

Modélisation par éléments finis de la déformation d'une poutre sous l'action d'une force

2020

Les notations tensorielles sont utilisées dans ce document. Par exemple le vecteur \vec{a} est noté \bar{a} car les vecteurs sont des tenseurs d'ordre 1. La matrice A est notée $\bar{\bar{A}}$ car c'est un tenseur d'ordre 2. $A : B$ représente le double produit contracté entre les tenseurs A et B .

1 Présentation du problème et formulation faible

Le but est de calculer les petites déformations élastiques d'un matériau isotrope sous l'action d'une force \bar{F} dans un espace de dimension 2.

Pour cela on utilise l'équation d'élasticité linéaire :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} + \bar{F} = \bar{0} \quad (1)$$

Avec $\bar{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy.

Pour utiliser cette équation dans le cadre des éléments finis il faut dériver la formulation faible de l'équation (1). Pour cela on multiplie l'équation par une fonction vectorielle test $\bar{v}(x, y)$ et on intègre l'équation sur le domaine de la poutre Ω qui est de longueur L et hauteur H .

$$\int_{\Omega} \bar{v} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} + \bar{F}) d\Omega = \bar{0} \quad (2)$$

Comme le tenseur des contraintes est symétrique on peut utiliser l'égalité suivante :

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \cdot \bar{\sigma}) - \bar{\sigma} : \bar{\bar{\nabla}} \bar{v} \quad (3)$$

En combinant les équation (2) et (3) on obtient :

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \cdot \bar{\sigma}) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\bar{\nabla}} \bar{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{v} \cdot \bar{F} d\Omega \quad (4)$$

En utilisant le théorème de flux-divergence, l'égalité devient :

$$\int_{\partial\Omega} \bar{v} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\nabla} \bar{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{v} \cdot \bar{F} d\Omega \quad (5)$$

En faisant l'hypothèse que les contraintes sont nulles aux bordures, le premier terme de l'équation est nul. On a finalement :

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\nabla} \bar{v} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{v} \cdot \bar{F} d\Omega \quad (6)$$

On utilise maintenant la loi de Hooke qui dans le cas d'un matériau isotrope s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\epsilon}) \bar{\mathbb{I}} + 2\mu \bar{\epsilon} \quad (7)$$

Avec $\bar{\epsilon}$ le champ lié au vecteur déplacement \bar{u} par :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{u} + \bar{\nabla} \bar{u}^T) \quad (8)$$

On intègre maintenant les équations (7) et (8) dans l'équation (6), ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \bar{u})(\nabla \cdot \bar{v}) + \mu \bar{\nabla} \bar{u} : \bar{\nabla} \bar{v} + \mu \bar{\nabla} \bar{u}^T : \bar{\nabla} \bar{v} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{v} \cdot \bar{F} d\Omega \quad (9)$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = l(\bar{v}) \quad (10)$$

Avec a une fonction symétrique bilinéaire et l une fonction linéaire.

2 Résolution numérique avec un élément fini

On illustre d'abord le principe de la méthode par éléments finis sur une poutre carrée de dimension 2x2 comprenant un unique élément fini.

Supposons que l'on ait un unique élément e_1 de largeur $2l=2$ et hauteur $2h=2$. Pour ce cas on décide d'adopter le maillage illustré figure 1.

Composantes du déplacement en x Composantes du déplacement en y

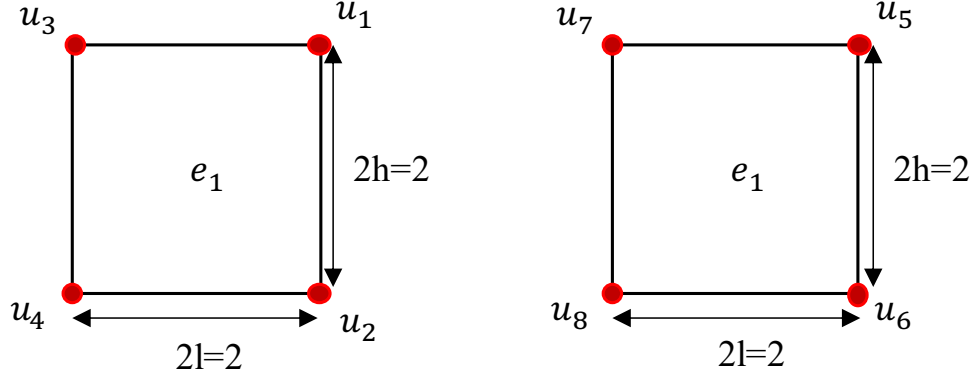


FIGURE 1 – Présentation du maillage

On utilise la famille de fonctions nodales bilinéaire suivante pour approximer la solution aux quatres coins de l'élément e_1 :

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_1 &= \frac{(1+x)(1+y)}{4} \bar{x} \\
 \bar{g}_2 &= \frac{(1+x)(1-y)}{4} \bar{x} \\
 \bar{g}_3 &= \frac{(1-x)(1+y)}{4} \bar{x} \\
 \bar{g}_4 &= \frac{(1-x)(1-y)}{4} \bar{x} \\
 \bar{g}_5 &= \frac{(1+x)(1+y)}{4} \bar{y} \\
 \bar{g}_6 &= \frac{(1+x)(1-y)}{4} \bar{y} \\
 \bar{g}_7 &= \frac{(1-x)(1+y)}{4} \bar{y} \\
 \bar{g}_8 &= \frac{(1-x)(1-y)}{4} \bar{y}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Remarque : il y a quatre coins et huit fonctions car les quatre premières fonctions permettent d'évaluer la composante du déplacement en x aux quatre coins de l'élément alors que les quatre autres permettent d'évaluer la composante du déplacement en y aux quatre coins de l'élément.

Les quatre premières fonctions sont illustrées en norme figure 2. Ces fonctions sont nulles en trois coins de l'élément et égales à 1 pour le dernier coin du même élément.

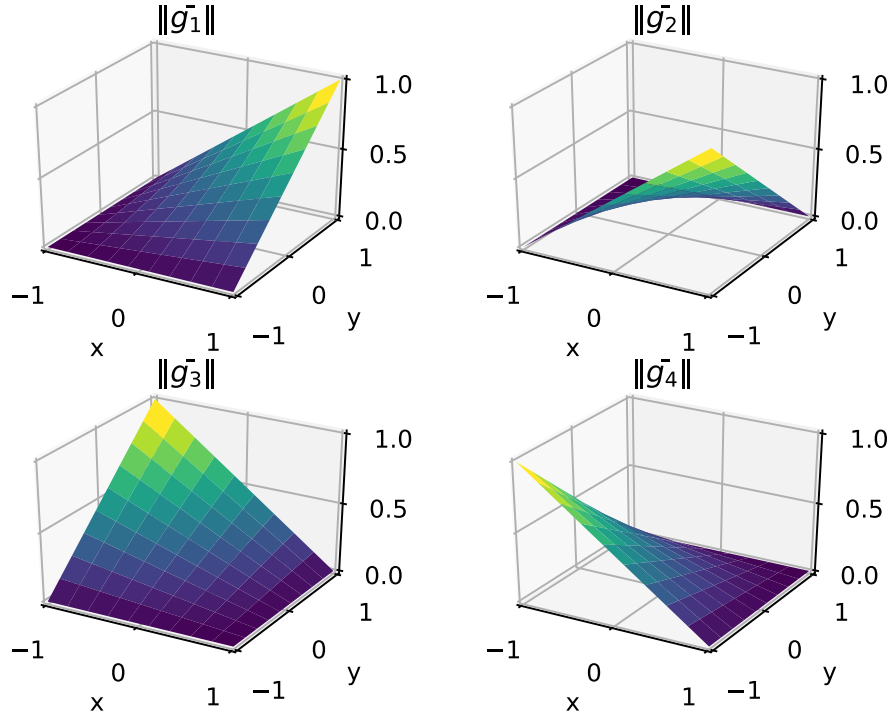


FIGURE 2 – Fonctions nodales

Pour chaque fonction de cette famille la formulation faible de l'équation est vérifiée, i.e. pour tout i appartenant à $\{1, 2 \dots 8\}$ on a l'égalité suivante :

$$a(\bar{u}_s, \bar{g}_i) = l(\bar{g}_i) \quad (12)$$

Avec \bar{u}_s la fonction solution. Cette fonction peut être approchée par une combinaison linéaire de la famille de fonctions utilisées, on note alors la solution approximée \bar{u}_h avec :

$$\bar{u}_h = \sum_{j=1}^8 u_j \bar{g}_j \quad (13)$$

Remarque : les coefficients u_j sont égaux aux déplacements aux coins de

l'élément. Par exemple, si on calcule \bar{u}_h au coin supérieur droit, on trouve

$$\bar{u}_h(1, 1) = \sum_{j=1}^8 u_j \bar{g}_j(1, 1) = u_1 \bar{g}_1(1, 1) + u_5 \bar{g}_5(1, 1) = u_1 \bar{x} + u_5 \bar{y} \quad (14)$$

En combinant les équations (12) et (13) il vient :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, 8\}, a\left(\sum_{j=1}^8 u_j \bar{g}_j, \bar{g}_i\right) = l(\bar{g}_i) \quad (15)$$

Comme a est une fonction bilinéaire :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, 8\}, \sum_{j=1}^8 u_j a(\bar{g}_j, \bar{g}_i) = l(\bar{g}_i) \quad (16)$$

Ce système d'équation peut être résumé par le système matriciel :

$$\bar{\bar{A}} \bar{U} = \bar{b} \quad (17)$$

Avec $\bar{\bar{A}}$, la matrice de terme général $(A_{i,j}) = a(\bar{g}_j, \bar{g}_i)$, \bar{U} le vecteur inconnu de terme général (U_i) et \bar{b} le vecteur de terme général $(b_i) = l(\bar{g}_i)$.

Avant de résoudre le système matriciel il faut calculer les termes de la matrice $\bar{\bar{A}}$ et du vecteur \bar{b} , en calculant les intégrales correspondantes. Les 64 termes de la matrice sont calculés rapidement à l'aide de la fonction 'integrate' du package symbolique sympy de python.

On obtient alors la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{3} + \mu & \frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} \\ \frac{\lambda}{6} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} \\ -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{3} + \mu & \frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} \\ -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{6} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} \\ \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} \\ -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{6} \\ \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} \\ -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{3} + \mu \end{bmatrix} \quad (18)$$

On décide d'appliquer une force de -8.10^4 Newton selon \bar{y} en $(1,0)$. On calcule les terme du vecteur \bar{b} en remplaçant \bar{F} par $-8e4\delta(1,0)\bar{y}$ dans l'expression de $l(\bar{v})$.

De plus, on impose un déplacement nul aux coins gauches, i.e. $u_3 = u_4 = u_7 = u_8 = 0$. On modifie donc la matrice en conséquence :

$$\begin{bmatrix}
\frac{\lambda}{3} + \mu & \frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} \\
\frac{\lambda}{6} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{6} & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} \\
-\frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{4} & \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{4} & -\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{3} + \mu & -\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\quad (19)$$

Après résolution du système on trouve le déplacement suivant exagéré par un facteur 50000 pour la poutre.

Déformation de la poutre exagérée par un facteur :50000

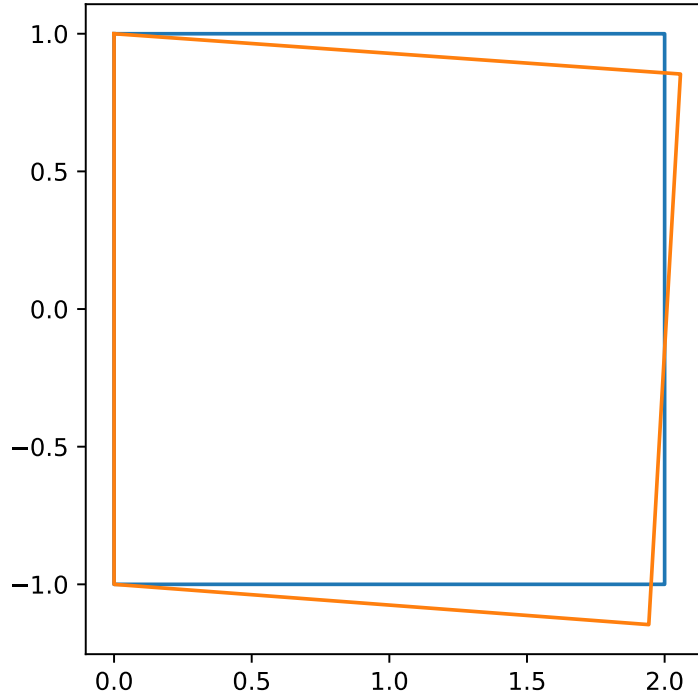


FIGURE 3 – Résolution pour un élément fini. Paramètres $E=1.18e11$ $\nu=0.31$.

Maintenant supposons que l'on ait un élément fini de dimensions arbitraires.

Pour un élément fini de dimension $2a$ sur $2f$, une fonctions nodales bi-linéaires sont les mêmes que les fonctions g_i après changement de variable ;

En cours de complétion...

La matrice \bar{A} est maintenant calculée pour un élément fini de dimension 2 sur 2, pour calculer cette même matrice sur un élément de dimension $2a$ sur $2f$ on peut utiliser le changement de variable :

En cours de complétion...

3 Résolution numérique avec plusieurs éléments finis

On décide d'utiliser un maillage quadrilatéral sur la poutre. Ce maillage est illustré dans la figure 4. Le maillage est constitué de $N * NN$ éléments $\{e_1, e_2, \dots, e_{N*NN}\}$. La solution est calculée aux coins de chaque éléments. Par exemple, sous l'action de la force le déplacement du coin supérieur gauche est u_1 , le déplacement du coin inférieur droit est $u_{(N+1)*(NN+1)}$. Pour un élément e_n , le déplacement u est calculé aux quatre coins de l'élément (voir figure 4). On peut remarquer que chaque élément a pour largeur $2l$ et pour hauteur $2h$.

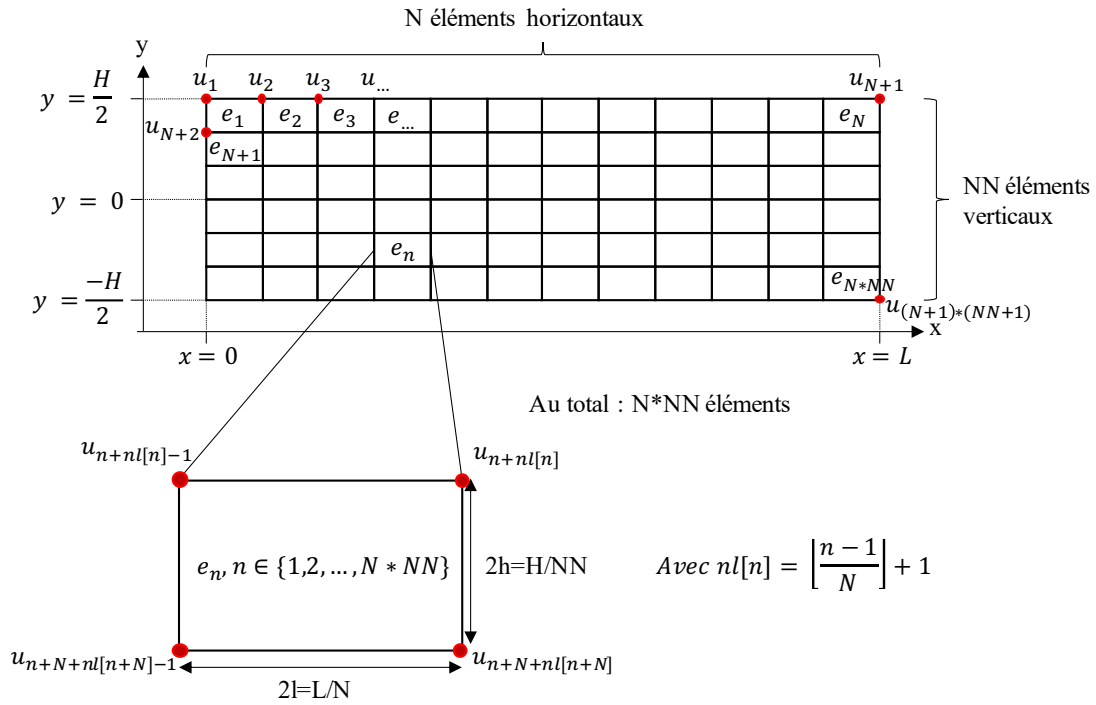


FIGURE 4 – Présentation du maillage

En cours de complétion...