

Aula 2

Busca Binária

Maratona de Programação

FEI

May 3, 2025

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Problema: dado um vetor A de tamanho N ($N \leq 10^6$, $0 \leq A_i \leq 10^9$) , responda Q queries ($Q \leq 10^6$) do tipo:

O valor X ($X \leq 10^6$) está presente no vetor?

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

- Ideia: Para cada query, olhar para o vetor A e verificar se existe algum i tal que $X == A_i$ é verdade.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

- Ideia: Para cada query, olhar para o vetor A e verificar se existe algum i tal que $X == A_i$ é verdade.
- Isso com certeza da o resultado certo, já que toda posição é explorada.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

- Ideia: Para cada query, olhar para o vetor A e verificar se existe algum i tal que $X == A_i$ é verdade.
- Isso com certeza da o resultado certo, já que toda posição é explorada.
- Por que essa solução **não** é ótima?

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

- Ideia: Para cada query, olhar para o vetor A e verificar se existe algum i tal que $X == A_i$ é verdade.
- Isso com certeza da o resultado certo, já que toda posição é explorada.
- Por que essa solução **não** é ótima?
- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N * Q)$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

- Ideia: Para cada query, olhar para o vetor A e verificar se existe algum i tal que $X == A_i$ é verdade.
- Isso com certeza da o resultado certo, já que toda posição é explorada.
- Por que essa solução **não** é ótima?
- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N * Q)$.
- Quantidade de operações no pior caso: $10^6 * 10^6 = 10^{12}$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 1: busca completa

- Ideia: Para cada query, olhar para o vetor A e verificar se existe algum i tal que $X == A_i$ é verdade.
- Isso com certeza da o resultado certo, já que toda posição é explorada.
- Por que essa solução **não** é ótima?
- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N * Q)$.
- Quantidade de operações no pior caso: $10^6 * 10^6 = 10^{12}$.
- Resultado: **Time Limit Exceeded (TLE)**.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Ideia: Antes das queries, criar um vetor V de tamanho $\max_{i=1}^n A_i$, preenchido com 0.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Ideia: Antes das queries, criar um vetor V de tamanho $\max_{i=1}^n A_i$, preenchido com 0.
- Para cada $A_i \in A$, fazer $V_{A_i} := 1$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Ideia: Antes das queries, criar um vetor V de tamanho $\max_{i=1}^n A_i$, preenchido com 0.
- Para cada $A_i \in A$, fazer $V_{A_i} := 1$.

$A :$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	1	3	5	6	8
1	3	5	6	8		

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Ideia: Antes das queries, criar um vetor V de tamanho $\max_{i=1}^n A_i$, preenchido com 0.
- Para cada $A_i \in A$, fazer $V_{A_i} := 1$.

$A :$	1	3	5	6	8
-------	---	---	---	---	---

$V :$	0	1	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Ideia: Antes das queries, criar um vetor V de tamanho $\max_{i=1}^n A_i$, preenchido com 0.
- Para cada $A_i \in A$, fazer $V_{A_i} := 1$.

$A :$	1	3	5	6	8
-------	---	---	---	---	---

$V :$	0	1	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

- Agora, eu consigo responder uma query com uma busca num vetor.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Ideia: Antes das queries, criar um vetor V de tamanho $\max_{i=1}^n A_i$, preenchido com 0.
- Para cada $A_i \in A$, fazer $V_{A_i} := 1$.

$A :$	1	3	5	6	8
-------	---	---	---	---	---

$V :$	0	1	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

- Agora, eu consigo responder uma query com uma busca num vetor.
- Por que essa solução **não** é ótima?

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N + Q)$

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N + Q)$ (OK).

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N + Q)$ (OK).
- Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(\max_{i=1}^n A_i)$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N + Q)$ (OK).
- Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(\max_{i=1}^n A_i)$.
- Memória necessária no pior caso: $10^9 / \text{sizeof(bool)} \approx 125MB$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 2: Pré-processamento

- Complexidade de tempo: $\mathcal{O}(N + Q)$ (OK).
- Complexidade de espaço: $\mathcal{O}(\max_{i=1}^n A_i)$.
- Memória necessária no pior caso: $10^9 / \text{sizeof(bool)} \approx 125MB$.
- Resultado:
Memory Limit Exceeded (MLE) ou Runtime Error (RTE).

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

- Ideia: Para cada query, buscamos o primeiro i tal que $A_i \geq X$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

- Ideia: Para cada query, buscamos o primeiro i tal que $A_i \geq X$.
- Começamos considerando todo o segmento $[1, N]$ como possível resposta.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

- Ideia: Para cada query, buscamos o primeiro i tal que $A_i \geq X$.
- Começamos considerando todo o segmento $[1, N]$ como possível resposta.
- Escolhemos o valor no meio do segmento e verificamos se ele é $\geq X$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

- Ideia: Para cada query, buscamos o primeiro i tal que $A_i \geq X$.
- Começamos considerando todo o segmento $[1, N]$ como possível resposta.
- Escolhemos o valor no meio do segmento e verificamos se ele é $\geq X$.
- Se for, ele pode ser uma resposta, mas ainda tentamos encontrar uma posição melhor à esquerda, olhando agora para $[1, \text{meio}]$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

- Ideia: Para cada query, buscamos o primeiro i tal que $A_i \geq X$.
- Começamos considerando todo o segmento $[1, N]$ como possível resposta.
- Escolhemos o valor no meio do segmento e verificamos se ele é $\geq X$.
- Se for, ele pode ser uma resposta, mas ainda tentamos encontrar uma posição melhor à esquerda, olhando agora para $[1, meio]$.
- Se não for, descartamos ele e toda a parte à esquerda, olhando agora para $(meio, N]$.

Fundamento: Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

- Ideia: Para cada query, buscamos o primeiro i tal que $A_i \geq X$.
- Começamos considerando todo o segmento $[1, N]$ como possível resposta.
- Escolhemos o valor no meio do segmento e verificamos se ele é $\geq X$.
- Se for, ele pode ser uma resposta, mas ainda tentamos encontrar uma posição melhor à esquerda, olhando agora para $[1, meio]$.
- Se não for, descartamos ele e toda a parte à esquerda, olhando agora para $(meio, N]$.
- Repetimos até o sobrar só um valor. A posição final encontrada (se houver) é a menor com valor $\geq X$.

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 5$):

$A :$

2	5	9	12	13	17	20	25	26
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 5$):

$A :$

<u>2</u>	5	9	12	13	17	20	25	<u>26</u>
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 5$):

$A :$

<u>2</u>	5	9	12	<u>13</u>	17	20	25	26
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 5$):

$A :$

<u>2</u>	5	9	12	13	17	20	25	26
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 5$):

$A :$

<u>2</u>	5	9	12	13	17	20	25	26
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 5$):

$A :$

2	5	9	12	13	17	20	25	26
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 21$):

$A :$

2	5	9	12	13	17	20	25	26
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 21$):

$A :$

<u>2</u>	5	9	12	13	17	20	25	<u>26</u>
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 21$):

$A :$

2	5	9	12	13	<u>17</u>	20	25	<u>26</u>
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 21$):

$A :$

2	5	9	12	13	17	20	<u>25</u>	<u>26</u>
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Visualização Query ($X = 21$):

$A :$	2	5	9	12	13	17	20	<u>25</u>	26
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Busca em Lista Ordenada

Ideia de solução 3: Busca Binária

Implementando: A. Binary Search.

Ponderando

Ponderando

- Qual a complexidade de tempo desse algoritmo?

Ponderando

- Qual a complexidade de tempo desse algoritmo? $\mathcal{O}(\log N)$.

Ponderando

- Qual a complexidade de tempo desse algoritmo? $\mathcal{O}(\log N)$.
- Qual a complexidade de espaço desse algoritmo?

Ponderando

- Qual a complexidade de tempo desse algoritmo? $\mathcal{O}(\log N)$.
- Qual a complexidade de espaço desse algoritmo? $\mathcal{O}(N)$.

Ponderando

- Qual a complexidade de tempo desse algoritmo? $\mathcal{O}(\log N)$.
- Qual a complexidade de espaço desse algoritmo? $\mathcal{O}(N)$.
- Por que ele sempre funciona?

Generalizando: **Monotonicidade**

Generalizando: Monotonicidade

- Se criassemos um vetor R , de tamanho N , tal que $R_i := A_i \geq X$, teríamos:

Generalizando: Monotonicidade

- Se criassemos um vetor R , de tamanho N , tal que $R_i := A_i \geq X$, teríamos:

$A :$	2	5	9	12	13	17	20	25	26
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Generalizando: Monotonicidade

- Se criassemos um vetor R , de tamanho N , tal que $R_i := A_i \geq X$, teríamos:

$A :$	2	5	9	12	13	17	20	25	26
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$X = 13$$

$R :$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Generalizando: Monotonicidade

- Se criassemos um vetor R , de tamanho N , tal que $R_i := A_i \geq X$, teríamos:

$A :$	2	5	9	12	13	17	20	25	26
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X = 13$									
$R :$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- E esse padrão para o vetor R (prefixo contendo apenas 0s, sufixo contendo apenas 1s) seria encontrado para todo X em qualquer vetor A ordenado de maneira não decrescente.

Generalizando: Monotonicidade

- Isso porque, num array ordenado, nenhum valor anterior à mim vai ser maior que um valor que eu não sou maior.

Generalizando: Monotonicidade

- Isso porque, num array ordenado, nenhum valor anterior à mim vai ser maior que um valor que eu não sou maior.

Formalmente, basta garantir que:

$$A_i \geq A_{i-1} \forall i \in [2, N]$$

Para que o vetor R se pareça assim

Generalizando: Monotonicidade

- Isso porque, num array ordenado, nenhum valor anterior à mim vai ser maior que um valor que eu não sou maior.

Formalmente, basta garantir que:

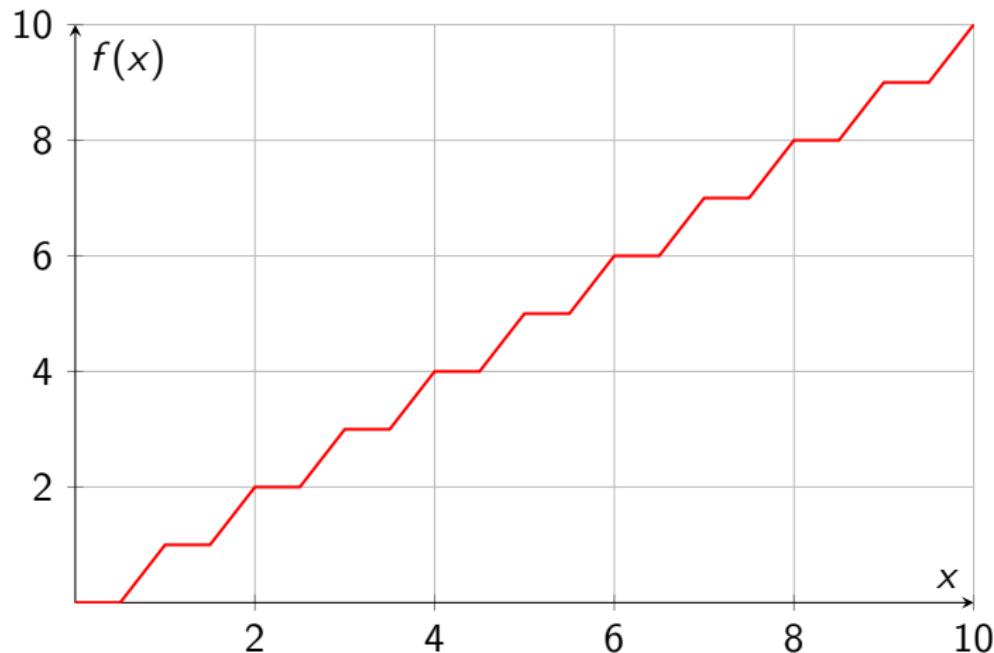
$$A_i \geq A_{i-1} \forall i \in [2, N]$$

Para que o vetor R se pareça assim

- O que é sempre verdade em um vetor ordenado. Mas também é sempre verdade pra qualquer **função monotônica**.

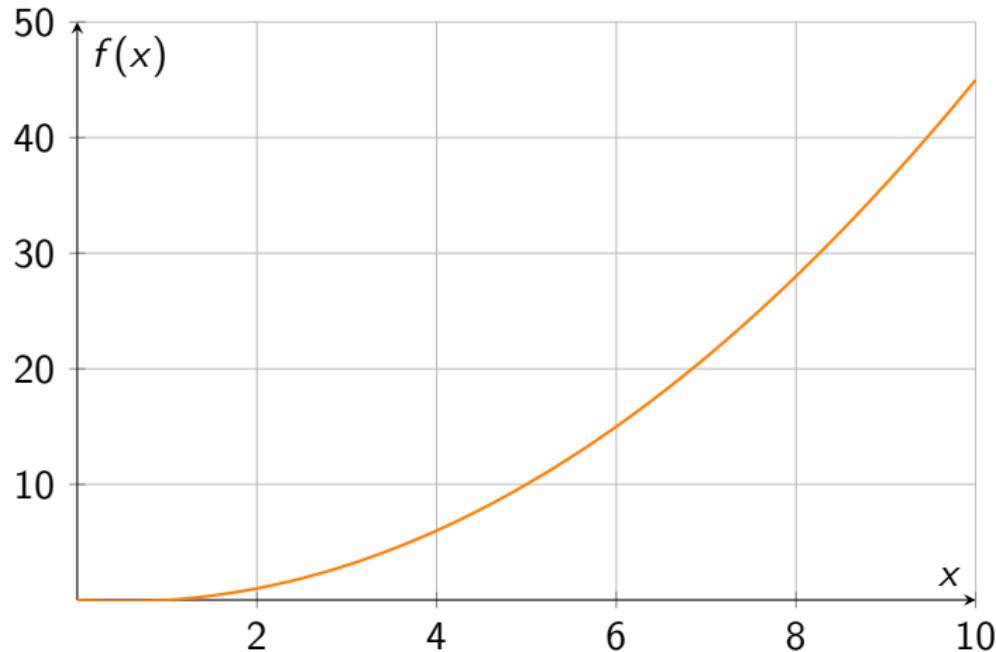
Generalizando: Monotonicidade

Exemplo: $f(x) = \lfloor x \rfloor$



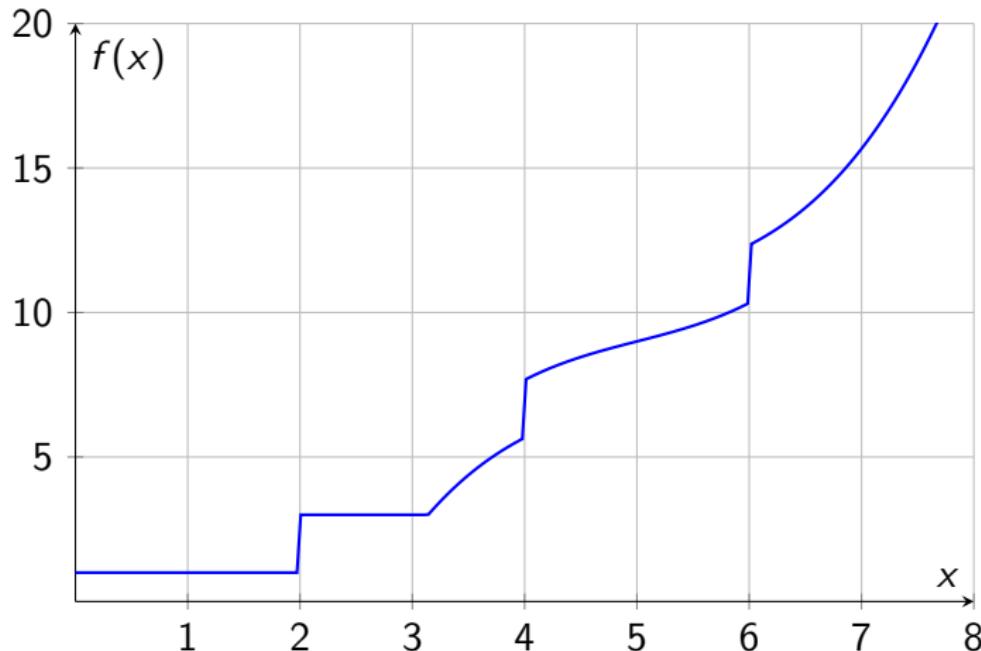
Generalizando: Monotonicidade

Exemplo: $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$



Generalizando: Monotonicidade

Exemplo: $f(x) = \max \left(1, \frac{(x-5)^3}{3} + x \right) + 2(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor)$



Busca binária na maratona

- Resumindo:

Busca binária na maratona

- Resumindo:

Para qualquer problema de maratona, é possível achar:

- ▶ Primeiro ponto tal que $f(x) \leq Y$ ou,
- ▶ Último ponto tal que $f(x) > Y$ ou,
- ▶ qualquer outra variação de condição que faça o vetor V parecer com: $V = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

Busca binária na maratona

- Resumindo:

Para qualquer problema de maratona, é possível achar:

- ▶ Primeiro ponto tal que $f(x) \leq Y$ ou,
- ▶ Último ponto tal que $f(x) > Y$ ou,
- ▶ qualquer outra variação de condição que faça o vetor V parecer com: $V = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

- Algumas pessoas chamam essa ideia de "busca binária na resposta".

Busca binária na maratona

- Resumindo:

Para qualquer problema de maratona, é possível achar:

- ▶ Primeiro ponto tal que $f(x) \leq Y$ ou,
- ▶ Último ponto tal que $f(x) > Y$ ou,
- ▶ qualquer outra variação de condição que faça o vetor V parecer com: $V = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

- Algumas pessoas chamam essa ideia de "busca binária na resposta".
- A dificuldade dos problemas usualmente é:

Busca binária na maratona

- Resumindo:

Para qualquer problema de maratona, é possível achar:

- ▶ Primeiro ponto tal que $f(x) \leq Y$ ou,
- ▶ Último ponto tal que $f(x) > Y$ ou,
- ▶ qualquer outra variação de condição que faça o vetor V parecer com: $V = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

- Algumas pessoas chamam essa ideia de "busca binária na resposta".
- A dificuldade dos problemas usualmente é:
 - ▶ Notar que uma $f(x)$, útil para resolver o problema, é monotônica.

Busca binária na maratona

- Resumindo:

Para qualquer problema de maratona, é possível achar:

- ▶ Primeiro ponto tal que $f(x) \leq Y$ ou,
- ▶ Último ponto tal que $f(x) > Y$ ou,
- ▶ qualquer outra variação de condição que faça o vetor V parecer com: $V = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

- Algumas pessoas chamam essa ideia de "busca binária na resposta".
- A dificuldade dos problemas usualmente é:
 - ▶ Notar que uma $f(x)$, útil para resolver o problema, é monotônica.
 - ▶ Achar um jeito esperto de computar $f(x)$.

Busca binária na maratona

Exemplo resolvido 1:

BeeCrowd: Torre de Cartas.

Busca binária na maratona

Exemplo resolvido 2:

CSES: Array Division.

Busca binária na maratona

Exemplo comentado 1:

[CodeForces](#): B. The Meeting Place Cannot Be Changed.

Busca binária na maratona

Exemplo comentado 2:

[CodeForces](#): K. Delivery Bears.

Listas de problemas relacionados

Lista conhecidas:

- UFMG: [link](#).
 - ▶ veja também o vídeo deles [aqui](#).
- USACO Guide: [link](#).
- UTL: [link](#).