

Contrat Été 2024

RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER-UQAR

30/08/2024

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR
Police d'écriture : CMU Serif Roman

Table des matières

1	Recherche d'une variable d'hétérogénéité	2
1.1	Retour sur les travaux de Bismuth	2
1.2	Retour sur les distributions statistiques de glace	4
2	Rencontre avec Dany mercredi [2/3]	4
2.1	Lire un peu sur l'inégalité de Jensen	4
2.2	Bien poser le problème pour la présentation du 9 septembre	4
2.3	Solutionner le problème de la trainée spectrale	6
2.3.1	Dissipation et <i>whitecapping</i> (Retour rapide)	6
2.3.2	Spectre de Pierson-Moskowitz (Retour rapide)	6
2.3.3	Désambiguation des quantités importantes	7
2.3.4	Comment arriver aux quadruplettes	7

1. Recherche d'une variable d'hétérogénéité

1.1. Retour sur les travaux de Bismuth

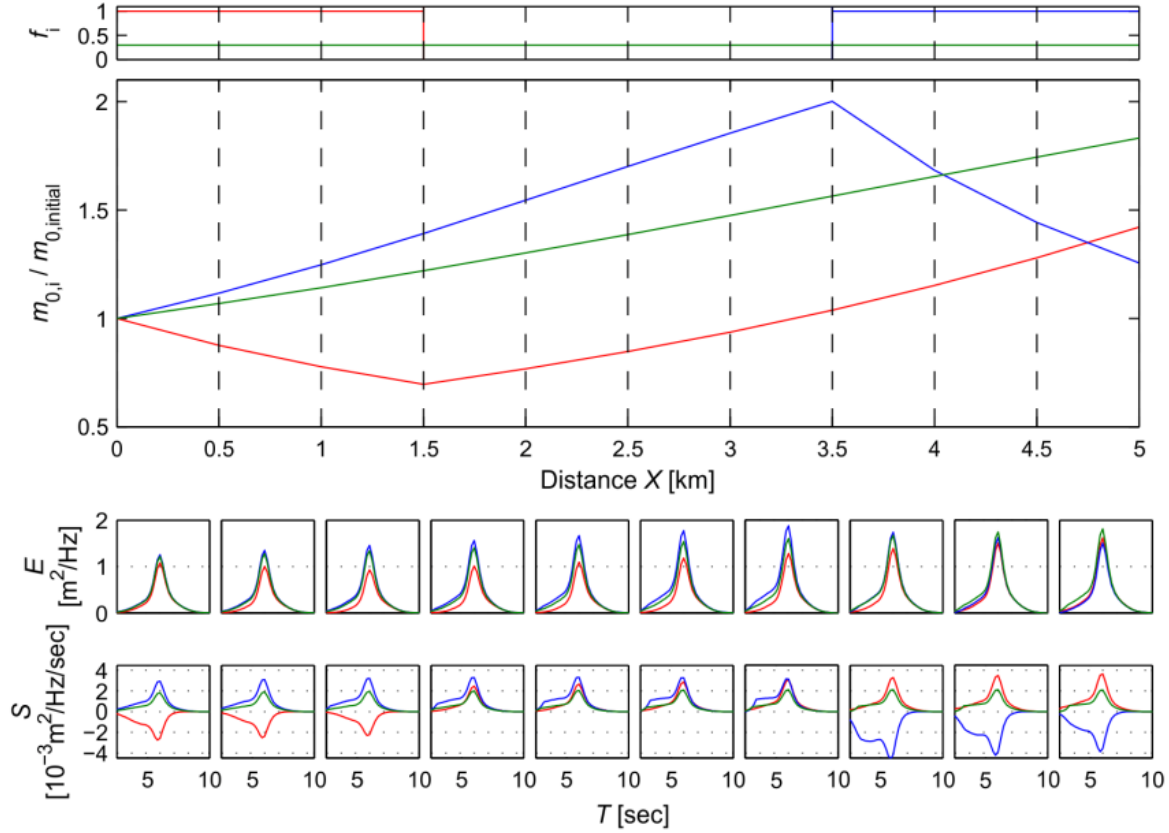


FIGURE 1 – Figure tirée de Bismuth (figure 13) représentant les termes sources actifs et la prédominance de chacun.

Grossièrement, il y a un concept qui s'appelle l'entropie de Shanon. Cette dernière est définie comme

$$H(\mathcal{X}) = - \sum_i^n p(x_i) \log_b[p(x_i)] \quad (1.1)$$

où l'indice « b » est 2, faisant référence au concept de *bit* d'information ; $p(x_i)$ est la probabilité d'avoir une valeur désirée au point x_i ; \mathcal{X} est notre variable aléatoire.

Pour une distribution complètement aléatoire, on aurait tout simplement la distribution de Bernouilli, donc ce qui est illustré plus haut. On peut calculer son entropie de Shanon à l'aide de l'équation 1.1, soit

$$H(\mathcal{X}) = - \sum_i^n \left(\frac{1}{2} \right) \log_2 \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{n}{2} \cdot (-1) = \frac{-n}{2}. \quad (1.2)$$

Par contre, ça devient intéressant quand on vient modifier la distribution des floes. On pourrait aisément dire que les probabilité augmentent de manière linéaire, donc

$$p(x_i) = \frac{x_i}{L_x} \quad (1.3)$$

$$N = \binom{n_x}{n_i} = \frac{n_x!}{n_i!(n_x - n_i)!}$$

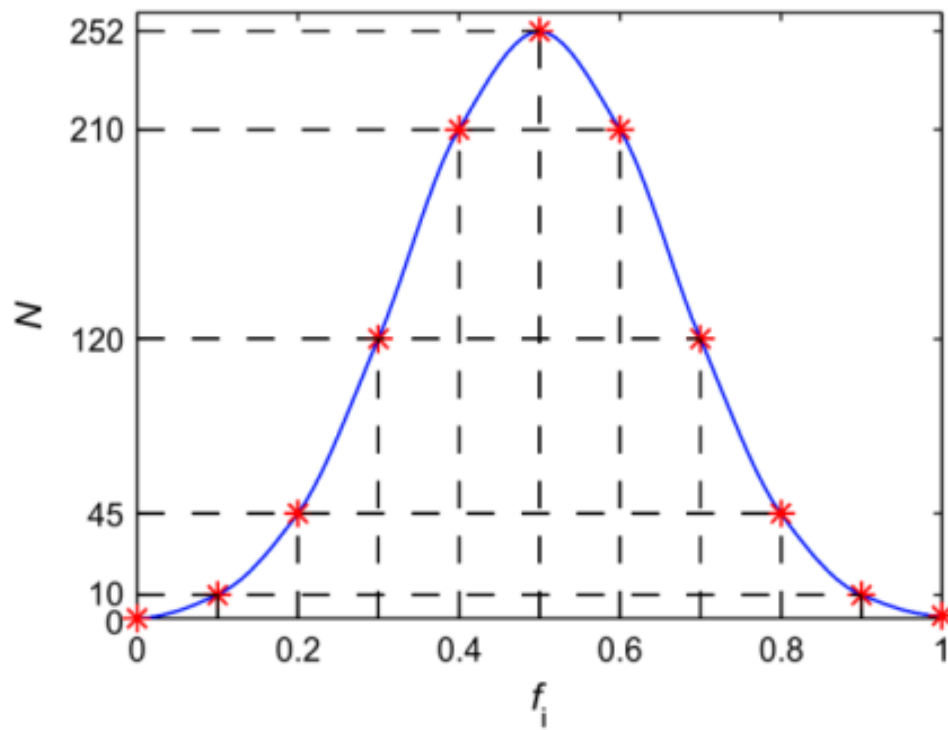


FIGURE 2 – Distribution statistique représentant le nombre possible de distribution de glace associé à chaque "concentration" f_i dans un domaine de 10 cases (2^8).

1.2. Retour sur les distributions statistiques de glace

On a une distribution d'épaisseurs $g(h)$ qui est définie de sorte à ce que $g(h)dh$ est la fraction de l'aire couverte par la glace d'épaisseur entre h et dh dans une cellule de grille.

Prenons l'exemple de la figure 3, on y retrouve une distribution spatiale d'épaisseur sur une case à gauche ; puis à droite une distribution de l'aire couverte par chaque tranche d'épaisseur.

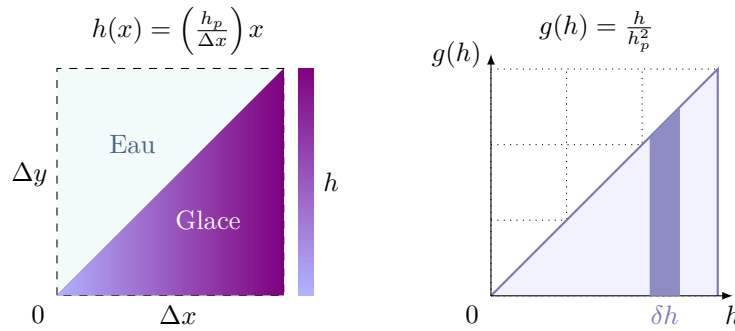


FIGURE 3 – À gauche, Couvert de glace d'une cellule. À droite distribution de l'aire

Dany m'a aussi reparlé de la distribution J . Cette distribution est en fait une genre d'équation d'état, mais statistique. Elle représente en fait une *flow size and thickness distribution* [Dum22], soit

$$J(r, h) = J(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

2. Rencontre avec Dany mercredi [2/3]

Grosso modo, Dany a proposé **trois axes importants** pour cette semaine :

- Lire sur l'inégalité de Jensen ;
- Bien poser le problème par rapport à l'hétérogénéité des amas de glaces dans un point de grille global ;
- Résoudre le problème de la trainée spectrale à l'aide des notes de Sebastien Dugas (Réalisé à moitié)

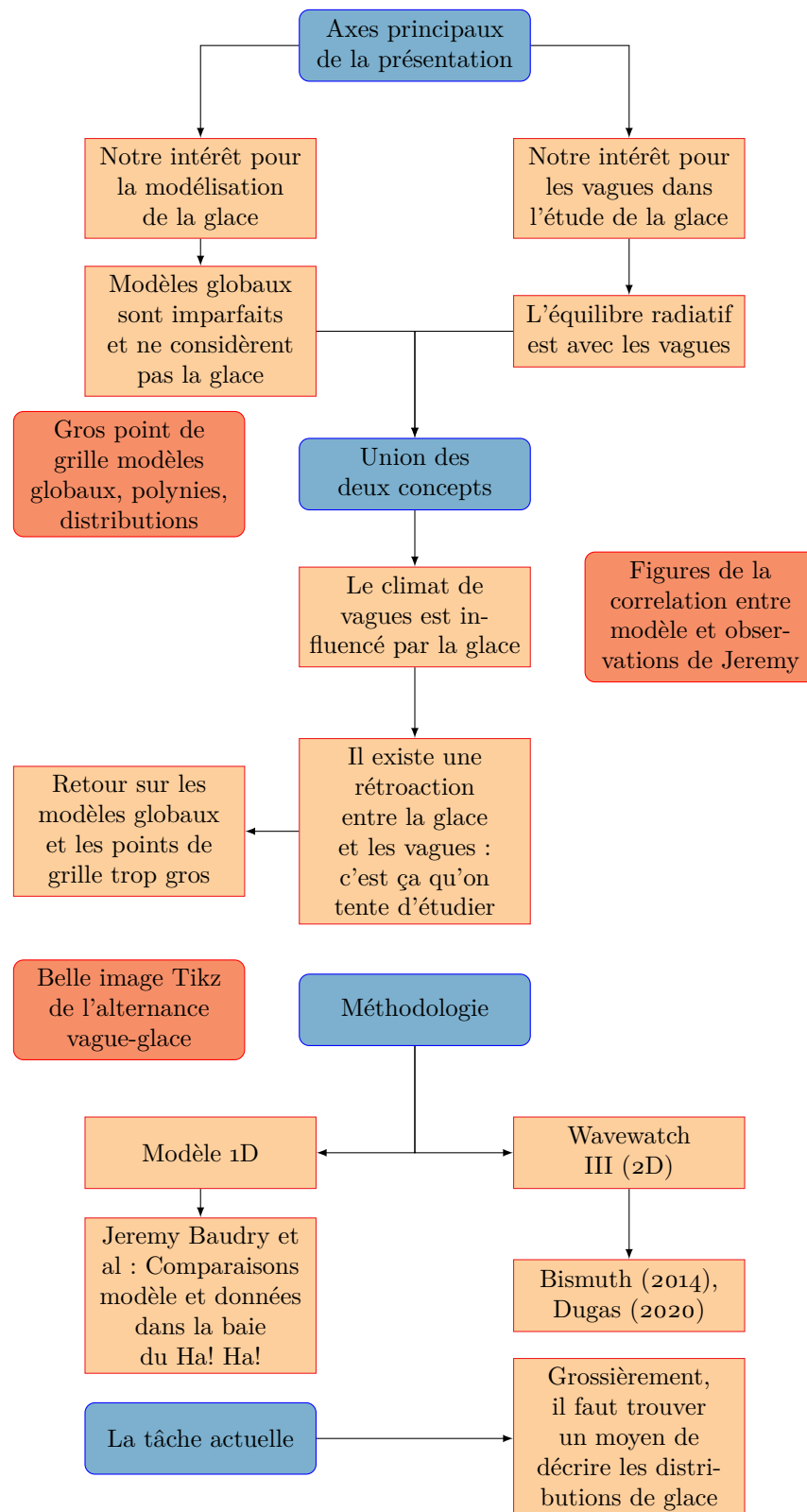
2.1. Lire un peu sur l'inégalité de Jensen

J'ai tout simplement pas eu le temps, malheureusement.

2.2. Bien poser le problème pour la présentation du 9 septembre

Dany suggère de **bien poser le problème**, ce sera super important. Car pour l'instant, il faut mentionner que le *challenge* c'est de caractériser la distribution sous-grille. De plus, ça serait important de mentionner qu'il y a un lien entre les vagues et la glace – ce qui justifierait justement notre étude. Donc, faut pas avoir peur de citer le *power point* de Dany.

Grossièrement, la séquence optimale devrait être celle ci :



2.3. Solutionner le problème de la trainée spectrale

Dans les observations sorties de mon modèle spectral en Julia, on note que la trainée spectrale (*spectral tail*) prend de l'ampleur sur certains points de grille du domaines. Par exemple, voir la figure 4 où le 8^{ème} spectre d'énergie – nommé « E8 » en vert – augmente fortement autour de $0.4 \text{ Rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Dany, Eliot Bismuth et Sebastien Dugas ont eu le même problème, c'est pourquoi ils ont du rectifier le tir. Sebastien Dugas avait du coder un nouveau terme associé aux quadruplètes [Has62], qui devrait se retrouver dans [sa maîtrise](#).

En l'absence de glace, l'équation de balance d'énergie est donnée par

$$\frac{1}{c_g} \frac{dE}{dt} = S_{in} + S_{ds} + S_{nl}. \quad (2.1)$$

2.3.1 Dissipation et *whitcapping* (Retour rapide)

La dissipation d'énergie est généralement représentée de manière proportionnelle à une puissance de l'énergie selon Dugas, soit

$$S_{ds} \propto E^n. \quad (2.2)$$

Selon Dugas, $n = 1$ dans la plupart des cas, mais certains modèles utilisent $n = 2, 3$, où même 5. La représentation d'HASSELMANN [Has74] est généralement la plus utilisée (Donc $n = 1$ avec un coefficient γ dépendant de plein de trucs (Voir le [rapport du 26 juillet 2024](#)).

2.3.2 Spectre de Pierson-Moskowitz (Retour rapide)

Dans le [rapport du 23 juillet](#), nous ne savions pas d'où Bismuth tirait sa représentation du spectre JONSWAP, soit

$$E_{JONSWAP}(\omega) = 0.2H_s^2 \left(\frac{\omega_p^4}{\omega^5} \right) \exp \left\{ -\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right\} \times 3.3^{\exp \left\{ \frac{-(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right\}}, \quad (2.3)$$

On ne savait pas vraiment d'où ça venait, mais on sait maintenant qu'il y a une erreur dans cette formulation. On devrait plutôt avoir

$$E_{JONSWAP}(\omega) = 0.2H_s^2(2\pi) \left(\frac{\omega_p^4}{\omega^5} \right) \exp \left\{ -\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right\} \times 3.3^{\exp \left\{ \frac{-(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right\}}. \quad (2.4)$$

Donc, Sebastien Dugas a réussi à trouver le lien entre le spectre de l'article de JONSWAP et l'utilisation de Bismuth (2.3) (Voir GODA [God88]). Puis, si l'on transfère en fréquence pures sans radians, on a

$$E_{JONSWAP-Goda}(f) = 0.2H_s^2 \left(\frac{f_p^4}{f^5} \right) \exp \left\{ -\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f} \right)^4 \right\} \times 3.3^{\exp \left\{ \frac{-(f - f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2} \right\}}. \quad (2.5)$$

Nottions l'absence du 2π . Normalement, nous devrions avoir le spectre de HASSELMANN et al. [Has+73], soit

$$E_{JONSWAP}(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_m} \right)^{-4} \right] \times \gamma^{g(f, \sigma)} \quad \text{où} \quad g(f, \sigma) = \exp \left[\frac{-(f - f_m)^2}{2\sigma^2 f_m^2} \right]. \quad (2.6)$$

On sait maintenant que la version d'Eliot Bismuth (2.3) est tirée de GODA [God88, à l'équation 11 de l'article]. Dans son article, ce dernier relie statistiquement la hauteur significative des vagues (ce qu'on appelle couramment H_s ou $H_{1/3}$) avec le coefficient α , la fréquence du pique f_p et la valeur du champ gravitationnel g dans l'équation du spectre de JONSWAP.

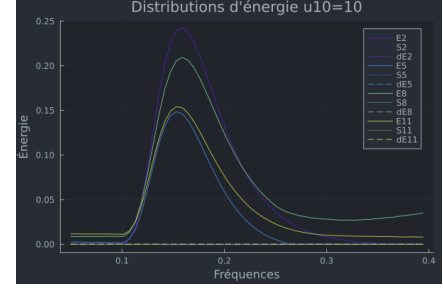


FIGURE 4 – Illustration du spectre d'énergie à divers points du domaine. Le spectre est à l'équilibre, mais on peut constater l'apparition de fortes trainées spectrales pour certains endroits.

2.3.3 Désambiguation des quantités importantes

TABLE 1 – Quantités importantes dans le domaine d'étude des vagues et désambiguation des symboles utilisés.

Description de la variable	Symbole	Description anglo	Source
Hauteur significative des vagues	H_s	<i>Significant wave height</i>	WMO (1998)
	$H_{1/3}$		GODA [God88]
Période du maximum de fréquence	T_p	<i>Spectral peak period</i>	WMO (1998)
Fréquence du maximum (du pique)	f_m	<i>Peak frequency</i>	HASSELMANN et al. [Has+73]
	f_p	<i>Wave frequency corresponding to the peak of the spectrum</i>	WMO (1998)

2.3.4 Comment arriver aux quadruplettes

On peut utiliser les notes de JANSSEN [Jan04, Chap.4 *Nonlinear wave-wave interactions and wave dissipation*] pour simplifier la matière, mais mentionnons que tout a *grosso modo* été fait par HASSELMANN [Has62]. Je tiens à mentionner que les mathématiques sont extrèmement peu intuitives et que ça m'a pris quelques jours pour juste comprendre ce qu'on tente de dire. Je tiens donc à saluer le courage de Sebastien Dugas dans l'approche de ce problème.

On peut diviser l'énergie du champ de vagues en deux quantités [Has62]

$$E_{\text{totale}} = E_{\text{kinétique}} + E_{\text{potentielle}}. \quad (2.7)$$

On peut dire que c'est le Hamiltonien de la surface de l'eau. La partie potentielle sera décrite par l'élévation de la surface de l'eau, tandis que la partie kinétique sera représentée par une variable ϕ qu'on appellera – malheureusement – le « potentiel » du champ de vitesse, décrit par $\mathbf{u} = -\nabla\phi$. Donc si l'on développe ça, on obtient le Hamiltonien [Jan04],

$$E = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\eta} dz \left((\nabla\phi)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} \eta^2. \quad (2.8)$$

Cette équation (2.8) décrit justement le transfert entre les deux composantes de l'énergie. On veut donc connaître la forme de ϕ , c'est un peu ça le nerf de la guerre. On sait que la solution pour ϕ satisfait aussi l'équation de Laplace, soit

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.9)$$

Tandis que les conditions frontières satisfont

$$\phi(\mathbf{x}, t, z = \eta) = \psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -\infty} = 0. \quad (2.10)$$

On peut aussi insérer la transformée de Fourier, définit comme

$$\phi = \int d\mathbf{k} \hat{\phi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.11)$$

Donc pour satisfaire la condition à l'infini, il est évident que la solution dans le monde des « nombres d'onde » est donnée par

$$\hat{\phi}(x, t, z) = \hat{\phi}(t) e^{kz}. \quad (2.12)$$

Là, comme le mentionne JANSSEN [Jan04], il faut aussi satisfaire la condition à $z = \zeta$, dans le monde de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, t, z = \eta) = \phi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k} \hat{\psi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.13)$$

et on peut faire du progrès en faisant une expansion en série de Taylor autour de $z = 0$, soit

$$\phi(\mathbf{x}, z = \eta) = \phi(\mathbf{x}, z = 0) + \eta \frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi + \dots = \psi \quad (2.14)$$

On fait la transformée de Fourier de tout ça et on réarrange, de sorte à obtenir

$$\hat{\phi}(t, z = 0) = \hat{\psi} - \mathcal{F} \left[\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \Big|_{z=0} + \mathcal{O}(\geq 3) \right]. \quad (2.15)$$

On substitue

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, z = 0) = \hat{\psi} - \mathcal{F} \left[\left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \int d\mathbf{k} \hat{\phi}(z, t, k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \Big|_{z=0} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int d\mathbf{k} \hat{\phi}(z, t, k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \Big|_{z=0} + \mathcal{O}(\geq 3) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Comme z et k sont des variables indépendantes et que les fonctions ne devraient pas avoir de discontinuités, on peut distribuer les dérivées. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, z = 0) = \hat{\psi} - \mathcal{F} \left[\left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} \frac{\partial \hat{\phi}(z, t, k)}{\partial z} \Big|_{z=0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} \frac{\partial^2 \hat{\phi}(z, t, k)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) + \mathcal{O}(\geq 3) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Puis on prend la solution 2.12 pour avoir

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, z = 0) = \hat{\psi} - \mathcal{F} \left[\left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} k \hat{\phi}(t) e^{kz} \Big|_{z=0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \mathcal{F} \left[\left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} k^2 \hat{\phi}(t) e^{kz} \Big|_{z=0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) + \mathcal{O}(\geq 3) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Puis finalement, on applique les transformée de Fourier, soit

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, z = 0) = \hat{\psi} - \int d\mathbf{x} \left[\left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} k \hat{\phi}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ - \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[\left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} \hat{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\int d\mathbf{k} k^2 \hat{\phi}(t, k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Puis, c'est là qu'on redistribue tout

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, z = 0, \mathbf{k}) = \hat{\psi}(k, t) - \int d\mathbf{x} \left[\iint d\mathbf{k}_{1,2} \left(\hat{\eta}_1 k_2 \hat{\phi}_2 e^{i(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[\iiint d\mathbf{k}_{1,2,3} \left(\hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2 k_3^2 \hat{\phi}_3 e^{i(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Là, la définition du delta de Dirac (voir ce [Stack Exchange](#)), c'est

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \quad (2.21)$$

et l'analogie en 2d existe aussi et c'est comme ça qu'on réussit à se débarrasser de la composante en x . Mentionnons que une des propriétés importante de la fonction delta de Dirac, soit

$$\iint d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0), \quad (2.22)$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, z = 0, \mathbf{k}) = \hat{\psi}(k, t) - \iint d\mathbf{k}_{1,2} \left(\hat{\eta}_1 k_2 \hat{\phi}_2 \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right) \\ + \frac{1}{2} \iiint d\mathbf{k}_{1,2,3} \left(\hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2 k_3^2 \hat{\phi}_3 \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

étant donné que $\delta(x) = \delta(-x) = -\delta(x)$.

On y est presque, mais je n'y arrive pas et ça fait trois jours que je travaille là-dessus. Il faudra donc mettre mon énergie ailleurs...

Références

- [Has62] Klaus HASSELMANN. « On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 12.4 (1962), p. 481-500. DOI : [10.1017/S0022112062000373](https://doi.org/10.1017/S0022112062000373).
- [Has+73] Klaus HASSELMANN, Tim P BARNETT, E BOUWS, H CARLSON, David E CARTWRIGHT, K ENKE, JA EWING, A GIENAPP, DE HASSELMANN, P KRUSEMAN et al. « Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). » In : *Ergaenzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Reihe A* (1973). URL : https://www.researchgate.net/publication/256197895_Measurements_of_wind-wave_growth_and_swell_decay_during_the_Joint_North_Sea_Wave_Project_JONSWAP.
- [Has74] Klaus HASSELMANN. « On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping ». In : *Boundary-Layer Meteorology* 6 (1974), p. 107-127.
- [God88] Yoshimi GODA. « Statistical Variability of Sea State Parameters as a Function of Wave Spectrum ». In : *Coastal Engineering in Japan* 31.1 (1988), p. 39-52. DOI : [10.1080/05785634.1988.11924482](https://doi.org/10.1080/05785634.1988.11924482).
- [Jan04] Peter A.E.M. JANSSEN. « Nonlinear wave-wave interactions and wave dissipation ». In : *The interaction of ocean waves and wind*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004. Chap. 4, p. 129-208. DOI : [10.1017/cb09780511525018.005](https://doi.org/10.1017/cb09780511525018.005).
- [Dum22] Dany DUMONT. « Marginal ice zone dynamics: history, definitions and research perspectives ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 380.20210253 (2022). DOI : [10.1098/rsta.2021.0253](https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0253).