

Contrat Été 2024

# RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE  
D'UN PROJET POUR

ISMER-UQAR

12/07/2024

Rédaction  
Charles-Édouard Lizotte  
[charles-edouard.lizotte@uqar.ca](mailto:charles-edouard.lizotte@uqar.ca)  
ISMER-UQAR  
Police d'écriture : **CMU Serif Roman**

# Table des matières

1	Notes tirées de Dumont (2022) et Herman (2022)	2
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Équations dynamiques et balance . . . . .	2
1.3	La rhéologie . . . . .	3
2	Parenthèse Wikipedia sur les tenseurs de déformation	3
2.1	Tenseur de contrainte de Cauchy . . . . .	3
2.2	Les fluides newtoniens selon Wikipedia . . . . .	4
2.3	Cas incompressible selon Wikipedia . . . . .	6
3	Retour à Herman	7

# 1 Notes tirées de Dumont (2022) et Herman (2022)

## 1.1 Introduction

DUMONT (2022) parle principalement de la MIZ (pout « *Marginal Ice Zone* ») en mentionnant qu'elle est a un rôle important dans l'étude des deux pôles et nous fait un récapitulatif historique depuis 1970. Entre autre :

- ⇒ La glace de mer module l'échange de chaleur, de masse et de momentum entre l'océan et l'atmosphère ;
- ⇒ C'est un habitat très important pour beaucoup d'espèces et c'est un medium de transport pour de nombreuses communautés.

Comment définir la MIZ ? À l'aide de satellites, il est possible d'acquérir la concentration de glace de mer (*Sea Ice Concentration* [SIC]). On établie la glace de mer avec un niveau définit par

$$15\% < SIC < 80\%. \quad (1.1)$$

Dans l'article de Liu et al (1993) *Wave effects on ocean-ice interaction in the marginal ice zone*, on mentionne que

« Wave radiation stress acts to sharpen ice edges and enhances wind stress and thus amplifies the formation of eddies and the associated baroclinic response of the ocean, thus contributing to the two last mechanisms. »

Dany pose la question : Quelles sont les avenues qui pourraient nous aider à systématiquement décrire le comportement de la glace dans la zone marginale (MIZ) ?

- ⇒ Reconnaissance de patron (*patern recognition*) ?
- ⇒ Comprendre la propagation des vagues dans la MIZ.
- ⇒ Mesure systématique de la taille des floes dans un modèle granulaire.

## 1.2 Équations dynamiques et balance

Essentiellement, tout a été fait par COON et al. (1974) par le groupe AIDJEX dans les années 70. Ce qui est utilisé partout pour la dynamique

$$\rho_i h \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} \right) = F_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.2)$$

Le système d'équations précédent est exprimé en Pa, soit des  $\text{Nm}^{-2}$ .

De son côté, **l'équation de balance** est l'héritage principal de la mission AIDJEX (COON et al., 1974 ; THORNDIKE et al., 1975), cette dernière est définie comme

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}}_{\text{Évolution}} = - \underbrace{\nabla \cdot (g\mathbf{u})}_{\text{Transport horizontal}} + \underbrace{\psi}_{\text{Conservation de la masse}} + \underbrace{\frac{\partial(Fg)}{\partial h}}_{\text{Fonte et croissance}} + \underbrace{L}_{\text{Entrée de glace}}. \quad (1.3)$$

où  $g(h)$  est définit comme la fraction de l'aide de glace dont l'épaisseur se situe entre  $h$  et  $h + dh$ . Grossièrement :

- ⇒  $\nabla \cdot g\mathbf{u}$  est définit comme le transport horizontal ;
- ⇒ Le terme  $\psi$  décrit comment la glace e mer s'épaissit pendant la convergence, dans le but de conserver la masse, c'est ce qu'on appelle la redistribution des épaisseurs (*thickness redistribution*) (Voir THORNDIKE et al., 1975) ;
- ⇒  $\partial(Fg)/\partial h$  représente le changement dans la distribution des épaisseurs due à la fonte et à la croissance des glaces (par exemple les chutes de neige).  $F$  vient souvent d'une étude ou d'un modèle thermodynamique pour la transformation de la glace en eau de mer ;
- ⇒  $L$  représente l'ajout ou l'entrée de glace dans l'océan.

L'équation 1.3 (aussi appelée la ITD pour « *Ice Thickness Distribution* ») est la seule connexion entre la dynamique de la glace de mer et la taille des floes qu'on connaissait jusqu'à très récemment. La dépendance spatio-temporelle de la taille des floes (1.3) a initialement été introduite par ZHANG et al. (2015), mais c'est HORVAT et TZIPERMAN (2015) qui ont généralisée l'équation 1.3 de sorte à prendre en compte l'évolution de la taille des floes comme facteur important dans la description d'état de la glace de mer.

Considérant cela, HORVAT et TZIPERMAN (2015) relient ces deux variables dépendantes à l'aide d'une nouvelle distribution, la FSTD (pour « *floe size and thickness distribution* »), dénotée par  $J(r, h) = J(\mathbf{r})$  où  $r$  est utilisé comme une variable d'échelle horizontale de nos floes et non strictement le rayon d'un disque – comme on voit dans de nombreuses simulations. L'expression la plus générale est dénotée par

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \nabla \cdot (J\mathbf{u}) + (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_W)J, \quad (1.4)$$

où  $\mathcal{L}_M$ ,  $\mathcal{L}_T$ ,  $\mathcal{L}_W$  représentent respectivement

- ⇒ la redistribution mécanique ;
- ⇒ les processus thermiques qui affectent la taille des floes et l'épaisseur ;
- ⇒ le « *wave induced breakup* ».

Ce dernier est défini comme

$$\mathcal{L}_W(r, h) = -Q(r, h) \int_0^\infty Q(r', h) \beta(r, r', h) dr'. \quad (1.5)$$

où  $Q(r, h)$  est une fonction qui donne la taille des fragments quand un floe de taille « $r$ » se brise. On a malheureusement peu d'information sur tout ça, à part quelques expériences en laboratoire.

### 1.3 La rhéologie

La mission AIDJEX considérait la glace comme un matériau plastique qui ne se déforme seulement que sous une contrainte critique. C'est encore débattu dans la communauté si l'on devrait considérer la glace comme un matériau élastique, fragile, visqueux et/ou platique. Il faut noter qu'on fait généralement des paramétrisations, car on n'a peu de moyen de s'informer sur les processus aux petites échelles. Bref, on se souvient que HIBLER (1979) définissait une rhéologie visco-plastique de la forme

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + (\eta + \zeta)\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} - \frac{p}{2}\delta_{ij}, \quad (1.6)$$

où  $p = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2)$  est défini comme la **pression isotropique**. Tandis que  $\eta$  et  $\zeta$  sont les *bulk* et *shear nonlinear viscosities* qui dépendent littéralement de tout (Ouin...). On définit le tenseur du taux de déformation (*strain rate*) par

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

## 2 Parenthèse Wikipedia sur les tenseurs de déformation

### 2.1 Tenseur de contrainte de Cauchy

Le tenseur des contraintes (**tenseur de Cauchy**) est une matrice qui décrit **toutes les forces** pouvant s'appliquer, à la fois, sur les faces d'un élément cubique infinitésimal, mais aussi dans toutes les directions (Voir figure 1). Pour un continuum ou un domaine pouvant se déformer, les contraintes  $\sigma_{ij}$  définies comme des unités de pression ( $\text{Force}/\text{Aire} \Rightarrow [N/m^2]$ ).

$$\sigma_{ij} = \frac{F_{ij}}{a^2}, \quad (2.1)$$

**Pour chaque face de notre cube infinitésimal** – dénotées par l'indice  $i$  – on peut définir une force  $\mathbf{F}_i$  à l'aide de la base des vecteurs orthonormaux  $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$  et  $\hat{\mathbf{e}}_z$ , s'appliquant sur cette même surface, soit

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{pmatrix} = \sum_j F_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j = F_{ix} \hat{\mathbf{e}}_x + F_{iy} \hat{\mathbf{e}}_y + F_{iz} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.2)$$

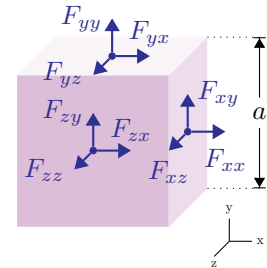


FIGURE 1 – Forces s'appliquant sur un élément infinitésimal cubique de volume  $A^3$ .

où  $j$  la décrit la direction de la composante de la force s'appliquant sur la surface en question. Rappelons que l'indice  $i$  dénote le choix de la surface du cube, de sorte que le vecteur  $\hat{\mathbf{e}}_i$  est normal au plan  $i$ .

Finalement, le tenseur de contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est condensé dans la matrice

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_x)^\top \\ (\mathbf{F}_y)^\top \\ (\mathbf{F}_z)^\top \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Sur les lignes, ce sont les contraintes s'appliquant sur chaque faces. Tandis que les colonnes représentent les forces dans la même direction et c'est pourquoi la divergence de cette quantité devient intéressante. Par coutûme, nous prenons la notation

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

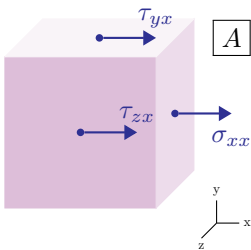
pour différentier la diagonale (les contraintes normales) des autres termes (les contraintes de cisaillement). Mentionnons aussi que le tenseur de contraintes est toujours symétrique. Le tenseur de contraintes est donc une matrice (ou un tenseur) qui entpose toutes les contraintes possibles.

Donc, lorsqu'on applique cela à une rhéologie, concrètement on fait une différence de forces dans chaque directions, soit une divergence donnée par

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \left( \left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right], \right. \\ &\quad \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right], \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si l'on désire observer de plus près,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left( \underbrace{\left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right]}_{\boxed{A}}, \underbrace{\left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right]}_{\boxed{B}}, \underbrace{\left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right]}_{\boxed{C}} \right). \quad (2.6)$$



Observons principalement la quantité  $\boxed{A}$ . Pour chaque nouvelle composante du vecteur  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , on prend uniquement la variation des contraintes dans la même direction ( $\tau_{ix}$ ), comme si c'était une quantité scalaire (e.g. un traceur) (Voir figure 2).

**\*N.B.** Mentionnons que ce sont des forces. L'important sera de lier ces forces à des propriétés émergentes de notre fluide ou de la glace. Par exemple, relier le tenseur de contrainte de Cauchy (2.4) avec le tenseur de déformation (1.7) est un bon moyen, comme dans le [rapport précédent](#).

FIGURE 2 – Divergence des contraintes en  $x$  pour la composante  $\hat{\mathbf{e}}_x$  à l'intérieur d'un cube.

## 2.2 Les fluides newtoniens selon Wikipedia

Un [fluide newtonien](#) est un fluide dont les contraintes visqueuses – qui sont produites par son écoulement – sont proportionnelles à son degré de déformation.

Mathématiquement, la **relation de constitution** est donnée par le lien entre les contraintes de cisaillement et le taux de déformation, soit

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} \propto \dot{\boldsymbol{\epsilon}}.} \quad (2.7)$$

Dans une notation plus tensorielle, on pourrait dire que

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.8)$$

où  $\mu$  est justement la constante de proportionnalité. On peut ensuite prendre l'équation 2.8 en notation matrice pour obtenir la *Stokes stress constitutive equation* (ou la loi de la viscosité de Newton) soit

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{v}^\top), \quad (2.9)$$

où – dans le monde des solide élastiques – on utilise plutôt la notation

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \text{où} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.10)$$

Mais tout ça, c'est du déjà vu. Il faut savoir qu'on peut diviser les contraintes **isotropiques** et **déviatoires** à l'aide de l'expression

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}}_{\text{Partie isotrope}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'}_{\text{Partie déviatoire}}, \quad \text{où} \quad \sigma_{ij} = \pi \delta_{ij} + \sigma'_{ij}. \quad (2.11)$$

Comme énoncé ci-haut, la trace du tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est aussi souvent défini à l'aide de la variable  $\pi$ , telle que

$$\pi = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} = \sum_k \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_{kk}}{3}. \quad (2.12)$$

La **partie isotrope** est aussi appelée le **tenseur de stress volumétrique**, car les forces normales à notre parcelle de fluide cubique infinitésimale n'ont un effet que sur son volume. Tandis que la **partie déviatoire** tend à déformer notre élément cubique infinitésimal. Le tenseur de stress déviatoire  $\boldsymbol{\sigma}'$  a donc la forme

$$\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \pi & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \pi & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \pi \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

En thermodynamique, la pression agit comme une force normale à une surface, d'où les unités de  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ . C'est aussi pourquoi un gradient de pression induit une force sur un élément infinitésimal de fluide. Mentionnons que par définition,

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') = \sum_k (\sigma_{kk} - \pi) = \left( \sum_k \sigma_{kk} \right) - 3\pi = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \right) = 0. \quad (2.14)$$

Donc, **dans le cas d'un fluide incompressible**,  $\pi$  est littéralement la pression et on utilise la notation

$$p = \frac{-\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')}{3}. \quad (2.15)$$

Selon [Wikipedia](#), la contrainte déviatoire  $\boldsymbol{\sigma}'$  coïncide avec le tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  (on va leur faire confiance là-dessus),

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top), \quad (2.16)$$

de sorte que l'équation 2.11 puisse se transformer comme

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}} \quad (2.17)$$

### 2.3 Cas incompressible selon Wikipedia

Rapidement, dans le cas incompressible, l'équation de constitution (2.17) est bien plus complexe, car on ajoute des termes liés à l'élasticité de notre élément cubique infinitésimal. Grossièrement, on ajoute un tenseur de 4ème ordre pour la viscosité «**C**» plutôt qu'une constante  $\mu$ , de sorte à ce que l'équation de constitution ait la forme  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  – où le symbole « $:$ » est le double produit scalaire (*Double dot product*). peut être représentée à l'aide des **paramètres de Lamé**, soient la seconde viscosité  $\lambda$  et la viscosité dynamique  $\mu$ , à l'aide d'une décomposition de Helmholtz, donc

$$\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = -p\mathbf{I} + \lambda \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbf{I} + 2\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.18)$$

Selon Wikipedia, cette décomposition peut explicitement être définie comme

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top). \quad (2.19)$$

Les traces de toutes les matrices de 2.19 sont données par

$$\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(\mathbf{I}) = 3. \quad (2.20)$$

Donc,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -3p + (3\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Maintenant, comme précédemment, on tente de diviser le tenseur de contrainte en partie **isotrope** et en partie **déviatoire**, soit

$$\boldsymbol{\sigma} = -\left[p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]\mathbf{I} + \mu\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}\right). \quad (2.22)$$

On introduit maintenant la **viscosité de volume** (ou la *bulk viscosity*), comme  $\zeta = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)$ , et on arrive finalement à l'équation de constitution,

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{-[p - \zeta(\nabla \cdot \mathbf{v})]\mathbf{I}}_{\text{isotrope}} + \underbrace{\mu\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}\right)}_{\text{déviatoire}}, \quad (2.23)$$

qui peut être réarrangée de sorte à obtenir

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}. \quad (2.24)$$

En notation tensorielle, la relation de constitution (qui lie le taux de déformation aux contraintes) est décrite par

$$\begin{array}{c} \text{Partie élastique} \\ \boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)}, \\ \text{Volumetric strain rate} \end{array} \quad (2.25)$$

où l'on utilise la notation d'Einstein comme

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_k \underbrace{\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)}_{\text{Einstein}} = \underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial x_k}}_{\text{Herman}} = \underbrace{\epsilon_{kk}}_{\text{Hunke}}, \quad (2.26)$$

pour représenter le taux de déformation volumique (*volumetric strain rate*). Mentionnons que dans l'article de HERMAN (2022), on utilise la notation  $\epsilon_V$  pour parler du taux de déformation volumique (*Volumetric strain rate*), tandis que dans l'article de HUNKE et DUKOWICZ (1997), on utilise plutôt la notation  $\dot{\epsilon}_{kk}$  qui rappelle aussi la somme  $\sum_k \dot{\epsilon}_{kk}$  en utilisant la terminologie du tenseur associé au taux de déformation  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ .

Toujours selon Wikipedia, la pression n'est malheureusement plus proportionnelle aux termes de contraintes isotropiques, comme on a vu l'apparition de la viscosité volumique  $\zeta$ , soit

$$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (2.27)$$

### 3 Retour à Herman

HERMAN (2022) divise le tenseur de contraintes de Cauchy  $\sigma_{ij}^c$  en deux catégories, soit la pression isotrope  $p^c$  et les contraintes déviatoires  $\hat{\sigma}_{ij}^c$ ,

$$\sigma_{ij}^c = -p^c \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}^c, \quad (3.1)$$

où la somme des *normal stress components* est nulle,  $\hat{\sigma}_{11}^c + \hat{\sigma}_{22}^c = 0$  (voir eq. 2.14). Comme on l'a vu précédemment (voir 2.11),

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \begin{bmatrix} -p^c + \hat{\sigma}_1^c & \tau^c \\ \tau^c & -p^c + \hat{\sigma}_2^c \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

où  $\tau = \sigma_{12} = \sigma_{21}$  sont les *tangential stress components* comme nous sommes en deux dimensions pour bien représenter le domaine de glace. Finalement, la **partie déviatoire** peut être décrite par

$$\hat{\sigma}_i = 2\eta \dot{\epsilon}_i + (\zeta + \eta) \dot{\epsilon}_V, \quad (3.3a)$$

$$\tau_c = 2\eta \dot{\gamma}, \quad (3.3b)$$

où  $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{21}$  et la **déformation volumique** est définie comme  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2$ . Les équations 3.3a,b sont complètement consistantes avec l'équation de constitution 2.25 de la section précédente, si le lecteur est intéressé à vérifier. On ne montre seulement pas la partie isotrope liée à la pression comme dans 3.2.

En 3.3a et b, on réfère à  $\eta$  comme étant la **viscosité dynamique** (*shear viscosity*) et à  $\zeta$  comme étant la **viscosité volumique** (*bulk viscosity*). Cette dernière quantité réfère à la résistance d'une fluide aux changements rapide de volume. Pour un **fluide newtonien**, la viscosité dynamique  $\eta$  est un scalaire. Par contre, pour un **fluide non-newtonien**,  $\eta$  est une viscosité apparente et une fonction de  $\dot{\gamma}$ , des propriétés matérielles du fluide et du temps.

Menionnons que HERMAN (2022) divise le tenseur du taux de déformation en

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Les fluides dont la viscosité ne dépend pas du temps peuvent être visqueux ( $\tau^c(\dot{\gamma} = 0) = 0$  : Les contraintes internes dépendent directement du taux de déformation) ou viscoplastique ( $\tau^c(\dot{\gamma} = 0) > 0$  : Il y a des contraintes, même si le taux de déformation à l'intérieur est nul). Le premier n'offre aucune contrainte lorsqu'il n'y a pas de déformation, tandis que le second offre une contrainte s'il y a une déformation.

### Références

- COON, M., MAYKUT, G., PRITCHARD, R., ROTHROCK, D., & THORNDIKE, A. (1974). Modeling the pack ice as an elastic-plastic material, *Aidjex Bull.*, 24, 1-105, 1974. *Adjex Bulletin*, 24, 1-105.
- THORNDIKE, A. S., ROTHROCK, D. A., MAYKUT, G. A., & COLONY, R. (1975). The thickness distribution of sea ice. *Journal of Geophysical Research*, 80(33), 4501-4513. <https://doi.org/10.1029/JC080i033p04501>
- HIBLER, W. (1979). A dynamic thermodynamic sea ice model. *Journal of physical oceanography*, 9(4), 815-846. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1979\)009%3C0815:ADTSIM%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1979)009%3C0815:ADTSIM%3E2.0.CO;2)
- HUNKE, E. C., & DUKOWICZ, J. K. (1997). An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics. *Journal of physical oceanography*, 27(9), 1849-1867. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1997\)027%3C1849:AEVPMF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1997)027%3C1849:AEVPMF%3E2.0.CO;2)
- HORVAT, C., & TZIPERMAN, E. (2015). A prognostic model of the sea-ice floe size and thickness distribution. *The Cryosphere*, 9(6), 2119-2134. <https://doi.org/10.5194/tc-9-2119-2015>
- ZHANG, J., SCHWEIGER, A., STEELE, M., & STERN, H. (2015). Sea ice floe size distribution in the marginal ice zone: Theory and numerical experiments. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 120(5), 3484-3498. <https://doi.org/10.1002/2015JC010770>
- DUMONT, D. (2022). Marginal ice zone dynamics: history, definitions and research perspectives. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 380(20210253). <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0253>
- HERMAN, A. (2022). Granular effects in sea ice rheology in the marginal ice zone. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 380(20210260). <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0260>