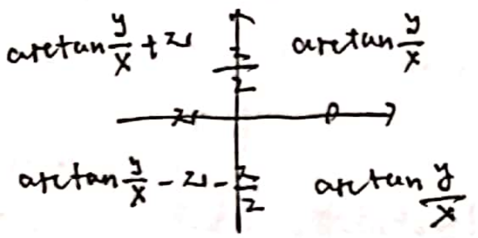
复变函数.

§1 复数与复变函数.

1.1 复数及其代数运算

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$　$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$\overline{\overline{z}} = z$　$z\overline{z} = |z|^2$　$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$　$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$



$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2$ 且 $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

复球面略

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$　$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2$

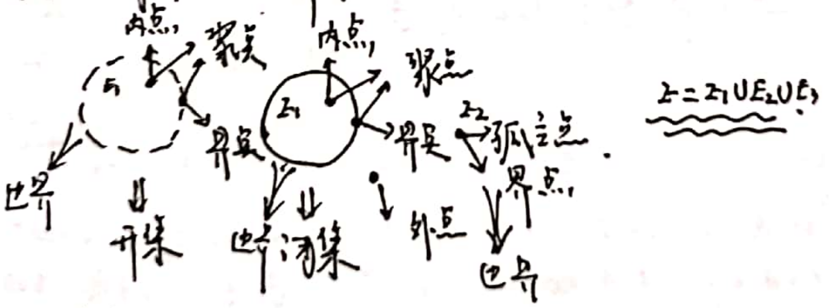
$r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

复数方根略

1.2 复平面上点集.

点z_0的ρ邻域 $N_\rho(z_0)$. 聚点. 孤立点. 外点. 闭集. 内点. 界点. 边界

开集. 有界集. 无界集



区域 = 连通 + 开集　　闭区域 = 区域 + 边界

重点：对于不同 t_1, t_2，$t_1 \in (\alpha, \beta)$ $t_2 \in [\alpha, \beta]$，若 $z(t_1) = z(t_2)$ 时 点 $z(t_1)$ 称为曲线C重点.

简单曲线：无重点连续曲线. $z(\alpha) = z(\beta)$ 称为简单闭曲线.

$z'(t_0) \neq 0$ 有切线. $z'(t)$ 连续且 $z'(t) \neq 0$ 光滑曲线

※ 若尔当定理：任一简单闭曲线C将z平面唯一分成C、$I(C)$和$E(C)$ 3个点集.

它们 (1) 彼此不交 (2) $I(C)$ 有界，称为内部 (3) $E(C)$ 无界，称为外部

(4) C是共同边界 (5) 若简单曲线 p 的1个端点在内，一个在外，则必与边界相交.

单连通无洞，多连通有洞

1.3 复变函数的概念及其连续性：

单值函数、多值函数、定义域、值域、像点、原像。

复变函数的极限：设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，如果存在一个确定的复数A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ $(0<\delta\le\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，就有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称A为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 或者记作当 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$。

极限存在充要条件：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，那么 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$

极限的四则运算法则

函数 $f(z)$ 在点集E的聚点 z_0 连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充分必要条件是二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 处连续

如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在 z_0 连续，则它们的和、差、积、商（分母在 z_0 处不为0）也在 z_0 处连续

L 如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 处连续，$w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 处连续，那么复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续

复变量有理整函数（多项式）$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 在整个复平面内都是连续的，而有理分式函数 $P(z)/Q(z)$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式，在复平面上分母不为0的点都是连续的

$f(z)$ 在有界闭集E上连续 $\Rightarrow$ 有界，存在最大值、最小值

§§ 解析函数

2-1 解析函数的概念

导数的定义：$f'(z_0)=\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

也就是说 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|\Delta z|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$

连续 $\not\Rightarrow$ 可导　可导 $\Rightarrow$ 连续

求导法则

可微 $\Leftrightarrow$ $\Delta w=A\cdot\Delta z+o(\rho)\cdot\Delta z$　$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$　　$dw=f'(z_0)\cdot\Delta z$

$f(z)$ 在区域D内有定义，如果 $z_0\in D$，$f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域 $N_\rho(z_0)\subset D$ 内处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处解析；如果在区域D内每一点都解析，则称 $f(z)$ 在区域D内解析；如果闭区域 $G\subset D$，且 $f(z)$ 在区域D内解析，则称 $f(z)$ 在闭区域G上解析。如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析，那么称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点

解析函数的和、差、积、商（除去分母为0）在D内解析。

设函数 $h=g(z)$ 在z平面上的区域D内解析，函数 $w=f(h)$ 在h平面上的区域G内解析，如果对D内的每一个点z，函数 $g(z)$ 的对应值h都属于G，那么复合函数 $w=f(g(z))$ 在D内解析

所有多项式在复平面内是处处解析的，任何一个有理分式函数在不含分母为零的点的区域内是解析的，使分母为零的点是它的奇点

2-2 函数解析的充要条件

柯西-黎曼条件（C-R方程）：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 是函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D内一点 $z=x+iy$ 可导的必要条件

函数~~解析~~可导的充要条件： u, v 在 (x,y) 处可微 + 柯西黎曼条件.

u,v偏导数连续

函数解析的充要条件： u, v 在 ~~区域~~ D内可微 + 柯西黎曼条件.

$\Uparrow$

u,v偏导数连续

$f'(z)$ 在 D 内处处为0, $f(z)\equiv C$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析且 $f'(z)\neq 0$，则在 D 内曲线簇 $u(x,y)=c_1$ 与曲线簇 $v(x,y)=c_2$ 必正交，其中 c_1, c_2 为常数

2.3 初等函数

指数函数 $f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

$(e^z)'=e^z$ $\quad e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$ $\quad e^{z+2k\pi i}=e^z$ (周期性)

无极限性: e^z 当 $z\to\infty$ 时没有极限 $\quad |e^z|=e^x$

$\mathrm{Arg}\, e^z=y+2k\pi \quad k\in Z$ $\quad$ 由于 $e^x\neq 0$，对任何复数 z，$e^z\neq 0$.

对数函数: $\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\, z$ $\quad \ln z=\ln|z|+i\arg z$

$\mathrm{Ln}\, z=\ln z+2k\pi i \quad k\in Z$

$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}(z_1)+\mathrm{Ln}(z_2)$ $\quad \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\, z_1-\mathrm{Ln}\, z_2$

$\ln(z_1z_2)\neq\ln z_1+\ln z_2$ $\quad \ln\frac{z_1}{z_2}\neq\ln z_1-\ln z_2$

$w=\ln z$ 在原点及负实轴上不连续，所以 $w=\ln z$ 在原点和负实轴上不可导

$\ln z$ 在除去原点及负实轴时所得的区域内是解析的. 因此 $\mathrm{Ln}\, z$ 的各个分支在除去原点和负实轴的平面内解析，并且有相同的导数值.

乘幂 a^b 与幂函数.

$a^b=e^{b\,\mathrm{Ln}\, a}=e^{b\ln a}$

幂函数 $w=z^b=e^{b\,\mathrm{Ln}\, z}$ $\quad$ 当 $z=0$，b 为正实数时 $z^b=0$.

$(z^b)'=bz^{b-1}$ $\quad$ 它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内也是解析

三角函数. $\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ $\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

欧拉公式 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$

$\cos z$ 是偶函数, $\sin z$ 是奇函数 $\cos(-z)=\cos z$ $\quad \sin(-z)=-\sin z$

$\cos z$ 和 $\sin z$ 都是以 2π 为周期的周期函数 $\cos(z+2\pi)=\cos z$ $\quad \sin(z+2\pi)=\sin z$

和与差的余弦和正弦公式仍成立. $\quad \cos^2 z+\sin^2 z=1$.

$\mathrm{ch}\, y=\cos iy$ $\quad i\,\mathrm{sh}\, y=\sin iy$

$(\cos z)'=-\sin z$ $\quad (\sin z)'=\cos z$ $\quad (\tan z)'=\sec^2 z$

$(\cot z)'=-\csc^2 z$ $\quad (\sec z)'=\sec z\cdot\tan z$ $\quad (\csc z)'=-\csc z\cot z$

反三角函数 $\mathrm{Arccos}\, z=-i\,\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$ ---

双曲函数和反双曲函数 $\mathrm{ch}\, z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ $\quad \mathrm{sh}\, z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$ $\quad (\mathrm{sh}\, z)'=\mathrm{ch}\, z$ $\quad (\mathrm{ch}\, z)'=\mathrm{sh}\, z$

$\mathrm{ch}(x+iy)=\mathrm{ch}\, x\cos y+i\,\mathrm{sh}\, x\sin y$ $\quad \mathrm{sh}(x+iy)=\mathrm{sh}\, x\cos y+i\,\mathrm{ch}\, x\sin y$

第3章 复变函数的积分

§3.1 复变函数积分的概念及性质：

积分存在充分条件：设C是复平面上的光滑曲线，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在C上连续，则积分$\int_C f(z)dz$存在，

并且$\int_C f(z)dz=\int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy$.

注：由上式可知，若C是光滑曲线且$f(z)$是连续函数时，积分$\int_C f(z)dz$一定存在

复积分$\int_C f(z)dz$可以通过两个实函数的线积分来计算。

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

设C是以z_0为圆心，r为半径的正向圆周，则

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}\qquad \oint_C \frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i$$

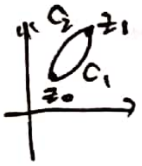
复变函数积分的性质：

数乘、相反、可加性（积分区域可加，积分段积函数可加）

积分估值不等式：若在C上，~~$|f(z)|$~~ $|\int_C f(z)dz|\le\int_C|f(z)|ds\le ML$.

3.2 柯西积分定理

柯西积分定理：设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在单连通区域D内解析，则$f(z)$沿D内的任一正向简单闭曲线C的积分为零，即$\oint_C f(z)dz=0$



设$f(z)$在单连通区域D内解析，z_0与z_1为D内任意两点，C_1与C_2为D内任意两点，C_1与C_2为D内连接z_0与z_1的任意两条简单曲线，则$\int_{C_1}f(z)dz=\int_{C_2}f(z)dz$

设C为一条正向简单闭曲线，C_2在C_1内部，$f(z)$在由C_1,C_2所围成的多连通区域D内解析，在闭区域$\bar{D}=D+C_1+C_2$上连续，则$\oint_{C_1}f(z)dz=\oint_{C_2}f(z)dz$

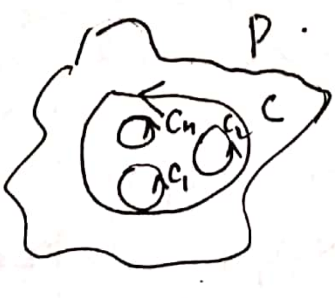
⇓

闭路变形原理：在区域内的一个解析函数$f(z)$沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中不经过$f(z)$不解析的点。

⇓

复合闭路定理：设C为多连通区域D内的一条简单闭曲线，~~它们互不包含也互不相交，并且以C, C1, C2~~ $C_1,C_2,\cdots,C_n$是C内部的简单闭曲线，它们互不相包含也互不相交，并且以$C,C_1,\cdots,C_n$为边界的区域含于D，如果$f(z)$在D内解析，在$\bar{D}$上连续，则有$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$，其中，C及$C_k$均取正方向；或写成$\oint_\Gamma f(z)dz=0$

（Γ为由C及C_k $(k=1,2,\cdots,n)$组成的复合闭路.



原函数与不定积分略

复变函数牛顿-莱布尼茨公式：$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1)-F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$

3.3 柯西积分公式：设$f(z)$在区域D内解析，C为D内的任意一条正向简单闭曲线，C的内部完全含于D，z_0为C内任意一点，则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

推论：平均值定理：若$f(z)$在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 上解析，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

如果$f(z)$在由正向简单闭曲线C_1,C_2所围成的闭区域D上解析，z_0为D内一点。

则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$

3.4 解析函数的高阶导数

设函数$f(z)$在正向简单闭曲线C所围成的闭区域D解析，则$f(z)$的各阶导数均在D内解析，对D内任意点z，其n阶导数为

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=1,2,\cdots$$

设$f(z)$在z平面上的区域D内解析，则$f(z)$在D内具有任意阶导数，并且$f(z)$的任意阶导数都在D内解析。 ※ 反之不成立

高阶导数求积分公式：$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)\Big|_{z=z_0}$

“解析函数无穷可微性”

莫雷拉定理：设$f(z)$在单连通区域内连续，且对D内任意一条正向简单闭曲线C都有 $\oint_C f(z)dz=0$，则$f(z)$在D内解析

3.5 解析函数与调和函数

调和函数：若二元实函数$\varphi(x,y)$在区域D内有连续的二阶偏导数，且满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$，则称$\varphi(x,y)$为区域D内的调和函数。

在区域D内解析的函数，其实部和虚部都是D内的调和函数

共轭调和函数：若$f(z)=u+iv$是区域D内的解析函数，则称v为u的共轭调和函数。※ 单向性，虚部称为实部共轭调和函数。

构造解析函数的两种方法：1.偏积分法：已知调和函数$v(x,y)$，利用C-R方程。

2. 线积分法: $\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx$ 是一个二元函数 v 的全微分 $dv=\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx$

对D内定点 (x_0,y_0) 及D内动点 (x,y) 有 $v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx+C$.

3. 不定积分法:

由于解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的导数 $f'(z)$ 还是解析函数,并且

$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

将 $f'(z)$ 表示成 z 的函数. $f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$ 或 $f'(z)=v_y+iv_x=V(z)$

在D内求不定积分,则 $f(z)=\int U(z)dz$ 或 $f(z)=\int V(z)dz$

第4章 解析函数的级数表示:

4.1 复数项级数

复数列极限定义. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=a+ib \iff \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

复数项级数定义. 部分和. 收敛. 发散.

收敛的充分必要条件. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛

收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

绝对收敛与条件收敛. 绝对收敛的充要条件: 实部和虚部都收敛.

判断绝对收敛的方法:
- 判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 是否收敛
- 分出 α_n 的实部 a_n 与虚部 b_n, 判定实级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是否绝对收敛.

4.2 幂级数.

复数函数项级数. 收敛点. 收敛域. 发散点. 发散域. 和函数.

收敛圆. 收敛半径

阿贝尔定理: 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $z=z_0\ (\neq0)$ 处收敛, 则在圆周 $c: |z|=|z_0|$ 的内部(即 $|z|<|z_0|$)幂级数必绝对收敛; 如果在 $z=z_1\ (\neq0)$ 处幂级数发散, 则在圆周 $c_1: |z|=|z_1|$ 的外部(即 $|z|>|z_1|$), 幂级数必发散.

收敛半径的求法: 比值法. 根值法. $R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$

证明思路: $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \xrightarrow{\text{加模}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|}_{\text{正项级数收敛判定}}$.

幂级数运算及性质: (1) 四则运算.

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 在其收敛圆内 $|z-z_0|<R$ 内和函数为 $f(z)$, 即

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<R$.

(3) $f(z)$ 在收敛圆内解析. 可逐项求导. 逐项积分

4.3 泰勒级数.

泰勒展开定理：如果函数 $f(z)$ 在圆域 $D: |z-z_0|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内可以唯一地展开成幂级数. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ ①

其中 $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n=0,1,2,\cdots$ ②

①称为 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开式. 由②式右端的级数称为 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒级数

$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \quad |z|<+\infty$

$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, \quad |z|<+\infty$

$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad |z|<1$

4.4 洛朗级数.

洛朗展开定理：如果 $f(z)$ 在圆环域 $D: R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则在 D 内 $f(z)$ 可唯一地展开为洛朗级数.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n.$$

其中 $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, C 为 D 内绕点 z_0 的任意一条正向简单闭曲线.

几点说明：① $f(z)$ 在 C 内不处处解析. 不可用高阶导数积分公式

② 唯一性指给定圆环域内 $f(z)$ 的洛朗展开式唯一

③ 若 z_0 是 $f(z)$ 奇点，$f(z)$ 在圆环域 $D: R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的洛朗级数必是关于 $(z-z_0)$ 的级数.

第5章：留数定理及其应用.

5.1 孤立奇点

孤立奇点： z_0 处不解析. 但在 z_0 某个去心邻域 $0<|z-z_0|<r$ 内解析.

可去奇点：不含 $(z-z_0)$ 的负幂项

极点：含有有限个 $(z-z_0)$ 负幂项. 且最低次幂为 $-m$，称为 m 级极点.

本性奇点：含无穷多个 $(z-z_0)$ 负幂项.

可去奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\alpha$ (有限)

极点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$. m 级极点 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$. 其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析 且 $\varphi(z_0)\neq 0$

本性奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不为 ∞

零点： $f(z)$ 在 z_0 邻域 $|z-z_0|<r$ 内解析，若 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 零点.

若 $f(z)=C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$，$C_m\neq 0$.

称 z_0 为 $f(z)$ m 级零点

$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$ $f^{(m)}(z_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ z_0 是 $f(z)$ m 级零点.

~~点 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则有~~ $\cancel{f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)}$

点 z_0 是 $f(z)$ m 级极点 $\Longleftrightarrow$ z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

当 $m>n$ 时，z_0 是 $f(z)$ 的 $m-n$ 级零点.

当 $m<n$ 时，z_0 是 $f(z)$ 的 $n-m$ 级极点

当 $m=n$ 时，z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

极点情况类似讨论

若函数 $f(z)$ 在无穷远点的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则称无穷远点 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点.

设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则

做 $t=\frac{1}{z}$. $f(z)=\varphi(t)$

若 $t=0$ 是 $\varphi(t)$ 可去奇点，m 级极点或本性奇点，则称 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 可去奇点，m 级极点，或本性奇点.

(1) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是下式中不含 z 正幂项

或 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 存在且有限.

(2) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是下式中只含有限多个 z 的正幂项且 z^m 为最高正幂. 或 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$

(3) $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是下式中含无穷个 z 的正幂项

或 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 不存在也不为 ∞.

在 $R<|z|<+\infty$ 内 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^n+C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_nz^{-n}$

5.2 留数定理：

定义：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在圆环域 D: $0<|z-z_0|<R$ 内解析，C 是 D 内围绕点 z_0 的任一正向简单闭曲线，则称积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处留数 记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$，即

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=C_{-1}$$

留数第一定理：设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析. ~~C是~~ C 是 D 内包围诸奇点一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

留数计算方法：

规则I：可去奇点 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$

规则II：本性奇点 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$ → 洛朗展开.

规则III：m级极点

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

规则IV：设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 及 $Q(z)$ 都在 z_0 处解析，且 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$ $Q'(z_0)\neq 0$，此时 z_0 是 $f(z)$ 的 1级极点，则有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}=\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=z_0}$$

设 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，C为圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内绕 $z=0$ 的任一正向简单闭曲线，则积分

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz$ 与 C 无关，称此积分值为 $f(z)$ 在 ∞ 的留数.

记作 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]$，即 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=-C_{-1}$

规则V. $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

第二留数定理：$f(z)$ 在扩充复平面除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 及 ∞ 外处处解析，则 $f(z)$ 在所有奇点处留数和为零. 即

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0.$$

第7章. 傅里叶变换.

一. 傅里叶变换的理论基础与基本性质

若定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(t)$ 满足下列条件.

(1) $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄利克雷条件.

(2) $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛. 则在 $f(t)$ 的连续点上. $f(t)$ 的傅里叶积分公式成立 即 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$

傅里叶变换：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{j\omega t}dt$　　记作 $\mathscr{F}[f(t)]$

傅里叶逆变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$　　记作 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a.$$

矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}0, & |t|>\frac{\tau}{2}\\ E, & |t|\le\frac{\tau}{2}\end{cases}$　　$F(\omega)=\frac{2E\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$

指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geq 0\end{cases}$ $\beta>0$. $F(w)=\frac{1}{\beta+jw}$

傅氏变换性质：

$f(t)\longleftrightarrow F(w)$ $f_1(t)\longleftrightarrow F_1(w)$ $f_2(t)\longleftrightarrow F_2(w)$

則 $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\longleftrightarrow \alpha F_1(w)+\beta F_2(w)$

$f(t-b)\longleftrightarrow e^{-jwb}F(w)$

$e^{jw_0t}f(t)\longleftrightarrow F(w-w_0)$

$f(at)\longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$ $a\neq 0$ 为常数 $0<|a|<1$ 拉伸 $|a|>1$ 压缩.

$f(-t)\longleftrightarrow F(-w)$

$F(t)\longleftrightarrow 2\pi f(-w)$

$F(-t)\longleftrightarrow 2\pi f(w)$

$f'(t)\longleftrightarrow jwF(w)$

$f^{(n)}(t)\longleftrightarrow (jw)^nF(w)$

$-jtf(t)\longleftrightarrow F'(w)$

$(-jt)^nf(t)\longleftrightarrow F^{(n)}(w)$

$g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$ 且 $t\to+\infty$, $g(t)\to 0$.

$g(t)\longleftrightarrow \frac{1}{jw}F(w)$

若 $\lim_{t\to+\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t}}_{k\text{次}}f(t)\,dt\,dt\cdots dt=0$, $k=1,2,\cdots,n$.

$g(t)=$ 上式 $g(t)\longleftrightarrow \frac{1}{(jw)^n}F(w)$

7.2 δ函数及广义傅里叶变换.

定义: $\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

定义: $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1$

δ函数筛选性: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$

δ函数缩放性: $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

δ函数对称性: $\delta(t)=\delta(-t)$ $\delta(t-\xi)=\delta(\xi-t)$

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$ ~~$\cancel{u(t)}$~~

$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(w)$

$\cos w_0 t \longleftrightarrow \pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$

$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

卷积：$f_1(t)*f_2(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau}_{\text{必收敛}}$ 交换律、结合律、分配律。

$|f_1(t)*f_2(t)| \le |f_1(t)|*|f_2(t)|$（卷积不等式）

卷积性质：平移 $f_1(t-\alpha)*f_2(t-\beta)=(f_1*f_2)(t-\alpha-\beta)$

卷积定理. $f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(w)F_2(w)$

$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(w)*F_2(w)$

坐标缩放：$f_1(at)*f_2(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|}(f_1*f_2)(at)$.

第8章. 拉普拉斯变换：

8.1 拉普拉斯变换的理论基础

定义：设函数 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 时有定义，且含复参变量 s 的积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在复平面 s 的某区域内收敛，则称由这个积分确定的函数

$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换. 记作 $\mathcal{L}[f(t)]$ 即

拉氏变换. $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$.

拉氏逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}ds$

$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$ $Re(s)>0$

$\sin kt \longleftrightarrow \frac{k}{s^2+k^2}$ $Re(s)>0$

$e^{kt} \longleftrightarrow \frac{1}{s-k}$ $Re(s)>k$

拉氏变换存在定理：设 $f(t)$ 满足以下条件：

(1) $t\geq 0$ 的任一有限区间上分段连续

(2) $t\to+\infty$ 时，$f(t)$ 的增长速度不超过某一指数型函数

~~(i) 存在~~ $M>0$, 及 $C_0\geq 0$ 使得 $|f(t)|\le Me^{C_0 t}$, $0\le t<$

(i) 函数 $f(t)$ 的拉氏变换在 $Re(s)>C_0$ 上存在，而且 $\mathcal{L}[f$

(ii) 像函数 $F(s)$ 在 $Re(s)>C_0$ 上解析，且有 $F'(s)=\mathcal{L}[-$

扫描全能王 创建

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}$, $t_0 \geq 0$

§12 拉普拉斯变换性质.

$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t) \longleftrightarrow \alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$

$f(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-s\tau}F(s)$

$e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$

$f(ct) \longleftrightarrow \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$

$f'(t) \longleftrightarrow sF(s)-f(0)$

$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

$-tf(t) \longleftrightarrow F'(s)$

$(-t)^nf(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(s)$

$\cos kt \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+k^2}$

$t^m \longleftrightarrow \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$ → 伽马函数 m为正整数 $\Gamma(m+1)=m!$

$\int_0^t f(t)dt \longleftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$

$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^\infty F(s)ds$

$\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)dt \longleftrightarrow \frac{1}{s^n}F(s)$

$\frac{f(t)}{t^n} \longleftrightarrow \underbrace{\int_s^\infty ds\int_s^\infty ds\cdots\int_s^\infty}_{n\text{次}} F(s)ds$

如果 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ 收敛, $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(s)ds$

设 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 满足条件, 当 $t<0$ 时 $f_1(t)=f_2(t)=0$, 则

积分 $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ 为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积,

记为 $f_1(t)*f_2(t)=(f_1*f_2)(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

8.3 拉普拉斯逆变换.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}ds,\quad t>0$$

拉普拉斯反演公式　　　拉普拉斯反演积分

若$F(s)$有有限个奇点 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$，适当选取$\beta$，使得这些奇点全在 $Re(s)<\beta$ 的范围内，且当 $s\to\infty$ 时，$F(s)\to 0$，则有

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}Res\left[F(s)e^{st},s_k\right]$$

即 $f(t)=\sum_{k=1}^{n}Res\left[F(s)e^{st},s_k\right]\quad t>0$

拉普拉斯变换的应用略.