Contrat Été 2023

CARNET DE BORD, UNIVERSITÉ MCGILL

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

12/05/2023

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR

Table des matières

1 Erreurs rencontrées

1.1 Ancienne méthode : Calculer la fonction de courant barotrope directement

Concrétement, l'ancienne méthode (voir rapport précédent) consistait à trouver le rotationnel de $\boldsymbol{u}_{BT}$, soit $\zeta_{BT} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u}_{BT})$ pour solutionner l'équation de Poisson,

$$\nabla^2(\psi_{BT}) = \|\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}_{BT}\|. \tag{1.1}$$

Une foit ψ_{BT} en main, il est trivial (on s'en rapelle) de retrouver $\boldsymbol{u}_{BT}$ à l'aide de la relation

$$\boldsymbol{u} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\nabla}\psi = -\Big(\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{k}}\psi\Big). \tag{1.2}$$

Malheureusement, certains problèmes émergeaient de l'application de cette méthode.

1.2 Fluctuation relative de la fonction de courant barotrope

On définit la fluctuation relative de la fonction de courant barotrope $\delta\psi_{BT}$ de sorte que cette quantité satisfait la relation

$$\psi_{BT}^{t+\delta t} = \psi_{BT}^{t} + \delta\psi_{BT} + Er(\psi_{BT}), \tag{1.3}$$

où $Er(\psi_{BT})$ est une fonction pseudo-aléatoirement linéaire qui représente l'erreur numérique associée à une solution. Cette dernière est proportionnelle à la solution de l'équation 1.1, de sorte que

$$Er(\psi_{BT}) \propto \psi_{BT}. \tag{1.4}$$

Alors, si l'on solve l'équation 1.1 avec une précision de 5 chiffres par exemple, l'erreur par rapport à la fluctuation relative de la fonction de courant barotrope va se faire sentir sur les résultats. Essentiellement, l'erreur numérique donne naissance à l'inégalité suivante

$$\text{Erreur relative} = \left|\frac{Er(\psi_{BT})}{\psi_{BT}}\right| \leq \left|\frac{Er(\psi_{BT})}{\delta\psi_{BT}}\right| \qquad \text{car (généralement)} \qquad \left|\psi_{BT}\right| \geq \left|\delta\psi_{BT}\right|. \tag{1.5}$$

Donc, si l'on veut diminuer l'échelle de l'erreur numérique relative, on doit absolument solutionner $\delta\psi_{BT}$ plutôt que ψ_{BT} sinon on perd une résolution importante. Encore une fois, on y faisait référence dans le rapport précédent. Si l'on faisait ça, nous aurions plutôt

$$\text{Erreur relative} = \underbrace{\left\{ \left|\frac{Er(\delta\psi_{BT})}{\psi_{BT}}\right| \leq \left|\frac{Er(\delta\psi_{BT})}{\delta\psi_{BT}}\right| \right\}}_{\text{Solution } \delta\psi_{BT}} << \underbrace{\left\{ \left|\frac{Er(\psi_{BT})}{\psi_{BT}}\right| \leq \left|\frac{Er(\psi_{BT})}{\delta\psi_{BT}}\right| \right\}}_{\text{Solution } \psi_{BT}}. \tag{1.6}$$

Nous aurions donc bien des avantages à changer de méthode (on va le faire).

1.3 Pas de temps

Techniquement, on peut argumenter que nous calculions 2 fois le pas de temps, accidentellement. En différences finies, les équations du mouvement ont la forme

$$\boldsymbol{u}^{t+\delta t} = \underbrace{\boldsymbol{u}^{t} + RHS \cdot \Delta t}_{\tilde{u}} \; \underbrace{-\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \Delta t}_{\text{Correction P}}. \tag{1.7}$$

Par définition, on sait que

$$\nabla^2\psi^{t+\delta t} = \zeta^{t+\delta t}, \tag{1.8}$$

et on décompose en partie barotrope et barocline, de sorte que

$$\nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} + \psi_{BC}^{t+\delta t} = \zeta_{BT}^{t+\delta t} + \zeta_{BC}^{t+\delta t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} = \zeta_{BT}^{t+\delta t}, \qquad \text{et} \qquad \nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} = \zeta_{BT}^{t+\delta t}. \tag{1.9}$$

Comme présenté à l'équation 1.7, on peut décomposer le RHS de la dernière équation selon

$$\nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} = \tilde{\zeta}_{BT} - \cancelto{0}{\boldsymbol{\nabla} \times \Big(\Delta t \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi\Big)}. \tag{1.10}$$

On solutionne l'équation de Poisson, on trouve $\psi^{t+\delta t}$, puis on retrouve le courant à l'aide de l'équation (à se souvenir),

$$\boldsymbol{u}_{BT} = \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla \psi_{BT}) = -\nabla \times \left(\psi_{BT} \hat{\mathbf{k}}\right). \tag{1.11}$$

Finalement, on additionne les parties baroclíniques et barotropes pour obtenir

$$\boldsymbol{u}^{t+\delta t} = \boldsymbol{u}_{BT}^{t+\delta t} + \boldsymbol{u}_{BC}^{t+\delta t}. \tag{1.12}$$

Donc au final, s'il y a une erreur, elle est à l'équation 1.12. Concrétement, on additionne deux parties qui constituent une même chose. Par contre, on obtient ces quantités depuis une quantités qui est entre deux pas de temps, à un temps peu définit. Par exemple, on assume que

$$\boldsymbol{u}^{t+\delta t} = \tilde{\boldsymbol{u}} - \nabla \phi \cdot \Delta t. \tag{1.13}$$

Puis, on décompose en deux parties à l'aide de 1.12, soit barotrope et baroclines,

$$\boldsymbol{u}_{BT}^{t+\delta t} = \overline{\tilde{\boldsymbol{u}} - \nabla \phi \cdot \Delta t}^{z} = \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT} - \nabla \phi \cdot \Delta t, \tag{1.14a}$$

$$\boldsymbol{u}_{BC}^{t+\delta t} = \boldsymbol{u}^{t+\delta t} - \boldsymbol{u}_{BT}^{t+\delta t}. \tag{1.14b}$$

où $\overline{\alpha}^{z}$ dénote la moyenne verticale d'une quantité α. On développe

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{BC}^{t+\delta t} &= \boldsymbol{u}^{t+\delta t} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT} + \nabla \phi \cdot \Delta t, \\ &= \tilde{\boldsymbol{u}} - \nabla \phi \cdot \Delta t \; - \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT} + \nabla \phi \cdot \Delta t, \\ &= \tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Cette dernière quantité est la définition de $\tilde{\boldsymbol{u}}_{BC}$, donc on devrait être convaincu que

$$\boxed{\boldsymbol{u}_{BC}^{t+\delta t} = \tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT} = \tilde{\boldsymbol{u}}_{BC}.} \tag{1.16}$$

2 Nouvelle méthode proopsée par David

Comme mentionné précédemment, il est possible de seulement calculer la correction à ψ_{BT} plutôt que ψ_{BT} pour minimiser l'erreur relative sur la solution. Pour se faire, on se souvient de l'équation 1.7, soit

$$\boldsymbol{u}^{t+\delta t} = \boldsymbol{u}^{t} + RHS \cdot \Delta t - \nabla \phi \cdot \Delta t. \tag{2.1}$$

On divise notre RHS en deux parties, soit barotropes et baroclines,

$$R\vec{H}S = R\vec{H}S_{BT} + R\vec{H}S_{BC}, \tag{2.2}$$

et on résoud pour uen perturbation de ψ_{BT}, définit par

$$\nabla^2 \delta \psi_{BT} = \nabla \times R\vec{H}S_{BT}. \tag{2.3}$$

Ensuite, on additionne les trouve $\delta \boldsymbol{u}_{BT}$, de sorte que

$$\boldsymbol{u}^{t+\delta_t} = \boldsymbol{u}^{t} + \Delta t \cdot (\delta \boldsymbol{u}_{BT} + \delta \boldsymbol{u}_{BC}). \tag{2.4}$$