Contrat Été 2023

CARNET DE BORD, UNIVERSITÉ MCGILL

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

01/09/2023

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR

Table des matières

1 Diatribes mathématiques – <2023-08-28 Mon>

L'implémentation de MUDPACK et notre insatisfaction m'amène à voir s'il y aurait d'autres méthodes mathématiques pour résoudre notre problème. En somme, l'équation différentielle partielle à résoudre est une équation elliptique – plus précisément une équation de Poisson – composée d'une dérivée de second ordre et d'une autre de premier ordre. Soit,

$$\nabla^2\psi = \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}_{BT}. \tag{1.1}$$

L'équation 1.1 est composée de dérivées de second ordre, mais existe-t-il un moyen de la réduire au premier ordre, considérant que l'erreur induite dans *MUDPACK* est affectée par la précision des chiffres significatifs ? La réponse est probablement négative, mais essayons quand même pour se redonner confiance. Utilisons la relation

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}. \tag{1.2}$$

En premier, comme le courant est donné par la relation $\boldsymbol{u}_{BT} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\nabla}\psi$, on peut développer l'équation 1.1,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi &= \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\nabla}\psi\right), \\
&= \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi) - \cancelto{0}{\boldsymbol{\nabla}\psi\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{k}}\right)} + \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{\nabla}\psi - \cancelto{0}{(\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla})\hat{\mathbf{k}}}\right), \\
&= \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi) + \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{\nabla}\psi\right), \\
&= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \cancelto{0}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}(\psi)}, \\
&= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Ouin. . . dommage. Les maths fonctionnent en tout cas. . .

2 Fishpack – <2023-08-29 Tue>

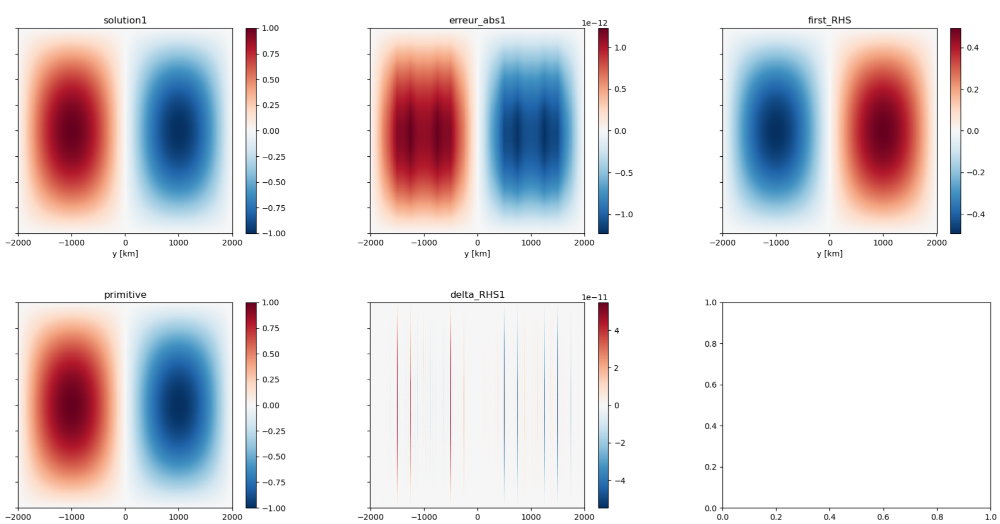

FIGURE 1 – *Comparaison des mêmes quantités évaluées avec MUDPACK, mais avec le solveur Fishpack. Résultat ahurissant.*

Ce lundi soir et mardi, j'étais un peu épuisé qu'on perde autant de temps sur *MUDPACK*, c'est pourquoi j'ai commencé à regarder ailleurs. Entre autre, un article en ligne comparait l'efficacité de trois méthodes pour solutionner rapidement les équations différentielles partielles du genre de celle à laquelle on a affaire (équation 1.1).

Concrétement, *MUDPACK* était la moins bonne, mais il mentionnait un autre module nommé *fishpack*. Donc, je me suis lancé. Deux versions existaient en ligne, soit celle de NCAR et une version mise à jour il y a 6 ans. Bien entendu j'ai pris la plus récente pour m'assurer qu'on puisse utiliser les type DOUBLE PRECISION.

Après une journée de travail, j'en suis arrivé à la figure 1. Le résultat est ahurissant, on obtient une erreur absolue de l'ordre de 10^{-12} et un écart de ζ de 10^{-11}. On peut en déduire de *MUDPACK* est complétement surclassé. Sans oublier que le temps de calcul est minimal aussi.

2.1 Implémentation dans le modèle en eau peu profonde – <2023-08-30 Wed>

Comme au premier jet, nous solvons l'équation 1.1 directement. Donc, aucun besoin de corriger le RHS ou l'écart entre les deux champs : on corrige directement le champ courant (donc celui mis à jour : *ilevel* = 3). Si le besoin pour une meilleure précision se fait sentir, on pourra revenir à nos bonnes habitudes de seulement corriger l'écart entre les champs *ilevel* = 1 et *ilevel* = 3, de sorte à suivre le pas de temps de type *leapfrog*.

2.1.1 Rappel de l'analyse dimensionelle associée au vent <2023-08-31 Thu>

La nuit dernière, j'ai lancé une simulation de 10 ans, mais nous sommes toujours dans le *spin up*. Après un peu de bébroussaillage, j'ai vu que ça venait probablement du τ insuffisant., À la base, j'avais mis ça car David voulait voir le système évoluer sans les termes non-linéaires et je l'avais oublié là. J'ai relancé la simulation avec un vent de $\tau = 0.1Nm^{-2}$.

Les paramètres sont illustrés dans le tableau 1.

TABLE 1 – *Paramètres utilisés dans la simulation de jeudi matin (<2023-08-31 Thu>).*

Paramètres	Symbole	Valeur	Unité
Taille du domaine	$L_x = L_y$	2000	km
Nombre de points de grilles	nx = ny	513	–
Pas de temps	Δ t	300	s
Paramètre de Coriolis	f	7×10^{-5}	s^{-1}
Paramètre beta	beta	1×10^{-11}	$m^{-1}s^{-1}$
Amplitude du vent	τ_{atm}	0.1	N m^{-2}
Coefficient de visc. biharmonique	A_{bh}	$dx^4 \times10^{-5}$	s^{-1}
Coefficient de frottement	r_{drag}	10^{-7}	s^{-1}
Vitesse des ondes internes baroclinques	c_{bc}	2	ms^{-1}
Épaisseur de la couche supérieure	H_1	1000	m
Épaisseur de la couche inférieur	H_2	3000	m

L'analyse dimensionnel va comme suit : Pour l'évolution,

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \Rightarrow \left[\frac{ms^{-1}}{s}\right] \Rightarrow \left[\frac{m}{s^2}\right]. \tag{2.1}$$

Pour le terme associé au frottement visqueux du vent à la surface,

$$\frac{\tau}{\rho h} \Rightarrow \frac{\left[Nm^{-2}\right]}{[Kg \cdot m^{-3}][m]} \Rightarrow \left[\frac{N}{Kg}\right] \Rightarrow \frac{\left[Kg \cdot ms^{-2}\right]}{[Kg]} \Rightarrow \left[\frac{m}{s^2}\right]. \tag{2.2}$$

Bonne nouvelle ! Notre schéma pour le frottement visqueux à la surface est bon et je ne fais pas des erreurs stupides depuis 6 mois ! *Cheers !*