

Contrat Été 2024

RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER-UQAR

28/06/2024

Table des matières

1	Les glaces dans le modèle de Elizabeth Hunke	2
1.1	Mise en contexte	2
1.2	Les équations en jeu	2
1.2.1	La formulation élastique	3
1.3	Simplification du modèle EVP (pour mieux comprendre)	4
2	Présentation de Dany à l'Institut Isaac Newton	4
2.1	Mise en contexte	4
2.2	Équilibre radiatif entre les vagues et la pression interne de la glace	5
2.3	Résultats empiriques pour l'équilibre radiatif	6
2.4	Équilibre de cisaillement	7
2.5	Conclusions	7
3	Résumé personnel	7

1 Les glaces dans le modèle de Elizabeth Hunke

1.1 Mise en contexte

La **rhéologie** est définie comme la science de la déformation des matériaux. COON et al. (1974) propose une rhéologie élasto-plastique pour les paquets de glace (*see ice pack*). HIBLER (1979) propose une rhéologie comme un plastique visqueux non-linéaire. Le papier de HUNKE et DUKOWICZ (1997) présente une méthode numérique implicite pour solver les équation du model VP. Selon HUNKE et al., l'enjeu vient du fait qu'il est difficile de modéliser la riche gamme de viscosités exprimé à l'intérieur d'un simple domaine de glace hétérogène. Bref, un nombre impressionnant de rhéologies a été exploré.

***N.B.** Un model explicite extrapole le futur à l'aide des quantités passées tandis qu'un schéma implicite évaluerait le futur à l'aide de quantités inconnues à $n + 1$.

1.2 Les équations en jeu

La balance des forces par unité d'aire dans la glace est donnée par l'équation du mouvement en deux dimensions,

$$\underbrace{m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)}_{\text{Évolution}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)}_{\text{Strenght of the ice}} + \underbrace{\tau_{ai}}_{\text{Contraintes Vent-Ocean}} + \underbrace{\tau_{wi}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\varepsilon_{ij3} m f u_j}_{\text{Élévation de l'eau}} - \underbrace{\left(m g \frac{\partial H_o}{\partial x_i} \right)}_{\text{Élévation de l'eau}}, \quad (1.1)$$

où $\tau_a = (\tau_{ai}, \tau_{aj})$ et $\tau_w = (\tau_{wi}, \tau_{wj})$ sont le vent et les contrainte de déformation. Comme mentionné dans l'article :

The strenght of the ice is represented by the internal stress tensor σ_{ij} .

La masse de glace est exprimée par l'expression

$$m = \rho_i [cH + (1 - c)h] + \rho_s [cH_s(1 - c)h_s]. \quad (1.2)$$

Pour ce qui est de la rhéologie, HIBLER (1979) proposait une rhéologie elliptique **visco-plastique** qui relie les contraintes internes à l'intérieur de la glace (*internal ice stress*) avec le degré d'étirement ou de déformation (*rate of strain*) – ou le **taux de changement de la déformation** pour être plus précis. Et donc la forme de cette rhéologie est donnée par

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\zeta - \eta) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - P \cdot \delta_{ij} / 2, \quad (1.3)$$

où la variable

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.4)$$

est un genre de jacobien. On réécrit le **tenseur de déformation dans le domaine plastique** de manière plus évidente,

$$\boxed{\frac{1}{2\eta} \sigma_{ij} + \frac{\eta - \zeta}{4\eta\zeta} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{P}{4\zeta} \delta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}}, \quad \text{Déformation plastique} \quad (1.5)$$

car ça va être important un peu plus loin. Grossièrement, cette rhéologie permet au paquets de glace de diverger avec très peu de contrainte, mais résiste grandement à la compression et au cisaillement.

Selon HUNKE et DUKOWICZ (1997), la pression (P) est en quelque sorte une mesure de la force de la glace qui dépend de la robustesse et de l'épaisseur de la glace.

$$P = P^* c H e \exp[-c^*(1 - c)], \quad (1.6)$$

où P^* et c^* sont des constantes données dans une table quelque part. C'est pas mal semblable à la formulation de HIBLER (1979), car cH est approximativement la même chose que son *equivalent ice thickness*. La viscosité augmente avec la pression de sorte à obtenir

$$\zeta = \frac{P}{2\Delta}, \quad \eta = \frac{P}{2\Delta e^2}, \quad \Delta = [(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2)(1 + e^{-2}) + 4e^{-2}\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{11}^2\dot{\epsilon}_{22}^2(1 - e^{-2})]^{1/2} \quad (1.7)$$

Il semble que sans tension (*strain*), la viscosité devienne infinie... ce qui nous force à mettre des viscosités minimum et maximum. Selon HUNKE et al., c'est une solution qui amène ses propres problèmes, donc on cherche de nouvelles solutions.

On peut quand même se permettre de combiner les équations précédentes, ce qui donne un beau *ice jumble d'équations*,

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\eta + \zeta) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\zeta - \eta) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + c'[(U_w - u) \cos \theta - (V_w - v) \sin \theta] + \tau_{ai} + mfv - mg \frac{\partial H_o}{\partial x}, \quad (1.8)$$

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\eta + \zeta) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\zeta - \eta) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} + c'[(V_w - v) \cos \theta - (U_w - u) \sin \theta] + \tau_{aj} + mfu - mg \frac{\partial H_o}{\partial y}. \quad (1.9)$$

Si on réorganise les termes du système d'équations précédentes, on retrouve une version simplifiée où les termes de Coriolis, les contraintes de surfaces (*surface stresses*), la pression et les termes de *tilt* sont incorporés dans une variable \mathbf{R} , soit

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{R}. \quad (1.10)$$

C'est grossièrement l'équation qui nous permet le mieux de comprendre la nature plastique de la glace, même si c'est une équation d'onde. Lorsque $\eta = 0$, on obtient le cas spécial d'un fluide en cavitation – un fluide dépourvu de viscosité.

La condition de stabilité unidimensionnelle pour une discrétisation explicite nous donnerait un pas de temps numérique de l'ordre de

$$\Delta t \geq \frac{m}{2\eta} \Delta x^2. \quad (1.11)$$

Bref, si on *plug* les constantes, on voit qu'on obtient des temps de calculs beaucoup trop longs ou une très mauvaise précision. Si on reprend l'équation précédente, mais en ajoutant une dimension élastique (Ajout de E) et un amortissement (*damping*),

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = E \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{R}}{\eta} \right) + \text{amortissement}, \quad (1.12)$$

où E est un coefficient qui s'apparente au module de Young – comme avec les bon vieux ressorts. Pour citer HUNKE et DUKOWICZ (1997),

This equation is meant to represent, albeit very crudely, an elastic-plastic model of the sea ice in the regime where elastic waves dominate.

Cette formulation devrait converger au même état d'équilibre que 1.10, tout en représentant un modèle élastique et plastique de la glace de mer où les ondes élastiques dominent.

*N.B. L'équation 1.12 diffère de 1.10 du fait qu'on a $\partial^2 u / \partial t^2$ plutôt que $\partial u / \partial t$, donc l'étirement n'est pas proportionnel

1.2.1 La formulation élastique

Pour construire un modèle élastique, il faudrait séparer le tenseur de tension en deux parties, soit un domaine plastique et un domaine élastique. La partie «plastique» a déjà été prise en compte à l'équation 1.5 et la partie élastique devrait être approximée par

$$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \dot{\epsilon}_{ij}. \quad \text{Déformation élastique} \quad (1.13)$$

Lorsqu'on ajoute les contributions élastiques et plastiques (1.5), on obtient

$$\boxed{\frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2\eta} \sigma_{ij} + \left(\frac{\eta - \zeta}{4\eta\zeta} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \left(\frac{P}{4\zeta} \right) \delta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}.} \quad (1.14)$$

1.3 Simplification du modèle EVP (pour mieux comprendre)

On assume que

- ⇒ Toutes les variations spatiales arrivent dans la direction x .
- ⇒ Tous les coefficients sont constants, tous les forçages sont absorbés dans le terme τ .
- ⇒ Le terme constant $P/4\zeta$ est absorbé dans $\sigma = \sigma_{11}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$.

Les équations résultantes sont

$$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\zeta} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.15)$$

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \tau, \quad (1.16)$$

où ζ est une constante effective de viscosité comme auparavant. Mentionnons qu'on retrouve le modèle VP (*viscous plastic*) (1.5) dans la limite où $E \rightarrow \infty$,

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau, \quad (1.17)$$

tandis que la limite où $\zeta \rightarrow \infty$, on retrouve le modèle purement élastique amorti, soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_e^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (1.18)$$

où $c_e = \sqrt{E/m}$, soit la vitesse des ondes élastiques.

2 Présentation de Dany à l'Institut Isaac Newton

2.1 Mise en contexte

Dans sa [présentation à l'Institut Isaac Newton \(2023\)](#), Dany décrit la dynamique de la zone marginale à l'aide de l'équation

$$\rho_i h \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} \right) = \mathbf{F}_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.1)$$

où la somme des forces est décrite comme

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\boldsymbol{\tau}_g}_{\text{Gradient de surface}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_a}_{\text{Vent}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_o}_{\text{Courant}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_b}_{\text{Plancher océanique}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_w}_{\text{Stress radiatif des vagues}}. \quad (2.2)$$

★ Il faudrait préciser la provenance de l'équation 2.1, même si ça semble juste être une version modifiée de Navier-Stokes.

Le terme $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ – définit comme étant la **rhéologie** – est décrit à l'aide de l'équation de **déformation d'un plastique visqueux** (HUNKE et DUKOWICZ 1997),

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\zeta - \eta) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

où η et ζ sont des viscosités (à définir). La variable $\dot{\epsilon}_{ij}$ est le tenseur de tension ou d'étirement (*strain tensor*).

L'onde en question se propage à la manière d'une onde évanescence dans le medium. L'équation 2.1 nous permet de visualiser deux équilibres entre l'énergie des vagues et la rhéologie, soit

$$\boldsymbol{\tau}_w + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.5)$$

En posant la limite de la zone marginale à $x = 0$ (comme illustré à la figure 1) et l'arrivée des vagues avec un angle ϕ , on obtient deux équilibres entre les différentes forces :

On introduit maintenant le tenseur pour la contrainte radiative des vagues (voir LONGUET-HIGGINS et STEWART 1964),

$$\mathbf{R} = \rho g \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(k, \theta) \begin{pmatrix} c_g \cos^2 \theta + \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2}\right) & c_g \cos^2 \theta \sin \theta \\ c_g \cos^2 \theta \sin \theta & c_g \cos^2 \theta + \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} k \cdot dk d\theta \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\tau}_w = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{R} = \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \quad (2.12)$$

À incidence normale et en eau profonde, c'est un cas spécial. On se souvient que $c_g = 1/2c$, ainsi

$$\boldsymbol{\tau}_w = -\frac{1}{2}\rho g \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{i}} \quad (2.13)$$

En partant de l'équation d'équilibre compressif (2.6), on obtient une solution pour l'épaisseur de la glace, soit

$$h^2(x) = -\frac{\rho_w g_e E_0}{K_r} (1 - e^{-\alpha x}), \quad (2.14)$$

où E_0 est l'énergie de l'onde incidente; K_r est une fonction de la porosité, de la friction interne et de l'angle d'incidence; puis le binôme $(1 - \exp(-\alpha x))$ est la décroissance de l'énergie des vagues le long de l'axe x . On voit apparaître un gradient dans la distribution des floes (Voir figure 2).



FIGURE 2 – Distribution radiale des floes dans la baie du Ha-Ha.

2.3 Résultats empiriques pour l'équilibre radiatif

Dans la baie du Ha-Ha, ils ont mesuré l'épaisseur du *ice jumble* ainsi que l'énergie des vagues le long du transect. De cette manière, on trouve le coefficient d'atténuation (α) et la relation de dispersion de l'onde dans le milieu. On peut même trouver l'atténuation en fonction de la fréquence de l'onde. Le labo arrive environ à

$$\alpha(\omega) = 5.8 \times 10^{-3} \omega^{3.2}. \quad (2.15)$$

Et on voit directement une énorme différence (2 ordres de grandeur) entre la rhéologie de Hibler et mixte

$$P_{Hibler} = P^* h, \quad (2.16)$$

$$P_{MC} = K_r \cdot h^2, \quad \Leftarrow \quad \text{Pas mal meilleur} \quad (2.17)$$

où P^* est une constante.

2.4 Équilibre de cisaillement

Pas le temps pour ça.

2.5 Conclusions

- ⇒ Dans la zone marginale stationnaire, on a isolé l'équilibre entre le transfert de momentum radiatif des vagues et la pression interne.
- ⇒ La force compressive (ou la résistance) de la glace correspond au modèle de friction de Mohr-Coulomb dans une *ice jumble*.
- ⇒ La porosité est possiblement une nouvelle variable qui a besoin de recherche active.
- ⇒ La dépendance à l'épaisseur de la glace est quadratique comparativement à la version linéaire de HIBLER (1979)

Aussi :

- ⇒ Un équilibre dynamique le long du *ice edge* existe et peut être utilisé pour quantifier les viscosité de cisaillement et valider les modèles.
- ⇒ La contrainte radiative des vagues peut aussi pousser le frasil sous la glace consolidée sur de longues distances, bien plus loin que le *ice edge*.

3 Résumé personnel

Références

- LONGUET-HIGGINS, Michael S et RW STEWART (1964). « Radiation stresses in water waves; a physical discussion, with applications ». In : *Deep sea research and oceanographic abstracts*. T. 11. 4. Elsevier, p. 529-562.
- COON, M.D. et al. (1974). « Modeling the pack ice as an elastic-plastic material, *Aidjex Bull.*, 24, 1-105, 1974 ». In : *Adjex Bulletin* 24, p. 1-105.
- UZUNER, Mehmet S. et John F. KENNEDY (1976). « Theoretical model of river ice jams ». In : *Journal of the Hydraulics Division* 102.9, p. 1365-1383.
- HIBLER, W.D., III (1979). « A dynamic thermodynamic sea ice model ». In : *Journal of physical oceanography* 9.4, p. 815-846.
- HUNKE, Elizabeth C. et John K. DUKOWICZ (1997). « An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics ». In : *Journal of physical oceanography* 27.9, p. 1849-1867.
- HOPKINS, Mark A. et Jukka TUHKURI (1999). « Compression of floating ice fields ». In : *Journal of Geophysical Research: Oceans* 104.C7, p. 15815-15825.
- DAI, Mingrui et al. (2004). « Wave rafting and the equilibrium pancake ice cover thickness ». In : *Journal of Geophysical Research: Oceans* 109.C7.