Modélisation par éléments finis de la déformation d'une poutre sous l'action d'une force

2020

1 Introduction

Le but est de calculer les petites déformations élastiques d'un matériau isotrope sous l'action d'une force $\bar{F}$ dans un espace de dimension 2.

Pour cela on utilise l'équation d'élasticité linéaire :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} + \bar{F} = \bar{0} \tag{1}$$

Avec $\bar{\bar{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy.

Pour utiliser cette équation dans le cadre des éléments finis il faut dériver la formulation faible de l'équation (1). Pour cela on multiplie l'équation par une fonction vectorielle test $\bar{v}(x, y)$ et on intègre l'équation sur le domaine de la poutre Ω qui est de longueur L et hauteur H.

$$\int_{\Omega} \bar{v}.(\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} + \bar{F}) d\Omega = \bar{0} \tag{2}$$

Comme le tenseur des contraintes est symétrique on peut utiliser l'égalité suivante :

$$\bar{v}.\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}.\bar{\bar{\sigma}}) - \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{v} \tag{3}$$

En combinant les équation (2) et (3) on obtient :

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}.\bar{\bar{\sigma}}) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{v}.\bar{F} d\Omega \tag{4}$$

En utilisant le théorème de flux-divergence, l'égalité devient :

$$\int_{\partial\Omega} \bar{v}.\bar{\bar{\sigma}}.\bar{n} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{v}.\bar{F} d\Omega \tag{5}$$

En faisant l'hypothèse que les contraintes sont nulles aux bordures, le premier terme de l'équation est nul. On a finalement :

$$\int_{\Omega} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{v} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{v}.\bar{F} d\Omega \tag{6}$$

On utilise maintenant la loi de Hooke qui dans le cas d'un matériau isotrope s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda tr(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{1}} + 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} \tag{7}$$

Avec $\bar{\bar{\epsilon}}$ le champ lié au vecteur déplacement $\bar{u}$ par :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\nabla}}\bar{u} + \bar{\bar{\nabla}}\bar{u}^T) \tag{8}$$

On intègre maintenant les équations (7) et (8) dans l'équation (6), ce qui donne :

$$\int_\Omega \lambda(\nabla \cdot \bar{u})(\nabla \cdot \bar{v}) + \mu\bar{\bar{\nabla}}\bar{u} : \bar{\bar{\nabla}}\bar{v} + \mu\bar{\bar{\nabla}}\bar{u}^T : \bar{\bar{\nabla}}\bar{v} d\Omega = \int_\Omega \bar{v}.\bar{F} d\Omega \tag{9}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = l(\bar{v}) \tag{10}$$

Avec a une fonction symétrique bilinéaire et l une fonction linéaire.

On utilise maintenant la famille de fonctions nodales bilinéaire suivante pour aprroximer la solution sur un élément fini de dimension 2 sur 2 :

$$\begin{aligned}
\bar{g_1} &= \frac{(1+x)(1+y)}{4}\bar{x} \\
\bar{g_2} &= \frac{(1+x)(1-y)}{4}\bar{x} \\
\bar{g_3} &= \frac{(1-x)(1+y)}{4}\bar{x} \\
\bar{g_4} &= \frac{(1-x)(1-y)}{4}\bar{x} \\
\bar{g_5} &= \frac{(1+x)(1+y)}{4}\bar{y} \\
\bar{g_6} &= \frac{(1+x)(1-y)}{4}\bar{y} \\
\bar{g_7} &= \frac{(1-x)(1+y)}{4}\bar{y} \\
\bar{g_8} &= \frac{(1-x)(1-y)}{4}\bar{y}
\end{aligned} \tag{11}$$

Les quatres premières fonctions sont illustrées en norme :

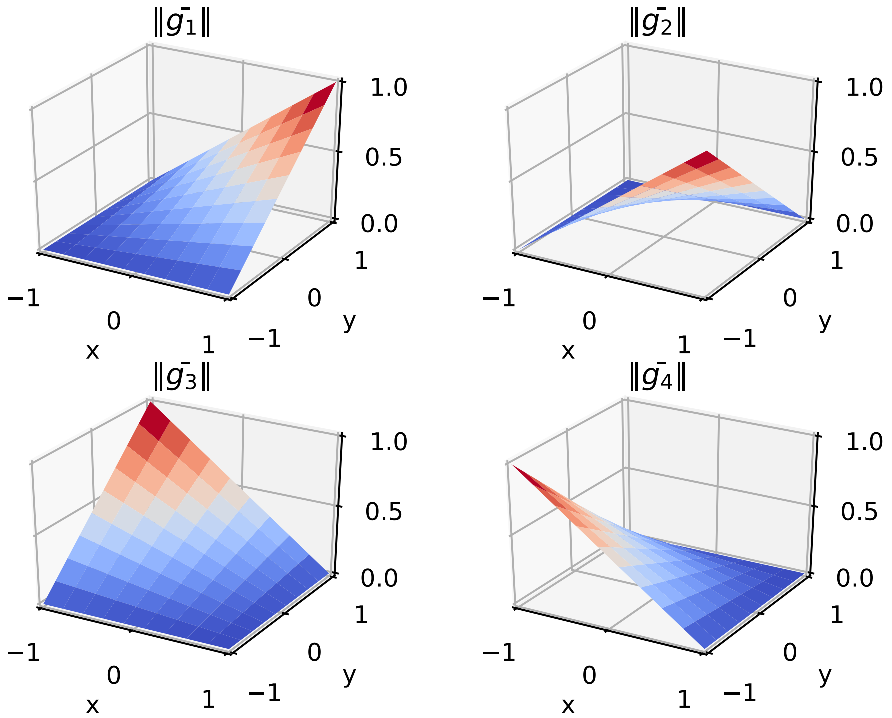

FIGURE 1 – Fonctions nodales

Pour chaque fonction de cette famille la formulation faible est vérifiée, i.e. pour tout i appartenant à {1,2 ... 8} on a l'égalité suivante :

$$a(\bar{u_s}, \bar{g_i}) = l(\bar{g_i}) \tag{12}$$

Avec $\bar{u_s}$ la fonction solution. Cette fonction peut être approchée par une combinaison linéaire de la famille de fonctions utilisées, on note alors la solution approximée $\bar{u_h}$ avec :

$$\bar{u_h} = \sum_{j=1}^{8} u_j \bar{g_j} \tag{13}$$

En combinant les équations (12) et (13) il vient :

$$\forall i \in \{1, 2..., 8\}, a(\sum_{j=1}^{8} u_j \bar{g_j}, \bar{g_i}) = l(\bar{g_i}) \tag{14}$$

Comme a est une fonction bilinéaire :

$$\forall i \in \{1, 2..., 8\}, \sum_{j=1}^{8} u_j a(\bar{g}_j, \bar{g}_i) = l(\bar{g}_i) \tag{15}$$

Ce système d'équation peut être résumé par le système matriciel :

$$\bar{\bar{A}}\bar{U} = \bar{b} \tag{16}$$

Avec $\bar{\bar{A}}$, la matrice de terme général $(A_{i,j}) = a(\bar{g}_j, \bar{g}_i)$, $\bar{U}$ le vecteur inconnu de terme général (U_i) et $\bar{b}$ le vecteur de terme général $(b_i) = l(\bar{g}_i)$.

Avant de résoudre le système matriciel il faut calculer les termes de la matrice $\bar{\bar{A}}$ et du vecteur $\bar{b}$, en calculant les intégrales correspondantes. Les 64 termes de la matrice sont calculés rapidement à l'aide de la fonction 'integrate' du package symbolique sympy de python.

Pour un élément fini de dimension 2a sur 2f, une fonctions nodales bilinéaires sont les mêmes que les fonctions g_i après changement de variable ;

en cours ...

La matrice $\bar{\bar{A}}$ est maintenant calculée pour un élément fini de dimension 2 sur 2, pour calculer cette même matrice sur un élément de dimension 2a sur 2f on peut utiliser le changement de variable :

en cours ...