

Contrat Été 2024

RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER-UQAR

28/06/2024

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR
Police d'écriture : **CMU Serif Roman**

Table des matières

1	Les glaces dans le modèle de Elizabeth Hunke	2
1.1	Mise en contexte	2
1.2	Les équations en jeu	2
1.2.1	La formulation élastique	3
1.3	Simplification du modèle EVP (pour mieux comprendre)	4
2	Présentation de Dany à l'Institut Isaac Newton	4
2.1	Mise en contexte	4
2.2	Équilibre radiatif entre les vagues et la pression interne de la glace	5
2.3	Résultats empiriques pour l'équilibre radiatif	6
2.4	Équilibre de cisaillement	7
2.5	Conclusions	7
3	Résumé personnel rapide	7

1 Les glaces dans le modèle de Elizabeth Hunke

1.1 Mise en contexte

La **rhéologie** est définie comme la science de la déformation des matériaux. COON et al. (1974) propose une rhéologie élasto-plastique pour les paquets de glace (*see ice pack*). HIBLER (1979) propose une rhéologie comme un plastique visqueux non-linéaire. Le papier de HUNKE et DUKOWICZ (1997) présente une méthode numérique implicite pour solver les équation du model VP. Selon HUNKE et DUKOWICZ, l'enjeu vient du fait qu'il est difficile de modéliser la riche gamme de viscosités exprimé à l'intérieur d'un simple domaine de glace hétérogène. Bref, un nombre impressionnant de rhéologies a été exploré.

***N.B.** Un model explicite extrapole le futur à l'aide des quantités passées tandis qu'un schéma implicite évaluerait le futur à l'aide de quantités inconnues à $n + 1$.

1.2 Les équations en jeu

La balance des forces par unité d'aire dans la glace est donnée par l'équation du mouvement en deux dimensions,

$$\underbrace{m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)}_{\text{Évolution}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)}_{\text{Strenght of the ice}} + \underbrace{\tau_{ai}}_{\text{Contraintes Vent-Ocean}} + \underbrace{\tau_{wi}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\varepsilon_{ij3} m f u_j}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{\left(m g \frac{\partial H_o}{\partial x_i} \right)}_{\text{Élévation de l'eau}}, \quad (1.1)$$

où $\tau_a = (\tau_{ai}, \tau_{aj})$ et $\tau_w = (\tau_{wi}, \tau_{wj})$ sont le vent et les contrainte de déformation. Comme mentionné dans l'article :

The strenght of the ice is represented by the internal stress tensor σ_{ij} .

La masse de glace est exprimée par l'expression

$$m = \rho_i [cH + (1 - c)h] + \rho_s [cH_s(1 - c)h_s]. \quad (1.2)$$

Pour ce qui est de la rhéologie, HIBLER (1979) proposait une rhéologie elliptique **visco-plastique** qui relie les contraintes internes à l'intérieur de la glace (*internal ice stress*) avec le degré d'étirement ou de déformation (*rate of strain*) – ou le **taux de changement de la déformation** pour être plus précis. Et donc la forme de cette rhéologie est donnée par

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\zeta - \eta) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - P \cdot \delta_{ij} / 2, \quad (1.3)$$

où la variable

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.4)$$

est un genre de jacobien. On réécrit le **tenseur de déformation dans le domaine plastique** de manière plus évidente,

$$\boxed{\frac{1}{2\eta} \sigma_{ij} + \frac{\eta - \zeta}{4\eta\zeta} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{P}{4\zeta} \delta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}}, \quad \text{Déformation plastique} \quad (1.5)$$

car ça va être important un peu plus loin. Grossièrement, cette rhéologie permet au paquets de glace de diverger avec très peu de contrainte, mais résiste grandement à la compression et au cisaillement.

Selon HUNKE et DUKOWICZ (1997), la pression (P) est en quelque sorte une mesure de la force de la glace qui dépend de la robustesse et de l'épaisseur de la glace.

$$P = P^* c H e \exp[-c^*(1 - c)], \quad (1.6)$$

où P^* et c^* sont des constantes données dans une table quelque part. C'est pas mal semblable à la formulation de HIBLER (1979), car cH est approximativement la même chose que son *equivalent ice thickness*. La viscosité augmente avec la pression de sorte à obtenir

$$\zeta = \frac{P}{2\Delta}, \quad \eta = \frac{P}{2\Delta e^2}, \quad \Delta = [(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2)(1 + e^{-2}) + 4e^{-2}\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{11}\dot{\epsilon}_{22}(1 - e^{-2})]^{1/2} \quad (1.7)$$

Il semble que sans tension (*strain*), la viscosité devienne infinie... ce qui nous force à mettre des viscosités minimum et maximum. Selon HUNKE et DUKOWICZ, c'est une solution qui amène ses propres problèmes, donc on cherche de nouvelles solutions.

On peut quand même se permettre de combiner les équations précédentes, ce qui donne un beau *ice jumble d'équations*,

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\eta + \zeta) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\zeta - \eta) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + c'[(U_w - u) \cos \theta - (V_w - v) \sin \theta] + \tau_{ai} + mfv - mg \frac{\partial H_o}{\partial x}, \quad (1.8)$$

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\eta + \zeta) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\zeta - \eta) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} + c'[(V_w - v) \cos \theta - (U_w - u) \sin \theta] + \tau_{aj} + mfu - mg \frac{\partial H_o}{\partial y}. \quad (1.9)$$

Si on réorganise les termes du système d'équations précédentes, on retrouve une version simplifiée où les termes de Coriolis, les contraintes de surfaces (*surface stresses*), la pression et les termes de *tilt* sont incorporés dans une variable \mathbf{R} , soit

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{R}. \quad (1.10)$$

C'est grossièrement l'équation qui nous permet le mieux de comprendre la nature plastique de la glace, même si c'est une équation d'onde. Lorsque $\eta = 0$, on obtient le cas spécial d'un fluide en cavitation – un fluide dépourvu de viscosité.

La condition de stabilité unidimensionnelle pour une discrétisation explicite nous donnerait un pas de temps numérique de l'ordre de

$$\Delta t \geq \frac{m}{2\eta} \Delta x^2. \quad (1.11)$$

Bref, si on *plug* les constantes, on voit qu'on obtient des temps de calculs beaucoup trop longs ou une très mauvaise précision. Si on reprend l'équation précédente, mais en ajoutant une dimension élastique (Ajout de E) et un amortissement (*damping*),

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = E \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{R}}{\eta} \right) + \text{amortissement}, \quad (1.12)$$

où E est un coefficient qui s'apparente au module de Young – comme avec les bon vieux ressorts. Pour citer HUNKE et DUKOWICZ (1997),

This equation is meant to represent, albeit very crudely, an elastic-plastic model of the sea ice in the regime where elastic waves dominate.

Cette formulation devrait converger au même état d'équilibre que 1.10, tout en représentant un modèle élastique et plastique de la glace de mer où les ondes élastiques dominent.

***N.B.** L'équation 1.12 diffère de 1.10 du fait qu'on a $(\partial^2 u / \partial t^2)$ plutôt que $(\partial u / \partial t)$, donc l'étirement n'est pas proportionnel à la déformation, mais plutôt au taux de déformation.

1.2.1 La formulation élastique

Pour construire un modèle élastique, il faudrait séparer le tenseur de tension en deux parties, soit un domaine plastique et un domaine élastique. La partie «plastique» a déjà été prise en compte à l'équation 1.5 et la partie élastique devrait être approximée par

$$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \epsilon_{ij}. \quad \text{Déformation élastique} \quad (1.13)$$

Lorsqu'on ajoute les contributions élastiques et plastiques (1.5), on obtient

$$\boxed{\frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2\eta} \sigma_{ij} + \left(\frac{\eta - \zeta}{4\eta\zeta} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \left(\frac{P}{4\zeta} \right) \delta_{ij} = \epsilon_{ij}.} \quad (1.14)$$

1.3 Simplification du modèle EVP (pour mieux comprendre)

On assume que

- ⇒ Toutes les variations spatiales arrivent dans la direction x .
- ⇒ Tous les coefficients sont constants, tous les forçages sont absorbés dans le terme τ .
- ⇒ Le terme constant $P/4\zeta$ est absorbé dans $\sigma = \sigma_{11}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$.

Les équations résultantes sont

$$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\zeta} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.15)$$

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \tau, \quad (1.16)$$

où ζ est une constante effective de viscosité comme auparavant. Mentionnons qu'on retrouve le modèle VP (*viscous plastic*) (1.5) dans la limite où $E \rightarrow \infty$,

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau, \quad (1.17)$$

tandis que la limite où $\zeta \rightarrow \infty$, on retrouve le modèle purement élastique amorti, soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_e^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (1.18)$$

où $c_e = \sqrt{E/m}$, soit la vitesse des ondes élastiques.

2 Présentation de Dany à l'Institut Isaac Newton

2.1 Mise en contexte

Dans sa [présentation à l'Institut Isaac Newton \(2023\)](#), Dany décrit la dynamique de la zone marginale à l'aide de l'équation

$$\rho_i h \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} \right) = \mathbf{F}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.1)$$

où la somme des forces est décrite comme

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\boldsymbol{\tau}_g}_{\text{Gradient de surface}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_a}_{\text{Vent}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_o}_{\text{Courant}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_b}_{\text{Plancher océanique}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_w}_{\text{Stress radiatif des vagues}}. \quad (2.2)$$

★ Il faudrait préciser la provenance de l'équation 2.1, même si ça semble juste être une version modifiée de Navier-Stokes.

Le terme $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ – définit comme étant la **rhéologie** – est décrit à l'aide de l'équation de **déformation d'un plastique visqueux** (HUNKE & DUKOWICZ, 1997) (voir équation 1.3 plus haut), soit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\zeta - \eta) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \frac{P}{2} \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

où η et ζ sont des viscosités (à définir). La variable $\dot{\epsilon}_{ij}$ est le tenseur de tension ou d'étirement (*strain tensor*).

L'onde en question se propage à la manière d'une onde évanescente dans le medium. L'équation 2.1 nous permet de visualiser deux équilibres entre l'énergie des vagues et la rhéologie, soit

$$\boldsymbol{\tau}_w + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.5)$$

En posant la limite de la zone marginale à $x = 0$ (comme illustré à la figure 1) et l'arrivée des vagues avec un angle ϕ , on obtient deux équilibres entre les différentes forces :

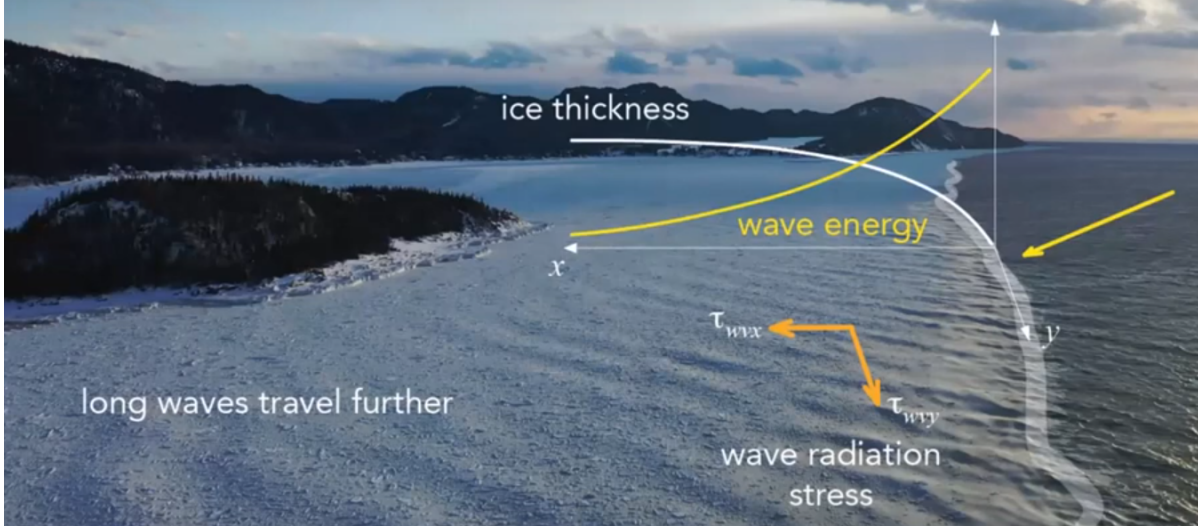


FIGURE 1 – Illustration d'un cas de figure observé à la baie du Ha-Ha.

⇒ **Équilibre compressif** – Stress radiatif balance les termes de pression.

$$\underbrace{\text{Momentum vagues-x}}_{\tau_{wx}} + \underbrace{\text{Pression}}_{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)} = 0, \quad (2.6)$$

⇒ **Équilibre de cisaillement** – Cisaillement le long du *ice edge* qui balance les forces visqueuses :

$$\underbrace{\text{Momentum vagues-y}}_{\tau_{wy}} + \underbrace{\text{Viscosité}}_{\eta \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right)} = 0. \quad (2.7)$$

***N.B.** On s'attarde principalement à l'équilibre entre le transfert de momentum des vagues et la rhéologie, car le vent a peu d'impact à l'échelle désirée. Dany élaborera son argument vers la fin de la présentation.

2.2 Équilibre radiatif entre les vagues et la pression interne de la glace

Dans le milieu à l'étude, l'objectif est de représenter au moins trois types de glaces de manière générale. On mentionne ici trois types de *slush*. Ces interactions sont modélisées à l'aide de la friction de Mohr-Coulomb. Dany introduit donc le *ice jumble model for the compressive strenght* (voir UZUNER et KENNEDY (1976), HOPKINS et TUHKURI (1999) et DAI et al. (2004))

⇒ Friction de Mohr-Coulomb dans le plan x-z

$$\sigma_x = \sigma_z \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \quad (2.8)$$

$$P = \left(\frac{h^2}{2} \right) \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right) (1 - n) \rho_i g_e \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \quad \text{ou plutôt} \quad \boxed{P = K_r \cdot h^2}. \quad (2.9)$$

Grossièrement, c'est proportionnel à l'épaisseur au carré (h^2) et il y a aussi un terme de *porosité* (n) dans le but de représenter le fait qu'il y a des craques et des interstices dans la glace. On définit K_r comme

$$K_r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right) \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) (1 - n) \rho_i g_e \quad (2.10)$$

On introduit maintenant le tenseur pour la contrainte radiative des vagues (voir LONGUET-HIGGINS & STEWART, 1964),

$$\mathbf{R} = \rho g \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(k, \theta) \begin{pmatrix} c_g \cos^2 \theta + \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2}\right) & c_g \cos^2 \theta \sin \theta \\ c_g \cos^2 \theta \sin \theta & c_g \cos^2 \theta + \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} k \cdot dk d\theta \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\tau}_w = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{R} = \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \quad (2.12)$$

À incidence normale et en eau profonde, c'est un cas spécial. On se souvient que $c_g = 1/2c$, ainsi

$$\boldsymbol{\tau}_w = -\frac{1}{2}\rho g \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{i}} \quad (2.13)$$

En partant de l'équation d'équilibre compressif (2.6), on obtient une solution pour l'épaisseur de la glace, soit

$$\boxed{h^2(x) = -\frac{\rho_w g_e E_0}{K_r} (1 - e^{-\alpha x}),} \quad (2.14)$$

où E_0 est l'énergie de l'onde incidente; K_r est une fonction de la porosité, de la friction interne et de l'angle d'incidence; puis le binôme $(1 - \exp(-\alpha x))$ est la décroissance de l'énergie des vagues le long de l'axe x . On voit apparaître un gradient dans la distribution des floes (Voir figure 2).



FIGURE 2 – Distribution radiale des floes dans la baie du Ha-Ha.

2.3 Résultats empiriques pour l'équilibre radiatif

Dans la baie du Ha-Ha, ils ont mesuré l'épaisseur du *ice jumble* ainsi que l'énergie des vagues le long du transect. De cette manière, on trouve le coefficient d'atténuation (α) et la relation de dispersion de l'onde dans le milieu. On peut même trouver l'atténuation en fonction de la fréquence de l'onde. Le labo arrive environ à

$$\alpha(\omega) = 5.8 \times 10^{-3} \omega^{3.2}. \quad (2.15)$$

Et on voit directement une énorme différence (2 ordres de grandeur) entre la rhéologie de Hibler et mixte

$$P_{Hibler} = P^* h, \quad (2.16)$$

$$P_{MC} = K_r \cdot h^2, \quad \Leftarrow \quad \text{Pas mal meilleur} \quad (2.17)$$

où P^* est une constante.

2.4 Équilibre de cisaillement

Pas le temps pour ça.

2.5 Conclusions

- ⇒ Dans la zone marginale stationnaire, on a isolé l'équilibre entre le transfert de momentum radiatif des vagues et la pression interne.
- ⇒ La force compressive (ou la résistance) de la glace correspond au modèle de friction de Mohr-Coulomb dans une *ice jungle*.
- ⇒ La porosité est possiblement une nouvelle variable qui a besoin de recherche active.
- ⇒ La dépendance à l'épaisseur de la glace est quadratique comparativement à la version linéaire de HIBLER (1979)

Aussi :

- ⇒ Un équilibre dynamique le long du *ice edge* existe et peut être utilisé pour quantifier les viscosité de cisaillement et valider les modèles.
- ⇒ La contrainte radiative des vagues peut aussi pousser le frasil sous la glace consolidée sur de longues distances, bien plus loin que le *ice edge*.

3 Résumé personnel rapide

La glace est considérée dans notre modèle comme un fluide en deux dimensions. On prend les équations de Navier-Stokes intégrées verticalement sur l'épaisseur de la couche de glace h pour décrire son comportement dynamique, soit

$$\underbrace{\rho h \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} \right)}_{\text{Accélération référentiel en rotation}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i}_{\text{Somme des forces}} + \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{\text{Terme de Rhéologie}} \quad (3.1)$$

La somme des forces $\sum_i \mathbf{F}_i$ est vue comme une somme de contraintes ou de forces qui agissent sur la glace. Mentionnons que l'équation 3.1 est en Pa ou en Nm^{-2} . Dans le modèle Wavewatch III, les **transferts de momentum** sont exprimés dans ces mêmes unités, ce qui pourrait rendre le couplage assez simple. « h » est l'épaisseur moyenne de la glace dans une cellule d'aire A (voir DUMONT, 2022, pour un aperçu). Comme exprimé à l'équation 2.2, ça peut représenter toutes les interactions externes à la glace, soient l'élévation du gradient de surface (τ_g), le vent (τ_a), les courants sous-jacents (τ_o), le contact avec le fond de l'eau (τ_b) ou la contrainte radiative des vagues (τ_w).

Pour l'essentiel, la **rhéologie** est la manière qu'un matériau réagit aux contraintes qui lui sont infligées. Concrètement, c'est le terme $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ qui agit comme un terme dans l'équation dynamique 3.1. On peut exprimer ce terme comme la divergence d'une matrice, qu'on appelle le **tenseur de contraintes** $\boldsymbol{\sigma}$ (ou en notation matrices 2-dimensions $[\sigma_{ij}]$). En **deux dimensions**, les contraintes sont illustrées à la figure 3.

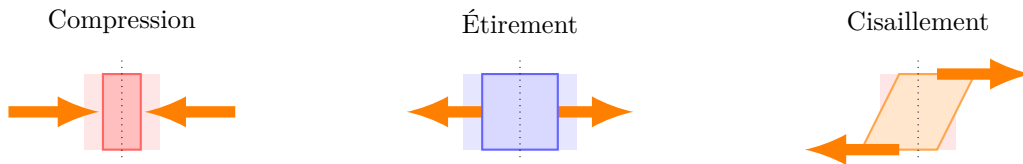


FIGURE 3 – Illustrations des différentes contraintes pouvant s'appliquer sur un élément infinitésimal en deux dimensions.

Différents matériaux réagiront différemment aux contraintes, c'est pourquoi il est important de différencier les **contraintes** et la **déformation**. La déformation sera le résultat de l'effet de la contrainte sur le matériau. En deux dimensions,

le taux de déformation (*strain rate tensor*) est défini avec un tenseur (ou une matrice symétrique) du même nom, soit

$$[\dot{\epsilon}_{ij}] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & (1/2) [\partial u / \partial y + \partial v / \partial x] \\ (1/2) [\partial u / \partial y + \partial v / \partial x] & \partial v / \partial y \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

de sorte que le taux de déformation est une fonction des contraintes de cisaillement

$$\dot{\epsilon}_{ij} = f(\sigma_{ij}), \quad (3.3)$$

et c'est cette même fonction qui décrit comment le matériau se comporte.

Exemple Prenons l'exemple du fluide océanique dans le modèle *shallow water*. Généralement, on ajoute une viscosité dans les modèles et ce terme possède la forme $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. Ce qui signifie que

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}), \quad (3.4)$$

et donc que la relation entre les contraintes et le taux de déformation suit la règle

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \nu \nabla \mathbf{u} \\ &= \nu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \nu \mathfrak{L} \end{aligned} \quad (3.5)$$

À partir d'ici (et selon [Wikipedia](#)), il est possible d'utiliser la matrice \mathfrak{L} pour construire deux tenseurs, soient :

\Rightarrow le **tenseur du taux de déformation**, définit par la relation

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^\top), \quad (3.6)$$

\Rightarrow le **tenseur du taux de rotation**, définit par la relation

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}^\top), \quad (3.7)$$

Donc, le lien entre notre tenseur de contraintes et le taux de déformation peut être exprimé par

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2\nu}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^\top) \quad (3.8)$$

Et donc, dans le cas de la viscosité océanique, la relation entre les éléments est donnée par

$$\boxed{\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\nu}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji})}, \quad (3.9)$$

ce qui représente le rapport entre le taux de déformation et les contraintes appliquées sur notre fluide. \blacktriangleleft

Il existe plusieurs types de rhéologies. Dans sa [présentation à l'Institut Isaac Newton \(2023\)](#), Dany utilise principalement la formation de HIBLER (1979) (eq. 1.3), de sorte à obtenir un équilibre radiatif entre les vagues et la pression interne dans la glace. De cette manière, il obtient une distribution d'épaisseur de glace qui satisfait les observations.

Dans l'article de HUNKE et DUKOWICZ (1997) l'ajout d'un terme à la rhéologie visco-plastique de HIBLER (1979) (voir équation 1.5) vient régler quelques problèmes associées aux cas limites. De cette manière le modèle de glace est maintenant considéré comme visqueux, élastique et plastique (voir équation 1.14) – d'où le sobriquet *EVP model*.

Références

- LONGUET-HIGGINS, M. S., & STEWART, R. Radiation stresses in water waves; a physical discussion, with applications. In : In *Deep sea research and oceanographic abstracts*. 11. (4). Elsevier. 1964, 529-562. [https://doi.org/10.1016/0011-7471\(64\)90001-4](https://doi.org/10.1016/0011-7471(64)90001-4)
- COON, M., MAYKUT, G., PRITCHARD, R., ROTHROCK, D., & THORNDIKE, A. (1974). Modeling the pack ice as an elastic-plastic material, *Aidjex Bull.*, 24, 1-105, 1974. *Adjex Bulletin*, 24, 1-105.
- UZUNER, M. S., & KENNEDY, J. F. (1976). Theoretical model of river ice jams. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(9), 1365-1383. <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0004618>
- HIBLER, W. (1979). A dynamic thermodynamic sea ice model. *Journal of physical oceanography*, 9(4), 815-846. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1979\)009%3Co815:ADTSIM%3E2.o.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1979)009%3Co815:ADTSIM%3E2.o.CO;2)
- HUNKE, E. C., & DUKOWICZ, J. K. (1997). An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics. *Journal of physical oceanography*, 27(9), 1849-1867. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1997\)027%3C1849:AEVPMF%3E2.o.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1997)027%3C1849:AEVPMF%3E2.o.CO;2)
- HOPKINS, M. A., & TUHKURI, J. (1999). Compression of floating ice fields. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 104(C7), 15815-15825. <https://doi.org/10.1029/1999JC900127>
- DAI, M., SHEN, H. H., HOPKINS, M. A., & ACKLEY, S. F. (2004). Wave rafting and the equilibrium pancake ice cover thickness. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 109(C7). <https://doi.org/10.1029/2003JC002192>
- DUMONT, D. (2022). Marginal ice zone dynamics: history, definitions and research perspectives. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 380(20210253). <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0253>