

Article

Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane
eano,
in: Mathematische Annalen | Mathematische Annalen - 36 |
Periodical issue
4 Page(s) (157 - 160)



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

[DigiZeitschriften e.V.](#)

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.

Par

G. PEANO à Turin.

Dans cette Note on détermine deux fonctions x et y , uniformes et continues d'une variable (réelle) t , qui, lorsque t varie dans l'intervalle $(0, 1)$, prennent toutes les couples de valeurs telles que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle, suivant l'usage, *courbe continue* le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe qui passe par tous les points d'un carré. Donc, étant donné un arc de courbe continue, sans faire d'autres hypothèses, il n'est pas toujours possible de le renfermer dans une aire arbitrairement petite.

Adoptons pour base de numération le nombre 3; appelons *chiffre* chacun des nombres 0, 1, 2; et considérons une suite illimitée de chiffres a_1, a_2, a_3, \dots que nous écrirons

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

(Pour ce moment, T est seulement une suite de chiffres).

Si a est un chiffre, désignons par ka le chiffre $2 - a$, *complementaire* de a ; c'est-à-dire, posons

$$k0 = 2, \quad k1 = 1, \quad k2 = 0.$$

Si $b = ka$, on déduit $a = kb$; on a aussi $ka \equiv a \pmod{2}$.

Désignons par $k^n a$ le résultat de l'opération k répétée n fois sur a . Si n est pair, on a $k^n a = a$; si n est impair, $k^n a = ka$. Si $m \equiv n \pmod{2}$, on a $k^m a = k^n a$.

Faisons correspondre à la suite T les deux suites

$$X = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, \quad Y = 0, c_1 c_2 c_3 \dots,$$

où les chiffres b et c sont donnés par les relations

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = k^{a_1} a_2, \quad b_2 = k^{a_2} a_3, \quad c_2 = k^{a_1 + a_2} a_4, \quad b_3 = k^{a_2 + a_3} a_5, \dots$$

$$b_n = k^{a_2 + a_3 + \dots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad c_n = k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Donc b_n , $n^{\text{ième}}$ chiffre de X , est égal à a_{2n-1} , $n^{\text{ième}}$ chiffre de rang impair dans T , ou à son complémentaire, selon que la somme $a_2 + \dots + a_{2n-2}$ des chiffres de rang pair, qui le précède, est paire ou impaire. Analoguement pour Y . On peut aussi écrire ces relations sous la forme:

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = k^{b_1} c_1, \quad a_3 = k^{c_1} b_2, \quad a_4 = k^{b_1 + b_2} c_2, \dots,$$

$$a_{2n-1} = k^{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}} b_n, \quad a_{2n} = k^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} c_n.$$

Si l'on donne la suite T , alors X et Y résultent déterminées, et si l'on donne X et Y , la T est déterminée.

Appelons *valeur* de la suite T la quantité (analogue à un nombre décimal ayant même notation)

$$t = \text{val. } T = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

A chaque suite T correspond un nombre t , et l'on a $0 \leq t \leq 1$. Réciproquement les nombres t , dans l'intervalle $(0, 1)$ se divisent en deux classes:

α) Les nombres, différents de 0 et de 1, qui multipliés par une puissance de 3 donnent un entier; ils sont représentés par deux suites, l'une

$$T = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n 2 2 2 \dots$$

où a_n est égal à 0 ou à 1; l'autre

$$T' = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a'_n 0 0 0 \dots$$

où $a'_n = a_n + 1$.

β) Les autres nombres; ils sont représentés par une seule suite T .

Or la correspondance établie entre T et (X, Y) est telle que si T et T' sont deux suites de forme différente, mais $\text{val. } T = \text{val. } T'$, et si X, Y sont les suites correspondantes à T , et X', Y' celles correspondantes à T' , on a

$$\text{val. } X = \text{val. } X', \quad \text{val. } Y = \text{val. } Y'.$$

En effet considérons la suite

$$T = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n} 2 2 2 \dots$$

où a_{2n-1} et a_{2n} ne sont pas toutes deux égales à 2. Cette suite peut représenter tout nombre de la classe α . Soit

$$X = 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n b_{n+1} \dots$$

on a:

$$b_n = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n}} 2.$$

Soit T' l'autre suite dont la valeur coïncide avec $\text{val. } T$,

$$T' = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-3} a_{2n-2} a'_{2n-1} a'_{2n} 0 0 0 \dots$$

et

$$X' = 0, b_1 \dots b_{n-1} b'_n b'_{n+1} \dots$$

Les premiers $2n - 2$ chiffres de T' coïncident avec ceux de T ; donc les premiers $n - 1$ chiffres de X' coïncident aussi avec ceux de X ; les autres sont déterminés par les relations

$$b'_n = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2}} a'_{2n-1}, \quad b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = k^{a_1 + \dots + a_{2n-2} + a'_{2n}} 0.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que $a_{2n} < 2$, ou $a_{2n} = 2$.

Si a_{2n} a la valeur 0 ou 1, on a $a'_{2n} = a_{2n} + 1$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1}$, $b'_n = b_n$,

$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2} + a'_{2n} = a_2 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n} + 1$,
d'où

$$b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^{a_2 + \dots + a_{2n}} 2.$$

Dans ce cas les deux séries X et X' coïncident en forme et en valeur.

Si $a_{2n} = 2$, on a $a_{2n-1} = 0$ ou 1, $a'_{2n} = 0$, $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, et en posant

$$s = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}$$

on a

$$\begin{aligned} b_n &= k^s a_{2n-1}, & b_{n+1} &= \cancel{b_{n+2}} = \dots = k^s 2, & b_{n+2} \\ b'_n &= k^s a'_{2n-1}, & b'_{n+1} &= b'_{n+2} = \dots = k^s 0. \end{aligned}$$

Or, puisque $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, les deux fractions $0, a_{2n-2} 2 2 2 \dots$ et $0, a'_{2n-1} 0 0 0 \dots$ ont la même valeur; en faisant sur les chiffres la même opération k^s on obtient les deux fractions $0, b_n b_{n+1} b_{n+2} \dots$ et $0, b'_n b'_{n+1} b'_{n+2} \dots$, qui ont aussi, comme l'on voit facilement, la même valeur; donc les fractions X et X' , bien que de forme différente, ont la même valeur.

Analoguement on prouve que $\text{val. } Y = \text{val. } Y'$.

Donc si l'on pose $x = \text{val. } X$, et $y = \text{val. } Y$, on déduit que x et y sont deux fonctions uniformes de la variable t dans l'intervalle $(0, 1)$. Elles sont continues; en effet si t tend à t_0 , les $2n$ premiers chiffres du développement de t finiront par coïncider avec ceux du développement de t_0 , si t_0 est un β , ou avec ceux de l'un des deux développements de t_0 , si t_0 est un α ; et alors les n premiers chiffres de x et y correspondantes à t coïncideront avec ceux des x, y correspondantes à t_0 .

Enfin à tout couple (x, y) tel que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ correspond au moins un couple de suites (X, Y) , qui en expriment la valeur; à (X, Y) correspond une T , et à celle-ci t ; donc on peut toujours déterminer t de manière que les deux fonctions x et y prennent des valeurs arbitrairement données dans l'intervalle $(0, 1)$.

On arrive aux mêmes conséquences si l'on prend pour base de numération un nombre impaire quelconque, au lieu de 3. On peut prendre aussi pour base un nombre pair, mais alors il faut établir entre T et (X, Y) une correspondance moins simple.

On peut former un arc de courbe continue qui remplit entièrement un cube. Faisons correspondre à la fraction (en base 3)

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

les fractions

$$X = 0, b_1 b_2 \dots, Y = 0, c_1 c_2 \dots, Z = 0, d_1 d_2 \dots$$

où

$$b_1 = a_1, c_1 = k^{b_1} a_2, d_1 = k^{b_1 + c_1} a_3, b_2 = k^{c_1 + d_1} a_4, \dots$$

$$b_n = k^{c_1 + \dots + c_{n-1} + d_1 + \dots + d_{n-1}} a_{3n-2},$$

$$c_n = k^{d_1 + \dots + d_{n-1} + b_1 + \dots + b_n} a_{3n-1},$$

$$d_n = k^{b_1 + \dots + b_n + c_1 + \dots + c_n} a_{3n}.$$

On prouve que $x = \text{val. } X$, $y = \text{val. } Y$, $z = \text{val. } Z$ sont des fonctions uniformes et continues de la variable $t = \text{val. } T$; et si t varie entre 0 et 1, x, y, z prennent tous les ternes de valeurs qui satisfont aux conditions $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

M. Cantor, (Journal de Crelle, t. 84, p. 242) a démontré qu'on peut établir une correspondance univoque et réciproque (unter gegenseitiger Eindeutigkeit) entre les points d'une ligne et ceux d'une surface. Mais M. Netto (Journal de Crelle, t. 86, p. 263), et d'autres ont démontré qu'une telle correspondance est nécessairement discontinue. (Voir aussi G. Loria, *La definizione dello spazio ad n dimensioni... secondo le ricerche di G. Cantor*, Giornale di Matematiche, 1877). Dans ma Note on démontre qu'on peut établir d'un côté l'uniformité et la continuité, c'est-à-dire, aux points d'une ligne on peut faire correspondre les points d'une surface, de façon que l'image de la ligne soit l'entière surface, et que le point sur la surface soit fonction continue du point de la ligne. Mais cette correspondance n'est point univoquement réciproque, car aux points (x, y) du carré, si x et y sont des β , correspond bien une seule valeur de t , mais si x , ou y , ou toutes les deux sont des α , les valeurs correspondantes de t sont en nombre de 2 ou de 4.

On a démontré qu'on peut enfermer un arc de courbe plane continue dans une aire arbitrairement petite:

1) Si l'une des fonctions, p. ex. la x coïncide avec la variable indépendante t ; on a alors le théorème sur l'intégrabilité des fonctions continues.

2) Si les deux fonctions x et y sont à variation limitée (Jordan, Cours d'Analyse, III, p. 599). Mais, comme démontre l'exemple précédent, cela n'est pas vrai si l'on suppose seulement la continuité des fonctions x et y .

Ces x et y , fonctions continues de la variable t , manquent toujours de dérivée.

Turin, Janvier 1890.