

Contrat Été 2024

# RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE  
D'UN PROJET POUR

ISMER-UQAR

23/08/2024

Rédaction  
Charles-Édouard Lizotte  
[charles-edouard.lizotte@uqar.ca](mailto:charles-edouard.lizotte@uqar.ca)  
ISMER-UQAR  
Police d'écriture : CMU Serif Roman

# Table des matières

1	Retour sur le modèle de vagues	2
1.1	Valeurs positives	2
1.2	Introduction de l'énergie dans les vagues	2
1.3	Pierson-Moskowitz	2
1.4	Retour sur la méthode de Lax-Wendroff	3
2	Coefficient d'atténuation	4
2.1	Article de AUCLAIR et al. [Auc+22]	4
2.1.1	Atténuation des vagues par la glace	4
3	Recherche d'une métrique sur l'hétérogénéité des paquets de glace	4

## 1. Retour sur le modèle de vagues

### 1.1. Valeurs positives

Un gros problème tout au long du modèle était l'existence de valeurs négatives pour le spectre de vague – ce qui ne fait aucun sens. Pour pallier au problème, j'ai donc mis des filtres qui s'assurent d'avoir un minimum de 0 pour le spectre lorsque les termes source font descendre notre spectre trop bas.

- Le premier est après l'advection ;
- Le second est juste après l'ajout des termes source.

### 1.2. Introduction de l'énergie dans les vagues

Le terme de croissance des vagues dans le modèle d'Eliot Bismuth est tiré des notes de Fabrice Ardhuin [Ard24], qui sont elle aussi tirées d'un article de SNYDER et al. [Sny+81]. Essentiellement, on assume que la croissance des vagues dans le terme source prend la forme

$$S_{in}(f, \theta) = \sigma \beta E(f, \theta). \quad (1.1)$$

Dans l'équation précédente, le facteur  $\beta$  est un taux de croissance adimensionnel. Généralement, on utilise une fonction obtenue de manière empirique. Par contre, SNYDER et al. [Sny+81] ont réussi à la mettre en équation, soit

$$\beta = \max \left\{ 0, 0.25 \frac{\rho_a}{\rho_o} \left[ 28 \frac{u_\star}{C} \cos(\theta_\star - \theta) - 1 \right] \right\}. \quad (1.2)$$

En 1 dimension, ça se traduirait par

$$\beta = \max \left\{ 0, 0.25 \frac{\rho_a}{\rho_o} \left[ 28 \frac{u_\star}{C} - 1 \right] \right\}, \quad (1.3)$$

et c'est bien ce qu'on a ! Par contre, je n'ai pas vu le *max* dans le code de Bismuth...

### 1.3. Pierson-Moskowitz

Y'a quelque chose de louche dans la maîtrise de Bismuth, c'est vraiment pas clair si les fréquences utilisées sont en  $s^{-1}$  ou en  $\text{Rad} \cdot s^{-1}$ . Particulièrement où il y a la ligne de Pierson-Moscowitz. C'est pourquoi je suis allé le chercher à la source, le *JONSWAP final report* [Has+73]. Donc Pierson-Moskowitz, c'est

$$E_{PM}(f) = \alpha g^2 (2\pi)^4 f^{-5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{f}{f_m} \right)^{-4} \right], \quad (1.4)$$

mais si on prend le spectre JONSWAP, on multiplie par une composante qu'on appelle le *peak enhancement factor* ( $\gamma^{g(f, \sigma)}$ ),

$$E_{JONSWAP}(f) = E_{PM}(f) \times \gamma^{g(f, \sigma)} \quad \text{de sorte que} \quad g(f, \sigma) = \exp \left[ \frac{-(f - f_m)^2}{2\sigma^2 f_m^2} \right], \quad (1.5)$$

ce qui nous laisse 5 paramètres flottant, soient  $f_m, \alpha, \gamma, \sigma_a, \sigma_b$ . Où l'on relit les derniers facteurs à l'aide de

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_a & \text{si } f \leq f_m, \\ \sigma_b & \text{si } f > f_m. \end{cases} \quad (1.6)$$

Par contre, Bismuth prend plutôt la formulation

$$E_{JONSWAP}(\omega) = 0.2 H_s^2 \left( \frac{\omega_p^4}{\omega^5} \right) \exp \left\{ -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right\} \times 3.3^{\exp \left\{ \frac{-(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right\}}. \quad (1.7)$$

Selon HASSELMANN et al. [Has+73], on devrait avoir les valeurs

$$\gamma = 3.3, \quad \sigma_a = 0.7, \quad \sigma_b = 0.9, \quad (1.8)$$

à l'équilibre – c'est d'ailleurs ce que Bismuth a mis.

Donc, l'erreur vient du fait que dans son manuscrit, tout est en  $\text{Rad} \cdot \text{s}^{-1}$  quand tout devrait être en  $\text{s}^{-1}$ , ce qui se traduit par l'équation 2.15 de la maîtrise de Bismuth, soit

$$E_{JONSWAP}(f) = 0.2 \left( \frac{H_s^2}{2\pi} \right) \left( \frac{f_p^4}{f^5} \right) \exp \left\{ -\frac{5}{4} \left( \frac{f_p}{f} \right)^4 \right\} \times 3.3^{\exp \left\{ \frac{-(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right\}}. \quad (1.9)$$

C'est une faute d'inattention. Dans les faits, il aurait du avoir

$$E_{JONSWAP}(f) = 0.2 H_s^2 \left( \frac{f_p^4}{f^5} \right) \exp \left\{ -\frac{5}{4} \left( \frac{f_p}{f} \right)^4 \right\} \times 3.3^{\exp \left\{ \frac{-(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right\}}. \quad (1.10)$$

D'ailleurs, il ne cite pas que sa formulation vient de GODA [God88]. On en fait justement mention sur [l'article de Wikiwaves sur le JONSWAP](#) en mentionnant qu'il faut faire attention à la conversion.

#### 1.4. Retour sur la méthode de Lax-Wendroff

Malheureusement, si l'on veut un *Superbee flux limiter*, on doit recoder la méthode de Lax-Wendroff. En théorie, le limiteur s'applique sur une quantité qu'on appelle le *flux*. Cette quantité, c'est en fait ce qui sort d'un cube (ou d'un carré dans notre cas).

On n'oublie pas qu'il faut résoudre

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F(E)}{\partial x} = 0 \quad \text{où} \quad F(E) = c_g E \quad (1.11)$$

Grossièrement, on peut solutionner cette équation en additionnant un  $\delta F$ , qui est en fait le *flux* de notre fonction. C'est justement ce que nous allons limiter dans

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \left( \frac{\delta t}{\delta x} \right) \left[ F_{i+1/2} - F_{i-1/2} \right], \quad (1.12)$$

Dans le cas de Lax-Wendroff, on peut représenter les flux sur chaque bords comme

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2} (E_i^n - E_{i-1}^n) - \phi(E_{i-1/2}) \times \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta x} (F(E_i^n) - F(E_{i-1}^n)), \quad (1.13a)$$

$$F_{i+1/2} = \underbrace{\frac{1}{2} (E_{i+1}^n - E_i^n)}_{\text{Moyenne}} - \phi(E_{i+1/2}) \times \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta x} (F(E_{i+1}^n) - F(E_i^n))}_{\text{Variation}}. \quad (1.13b)$$

où  $\phi$  est le limiteur. Dans le cas qui nous intéresse ([limiteur superbee](#)) – car il existe toutes sortes de limiteurs – nous avons

$$r_{i+1/2} = \left( \frac{E_i - E_{i-1}}{E_{i+1} - E_i} \right), \quad r_{i-1/2} = \left( \frac{E_{i-1} - E_{i-2}}{E_i - E_{i-1}} \right) \quad (1.14)$$

où le limiteur est exprimé par

$$\phi = \max \left\{ \min(1, 2r) \right\}. \quad (1.15)$$

Voilà. Il faudra implémenter ça, plutôt que ma fonction d'algèbre linéaire, malheureusement. C'est fait, en tout cas !

## 2. Coefficient d'atténuation

---

Dany mentionnait l'article de AUCLAIR et al. [Auc+22] qui offre un coefficient d'atténuation qui avait été proposé par SUTHERLAND et al. [Sut+19].

### 2.1. Article de Auclair et al. [Auc+22]

---

#### 2.1.1 Atténuation des vagues par la glace

Grossièrement, on s'éloigne de la méthode de KOHOUT, MEYLAN et PLEW [KMP11], ce qui est une bonne nouvelle. L'article de SUTHERLAND et al. [Sut+19] semble empiriquement meilleur pour obtenir un coefficient d'atténuation physique  $\alpha$  [m<sup>-1</sup>]. Dans l'article, on illustre le terme source de l'atténuation par la glace par

$$S_{ice} = -\beta(A, h, f) E_{waves}. \quad (2.1)$$

Le coefficient d'atténuation temporel  $\beta$  [s<sup>-1</sup>] est donné par

$$\beta = \frac{\nu \omega^2 \Delta_0}{2g\epsilon h}, \quad (2.2)$$

où

$$\nu = \frac{1}{2} \epsilon^2 \omega h^2, \quad (2.3)$$

est l'épaisseur relative d'une couche perméable de glace recouvrant notre eau et  $\Delta_0$  est un paramètre relié à l'amplitude du mouvement des vagues à l'intérieur de cette même couche. Il est donc suggéré de mettre ensemble ces deux équations pour obtenir,

$$\beta = \frac{\epsilon \Delta_0 h \omega^3}{4g}. \quad (2.4)$$

Les deux paramètres libres  $\epsilon$  et  $\Delta_0$  peuvent être combinés. Selon les données de SUTHERLAND et al. [Sut+19], on devrait avoir une relation empirique du genre

$$\epsilon \Delta_0 = 0.5. \quad (2.5)$$

Mentionnons qu'on peut aussi obtenir le taux d'atténuation par floe  $a$  – comme utilisé par KOHOUT, MEYLAN et PLEW [KMP11] – et le mettre en relation avec le taux d'atténuation physique par distance  $\alpha$ . La relation est donnée par

$$\alpha = \frac{Aa}{D}, \quad (2.6)$$

où  $D$  est le diamètre du floe et  $A$  est la concentration de glace.

## 3. Recherche d'une métrique sur l'hétérogénéité des paquets de glace

---

On pourrait commencer à regarder du côté de l'entropie. Clairement, il faudrait voir si on peut relier une *mesure du désordre* avec l'atténuation d'énergie dans un domaine de glace.

Mais comment représenter une mesure du désordre ?

## Références

---

- [Has+73] Klaus HASSELMANN, Tim P BARNETT, E BOUWS, H CARLSON, David E CARTWRIGHT, K ENKE, JA EWING, A GIENAPP, DE HASSELMANN, P KRUSEMAN et al. « Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). » In : *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Reihe A* (1973). URL : [https://www.researchgate.net/publication/256197895\\_Measurements\\_of\\_wind-wave\\_growth\\_and\\_swell\\_decay\\_during\\_the\\_Joint\\_North\\_Sea\\_Wave\\_Project\\_JONSWAP](https://www.researchgate.net/publication/256197895_Measurements_of_wind-wave_growth_and_swell_decay_during_the_Joint_North_Sea_Wave_Project_JONSWAP).

- [Sny+81] RL SNYDER, FW DOBSON, JA ELLIOTT et RB LONG. « Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves ». In : *Journal of Fluid mechanics* 102 (1981), p. 1-59. DOI : [10.1017/S0022112081002528](https://doi.org/10.1017/S0022112081002528).
- [God88] Yoshimi GODA. « Statistical Variability of Sea State Parameters as a Function of Wave Spectrum ». In : *Coastal Engineering in Japan* 31.1 (1988), p. 39-52. DOI : [10.1080/05785634.1988.11924482](https://doi.org/10.1080/05785634.1988.11924482).
- [KMP11] Alison L. KOHOUT, Michael H. MEYLAN et David R. PLEW. « Wave attenuation in a marginal ice zone due to the bottom roughness of ice floes ». In : *Annals of Glaciology* 52.57 (2011), p. 118-122. DOI : [10.3189/172756411795931525](https://doi.org/10.3189/172756411795931525).
- [Sut+19] Graig SUTHERLAND, Jean RABAULT, Kai H CHRISTENSEN et Atle JENSEN. « A two layer model for wave dissipation in sea ice ». In : *Applied Ocean Research* 88 (2019), p. 111-118. DOI : [10.1016/j.apor.2019.03.023](https://doi.org/10.1016/j.apor.2019.03.023).
- [Auc+22] Jean-Pierre AUCLAIR, Dany DUMONT, Jean-François LEMIEUX et Hal RITCHIE. « A model study of convergent dynamics in the marginal ice zone ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 380.20210261 (2022). DOI : [10.1098/rsta.2021.0261](https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0261).
- [Ard24] Fabrice ARDHUIN. *Ocean waves in geosciences*. Août 2024. DOI : [10.13140/RG.2.2.16019.78888/11](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.16019.78888/11).