

Rapport hebdomadaire – McGill

Semaine du 27 mars 2023

Charles-Édouard Lizotte

31/03/2023

Contents

1	DONE Run du modèle multicouches	1
1.1	Mise en contexte et paramètres	1
1.2	Quelques résultats encourageants	1
2	DONE Retrouver les vorticités barotropes et baroclines	2
2.1	Rappel théorique : La mécanique des ondes de Rossby dans une couche	2
2.2	Interprétation physique des ondes de Rossby	3
2.3	Description du système QG à deux niveaux	3
2.4	Connexion entre les système à deux niveaux celui à deux couches	4
2.5	Description des modes barotrope et baroclines	5
3	Bibliographie	6
4	Annexe	6

1 DONE Run du modèle multicouches

1.1 Mise en contexte et paramètres

Au cours de la fin de semaine du 25 au 26, j'ai testé le modèle à 3 couches pour une période de 5 ans. Le modèle a terminé sa course sans accrochage avec les paramètres du tableau 1.

1.2 Quelques résultats encourageants

Avant tout, j'avais modifié les sous-routine de *output* pour qu'on puisse avoir quelque chose à observer. En fin de semaine le modèle semblait de bien fonctionner, mais en observant les output, j'ai remarqué qu'il n'y avait aucune production barocline. Je croyais que mon vent n'était pas assez fort, mais c'était plutôt une erreur de *timestep*. La deuxième *RHS* mettait à jours $\eta(2)$ et non $\eta(3)$, *rookie mistake*. Après avoir détecté l'erreur avec David, j'ai donc relancé l'expérience ce mercredi en soirée avec les paramètres cités dans le tableau 1. Après quelques essais et erreurs, les valeurs de densité ρ_k ont été choisies dans le but de mimiquer les gravité réduites trouvées à partir de la vitesse des ondes baroclines c_{bc} , soit

$$g'_k = \left(\frac{H}{H_k \cdot H_{k-1}} \right) c_{bc}^2. \quad (1.1)$$

Des diagrammes de Hovmoller pour les résultats de la *run* de mercredi devraient se retrouver en annexe.

Table 1: Valeur des différents paramètres de l'expérience de [Chen et al. \[2021\]](#), mais à 3 couches.

Paramètres	Symbole	Valeur
Taille du domaine	$L_x = L_y$	2000 km
Pas de temps	Δt	360 s
Paramètre de Coriolis	f	$7 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Amplitude du vent	τ_{atm}	0.1 N m^{-2}
Coefficient de viscosité biharmonique	A_{bh}	$dx^4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Coefficient de frottement au fond	r_{drag}	10^{-7} s^{-1}
Coefficient dissipation du Laplacien inverse	r_{InvLap}	$(2\pi/L_y)^2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
Épaisseur de la couche en surface	H_1	1000 m
Épaisseur de la seconde couche	H_2	1000 m
Épaisseur de la couche au fond	H_3	2000 m
Densité de l'eau (première couche)	ρ_1	1.0000 kg/m^3
Densité de l'eau (seconde couche)	ρ_2	1.0016 kg/m^3
Densité de l'eau (troisième couche)	ρ_3	1.0024 kg/m^3
Vitesse des ondes internes (semi-obsolète)	c_{bc}	2 ms^{-1}
Gravité réduite (seconde couche)	g_2'	$8 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$
Gravité réduite (troisième couche)	g_3'	$6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$

2 **DONE** Retrouver les vorticités barotropes et baroclines

2.1 Rappel théorique : La mécanique des ondes de Rossby dans une couche

Dans cette sous-section, nous allons développer les équations de vorticité quasi-géostrophique de sorte à retrouver la relation de dispersion des ondes de Rossby. Comme le développement mathématique des ondes de Rossby est intrinsèquement relié aux modes barotrope et baroclines, nous allons revisiter le concept en quelques lignes.

Comme nous l'avons vu dans le dernier [rapport](#), la vorticité potentielle QG est donnée par l'expression

$$q = \zeta + \beta - \frac{f_0}{H} \eta' = \nabla^2 \psi + \beta y - \frac{1}{L_d^2} \psi, \quad \text{où} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q = \frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0. \quad (2.1)$$

On recherche un type d'onde à méso-échelle, donc posons que la circulation à l'étude est vraiment plus petite que le rayon de déformation, de sorte que $L_d \rightarrow \infty$ et $q \rightarrow \zeta + \beta y$. Appliquons cette nouvelle définition dans l'équation d'évolution de q (eq. 2.1) pour retrouver

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\beta y)}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \zeta + \mathbf{u} \cdot \nabla(\beta y)}_{=\beta v} = \boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta + \beta v = 0} \quad (2.2)$$

À partir d'ici, il est souhaitable de **linéariser** l'équation d'évolution de la QGPV (2.2) en posant un courant moyen en x en arrière plan, (*background flow*), de sorte que $\psi = \bar{\psi}(y) + \psi'(x, y, t)$ où $\bar{\psi}(y) = -\bar{u}y$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + \underbrace{\bar{u} \cdot \nabla(\nabla^2 \bar{\psi})}_{=0} + \underbrace{\bar{u} \cdot \nabla(\nabla^2 \psi') + u' \cdot \nabla(\nabla^2 \bar{\psi})}_{=0} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi') + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

N.B. La proposition $\bar{\psi} = -\bar{u}y$ est assez consistante avec notre présomption que L_d est très grand.

Par coutume, il est de mise de poser des solutions ondulantes de la forme

$$\psi' = \exp\{i(kx + ly - \omega t)\}, \quad (2.4)$$

dans (2.3) ce qui nous amènera à l'équation de dispersion pour les ondes des Rossby à une couche, soit

$$(i)^2 K^2 (-i\omega) + (i)^3 \bar{u} k K^2 + i\beta k = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = k \left(\bar{u} - \frac{\beta}{K^2} \right)}, \quad (2.5)$$

où $K^2 \equiv k^2 + l^2$.

Finalement, les **vitesse de groupe** et **de phase** sont respectivement données par

$$\text{Phase} \quad c_p^x = \frac{\omega}{k} = \bar{u} - \frac{\beta}{K^2}, \quad c_p^y = \frac{\omega}{l} = \bar{u} \frac{k}{l} - \frac{\beta k}{K^2 l}, \quad (2.6)$$

$$\text{Groupe} \quad c_g^x = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)}, \quad c_g^y = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta k l}{(k^2 + l^2)^2}. \quad (2.7)$$

2.2 Interprétation physique des ondes de Rossby

Le livre de K. Vallis [2006] offre une interprétation physique élégante du mécanisme de rappel des ondes de Rossby. En subissant des perturbations zonales, les parcelles de fluides vont vouloir conserver leur vorticité. Ce faisant, elle transforment de la vorticité planétaire en vorticité relative et se mettent en rotation. Ceci aura tendance à advecter la parcelle vers l'ouest, comme décrit dans l'image 1.

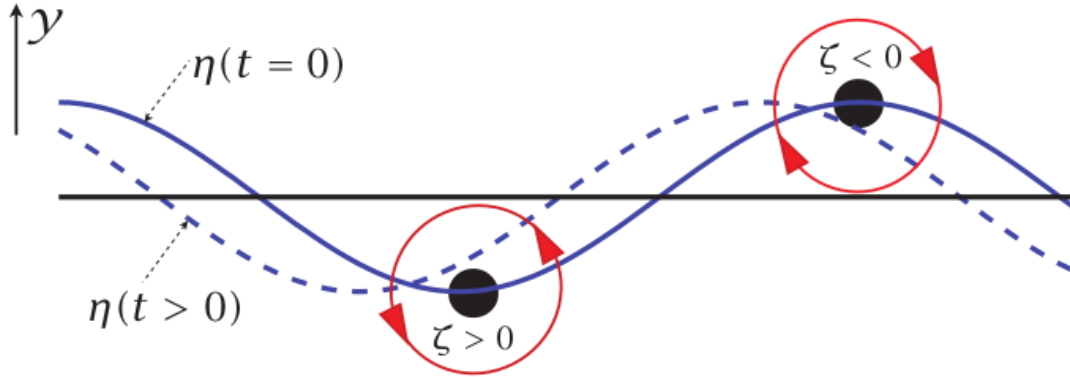


Figure 1: Figure tirée du Vallis décrivant le comportement des parcelles de fluide à l'équateur.

2.3 Description du système QG à deux niveaux

Toujours en partant des équation QG en milieu continu, il est possible de définir l'équation de vorticité quasi-géostrophique à **deux ou plusieurs niveaux**. Nous utiliserons ici la technique des différences finies pour discrétiser les équations continues et trouver un modèle à deux couches, un cas spécial aussi appelé modèle de Philips (K. Vallis [2006]).

Premièrement, la QGPV en milieu continu est donnée par

$$q = \zeta + f + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0 b'}{N^2} \right). \quad (2.8)$$

La **flottabilité** peut être décrite comme une dérivée verticale de la fonction de courant entre les deux niveaux (Voir figure 2). Nous approximerons cette dérivée par une différence finie, de sorte que

$$b' = f_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \sim f_0 \left(\frac{\Delta \psi}{\Delta z} \right) = \frac{f_0 (\psi_1 - \psi_2)}{H/2}. \quad (2.9)$$

Les vorticités potentielles des deux niveaux sont ainsi exprimées par

$$q_1 = \zeta_1 + f + \frac{2f_0^2}{N^2 H_1 H} (\psi_2 - \psi_1); \quad (2.10a)$$

$$q_2 = \zeta_2 + f + \frac{2f_0^2}{N^2 H_2 H} (\psi_1 - \psi_2). \quad (2.10b)$$

et les équations de conservation sont – comme à l’habitude – données par

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + J(\psi_i, q_i) = 0, \quad \text{et} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.11)$$

N.B. Le $J(\psi, \dots)$ décrit le Jacobien entre la fonction de courant et une autre fonction.

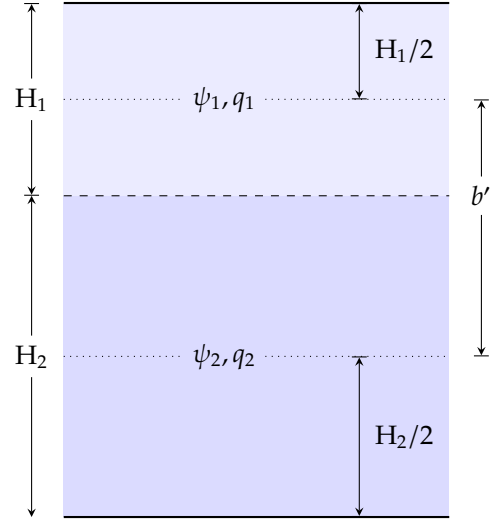


Figure 2: Schéma conceptuel du modèle QG à deux **niveaux**. Les fonctions de courant et les vorticité potentielles

2.4 Connexion entre les système à deux niveaux celui à deux couches

On se doute bien qu’il existe un lien entre les équations à deux couches et les équations à deux niveaux, en effet

$$N^2 = \frac{\partial \hat{b}}{\partial z}; \quad b = \frac{-g \delta \rho}{\rho_0}, \quad (2.12)$$

donc si l’on approxime l’écart de densité et d’échelle verticale comme étant une différence finie, on arrive à

$$N^2 = \frac{g}{f_0} \frac{\rho_1 - \rho_2}{H_2} = \frac{g'_2}{H/2}. \quad (2.13)$$

Par conséquent, les équations 2.10 deviennent

$$q_1 = \zeta_1 + f + \frac{f_0^2}{g'_2 H_1} (\psi_2 - \psi_1); \quad q_2 = \zeta_2 + f + \frac{f_0^2}{g'_2 H_2} (\psi_1 - \psi_2), \quad (2.14)$$

soit les équations de QGPV à deux couches. Pour citer [K. Vallis, 2006, p.195] :

« Similarly, a multilayered system with n -layers is equivalent to a finite difference representation with n -levels »

Donc à nz couches, on peut généraliser $\Delta z_k = (H_k + H_{k-1})/2$, de sorte que

$$q_k = \zeta_k + f + \frac{f_0^2}{g'_k H_k} (\psi_{k-1} - \psi_k) - \frac{f_0^2}{g'_{k+1} H_k} (\psi_k - \psi_{k+1}). \quad (2.15)$$

En conclusion, on peut dicrétiser les équations en milieu continu à l’aide de la méthode des différences finies (sinon, ça serait difficile de faire de la numérique), tout en se permettant d’avoir une résolution horizontale de seulement deux couches. Le but de cet exercice était principalement de se convaincre qu’on peut passer d’un milieu continu sans se mettre dans le pétrin. Dans la section suivante, nous développerons l’équation d’évolution de la QGPV linéarisée, mais pour $L_d \neq \infty$.

2.5 Description des modes barotrope et baroclines

Précédemment, nous avons utilisé l'équation d'évolution de la QGPV pour trouver la relation de dispersion des ondes de Rossby, cette équation était donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \psi' + \frac{1}{\bar{\rho}(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

Ensuite, nous avons linéarisé l'équation précédente autour d'un courant moyen en x en assumant que $L_d \rightarrow \infty$. Ici, nous allons exactement réaliser l'inverse en posant une solution oscillante de la forme

$$\psi'(x, y, z, t) = \text{Re } \tilde{\psi}(z) \exp\{i(kx + ky - \omega t)\}, \quad (2.17)$$

dans l'équation 2.16.

On arrive à

$$\omega \left[-K^2 \cdot \tilde{\psi}(z) + \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho}(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\psi}(z) \right)}_{\mathcal{L}\tilde{\psi}} \right] + \beta k \cdot \tilde{\psi}(z) = 0, \quad (2.18)$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire. Ce dernier satisfait ainsi l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{L}\tilde{\psi}(z) = -\Gamma\tilde{\psi}(z). \quad (2.19)$$

En milieu continu, l'opérateur \mathcal{L} produit donc un nombre infini de modes verticaux discrétisés à l'aide des conditions limites [K. Vallis, 2006, p.468]. En revanche, dans un système quasi-géostrophique à plusieurs couches, la QGPV est donnée par l'équation 2.15, de sorte que cet opérateur linéaire \mathcal{L} est dépendant des fonctions de courant ψ des couches adjacentes,

$$\mathcal{L}\tilde{\psi}_k = \frac{f_0^2}{g'_k H_k} (\tilde{\psi}_{k-1} - \tilde{\psi}_k) - \frac{f_0^2}{g'_{k+1} H_k} (\tilde{\psi}_k - \tilde{\psi}_{k+1}). \quad (2.20)$$

On peut réunir les termes communs,

$$\mathcal{L}\tilde{\psi}_k = \left(\frac{f_0^2}{H_k g'_{k+1}} + \frac{f_0^2}{H_k g'_k} \right) \tilde{\psi}_k - \left(\frac{f_0^2}{H_k g'_k} \right) \tilde{\psi}_{k-1} - \left(\frac{f_0^2}{H_k g'_{k+1}} \right) \tilde{\psi}_{k+1},$$

$$\mathcal{L}\tilde{\psi}_k = (F_{(k,k+1)} + F_{(k,k)}) \tilde{\psi}_k - F_{(k,k)} \tilde{\psi}_{k-1} - F_{(k,k+1)} \tilde{\psi}_{k+1}, \quad \text{où} \quad F_{(i,j)} = \frac{f_0^2}{H_i g'_j}.$$

(2.21)

On voit que l'opérateur linéaire \mathcal{L} peut être exprimé sous forme matricielle où il satisfait l'équation aux valeurs propres

$$\begin{pmatrix} F_{(1,2)} + F_{(1,1)} & -F_{(1,2)} & 0 & \cdots & 0 \\ -F_{(2,2)} & F_{(2,3)} + F_{(2,2)} & -F_{(2,3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -F_{(nz,nz)} & F_{(nz,nz+1)} + F_{(nz,nz)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{nz} \end{pmatrix} = \Gamma_k \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{nz} \end{pmatrix}$$

Les **vecteurs propres** seront les **modes baroclines orthogonaux** de notre système à nk couches. Rappelons que les modes propres peuvent être interprétés d'un côté comme une combinaison de nos fonctions ($\tilde{\psi}_k$) qui permettent de découpler les équations 2.18. De l'autre, ce sont aussi les modes fondamentaux orthogonaux. On peut donc créer une combinaison de ces modes pour retrouver n'importe quelle fonction ($\tilde{\psi}_k$). De leur côté, les **valeurs propres** représenteront les rayons de déformation réels entre chaque couche.

N.B. On le répète, mais les gravités réduites représentent les g à la surface d'une couche, c'est pourquoi on diffère légèrement des notes de Louis-Philippe et du Vallis. À deux couches, c'est un peu fatigant, mais à n -couches avec un plancher océanique trivialement plat, je trouve que ça prend tout son sens. Personnellement, je trouve que ça

fait bien plus de sens que les gravités réduites suivent les η à la surface des couches et non les interfaces inférieures, donc

$$g'_k = g \left(\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_1} \right). \quad (2.22)$$

De plus, cette formulation est consistante avec l'architecture du modèle *shallow-water* codé par David, Yangxu et Tianze.

3 Bibliographie

References

Y. Chen, D. Straub, and L.-P. Nadeau. Interaction of nonlinear ekman pumping, near-inertial oscillations and geostrophic turbulence in an idealized coupled model. *Journal of Physical Oceanography*, 2021.

G. K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamic : Fundamentals and Large-scale Circulation*. Cambridge University Press, The Edinburg Building, Cambridge CB2 2RU, UK, second edition edition, 2006. ISBN 13 978-0-521-84969-2.

4 Annexe

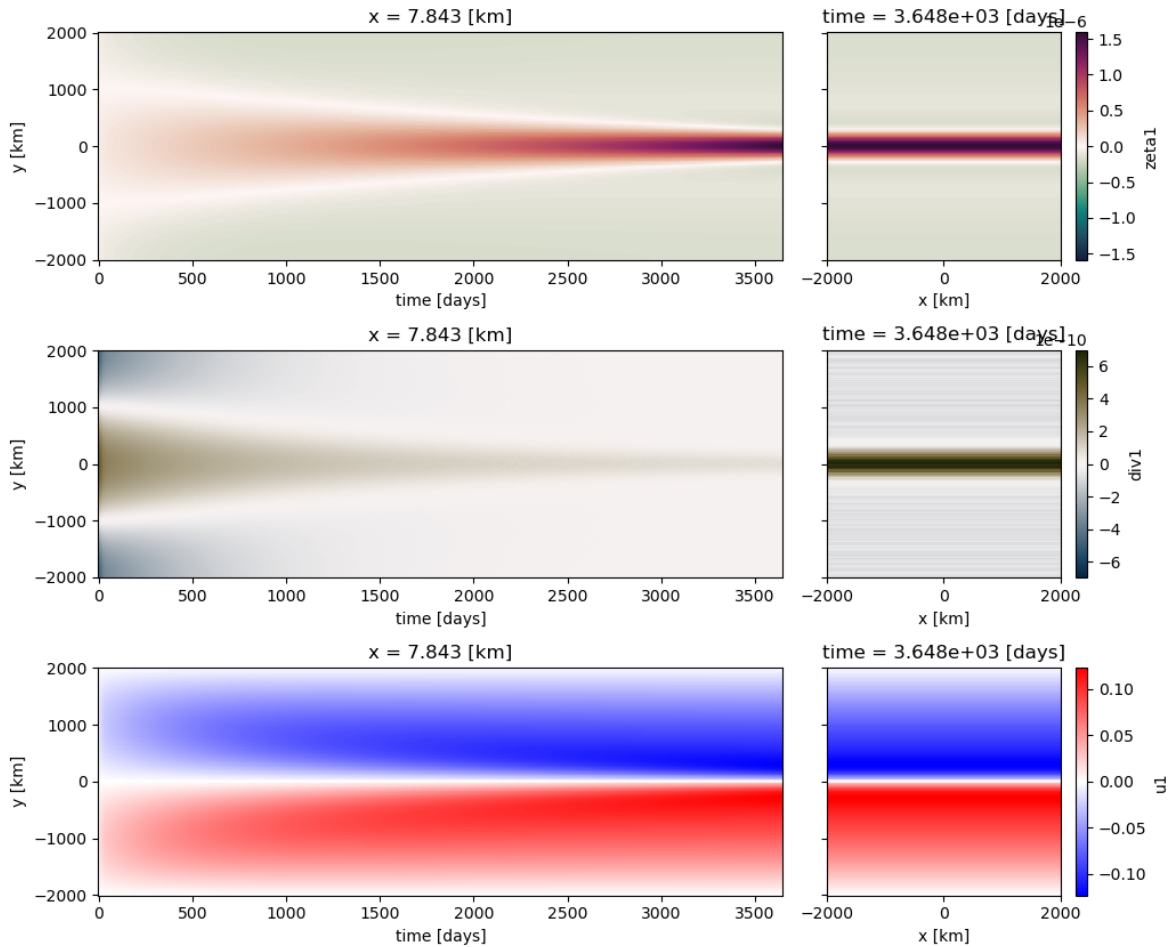


Figure 3: Diagrammes de Hovmöller pour les trois couches, période de 10 ans.

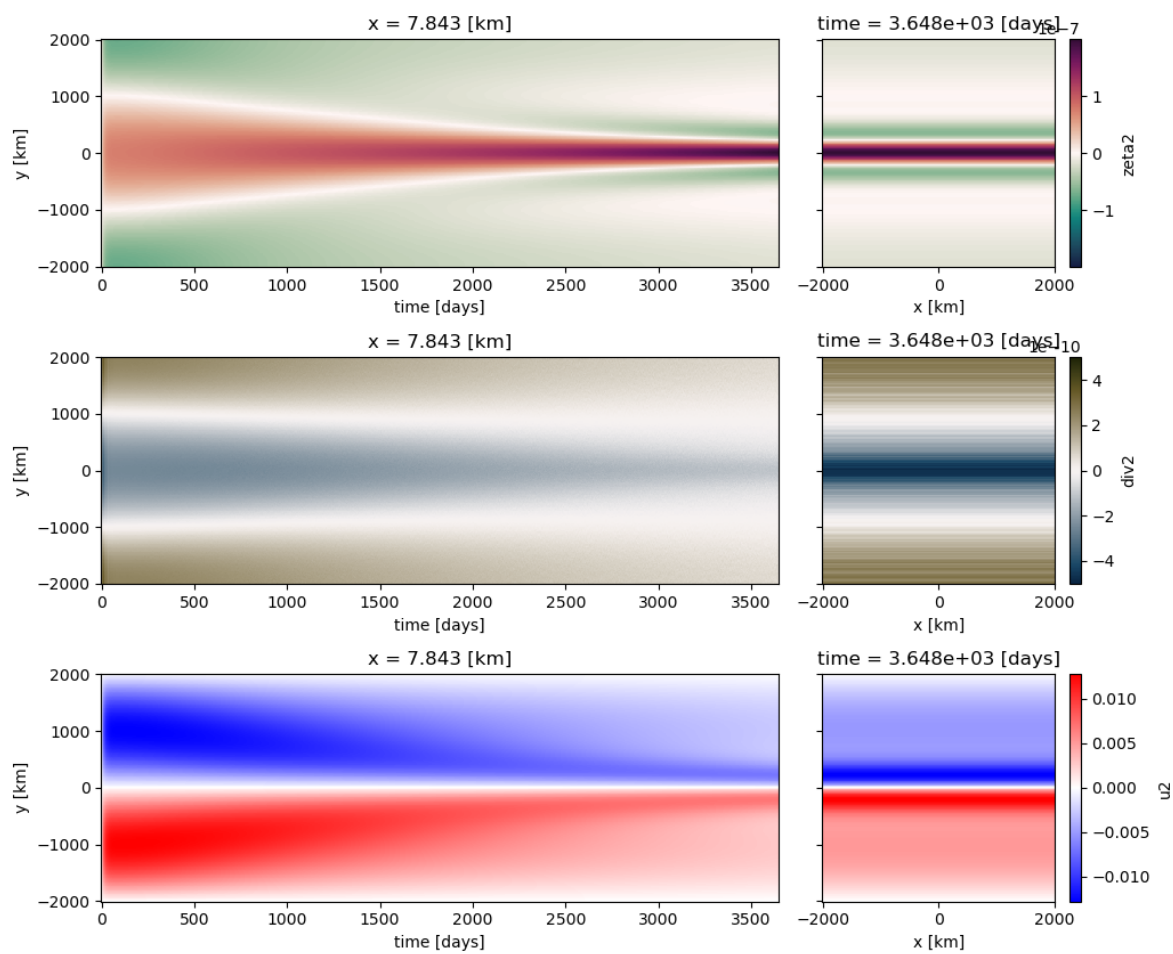


Figure 4: Diagrammes de Hovmöller pour les trois couches, période de 10 ans.

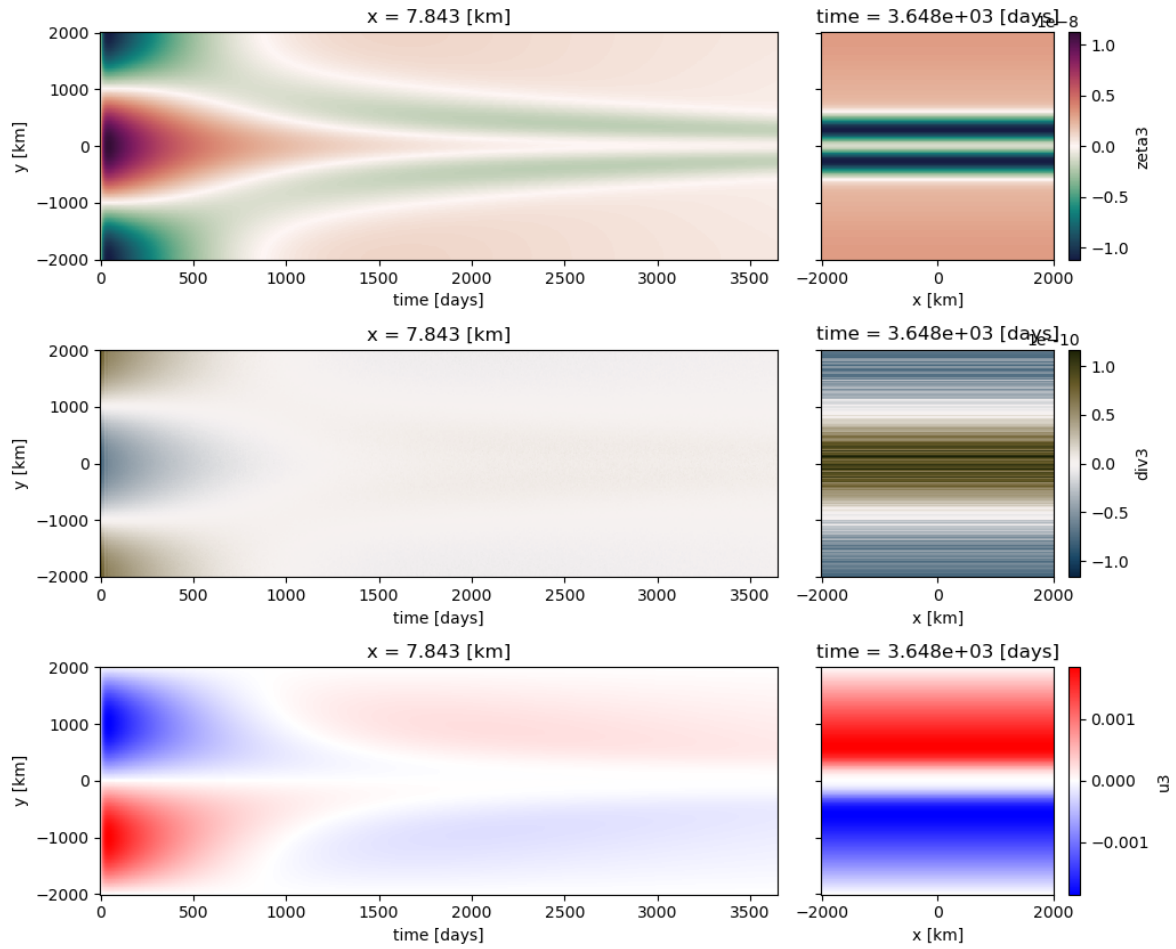


Figure 5: Diagrammes de Hovmöller pour les trois couches, période de 10 ans.