable on obtient donc que pour tout $t \geq 0, \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$

$$\begin{aligned} U(t,\mu,\nu) &= \inf_{\alpha,m} \int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha(s,x)) m_s(dx)ds \\ &= \inf_{\alpha,m} \int_{T-1}^T \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{T-t}\right)^k |\alpha(s,x)|^k m_s(dx)(T-t)ds \\ &= \frac{U(T-1,\mu,\nu)}{(T-t)^{k-1}}. \end{aligned} \tag{100}$$

Comme $U(T-1,\mu,\nu) = W_k^k(\mu,\nu)$, on en déduit que le problème déterministe est contrôlable pour tout $k \geq 1$. Notons que l'égalité précédente nous donne évidemment la forme de U autour de la singularité $t = T$, mais aussi que la condition (90) n'est pas vérifiée lorsque $k = 1$.

Je finis cette discussion sur le problème déterministe en indiquant que si on se restreint à des contrôles bornés, c'est à dire $L(x,p) = +\infty$ si p est suffisamment grand, alors pour tout $\mu \neq \nu$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $U(T-\epsilon,\mu,\nu) = +\infty$. Donc le problème n'est pas toujours contrôlable dans ce cas.

11.1 Le cas avec saut

Dans ce cas, on va chercher à donner des hypothèses sur l'intensité des sauts λ sous lesquelles le problème est contrôlable. Une quantité naturelle que je vais utiliser pour formuler les hypothèses sur λ et la fonction valeur du problème associé déterministe, qui est évidemment la mesure du coût lorsqu'aucun saut ne se produit.

Je me donne donc ici une fonction de coût $L(x,p)$, une intensité de saut λ et un opérateur de saut $\mathcal{T}$. J'appelle U_{det} la fonction définie par (81) et U la fonction définie par (91). Je définie également

$$\omega(t) := \sup_{s \leq t, \mu, \nu} U_{det}(s,\mu,\nu). \tag{101}$$

On a le résultat suivant.

Proposition 11.1. *Supposons qu'il existe $C > 0, \gamma > -1$ tels que, pour $T - t \leq C^{-1}$*

$$\lambda(t)\omega(t) \leq C(T-t)^\gamma, \tag{102}$$

et

$$C^{-1}(T-t)^{-1}\int_t^T \lambda(s)ds \leq \lambda(t) \leq C(T-t)^{-1}\int_t^T \lambda(s)ds. \tag{103}$$

Alors il existe une fonction continue $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, telle que

$$|U(t,\mu,\nu) - U_{det}(t,\mu,\nu)| \leq \beta(t) \underset{t\to T}{\longrightarrow} 0. \tag{104}$$

L'hypothèse (102) est purement technique alors que (101) est une hypothèse cruciale. Par ailleurs, aucune hypothèse sur $\mathcal{T}$ n'est faite.

Démonstration. Supposons dans un premier temps qu'il existe toujours des paires optimales (α, m) pour le problème déterministe. Soit n le nombre saut et $\tau_0 = t < \tau_1 < ... < \tau_n \leq T$ les différents temps de sauts. Rappelons que, presque sûrement, $n < \infty$. Considérons le contrôle admissible défini par

— Pour $s \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, (α_s, m_s) est une paire optimale pour le problème $U_{det}(\tau_i, m_{\tau_i}, \mathcal{T}^i(\nu))$.

Notons que la concaténation de ces contrôle induit une trajectoire $(m_s)_{s\in[t,T]}$ qui est continue. Calculons le coût associé à ce contrôle.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha_s(x))m_s(dx)ds\right] \\
&= \mathbb{P}(n>0)\mathbb{E}\left[\int_{\tau_n}^T L(x,\alpha_s(x))m_s(dx)ds + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\int_{\mathbb{T}^d} L(x,\alpha_s(x))m_s(dx)ds \middle| n>0\right] \\
&\quad + \mathbb{P}(n=0)U_{det}(t,\mu,\nu) \\
&\leq \mathbb{P}(n>0)\mathbb{E}\left[U_{det}(\tau_n, m_{\tau_n}, \mathcal{T}^n\nu) + \sum_{i=0}^{n-1} U_{det}(\tau_i, m_{\tau_i}, \mathcal{T}^i\nu) \middle| n>0\right] \\
&\quad + \mathbb{P}(n=0)U_{det}(t,\mu,\nu) \\
&\leq \mathbb{P}(n>0)\mathbb{E}\left[\omega(\tau_n) + \sum_{i=0}^{n-1}\omega(\tau_i)\middle| n>0\right] + \mathbb{P}(n=0)U_{det}(t,\mu,\nu) \\
&\leq \mathbb{P}(n>0)\mathbb{E}\left[(1+n)\omega(\tau_n)|n>0\right] + \mathbb{P}(n=0)U_{det}(t,\mu,\nu).
\end{aligned} \tag{105}$$

Il faut donc estimer

$$\mathbb{E}\left[(1+n)\omega(\tau_n)|n>0\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[(1+n)\omega(\tau_n)|n=k]\mathbb{P}(n=k|n>0). \tag{106}$$

Par construction des temps de sauts

$$\mathbb{P}(n>0)\mathbb{P}(n=k|n>0) = \mathbb{P}(n=k) = \frac{\left(\int_t^T \lambda(s)ds\right)^k}{k!}e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}. \tag{107}$$

Par ailleurs, comme on peut borner la densité de t_k conditionné à t_{k-1} par une constante fois $\mathbb{1}_{s\geq t_{k-1}}\lambda(s)(\int_{t_{k-1}}^T\lambda)^{-1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(1+n)\omega(\tau_n)|n=k] &= (k+1)\int_t^T\int_{t_1}^T\dots\int_{t_{k-1}}^T\omega(t_k)\lambda(t_k)\frac{dt_k}{\int_{t_{k-1}}^T\lambda}\dots\frac{\lambda(t_2)dt_2}{\int_{t_1}^T\lambda}\frac{\lambda(t_1)dt_1}{\int_t^T\lambda}\\
&\leq C(k+1)\int_t^T\int_{t_1}^T\dots\int_{t_{k-2}}^T(T-t_{k-1})^{\gamma+1}\frac{\lambda(t_{k-1})dt_{k-1}}{\int_{t_{k-1}}^T\lambda}\dots\frac{\lambda(t_2)dt_2}{\int_{t_1}^T\lambda}\frac{\lambda(t_1)dt_1}{\int_t^T\lambda}\\
&\leq \frac{C^k(k+1)(T-t)^{\gamma+1}}{\int_t^T\lambda(s)ds}\leq\frac{C^k(k+1)(T-t)^{\gamma}}{\lambda(t)}\leq C^k(k+1)\omega(t).
\end{aligned}\tag{108}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n>0)\mathbb{E}\left[(1+n)\omega(\tau_n)|n>0\right] &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k(k+1)(T-t)^{\gamma}}{\lambda(t)}\mathbb{P}(n=k)\\
&\leq C(T-t)^{\gamma+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k\left(\int_t^T\lambda(s)ds\right)^{k-1}}{k!}e^{-\int_t^T\lambda(s)ds}\\
&\leq C(T-t)^{1+\gamma}.
\end{aligned}\tag{109}$$

De la même façon on trouve également

$$\begin{aligned}
(1-\mathbb{P}(n=0))U_{\text{det}}(t,\mu,\nu) &\leq C\int_t^T\lambda(s)\omega(t)ds\\
&\leq C(T-t)^{1+\gamma}.
\end{aligned}\tag{110}$$

On peut donc prendre $\beta(t)=C(T-t)^{1+\gamma}$, et on obtient

$$U(t,\mu,\nu)\leq\mathbb{E}\left[\int_t^T\int_{\mathbb{T}^d}L(x,\alpha_s(x))m_s(dx)ds\right]\leq U_{det}(t,\mu,\nu)+\beta(t).\tag{111}$$

La minoration de U s'obtient en utilisant simplement

$$U(t,\mu,\nu)\geq\mathbb{P}(n=0)U_{det}(t,\mu,\nu).\tag{112}$$

Pour finir cet argument il faut juste préciser que si des contrôles optimaux n'existent pas, il faut simplement réaliser le même argument avec des contrôles ϵ-optimaux pour des ϵ bien choisis.

□

Afin d'illustrer la nécessité d'avoir une hypothèse d'intégrabilité sur le produit $\lambda\omega$, on peut considérer le cas suivant. Le taux de saut est constant et égal à $\lambda>0$.

La fonction de coût est donnée par $L(x,p) = |p|^2$. On a déjà vu que dans ce cas, $\omega(t) = (T-t)^{-1}$. On suppose également qu'il existe $\nu \neq \mathcal{T}\nu$.

On se trouve donc dans le cas limite des hypothèses de la Proposition précédente. Soit (α, m) une paire admissible pour $U(t,\mu,\nu)$. On a toujours

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\right] \geq & \mathbb{P}(n=0)\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\middle| n=0\right] \\ & + \mathbb{P}(n=1)\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\middle| n=1\right].\end{aligned} \tag{113}$$

Notons que par définition de la distance de Wasserstein, pour tout $t' \in [t,T]$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\middle| n=0\right] & \geq \mathbb{E}\left[\int_{t'}^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\middle| n=0\right] \\ & \geq \mathbb{E}\left[\frac{W_2^2(m_{t'},\nu)}{T-t'}\right].\end{aligned} \tag{114}$$

Notons $\tilde{p}$ la densité de la loi du premier saut τ_1 conditionné à $\{n=1\}$. On peut en particulier intégrer l'inégalité précédente en supposant que t' est distribué selon $\tilde{p}$ pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\middle| n=0\right] \geq \int_t^T \mathbb{E}\left[\frac{W_2^2(m_{t'},\nu)}{T-t'}\right]\tilde{p}(t')dt'. \tag{115}$$

Par ailleurs, comme $(m_s)_{s\in[t,\tau_1]}$ ne dépend pas de la réalisation du processus de sauts autrement que par τ_1, on a bien sûr l'inégalité

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_{\mathbb{T}^d} |\alpha_s(x)|^2 m_s(dx)ds\middle| n=1\right] \geq \int_t^T \mathbb{E}\left[\frac{W_2^2(m_{t'},\mathcal{T}\nu)}{T-t'}\right]\tilde{p}(t')dt'. \tag{116}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}U(t,\mu,\nu) & \geq \mathbb{P}(n=1)\int_t^T \mathbb{E}\left[\frac{W_2^2(m_{t'},\nu) + W_2^2(m_{t'},\mathcal{T}\nu)}{T-t'}\right]\tilde{p}(t')dt' \\ & \geq \mathbb{P}(n=1)\int_t^T \frac{W_2^2(\nu,\mathcal{T}\nu)}{4(T-t')}\tilde{p}(t')dt'.\end{aligned} \tag{117}$$

Comme $\liminf_{t'\to 0}\tilde{p}(t') > 0$, on en déduit finalement que $U(t,\mu,\nu) = +\infty$ dans ce cas limite des hypothèses du résultat.

Remarque 11.2. *Une autre interprétation du résultat précédent est que le contrôle exhibé est proche d'être optimal lorsque t est proche de T.*

11.2 Le cas d'une cible Brownienne

Dans ce cas, pour limiter les développements techniques, on va se limiter à des fonctions de coût L convexes et positives en p et à croissance au plus quadratique, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{T}^d, p \ \in \mathbb{R}^d, L(x, p) \leq C(1 + |p|^2). \tag{118}$$

Avant de nous intéresser au problème de la contrôlabilité du transport optimal stochastique, je présente un résultat qui est un analogue fini dimensionnel de la contrôlabilité d'une EDS.

Lemme 11.3. *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *la solution forte de* (96) *à valeurs dans* $\mathbb{T}^d$*. Presque sûrement, pour toute condition initiale* $X_0 \in \mathbb{T}^d$*, soit* $(X_t)_{t\in[0,T)}$ *l'unique solution de*

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{W_t - X_t}{T - t}. \tag{119}$$

Presque sûrement, cette solution $(X_t)_{t\in[0,T)}$ *est continue en* T *et* $X_T = W_T$*. De plus*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\frac{dX_t}{dt}\right|^2 ds\right] = \frac{\mathbb{E}[|W_0 - X_0|^2]}{T} + \int_0^T \frac{\sigma(s)^2}{T - s} ds, \tag{120}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$dX_t = \frac{W_T - X_t}{T - t} dt + \frac{W_t - W_T}{T - t} dt, \tag{121}$$

qui implique

$$\frac{d|X_t - W_T|^2}{dt} = -2\frac{|X_t - W_T|^2}{T - t} + 2\frac{(W_t - W_T) \cdot (X_t - W_T)}{T - t}. \tag{122}$$

En intégrant, on trouve donc

$$|X_t - W_T|^2 + 2\int_0^t \frac{|X_s - W_T|^2}{T - s} ds = 2\int_0^t \frac{W_s - W_T}{\sqrt{T - s}} \cdot \frac{X_s - W_T}{\sqrt{T - s}} ds + |X_0 - W_T|^2. \tag{123}$$

D'après les propriétés de régularité Hölderienne $1/2-$ du mouvement Brownien, on en déduit que, presque sûrement, il existe C tel que

$$|X_t - W_T|^2 + 2\int_0^t \frac{|X_s - W_T|^2}{T - s} ds \leq C, \tag{124}$$

d'où le fait que, presque sûrement, $\lim_{t\to T} X_t = W_T$.

La seconde partie du résultat est un simple calcul. Tout d'abord

$$d\frac{W_t - X_t}{T-t} = \frac{dW_t}{T-t} = \frac{\sigma(t)dB_t}{T-t}. \tag{125}$$

Donc

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{W_t - X_t}{T-t} = \frac{W_0 - X_0}{T} + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{T-s}dB_s. \tag{126}$$

Et enfin on peut conclure grâce à

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\frac{dX_t}{dt}\right|^2 ds\right] = T\frac{\mathbb{E}[|W_0 - X_0|^2]}{T^2} + \int_0^T \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{(T-s)^2}dsdt, \tag{127}$$

□

Ce Lemme relativement simple nous permet d'obtenir assez facilement le résultat de contrôlabilité suivant.

Proposition 11.4. *Supposons qu'il existe $K, \gamma > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$.*

$$\sigma(t) \leq K(T-t)^\gamma. \tag{128}$$

Alors, pour tout $t \in [0, T), \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), w \in \mathbb{T}^d$,

$$U(t, \mu, w) < \infty. \tag{129}$$

Remarque 11.5. *Rappelons que, vu l'hypothèse de croissance sur L, le problème déterministe est lui aussi contrôlable.*

Démonstration. Soit $t \in [0, T), \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), w \in \mathbb{T}^d$. On considère la stratégie qui consiste à transporter en coût fini μ sur $\bar{\nu}$ en temps $(T-t)/2$. On définit alors $(X_s)_{s\in[(T-t)/2,T]}$ définie par

$$\frac{dX_s}{ds} = \frac{W_s - X_s}{T-s}. \tag{130}$$

On transporte alors la mesure état avec un vecteur vitesse constant en espace égal à $\frac{dX_s}{ds}$. Le Lemme précédent permet alors de conclure. □

Pour obtenir un résultat plus précis sur le comportement de U proche de $t = T$, je renforce les hypothèses du résultat précédent.

Proposition 11.6. *Supposons qu'il existe $K > 0$, $\gamma > \frac{1}{2}$ tels que*

$$\sigma(t) \leq K(T-t)^\gamma, \tag{131}$$

et

$$|\partial_t U_{det}| \ \leq \frac{K}{(T-t)^2} + K \tag{132}$$

Alors il existe $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, $\beta(t) \to 0$ quand $t \to T$, telle que pour tout $t \in [0,T), \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), w \in \mathbb{T}^d$,

$$U(t,\mu,w) \leq U_{det}(t,\mu,(\tau_w)_{\#}\bar{\nu}) + \beta(t). \tag{133}$$

Par ailleurs $U(t,\mu,w) \geq U_{det}(t,\mu,(\tau_w)_{\#}\bar{\nu})$.

Démonstration. Soit $t \in [T-1,T)$. On adopte la même stratégie de preuve que dans le cas précédent mais au lien de diviser en deux parties égales l'intervalle de temps $[t,T]$ on le divise en $[t, T-(T-t)^\theta]$ et $[T-(T-t)^\theta, T]$ pour $\theta > 1$ à préciser plus tard.

Soit $(W_s)_{s\geq t}$ la solution forte de (96) avec condition initiale $W_t = w$. On définit alors $(X_s)_{s\in[T-(T-t)^\theta,T]}$, la solution de

$$dX_s = \frac{W_s - X_s}{T-s} ds, \tag{134}$$

avec condition initiale $X_{T-(T-t)^\theta} = w$. Le contrôle que l'on considère est alors de transporter, de façon optimale pour le problème déterministe, μ vers $(\tau_w)_{\#}\bar{\nu}$ en temps $T-t-(T-t)^\theta$, puis d'utiliser le contrôle constant en espace donné par $\frac{d}{ds}X_s$. Ce contrôle est admissible d'après le Lemme précédent. Par ailleurs, il conduit à l'estimée

$$\begin{aligned} U(t,\mu,w) \leq & U_{det}(t+(T-t)^\theta,\mu,(\tau_w)_{\#}\nu) + C\frac{\mathbb{E}[|W_{T-(T-t)^\theta} - w|^2]}{(T-t)^\theta} \\ & + \int_{T-(T-t)^\theta}^{T} \frac{\sigma(s)^2}{T-s} ds. \end{aligned} \tag{135}$$

Le dernier terme tend vers 0 lorsque $t \to T$ car $\gamma > 0$. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[|W_{T-(T-t)^\theta} - w|^2] = \int_t^{T-(T-t)^\theta} \sigma^2(s) ds \leq K(T-t)^{2\gamma+1}. \tag{136}$$

Donc l'avant dernier terme dans (134) tend vers 0 lorsque $t \to T$ dès que $2\gamma+1 > \theta$. Il nous reste donc à estimer la différence

$$U_{det}(t,\mu,(\tau_w)_{\#}\bar{\nu}) - U_{det}(t+(T-t)^\theta,\mu,(\tau_w)_{\#}\nu). \tag{137}$$

Grâce à l'hypothèse que l'on a faite sur $\partial_t U_{det}$, on déduit que

$$|U_{det}(t,\mu,(\tau_w)_{\#}\bar{\nu}) - U_{det}(t+(T-t)^\theta,\mu,(\tau_w)_{\#}\nu)| \ \leq K\frac{(T-t)^\theta}{(T-t-(T-t)^\theta)^2}. \tag{138}$$

On a donc bien

$$U(t,\mu,w) \leq U_{det}(t,\mu,(\tau_w)_{\#}\bar{\nu}) + K(T-t)^{\theta-2} + K(T-t)^{2\gamma+1-\theta} + K(T-t)^{2\gamma\theta}, \quad (139)$$

qui donne le résultat pour $\theta \in (2, 2\gamma+1)$.

En remarquant que $\mathbb{E}[(\tau_{W_T})_{\#}\bar{\nu}] = (\tau_w)_{\#}\bar{\nu}$, la minoration de U par U_{det} s'obtient simplement par la convexité du coût L. □

Remarque 11.7. *Des résultats similaires peuvent être obtenus dans les cas $L(x,p) \sim |p|^k$ en utilisant la même méthode et les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy.*

12 Équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman du transport optimal stochastique

Maintenant qu'on a vu des hypothèses sous lesquelles la fonction valeur U du problème est bien définie, je vais montrer comment caractériser cette fonction valeur à l'aide de la théorie des solutions de viscosité.

12.1 Rappels sur les solutions de viscosité

La théorie des solutions de viscosités a été introduite par Crandall et Lions dans les années 80 [18]. Son objectif est de définir un concept de solution d'EDP pour lequel un principe du maximum, ou plus généralement un principe de comparaison, est vérifié. Je rappelle les grandes lignes de cette théorie dans le cas des équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre sur l'exemple suivant.

Soit l'équation

$$ru + H(x, \nabla_x u) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (140)$$

où $r > 0$, $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. On dit que cette équation admet un principe de comparaison puisqu'elle satisfait la propriété suivante.

Proposition 12.1. *Soient u et v deux fonctions régulières de* (139) *telles que*

$$ru + H(x, \nabla_x u) \leq 0 \text{ dans } \Omega, \quad (141)$$

$$rv + H(x, \nabla_x v) \geq 0 \text{ dans } \Omega. \quad (142)$$

Alors le maximum de $(u-v)_+$ est atteint au bord de Ω.

Démonstration. Si le maximum est atteint en un point intérieur $x_0 \in \Omega$, alors $\nabla_x u(x_0) = \nabla_x v(x_0)$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} 0 &\geq ru(x_0) + H(x_0, \nabla_x u(x_0)) \\ &= ru(x_0) + H(x_0, \nabla_x u(x_0)) \\ &\geq ru(x_0) - rv(x_0). \end{aligned} \tag{143}$$

D'où le résultat. □

De ce résultat vient donc l'unicité des solutions régulières de (139) qui ont la même valeur au bord, puisque grâce à cette proposition, on va pouvoir montrer que deux telles fonctions sont à la fois plus grande et petite l'une que l'autre. Une façon intéressante de voir la théorie des solutions de viscosités consiste à définir un concept affaibli de solution de (139) de telle façon à conserver ce principe de comparaison. On peut remarquer, qu'a priori, les rôles joués par u et v dans la Proposition précédente ne sont pas les mêmes. On doit donc définir une notion de sur solution et une notion de sous solution comme je le fais maintenant.

Définition 12.2. *Une fonction sci (resp. scs) $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une sur-solution (resp. sous-solution) de viscosité de* (139) *si, pour toute fonction régulière $\phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, tout $x_0 \in \Omega$ point de minimum (resp. maximum) de $u - \phi$, on a*

$$ru(x_0) + H(x_0, \nabla_x \phi(x_0)) \geq 0 \textit{ (resp. } \leq 0). \tag{144}$$

Une fonction u est solution de viscosité de (139) *si u_* est sur-solution de viscosité et u^* sous-solution de viscosité.*

De cette définition, on déduit que l'on peut toujours comparer une sur-solution de viscosité et une sous-solution régulière, ou bien une sous-solution de viscosité et une sur-solution régulière. Le problème reste donc de savoir si on peut comparer une sur-solution de viscosité avec une sous-solution de viscosité. La technique généralement utilisée pour répondre à cette question est celle dite de doublement de variables, que l'on présente maintenant.

Proposition 12.3. *Supposons que H soit uniformément continue en sa première variable. Soit u une sous-solution de viscosité de* (139) *et v une sur-solution de viscosité qui sont bornées et telles que $u \leq v$ sur $\partial\Omega$. Alors $u \leq v$ partout sur Ω.*

Démonstration. Supposons que le résultat ne soit pas vrai. Il existe donc $\kappa > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et

$$w(x, y) = u(x) - v(y) - \frac{1}{2\epsilon}|x - y|^2, \tag{145}$$

on a $\max w \geq 2\kappa$. Si le maximum de w est toujours atteint en un point intérieur (x_0, y_0) de Ω^2, alors $x \to u(x) - (2\epsilon)^{-1}|x - y_0|^2$ a un point de maximum intérieur. On en déduit donc que

$$ru(x_0) + H(x_0, \epsilon^{-1}(x_0 - y_0)) \leq 0. \tag{146}$$

En raisonnant de manière analogue pour v on obtient

$$rv(y_0) + H(y_0, \epsilon^{-1}(x_0 - y_0)) \geq 0. \tag{147}$$

On déduit donc que

$$rw(x_0, y_0) \leq r(u(x_0) - v(y_0)) \leq H(y_0, \epsilon^{-1}(x_0 - y_0)) - H(x_0, \epsilon^{-1}(x_0 - y_0)) = o(|x_0 - y_0|). \tag{148}$$

Comme $u - v$ est borné supérieurement, on sait que $\frac{1}{2\epsilon}|x_0 - y_0|^2$ est borné, uniformément en ϵ. Donc, $|x_0 - y_0| \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$. Donc, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\max w \leq \kappa$. Ce qui contredit l'hypothèse que le résultat n'est pas vrai.

On en déduit donc que $x_0 \in \partial\Omega$ ou $y_0 \in \partial\Omega$. En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on arrive à une contradiction avec $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, d'où le résultat. □

Pour finir avec ces rappels sur les solutions de viscosités en dimension finie, on peut remarquer que la Définition que l'on a donnée peut être remplacée par

Définition 12.4. *Une fonction sci (resp. scs) $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une sur-solution (resp. sous-solution) de viscosité de* (139) *si, pour tout $p \in \partial^- u(x_0)$ (resp. $p \in \partial_+ u(x_0)$), on a*

$$ru(x_0) + H(x_0, p) \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0). \tag{149}$$

Je ne rentre pas ici dans les détails de l'équivalence entre cette notion et la précédente. Je mentionne seulement qu'elle repose sur le fait que si $u - \phi$ a un point de minimum local en x_0 alors $\nabla_x \phi(x_0) \in \partial^- u(x_0)$. Ainsi que sur une forme de réciproque : si $p \in \partial^- u(x_0)$, alors $x \to u(x) - p \cdot x + C|x - x_0|^2$ a un point de minimum local en x_0 pour C suffisamment grand, pourvu que u soit assez régulière.

12.2 Sur-différentiels dans $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$

Comme on vient de le voir, pour définir un concept de solution de viscosité, on a besoin d'une notion de fonction régulière ou alors d'une notion de sur-différentiel. C'est ici la deuxième méthode que je vais utiliser. Ce choix repose essentiellement sur le fait suivant. Dans la méthode du doublement de variable, la fonction que l'on utilise naturellement est une distance au carré. Hors, le carré d'une distance de Wasserstein n'est pas généralement une fonction régulière, alors que par exemple,

W_2^2 est sur-différentiable en tout point, comme on le voir ci-dessous.

Une notion souvent utilisée dans la littérature consiste à définir un sur-différentiel de la façon suivante. Soit $U : \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$. Une application $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ est dans le sur-différentiel de U au point $m_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ si pour tout $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$

$$U(m) \leq U(m_0) + \int_{\mathbb{T}^{2d}} \phi(x) \cdot (y - x)\pi(dx, dy) + o(W_2(m, m_0)), \tag{150}$$

où π est n'importe quel élément de l'ensemble $\Pi^o(m_0, m)$ des couplages optimaux pour le coût quadratique. On peut remarquer que cette notion de notion de sur-différentiel est plus liée à la dérivée $D_m U$ qu'à $\nabla_m U$.

Si cette notion de sur-différentiel est cohérente avec les dérivées de fonctions régulières, elle ne l'est pas avec les éléments du sur-différentiel de W_2^2, qui contient des éléments qui ne sont pas de la forme précédente. Je reviendrai sur cela plus tard.

Dans la version de sur-différentiel que je viens de citer, un élément du sur-différentiel est donc une fonction $\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$. Je vais généraliser cette notion en me basant sur la même relaxation que Kantorovich a utilisée pour reformuler le problème de transport optimal. Ainsi, au lieu de considérer un élément $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$, on va considérer un élément $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, on peut oublier la géométrie provenant du transport optimal quadratique et considérer tous les couplages entre deux mesures. On arrive de cette façon à la définition suivante.

Définition 12.5. *Soit $U : \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$. On dit que $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est dans le sur-différentiel de U en m_0 et on note $\phi \in \partial^+ U(m_0)$ lorsque pour tout $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $\gamma \in \Pi(m_0, m)$*

—

$$U(m) \leq U(m_0) + \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} z\cdot(x-y)\pi(dx, dy)\phi(x, dz) + o\left(\left(\int_{\mathbb{T}^{2d}} |x-y|^2\gamma(dx, dy)\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{151}$$

— *La famille $(\psi(x,\cdot))_{x\in\mathbb{T}^d}$ est uniformément supportée dans un même compact.*

Le sous-différentiel de U en m_0, noté $\partial^- U(m_0)$, est défini par $\partial^- U(m_0) = -\partial^+(-U)(m_0)$.

Remarque 12.6.
- *La condition d'uniforme compacité du support est évidemment trop forte, et aurait pu être remplacée par $x \to \int_{\mathbb{R}^d} z\psi(x, dz) \in L^1(m_0)$. Cependant, vu qu'on travaille ici dans un compact, cette restriction n'aura pas de conséquence néfaste plus loin.*
- *Lorsque le couplage γ entre m_0 et m est tel que $\liminf \int_{\mathbb{T}^{2d}} |x-y|^2\gamma(dx, dy) > 0$ quand $W_2(m, m_0) \to 0$, on ne dispose d'aucune information à travers le sur-différentiel.*

— *Si U est une fonction régulière, c'est à dire que $\nabla_m U$ est bien défini et régulier, alors $\partial^+ U(m_0) \cup \partial^- U(m_0) \ni x \to \delta_{D_m U(m_0,x)}$.*
— *Cette notion de sur-différentiel comprend celle mentionnée plus haut.*

On a alors le résultat suivant concernant la sur-différentiabilité de W_2^2.

Proposition 12.7. *Soit $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ et $U : \mu \to W_2^2(\mu,\nu)$. Alors U est sur-différentiable partout sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ et, pour tout couplage optimal $\gamma \in \Pi^o(\mu,\nu)$, $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tel que $(\pi_1, 2(\pi_1 - \pi_2))_\# \gamma(dx,dy) = \phi(x,dy)\mu(dx)$, on a $\phi \in \partial^+ U(\mu)$.*

Démonstration. Soit μ, γ et ϕ comme dans la Proposition. Soit $\mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ et $\gamma' \in \Pi(\mu',\mu)$ que l'on désintègre en $\gamma'(dz,dx) = \mu(dx)k(x,dz)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
W_2^2(\mu',\nu) &\leq \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} |y-z|^2 \gamma(dx,dy)k(x,dz)\\
&= \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} |x-y|^2 \gamma(dx,dy)k(x,dz) + \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} |z-x|^2 \gamma(dx,dy)k(x,dz)\\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} 2(x-y)\cdot(z-x)\gamma(dx,dy)k(x,dz)\\
&= W_2^2(\mu,\nu) + \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} y\cdot(z-x)\phi(x,dy)\gamma(dx,dz) + o\left(\left(\int_{\mathbb{T}^{2d}} |z-y|^2 \gamma'(dy,dz)\right)^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}
\tag{152}
$$

Le résultat est donc prouvé. □

12.3 Solutions de viscosité dans l'espace des mesures

Vus les résultats de la section précédente, l'équivalence des deux notions de viscosités que j'ai présentée en dimension finie n'est plus valable dans ce cas sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$. En effet, il n'y pas de raisons que des fonctions régulière aient une dérivée qui puisse être relaxée, comme dans la notion de sur-différentiel ci-dessus. Je vais donc présenter une notion de solution de viscosité qui repose sur ces sur-différentiels, de façon à avoir une définition plus forte de solution de viscosité.

À ce stade, il n'est pas clair de définir le Hamiltonien sur ces éléments du sur-différentiel relaxé. Je vais présenter le choix qui est fait dans un premier temps, et je reviendrai plus tard sur sa justification.

On va ici considérer une équation d'HJB de la forme

$$
\partial_t U + \int_{\mathbb{T}^d} H(t,x,\mu,D_\mu U)\mu(dx) = 0 \text{ dans } (0,\infty)\times\mathcal{P}(\mathbb{T}^d). \tag{153}
$$

Dans l'équation précédente, le temps a été renversé par rapport aux équations d'HJB que l'on a présentées plus haut, et H est ici une fonction $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes

— H est globalement continu
— Il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{R}^d, \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), t, s \geq 0, x, y \in \mathbb{T}^d$

$$|H(t,x,\mu,p) - H(s,y,\nu,p)| \leq C|p|(|t-s| + W_2(\mu,\nu) + |x-y|). \quad (154)$$

Comme cette équation dépend du temps, il faut considérer les sur-différentiels suivants.

Définition 12.8. *Soit $U : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$. On dit que $\theta \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sont dans le sur-différentiel de U en (t_0, m_0) et on note $(\xi, \phi) \in \partial^+ U(t_0, m_0)$ lorsque pour tout $t \leq t_0, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $\gamma \in \Pi(m_0, \mu)$*

$$\begin{aligned} U(t,\mu) \leq & U(t_0, m_0) + \xi(t - t_0) + \int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{R}^d} z \cdot (x-y)\pi(dx,dy)\phi(x,dz) \\ & + o\left(|t-t_0| + \int_{\mathbb{T}^{2d}} |x-y|\gamma(dx,dy)\right) \end{aligned} \quad (155)$$

Le sous-différentiel de U en (t_0, m_0) $\partial^- U(t_0, m_0)$ est défini par $\partial^- U(t_0, m_0) = -\partial^+(-U)(t_0, m_0)$.

Je vais considérer la définition suivante de solution de viscosité.

Définition 12.9. *Une fonction U scs (resp. sci) est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de (152) si pour tout $t > 0, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), (\xi, \phi) \in \partial^+ U(t, \mu)$ (resp. $\partial^- U(t,\mu)$),*

$$\xi + \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} H(t,x,\mu,y)\phi(x,dy)\mu(dx) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0). \quad (156)$$

Une solution de viscosité de (152) est une fonction localement bornée telle que U_* est sur-solution de viscosité et U^* est sous-solution de viscosité.

On peut établir le résultat suivant.

Théorème 12.10. *Soient U une sur-solution de viscosité de (152) et V une sous-solution de viscosité de (152) telles que $U|_{t=0} \geq V|_{t=0}$. Alors, $U \geq V$ partout.*

Démonstration. Supposons que le résultat ne soit pas vrai et qu'il existe $t > 0, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $U(t,\mu) < V(t,\mu)$. On en déduit donc qu'il existe $\kappa, T, \rho > 0$, tels que pour tout ϵ

$$\inf_{s,t\leq T,\mu,\nu} U(t,\mu) - V(s,\nu) + \frac{1}{2\epsilon}((t-s)^2 + W_2^2(\mu,\nu)) + \rho(t+s) \leq -\kappa. \quad (157)$$

Comme cette fonction est sci, on peut considérer un point de minimum $(t_\epsilon, s_\epsilon, \mu_\epsilon, \nu_\epsilon)$. Supposons d'abord que $t_\epsilon, s_\epsilon > 0$. Soit $\gamma_\epsilon \in \Pi^o(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)$ un couplage optimal pour le coût quadratique. D'après la Proposition 12.7, on sait qu'il existe $\phi_\epsilon : \mathbb{T}^d \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tel que $(\pi_1, \epsilon^{-1}(\pi_1 - \pi_2))_\# \gamma_\epsilon(dx, dz) = \mu_\epsilon(dx)\phi_\epsilon(x, dz)$ et ϕ_ϵ est dans le sur-différentiel de $\mu \to (2\epsilon)^{-1} W_2^2(\mu, \nu_\epsilon)$. Donc, $(-\rho - \frac{t_\epsilon - s_\epsilon}{\epsilon}, -\phi_\epsilon)$ est dans le sous-différentiel de U en $(t_\epsilon, \mu_\epsilon)$. Comme U est sur-solution de (152), on en déduit que

$$-\rho - \frac{t_\epsilon - s_\epsilon}{\epsilon} + \int_{\mathbb{T}^{2d}} H\left(t_\epsilon, x, \mu_\epsilon, \frac{y-x}{\epsilon}\right) \gamma_\epsilon(dx, dy) \geq 0. \tag{158}$$

De la même façon, comme V est sous-solution, on obtient que

$$\rho - \frac{t_\epsilon - s_\epsilon}{\epsilon} + \int_{\mathbb{T}^{2d}} H\left(s_\epsilon, y, \nu_\epsilon, \frac{y-x}{\epsilon}\right) \gamma_\epsilon(dx, dy) \leq 0. \tag{159}$$

En faisant la différence de ces deux inégalités on obtient finalement que

$$2\rho + \int_{\mathbb{T}^{2d}} H\left(s_\epsilon, y, \nu_\epsilon, \frac{y-x}{\epsilon}\right) - H\left(t_\epsilon, x, \mu_\epsilon, \frac{y-x}{\epsilon}\right) \gamma_\epsilon(dx, dy) \leq 0. \tag{160}$$

En utilisant les hypothèses sur H, on arrive alors à

$$\begin{aligned} 2\rho &\leq C \int_{\mathbb{T}^{2d}} \left|\frac{x-y}{\epsilon}\right| (|s_\epsilon - t_\epsilon| + |x-y| + W_2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)) \gamma_\epsilon(dx, dy) \\ &\leq C \int_{\mathbb{T}^{2d}} \frac{|x-y|^2}{\epsilon} \gamma_\epsilon(dx, dy) + C \frac{|s_\epsilon - t_\epsilon| + W_2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \frac{|x-y|}{\sqrt{\epsilon}} \gamma_\epsilon(dx, dy) \\ &\leq C \frac{W_2^2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)}{\epsilon} + C \frac{|s_\epsilon - t_\epsilon| + W_2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \frac{|x-y|}{\sqrt{\epsilon}} \gamma_\epsilon(dx, dy). \end{aligned} \tag{161}$$

Or, comme nous l'avons vu dans la première partie sur les solutions monotones, on peut déduire de l'information de la construction du point de minimum. En particulier que, dans la limite $\epsilon \to 0$,

$$\frac{W_2^2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)}{\epsilon} \to 0, \frac{|s_\epsilon - t_\epsilon|}{\sqrt{\epsilon}} \to 0. \tag{162}$$

On aboutit donc à $2\rho \leq o(1)$ lorsque $\epsilon \to 0$, ce qui est une contradiction.

À partir d'un certain rang, on a donc $t_\epsilon = 0$ ou $s_\epsilon = 0$. Si on suppose par exemple que cela sera le cas, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $s_\epsilon = 0$. Par construction du point de minimum on a alors

$$U(t_\epsilon, \mu_\epsilon) - V(0, \nu_\epsilon) \leq -\kappa. \tag{163}$$

Vu que, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ tel que $W_2(\mu_\epsilon, \mu) + W_2(\nu_\epsilon, \mu) \to 0$ et $t_\epsilon \to 0$, on obtient finalement une contradiction avec l'hypothèse $U(0, \cdot) - V(0, \cdot) \geq 0$. □

On a donc un principe de comparaison pour l'équation (152). Ce résultat a de nombreuses conséquences, en particulier l'unicité d'une solution de viscosité. Ce résultat se généralise au cas des équations (94) et (97). Dans le premier cas, la généralisation est triviale, et dans le second cas, un argument plus profond de P.-L. Lions sur les équations d'HJB sur un espace de Hilbert est nécessaire. Je ne présente pas cette extension ici mais renvoie à [6].

12.4 Caractérisation de la fonction valeur

Pour caractériser la fonction valeur à l'aide de la théorie des solutions de viscosité, il nous reste deux étapes à passer. Tout d'abord, il faut montrer que la valeur U définie dans (81) est effectivement solution de viscosité de l'équation d'HJB correspondante. Cela n'est pas immédiat vu le choix de solutions de viscosités que nous avons fait, qui est très proche d'une relaxation du problème de contrôle optimal. La deuxième étape consiste alors à comprendre comment les résultats montrés plus haut sur le comportement de la solution proche de la singularité $t = T$ permettent de conclure.

Par soucis de simplicité, je me contente ici de montrer le première partie de cet argument dans le cas déterministe. On a le résultat suivant.

Proposition 12.11. *La fonction U définie en* (81) *est sur-solution de viscosité de l'équation* (83).

Démonstration. Soient $t_* < T$ et $\mu_* \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, ainsi que $(\xi, \gamma) \in \partial^- U_*(t_*, \mu_*)$. Soit $(t_n, \mu_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $U(t_n, \mu_n) \to U_*(t_*, \mu_*)$ et $(t_n, \mu_n) \to (t_*, \mu_*)$ lorsque $n \to \infty$. Le principe de programmation dynamique est évidemment vérifié. On a en particulier

$$\begin{aligned} U(t_n, \mu_n) &= \inf_{(\alpha,m)} \left[\int_{t_n}^{t_n+\tau} \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha(s,x)) m_s(dx) ds + U(t_n + \tau, m_{t_n+\tau}) \right] \\ &\geq \inf_{(\alpha,m)} \left[\int_{t_n}^{t_n+\tau} \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha(s,x)) m_s(dx) ds + U_*(t_n + \tau, m_{t_n+\tau}) \right]. \end{aligned} \tag{164}$$

En soustrayant des deux côtés par $U_*(t_*, \mu_*)$ et en utilisant que $(\xi, \gamma) \in \partial^- U_*(t_*, \mu_*)$, on obtient

$$\begin{aligned} U(t_n, \mu_n) - U_*(t_*, \mu_*) \geq \inf_{(\alpha,m)} \Bigg[& \int_{t_n}^{t_n+\tau} \int_{\mathbb{T}^d} L(x, \alpha(s,x)) m_s(dx) ds + \xi(t_n + \tau - t_*) \\ & + \mathbb{E}[Y \cdot (X^n_{t_n+\tau} - X)] + o(t_n + \tau - t_*) \\ & + o(\mathbb{E}[|X^n_{t_n+\tau} - X|]) \Bigg], \end{aligned} \tag{165}$$

où (X,Y) est un couple de variable aléatoire de loi $\mu(dx)\gamma(x,dy)$ et X^n est la solution de

$$\frac{d}{dt}X^n_s = \alpha(s,X^n_s), \tag{166}$$

avec pour condition initiale $X^n_{t_n} = X^n_0$, de loi μ_n, qui a été pris tel que $\mathbb{E}[|X^n_0 - X|] \to 0$ quand $n \to \infty$. Remarquons que l'EDO précédente est bien définie, quitte à restreindre l'infimum à des fonctions α qui sont régulières, ce qui n'a pas d'importance.

On peut alors réécrire l'inégalité précédente de la façon suivante

$$\begin{aligned}
U(t_n,\mu_n) - U_*(t_*,\mu_*) \geq \inf_{(\alpha,m)} \Bigg[&\int_{t_n}^{t_n+\tau} \mathbb{E}[L(X^n_s,\alpha(s,X^n_s))]ds + \xi(t_n+\tau-t_*) \\
&+ \mathbb{E}[Y\cdot(\int_{t_n}^{t_n+\tau}\alpha(s,X^n_s)ds + X^n_0 - X)] + o(t_n+\tau-t_*) \\
&+ o(\mathbb{E}[|X^n_{t_n+\tau} - X|])\Bigg] \\
= \inf_{(\alpha,m)} \Bigg[&\int_{t_n}^{t_n+\tau} \mathbb{E}[L(X^n_s,\alpha(s,X^n_s)) + Y\cdot\alpha(s,X^n_s)]ds \\
&+ \xi(t_n+\tau-t_*) + \mathbb{E}[Y\cdot(X^n_0 - X)] + o(t_n+\tau-t_*) \\
&+ o(\mathbb{E}[|X^n_{t_n+\tau} - X|])\Bigg] \\
\geq \inf_{(\alpha,m)} \Bigg[&\int_{t_n}^{t_n+\tau} \mathbb{E}[-H(X^n_s,Y)]ds + \xi(t_n+\tau-t_*) \\
&+ \mathbb{E}[Y\cdot(X^n_0 - X)] + o(t_n+\tau-t_*) \\
&+ o(\mathbb{E}[|X^n_{t_n+\tau} - X|])\Bigg]
\end{aligned} \tag{167}$$

De part la régularité de H, on obtient donc, en passant à la limite $n\to\infty$, puis en divisant par $\tau > 0$ et en prenant $\tau \to 0$

$$0 \geq \mathbb{E}[-H(X,Y)] + \xi. \tag{168}$$

On a donc prouvé que U est sur-solution de viscosité. □

Le fait que U soit également sous-solution de viscosité est en pratique moins direct à montrer, bien que cela soit vrai. Par soucis de simplicité je me contente de montrer le résultat suivant, en espérant que les lecteurs intéressés sauront en faire bon usage. (Je renvoie aussi à [6] pour une preuve complète.)

Proposition 12.12. *Supposons que*

$$\forall x \in \mathbb{T}^d, p \in \mathbb{R}^d, D_pH(x,p) > 0. \tag{169}$$

La fonction U *définie en* (81) *est telle que, pour tout* $t > 0, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$*, tout* $(\xi, \gamma) \in \partial^+ U^*(t,\mu)$ *tel que* γ *est de la forme* $(\pi_1, \lambda(\pi_1 - \pi_2))_{\#}\tilde{\gamma}$ *pour* $\lambda > 0$ *et* $\tilde{\gamma} \in \Pi^o(\mu, \nu)$ *pour* $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ *arbitraire,*

$$\xi + \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} H(x,y)\gamma(dx,dy) \leq 0. \tag{170}$$

Démonstration. On suppose ici que U est continue [4]. Le cas général peut se traiter comme dans la Proposition précédente en considérant une suite maximisante. Soient $t > 0, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d), (\xi, \gamma) \in \partial^+ U(t,\mu)$ comme dans l'énoncé. On définit

$$\begin{aligned} F :& \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ & (x,p) \to -D_pH(x, \lambda p). \end{aligned} \tag{171}$$

On veut montrer qu'il existe (α, m), contrôle admissible, tel que $m_{t+s} = \mathcal{L}(X + sF(X, X-Y))$ où (X,Y) est un couple de loi $\tilde{\gamma}$.

Soit $s > 0$ et $z \in Supp(m_s)$. Par construction, il existe $(x,y) \in Supp(\tilde{\gamma})$ tel que $z = x + sF(x, x-y)$. On veut d'abord montrer qu'un tel couple (x,y) est unique. Considérons en donc deux $(x,y), (x',y') \in Supp(\tilde{\gamma})$, tels que

$$x + sF(x, x-y) = x' + sF(x', x'-y'). \tag{172}$$

Comme F est localement Lipschitz, il existe $C > 0$ (qui dépend de λ) tel que

$$|x - x'| = s|F(x', x'-y') - F(x, x-y)| \leq Cs(|x-x'| + |(x-y) - (x'-y')|). \tag{173}$$

On a également

$$x - x' = s(F(x', x'-y') - F(x', x-y)) + s(F(x', x-y) - F(x, x-y)). \tag{174}$$

On prend alors le produit scalaire contre $(x'-y') - (x-y)$ et on utilise la β monotonie de $-F$ en p pour obtenir

$$\langle x - x' + s(F(x, x-y) - F(x', x-y)), (x'-y') - (x-y)\rangle \leq -\beta|(x'-y') - (x-y)|^2. \tag{175}$$

La fonction $-F$ est en effet monotone en p de part l'hypothèse $D_pH > 0$ ainsi que le fait que nous travaillons sur un compact. On a donc,

$$\beta|(x'-y') - (x-y)|^2 \leq |x-x'|^2 + Cs|x-x'|.|(x'-y') - (x-y)| - \langle x - x', y - y'\rangle. \tag{176}$$

4. Ce qui est par ailleurs vrai sur $[0,T) \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.

Comme $(x, y), (x', y') \in Supp(\tilde{\gamma})$, on obtient que le dernier produit scalaire est positif et donc

$$\beta|(x'-y')-(x-y)|^2 \leq |x-x'|^2 + Cs|x-x'|.|(x'-y')-(x-y)|. \tag{177}$$

En réutilisant (172), on arrive finalement à

$$|x-x'| \leq Cs\left\{|x-x'| + Cs\left(\frac{Cs+\sqrt{C^2s^2+4\beta}}{2\beta}\right)|x-x'|\right\}. \tag{178}$$

Donc pour s suffisamment petit (comparé à C et β), on obtient $2|x-x'| \leq |x-x'|$ et donc $x = x'$ puis $y = y'$. Ce résultat a des conséquences importantes. En effet il permet de définir des applications mesurables $X_s(z)$ et $Y_s(z)$ telles que pour tout $z \in Supp(m_s)$, $z = X_s(z) + sF(X_s(z), X_s(z) - Y_s(z))$. Cela implique notamment que (α, m) est solution de l'équation

$$\partial_t m + \mathrm{div}(\alpha m) = 0 \text{ dans } (t, t+\epsilon) \times \mathbb{T}^d, \tag{179}$$

pour ϵ assez petit et α défini par

$$\alpha_s(z) = -D_pH(X_s(z), \lambda(X_s(z) - Y_s(z))).$$

On déduit donc que

$$U(t, \mu) \leq \int_t^{t+\epsilon} L(z, \alpha_s(z))m_s(dz)ds + U(t+\epsilon, m_{t+\epsilon}).$$

On a donc

$$0 \leq \int_t^{t+\epsilon} (L(z, \alpha_s(z)) + \alpha_s(z)\cdot z)m_s(dz)ds + \xi\epsilon + o(\epsilon).$$

Ce qui implique, par construction de α est définition de H, en divisant par ϵ puis en prenant la limite $\epsilon \to 0$

$$-\xi + \int_{T^d\times\mathbb{R}^d} H(x, y)\gamma(dx, dy) \leq 0. \tag{180}$$

□

On donne finalement la caractérisation de la valeur du problème de transport optimal stochastique, dans le cas des sauts aléatoires. Le cas Brownien pouvant se traiter de la même façon.

Proposition 12.13. *Soit $L : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tel que*

— *H est continu*

— *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{R}^d, x, y \in \mathbb{T}^d$*

$$|H(x,p) - H(y,p)| \leq C|p||x-y|. \tag{181}$$

—

$$\forall x \in \mathbb{T}^d, p \in \mathbb{R}^d, D_pH(x,p) > 0, \tag{182}$$

— *Le problème déterministe admet une valeur.*

On suppose également que les hypothèses de la Proposition 11.1 sont vérifiées. Alors la valeur U définie en (91) *est l'unique solution de viscosité de* (94) *qui satisfait* (103)*.*

Démonstration. Soient U et V deux fonctions qui satisfont ces propriétés. Supposons qu'il existe $\bar{t} < T, \bar{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, tels que $U(\bar{t},\bar{\mu}) < V(\bar{t},\bar{\mu})$. Il existe donc $K, \rho > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0, \delta \in (0, T-\bar{t})$,

$$\inf_{\substack{s,t \in [0,T-\delta], \\ \mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)}} \left\{ U(t,\mu) - V(s,\nu) + \frac{1}{2\epsilon}((t-s)^2 + W_2^2(\mu,\nu)) + \rho(2T-t-s) \right\} \leq -K < 0. \tag{183}$$

Notons $(t_\epsilon, s_\epsilon, \mu_\epsilon, \nu_\epsilon)$ un point de minimum de l'inf précédent. Comme U est sur-solution de viscosité et V sous-solution de viscosité, on déduit du Théorème 12.10 que, pour ϵ suffisamment petit, soit $t_\epsilon = T - \delta$ soit $s_\epsilon = T - \delta$. On note M_δ le supremum de $U - V$ sur $[0, T-\delta]^2 \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)^2$. Par construction du point de minimum, on a

$$\frac{1}{2\epsilon}((t_\epsilon - s_\epsilon)^2 + W_2^2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon)) \leq M_\delta \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} +\infty. \tag{184}$$

En particulier, pour $\delta > 0$ fixé, $|s_\epsilon - t_\epsilon| + W_2^2(\mu_\epsilon, \nu_\epsilon) \to 0$ quand $\epsilon \to 0$. On en déduit donc que, à $\delta > 0$ fixé,

$$\liminf_{\epsilon \to 0} U(t_\epsilon, \mu_\epsilon) - V(s_\epsilon, \nu_\epsilon) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)} U(T-\delta, \mu) - V(T-\delta, \nu). \tag{185}$$

En utilisant (103), on déduit que

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{\epsilon \to 0} U(t_\epsilon, \mu_\epsilon) - V(s_\epsilon, \nu_\epsilon) = 0, \tag{186}$$

ce qui contredit (182). Le résultat est donc prouvé. □

13 Commentaires bibliographiques

Le problème de transport optimal a tout d'abord été introduit par Monge dans [39]. La reformulation de Kantorovich que j'ai mentionnée plus haut date de [29]. La reformulation dynamique de Benamou et Brenier est présentée dans [2]. Des présentations bien plus détaillées du problème de transport optimal se trouvent dans les livres de Villani [47] et Santambrogio [43].

Des problèmes plus généraux de contrôle dynamique dans l'espace des mesures ont également été étudiés par exemple dans Bonnet et Rossi [10] ou dans Daudin [20].

Pour une présentation détaillées des solutions de viscosités en dimension finie, je renvoie à Crandall et al. [19].

Les équations d'HJB sur l'espace des mesures de probabilité ont été très étudiées ces dernières années, en particulier via des motivations liées au jeux. Par exemple Lions a étudié une telle équation via l'approche dite Hilebrtienne dans [34]. Cardaliaguet et Quincampoix ont étudié une telle équation dans le cas d'un jeu différentiel avec information incomplète [12]. Ce genre de technique s'est développé ensuite dans Marigonda et Quincampoix [37] et Jimenez et al. [28]. Les précédents travaux, hormis celui de Lions, ont une approche relativement intrinsèque de l'équation de HJB correspondante. Une étude du lien entre une notion intrinsèque et une qui repose sur l'approche Hilbertienne a notamment été faite dans Gangbo et Tudorascu [22]. Elle reprend des idées des travaux de Gangbo et Świech [21] et a été poursuivie dans Gangbo et al. [23].

Les résultats présentés ici sont issus de Bertucci [6].

Références

[1] Aurélien Alfonsi and Benjamin Jourdain. Squared quadratic wasserstein distance : optimal couplings and lions differentiability. *ESAIM : Probability and Statistics*, 24 :703–717, 2020.

[2] Jean-David Benamou and Yann Brenier. A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik*, 84(3) :375–393, 2000.

[3] Charles Bertucci. Monotone solutions for mean field games master equations : finite state space and optimal stopping. *Journal de l'Ecole polytechnique–Mathématiques*, 8 :1099–1132, 2021.

[4] Charles Bertucci. Monotone solutions for mean field games master equations : continuous state space and common noise. *arXiv preprint arXiv :2107.09531*, 2021.

[5] Charles Bertucci. On monotone solutions of mean field games master equations. *Séminaire Laurent Schwartz–EDP et applications*, pages 1–13, 2021.

[6] Charles Bertucci. Stochastic optimal transport and hamilton-jacobi-bellman equations on the set of probability measures. *arXiv preprint arXiv :2306.04283*, 2023.

[7] Charles Bertucci and Alekos Cecchin. Mean field games master equations : from discrete to continuous state space. *arXiv preprint arXiv :2207.03191*, 2022.

[8] Charles Bertucci, Jean-Michel Lasry, and Pierre-Louis Lions. Some remarks on mean field games. *Communications in Partial Differential Equations*, 44 (3) :205–227, 2019.

[9] Charles Bertucci, Jean-Michel Lasry, and Pierre-Louis Lions. On lipschitz solutions of mean field games master equations. *arXiv preprint arXiv :2302.05218*, 2023.

[10] Benoît Bonnet and Francesco Rossi. The pontryagin maximum principle in the wasserstein space. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 58 :1–36, 2019.

[11] Pierre Cardaliaguet and Alessio Porretta. Long time behavior of the master equation in mean field game theory. *Analysis & PDE*, 12(6) :1397–1453, 2019.

[12] Pierre Cardaliaguet and Marc Quincampoix. Deterministic differential games under probability knowledge of initial condition. *International Game Theory Review*, 10(01) :1–16, 2008.

[13] Pierre Cardaliaguet and Panagiotis Souganidis. Monotone solutions of the master equation for mean field games with idiosyncratic noise. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 54(4) :4198–4237, 2022.

[14] Pierre Cardaliaguet, François Delarue, Jean-Michel Lasry, and Pierre-Louis Lions. *The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games :(AMS-201)*, volume 201. Princeton University Press, 2019.

[15] René Carmona, François Delarue, et al. *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I-II*. Springer, 2018.

[16] Alekos Cecchin and François Delarue. Weak solutions to the master equation of potential mean field games. *arXiv preprint arXiv :2204.04315*, 2022.

[17] Jean-François Chassagneux, Dan Crisan, and François Delarue. *A probabilistic approach to classical solutions of the master equation for large population equilibria*, volume 280. American Mathematical Society, 2022.

[18] Michael G Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1) : 1–42, 1983.

[19] Michael G Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1) :1–67, 1992.

[20] Samuel Daudin. Optimal control of diffusion processes with terminal constraint in law. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 195(1) : 1–41, 2022.

[21] Wilfrid Gangbo and Andrzej Świech. Existence of a solution to an equation arising from the theory of mean field games. *Journal of Differential equations*, 259(11) :6573–6643, 2015.

[22] Wilfrid Gangbo and Adrian Tudorascu. On differentiability in the wasserstein space and well-posedness for hamilton–jacobi equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 125 :119–174, 2019.

[23] Wilfrid Gangbo, Sergio Mayorga, and Andrzej Swiech. Finite dimensional approximations of hamilton–jacobi–bellman equations in spaces of probability measures. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 53(2) :1320–1356, 2021.

[24] Wilfrid Gangbo, Alpár R Mészáros, Chenchen Mou, and Jianfeng Zhang. Mean field games master equations with nonseparable hamiltonians and displacement monotonicity. *The Annals of Probability*, 50(6) :2178–2217, 2022.

[25] Minyi Huang, Peter E Caines, and Roland P Malhamé. Individual and mass behaviour in large population stochastic wireless power control problems : centralized and nash equilibrium solutions. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, volume 1, pages 98–103. IEEE, 2003.

[26] Minyi Huang, Roland P Malhamé, and Peter E Caines. Large population stochastic dynamic games : closed-loop mckean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle. 2006.

[27] Minyi Huang, Peter E Caines, and Roland P Malhamé. Large-population cost-coupled lqg problems with nonuniform agents : individual-mass behavior

and decentralized ϵ-nash equilibria. *IEEE transactions on automatic control*, 52(9) :1560–1571, 2007.

[28] Chloé Jimenez, Antonio Marigonda, and Marc Quincampoix. Optimal control of multiagent systems in the wasserstein space. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 59(2) :58, 2020.

[29] Leonid V Kantorovich. On the translocation of masses. In *Dokl. Akad. Nauk. USSR (NS)*, volume 37, pages 199–201, 1942.

[30] Per Krusell and Anthony A Smith, Jr. Income and wealth heterogeneity in the macroeconomy. *Journal of political Economy*, 106(5) :867–896, 1998.

[31] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Jeux à champ moyen. i–le cas stationnaire. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(9) :619–625, 2006.

[32] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Jeux à champ moyen. ii–horizon fini et contrôle optimal. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(10) :679–684, 2006.

[33] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1) :229–260, 2007.

[34] Pierre-Louis Lions. Cours au college de france. *www.college-de-france.fr*, 2011.

[35] Pierre-Louis Lions and Ben Seeger. Work in progress. *In preparation*, 2023.

[36] Pierre-Louis Lions and Panagiotis E Souganidis. Extended mean-field games. *Rendiconti Lincei*, 31(3) :611–625, 2020.

[37] Antonio Marigonda and Marc Quincampoix. Mayer control problem with probabilistic uncertainty on initial positions. *Journal of Differential Equations*, 264(5) :3212–3252, 2018.

[38] Alpár R Mészáros and Chenchen Mou. Mean field games systems under displacement monotonicity. *arXiv preprint arXiv :2109.06687*, 2021.

[39] Gaspard Monge. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Mem. Math. Phys. Acad. Royale Sci.*, pages 666–704, 1781.

[40] Chenchen Mou and Jianfeng Zhang. Wellposedness of second order master equations for mean field games with nonsmooth data. *arXiv preprint arXiv :1903.09907*, 2019.

[41] Chenchen Mou and Jianfeng Zhang. Mean field game master equations with anti-monotonicity conditions. *arXiv preprint arXiv :2201.10762*, 2022.

[42] Robert R Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, volume 1364. Springer, 2009.

[43] Filippo Santambrogio. Optimal transport for applied mathematicians. *Birkäuser, NY*, 55(58-63) :94, 2015.

[44] Jose A Scheinkman and Laurence Weiss. Borrowing constraints and aggregate economic activity. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 23–45, 1986.

[45] Charles Stegall. Optimization of functions on certain subsets of banach spaces. *Mathematische Annalen*, 236(2) :171–176, 1978.

[46] Charles Stegall. Optimization and differentiation in banach spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 84 :191–211, 1986.

[47] Cédric Villani. *Optimal transport : old and new*, volume 338. Springer, 2009.

CMAP, UMR7641, ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Adresse e-mail : charles.bertucci@polytechnique.edu