Contrat Été 2024

RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

26/07/2024

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR
Police d'écriture : **CMU Serif Roman**

Table des matières

1 Maîtrise de Eliot Bismuth

1.1 Équations en jeu

Rapidement, les équations d'évolution de l'énergie associée à chaque fréquences est donnée par

$$\frac{1}{c_g}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = (1 - f_i)(S_{in} + S_{wc}) + f_i S_{ice}. \tag{1.1}$$

S'il fallait isoler l'advection dans l'équation 1.1, nous aurions

$$\frac{\partial E(\omega, x, t)}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial E}{\partial x} + \dot{\omega}\frac{\partial E}{\partial \omega} = 0 \tag{1.2}$$

Mais nous n'avons pas vraiment accès à toutes ces quantités. Il faudra trouver un moyen d'observer le *spreading* temporel des fréquences.

✷𝔑.𝔅. On va résoudre cette question dans les sections suivantes.

1.2 Rappel rapide et conceptuelle d'une onde dans le contexte des vagues

La solution à l'équation d'onde est illustrée par une somme des solutions qui satisfont aussi la même équation (combination linéaire de solutions). D'où la possibilité de représenter la vraie solution par une somme de Fourier. La hauteur de la surface est ainsi illustrée par

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,j,k} A_{i,j,k} \cdot \sin(k_{x,i} \cdot x + k_{y,i} \cdot y - \omega_j t + \phi_k) \quad \text{où} \quad \begin{cases} k_{x,i} = k\cos(\theta_i), \\ k_{y,i} = k\sin(\theta_i). \end{cases} \tag{1.3}$$

Par contre, il existe une relation de dispersion (voir 1.10 à la sous-section suivante), de sorte que 1.3 devienne

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,j} A_{i,j} \cdot \sin(\mathbf{k}(\theta_i) \cdot \mathbf{x} - \omega(\theta_i) \cdot t + \phi_j) \tag{1.4}$$

On sait aussi qu'en moyenne, la phase est nulle, de sorte que $\langle \phi_j \rangle = 0$, donc on peut de nouveau se débarrasser d'un indice j. Mentionnons aussi que la constante de phase n'est vraiment pas une quantitée importante dans la représentation mathématique de nos vagues, car les vagues se propagente et on s'intéresse plutôt au spectre, donc

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i} A_{i} \cdot \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega_i \cdot t) \tag{1.5}$$

Conceptuellement, dans une modèle à différences finies, la fréquence ω n'est qu'une variable comme une autre, de sorte que la hauteur de la surface pourrait aussi être illustrée par

$$\boxed{h(\mathbf{x}, t, k) = A(k) \cdot \sin\Big(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sqrt{gk} \cdot t\Big).} \tag{1.6}$$

Ainsi, toutes les vagues se propageant à la surface de l'océan devraient avoir la composante 1.6 précédente. Pour obtenir les coefficients de notre transformée de Fourier spatiale, on intégrerait justement par rapport aux *vagues possibles mathématiquement* (la forme qu'on a trouvé précédemment), soit

$$A(k, t) = \iint_0^{x_{max}} \tilde{h}(\mathbf{x}, t, k) \cdot \sin\Big(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sqrt{gk} \cdot t\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

où $\tilde{h}$ fait justement référence au champ de vagues réel. Heureusement, grace au théorême de Parseval, on sait qu'il existe une invariant qui nous permet de dire

$$E(t) \propto \sum_i \left[A(k_i, t)\right]^2 = \sum_i \left[h(\mathbf{x}_i, t)\right]^2 \tag{1.8}$$

d'oû la possibilité d'évaluer l'énergie pour chaque nombre d'onde k_i et fréquences ω_i.

1.3 Lien avec la documentation de Wavewatch III

Selon Williams et al. (2013), dans le cas où le courant est nul, on peut toujours considérer la vitesse associée à l'advection comme la vitesse de groupe c_g. Pour s'en convaincre, reprenons la documentation de Wavewatch III (WW3DG, 2016, p.11 et 13). On y retrouve une définition plus concrète du courant d'advection,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_g + \mathbf{U}, \tag{1.9a}$$

$$\omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}, \tag{1.9b}$$

où σ est la fréquence relative ($2\pi f_r$), ω est la fréquence absolue ($2\pi f_a$) et $\mathbf{U}$ est la vitesse du courant d'advection. La relation de dispersion (voir WW3DG, 2016, p.11) est illustrée par

$$\sigma = \sqrt{gk \tanh kd}, \tag{1.10a}$$

$$\lim_{d\to\infty} \sigma = \sqrt{gk}, \tag{1.10b}$$

où la relation de dispersion pour les vagues océanique ($d \to \infty$) est illustrée en bas. Les auteurs optent aussi pour une représentation de **la spectre de densité d'action des vagues** (*wave action density spectrum*) bien différente de 1.2 (que j'ai adapté à 1 dimension), soit

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}N) + \frac{\partial}{\partial k}(\dot{k}N) = 0. \tag{1.11}$$

ça revient absolument au même, voir le développement à l'aide d'une quantité fictive β.

Exemple Soit une quantité $\beta(x, \omega, t)$. Alors la dérivée en chaîne de N par rapport à cette même quantité peut être exprimée par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta}(\dot{\beta}N) &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}N\right), \\
&= N\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)\right) + \frac{\partial \beta}{\partial t}\frac{\partial N}{\partial \beta}, \\
&= N\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \beta}\right)\right) + \frac{\partial \beta}{\partial t}\frac{\partial N}{\partial \beta}, \\
&= N\left(\frac{\partial}{\partial t}(1)\right) + \frac{\partial \beta}{\partial t}\frac{\partial N}{\partial \beta}, \\
&= \dot{\beta}\frac{\partial N}{\partial \beta}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Mentionnons aussi qu'on a plusieurs quantités ayant des noms similaires, soit le spectre d'énergie E ou de variance (C'est la même chose), mais on utilise plutôt le **spectre de densité d'action des vagues** (*wave action density spectrum*) N en raison de la conservation ($N = F/\sigma$),

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{S}{\sigma}.} \tag{1.13}$$

1.4 Retour à la maîtrise d'Eliot Bismuth

On retrouve donc la formulation utilisée par Williams et al. (2013) et dans la maîtrise de Bismuth. Grossièrement, le modèle de Bismuth fait un pas d'advection à l'aide de la méthode de Lax-Wendroff, soit une méthode très efficace pour résoudre les équations différentielles hyperboliques de la forme

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x,t))). \tag{1.14}$$

Selon l'article de Williams et al. (2013) (et comme précédemment), l'advection est définit par l'expression

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + c_g\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{1.15}$$

où S est la fonction de densité spectrale, généralement exprimé par N (comme partout précédemment) (À revérifier). De toute manière, dans la maîtrise de Bismuth, nous prenons la convention pour $E(\omega, x, t)$, donc l'advection est exprimée par

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E}{\partial t} + c_g \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \tag{1.16}$$

✵𝔑.𝔅. Il n'y a pas d'étalement selon les fréquences. La raison est simple : l'étalement du aux fréquences est vu comme un terme source, car ça peut dépendre de plein de chose, dont principalement le *whitecapping*. C'est pourquoi on ne tend pas vraiment à l'ajouter directement dans l'advection.

Donc, en suivant 1.14, ont voit que le terme

$$c_g \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(c_g E) = \frac{\partial}{\partial x}(f(E(x,t))) \qquad \text{où} \qquad f(E(x,t)) = c_g E. \tag{1.17}$$

C'est **un cas linéaire** où $f(u) = A \cdot u$, soit

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) A\big[u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\big] + \left(\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) A^2 \big[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\big], \tag{1.18}$$

Avec nos quantités, nous aurions plutôt le schéma de Lax-Wendroff suivant :

$$\boxed{E_i^{n+1} = E_i^n - \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) c_g \big[E_{i+1}^n - E_{i-1}^n\big] + \left(\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) c_g^2 \big[E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n\big].} \tag{1.19}$$

1.5 Termes sources

1.5.1 Génération par le vent

Dans la maîtrise de Bismuth (2014), on assume une croissance linéaire, soit

$$S = a + bE, \tag{1.20}$$

où a est la croissance initiale des vagues Un peu comme dans le célèbre article de Phillips, on pourrait dire que c'est du bruit ou de la perturbation au niveau statistique. La partie bE est tirée d'un autre célèbre article, celui de Komen et al (1984), de sorte que

$$b = 0.25\left(\frac{\rho_A}{\rho_W}\right)\omega\left(28\frac{u_*}{c_p} - 1\right). \tag{1.21}$$

Rapidement, ω est définit comme la fréquence radiale ($\omega \equiv 2\pi f \quad \big[\mathrm{Rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}\big]$) ; c_p est la vitesse de phase et u_* est la *friction velocity* (Vitesse de frottement).

Bismuth (2014) utilise schéma suivant pour la vitesse de friction

$$u_* = \begin{cases} U_{10}\sqrt{1.2875 \times 10^{-3}} & \text{pour} \quad U_{10} < 7.5 \text{ ms}^{-1} \\ U_{10}\sqrt{(0.8 + 0.065 U_{10}) \times 10^{-3}} & \text{pour} \quad U_{10} \geq 7.5 \text{ ms}^{-1} \end{cases} \tag{1.22}$$

Par contre, je suggère qu'on utilise plutôt le schéma dépendant du profil inverse logarithmique, comme exprimé dans ma maîtrise. En premier lieu, on retrouve u_* à l'aide de sa définition

$$u_* = \sqrt{c_D} u_{10}. \tag{1.23}$$

Pour trouver la valeur de c_D, on travaille avec la relation de Charnok (Charnock, 1955) aussi tirée de Gill (1982, p.30), de sorte que

$$c_D = \left[\frac{\kappa}{\ln(z/z_0)}\right]^2_{z=10\,m} \qquad \text{où} \qquad z_0 = \frac{\alpha_{Ch}\tau_a}{\rho_a g} = \frac{\alpha_{Ch} c_D |u_{10}|^2}{g}. \tag{1.24}$$

Variable	Valeur	Unités	Description
c_D	À déterminer	–	Coefficient de traînée
κ	0.41	–	Constante de Von Karman
z	10	m	Hauteur de la mesure du vent (Typiquement 10m)
z_o	À déterminer	m	Rugosité de l'interface (*roughness lenght*)
α_{Ch}	0.0185	–	Valeur minimale du paramètre de Charnock (Voir ECWAM)
τ_a	À déterminer	N m^{-2}	Stress atmosphérique
g	9.81	m s^{-2}	Accélération gravitationnelle
ρ_a	1.225	Kg m^{-3}	Densité atmosphérique

1.5.2 *White-capping* et étalement dans les fréquences

Le terme de *white-capping* est exprimé (Hasselmann, 1974) comme

$$S_{wc} = -\mu k E, \tag{1.25}$$

où μ est un coefficient du rapport entre notre spectre et celui de Pierson-Moscowitz. Ce dernier est exprimé par

$$\mu - 2.36 \times 10^{-5} \left(\frac{\tilde{s}}{s_{PS}} \right)^4 \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{k}}. \tag{1.26}$$

On utilise la lettre s pour représenter la *steepness* (ou la pente de nos vagues), de sorte que

- ⇨ $\tilde{s}$ est la pente moyenne définit par $\tilde{s} = \tilde{k}\sqrt{m_0}$ où m_0 est le $0^{\text{ième}}$ moment de notre spectre d'énergie – autrement dit c'est l'énergie totale.
- ⇨ s_{PM} est la même quantité mais pour le spectre de Pierson-Moscowitz ($\sim \sqrt{3.02 \times 10^{-3}}$).

On calcule $\tilde{\omega}$ et $\tilde{k}$ à l'aide des expressions

$$\tilde{\omega} = \left[m_0^{-1} \int_0^\infty \omega^{-1} E(\omega) \, \mathrm{d}\omega \quad \right]^{-1} \tag{1.27a}$$

$$\tilde{k} = \left[m_0^{-1} \int_0^\infty k^{-1/2} E(\omega) \, \mathrm{d}\omega \right]^{-2} \tag{1.27b}$$

Bismuth résoud les intrégrales précédentes à l'aide de la méthode des trapèzes (audacieux).

Variable	Valeur	Unités	Description
μ	À déterminer	–	Rapport d'échelle avec Pierson-Moskowitz
$\tilde{s}$	À déterminer	?	Pente ou *steepness*
s_{PM}	$\sqrt{3.02 \times 10{-}3}$	?	Pente pour Pierson-Moskowitz
$\tilde{\omega}$	À déterminer	Rad $\cdot$ s^{-1}	Fréquence moyenne
$\tilde{k}$	À déterminer	Rad $\cdot$ m^{-1}	Nombre d'onde moyen
m_0	À déterminer	J	Énergie totale (premier moment)

1.5.3 Atténuation par la glace

L'atténuation par la glace prend une forme très simple, soit

$$S_{ice} = -\alpha E \tag{1.28}$$

où α est définit comme

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\langle D \rangle}. \tag{1.29}$$

Officiellement les quantités précédentes sont

- ⇨ $\bar{\alpha}$, soit un coefficient d'atténuation empirique,

- ⇨ $\langle D \rangle$, la taille moyenne des floes.

Il faut résoudre un polynôme pour obtenir la quantité $\bar{\alpha}$, malheureusement.

Variable	Valeur	Unités	Description
α	À déterminer	m^{-1}	Coefficient d'atténuation
$\bar{\alpha}$	À déterminer	?	Autre coefficient qui dépend de tout.
$\langle D \rangle$	À déterminer	m	Taille moyenne des floes

1.5.4 Limitation du changement de densité d'action

$$\Delta S_{max} = \frac{8.1 \times 10^{-4}}{2\omega k^3 c_g} \tag{1.30}$$

2 Installation LaTeX avec Archlinux

Comme à l'habitude, une installation complète de TexLive est toujours nécessaire lors d'un changement de distribution. À l'instar d'Ubuntu, l'action *sudo apt-get install texlive-full* n'est pas disponible, car le concept de Archlinux est de tout compartimenter dans le but de minimiser les *packages* actifs. Grossièrement, voici comment installer tous les compartiments nécessaire au fonctionnement de mon préambule LaTeX Org-Mode (en une seule commande) :

```
>>> sudo pacman -S texlive-basic texlive-latex texlive-latexrecommended
                   texlive-fontsrecommended texlive-fontsextra texlive-bibtexextra
                   texlive-mathscience texlive-binextra texlive-latexextra
    biber
```

- ⇨ Le *package* « biblatex » est installée à l'aide de la **texlive-bibtexextra**.
- ⇨ La commande *latexmk* est installée à l'aide de texlive-binextra.
- ⇨ Le *package* « csquote » est installé à l'aide de texlive-latexextra.
- ⇨ Pour faire marche LaTeX en Français, il faut installer texlive-langfrench.
- ⇨ Besoin de Biber pour gérer le lien entre les citations et la bibliographie (voir la page de Texlive).

Références

Charnock, H. (1955). Wind stress on a water surface. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, *81*(350), 639-640. https://doi.org/10.1002/qj.49708135027

Hasselmann, K. (1974). On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping. *Boundary-Layer Meteorology*, *6*, 107-127.

Gill, A. E. (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press : Elsevier.

Williams, T. D., Bennetts, L. G., Squire, V. A., Dumont, D., & Bertino, L. (2013). Wave–ice interactions in the marginal ice zone. Part 1: Theoretical foundations [Arctic Ocean]. *Ocean Modelling*, *71*, 81-91. https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2013.05.010

WW3DG, T. (2016). User manual and system documentation of WAVEWATCH III® version 5.16 [326 pages + Appendices]. *Technical note 329 NOAA/NWS/NCEP/MMAB, College Park, MD, USA*. https://polar.ncep.noaa.gov/waves/wavewatch/manual.v5.16.pdf