Contrat Été 2024

RAPPORT HEBDOMADAIRE

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

23/08/2024

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR
Police d'écriture : **CMU Serif Roman**

Table des matières

1. Retour sur le modèle de vagues

1.1. Valeurs positives

Un gros problème tout au long du modèle était l'existence de valeurs négatives pour le spectre de vague – ce qui ne fait aucun sens. Pour pallier au problème, j'ai donc mis des filtres qui s'assurent d'avoir un minimum de 0 pour le spectre lorsque les termes source font descendre notre spectre trop bas.

— Le premier est après l'advection ;

— Le second est juste après l'ajout des termes source.

1.2. Introduction de l'énergie dans les vagues

Le terme de croissance des vagues dans le modèle d'Eliot Bismuth est tiré des notes de Fabrice Ardhuin [**Ardhuin2024ocean**], qui sont elle aussi tirées d'un article de **snyder1981array**. Essentiellement, on assume que la croissance des vagues dans le terme source prend la forme

$$S_{in}(f, \theta) = \sigma\beta E(f, \theta). \tag{1.1}$$

Dans l'équation précédente, le facteur β est un taux de croissance adimensionnel. Généralement, on utilise une fonction obtenue de manière empirique. Par contre, **snyder1981array** ont réussi à la mettre en équation, soit

$$\beta = \max\left\{0,\, 0.25\frac{\rho_a}{\rho_o}\left[28\frac{u_\star}{C}\cos(\theta_\star - \theta) - 1\right]\right\}. \tag{1.2}$$

En 1 dimension, ça se traduirait par

$$\boxed{\beta = \max\left\{0,\, 0.25\frac{\rho_a}{\rho_o}\left[28\frac{u_\star}{C} - 1\right]\right\},} \tag{1.3}$$

et c'est bien ce qu'on a ! Par contre, je n'ai pas vu le *max* dans le code de Bismuth. . .

1.3. Pierson-Moskowitz

Y'a quelque chose de louche dans la maîtrise de Bismuth, c'est vraiment pas clair si les fréquences utilisées sont en s^{-1} ou en $\mathrm{Rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Particulièrement où il y a la ligne de Pierson-Moscowitz. C'est pourquoi je suis allé le chercher à la source, le *JONSWAP final report* [**hasselmann1973measurements**]. Donc Pierson-Moskowitz, c'est

$$E_{PM}(f) = \alpha g^2 (2\pi)^4 f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_m}\right)^{-4}\right], \tag{1.4}$$

mais si on prend le spectre JONSWAP, on multiplie par une composante qu'on appelle le *peak enhancement factor* $\left(\gamma^{g(f,\sigma)}\right)$,

$$E_{JONSWAP}(f) = E_{PM}(f) \times \gamma^{g(f,\sigma)} \qquad \text{de sorte que} \qquad g(f,\sigma) = \exp\left[\frac{-(f-f_m)^2}{2\sigma^2 f_m^2}\right], \tag{1.5}$$

ce qui nous laisse 5 paramètres flottant, soient $f_m, \alpha, \gamma, \sigma_a, \sigma_b$. Où l'on relit les derniers facteurs à l'aide de

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_a & \text{si} \quad f \leq f_m, \\ \sigma_b & \text{si} \quad f > f_m. \end{cases} \tag{1.6}$$

Par contre, Bismuth prend plutôt la formulation

$$E_{JONSWAP}(\omega) = 0.2H_s^2\left(\frac{\omega_p^4}{\omega^5}\right)\exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4\right\} \times 3.3^{\exp\left\{\frac{-(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma^2\omega_p^2}\right\}}. \tag{1.7}$$

Selon **hasselmann1973measurements**, on devrait avoir les valeurs

$$\gamma = 3.3, \qquad \sigma_a = 0.7, \qquad \sigma_b = 0.9, \tag{1.8}$$

à l'équilibre – c'est d'ailleur ce que Bismuth a mis.

Donc, l'erreur vient du fait que dans son manuscrit, tout est en $\mathrm{Rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ quand tout devrait être en s^{-1}, ce qui se traduit par l'équation 2.15 de la maîtrise de Bismuth, soit

$$E_{JONSWAP}(f) = 0.2\left(\frac{H_s^2}{2\pi}\right)\left(\frac{f_p^4}{f^5}\right)\exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right\} \times 3.3^{\exp\left\{\frac{-(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma^2\omega_p^2}\right\}}. \tag{1.9}$$

C'est une faute d'inattention. Dans les faits, il aurait du avoir

$$\boxed{E_{JONSWAP}(f) = 0.2H_s^2\left(\frac{f_p^4}{f^5}\right)\exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right\} \times 3.3^{\exp\left\{\frac{-(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma^2\omega_p^2}\right\}}.} \tag{1.10}$$

D'ailleurs, il ne cite pas que sa formulation vient de **goda1988variablity**. On en fait justement mention sur l'article de Wikiwaves sur le JONSWAP en mentionnant qu'il faut faire attention à la conversion.

1.4. Retour sur la méthode de Lax-Wendroff

Malheureusement, si l'on veut un *Superbee flux limiter*, on doit recoder la méthode de Lax-Wendroff. En théorie, le limituer s'applique sur une quantité qu'on appelle le *flux*. Cette quantité, c'est en fait ce qui sort d'un cube (ou d'un carré dans notre cas).

On n'oublie pas qu'il faut résoudre

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F(E)}{\partial x} = 0 \quad \text{où} \quad F(E) = c_g E \tag{1.11}$$

Grossièrement, on peut solutionner cette équation en additionnant un δF, qui est en fait le *flux* de notre fonction. C'est justement ce que nous allons limiter dans

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \left(\frac{\delta t}{\delta x}\right)\left[\, F_{i+1/2} - F_{i-1/2} \,\right], \tag{1.12}$$

Dans le cas de Lax-Wendroff, on peut représenter les flux sur chaque bords comme

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left(E_i^n - E_{i-1}^n\right) - \phi(E_{i-1/2}) \times \frac{1}{2}\frac{\delta t}{\delta x}\left(F(E_i^n) - F(E_{i-1}^n)\right), \tag{1.13a}$$

$$F_{i+1/2} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(E_{i+1}^n - E_i^n\right)}_{\text{Moyenne}} - \phi(E_{i+1/2}) \times \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\delta t}{\delta x}\left(F(E_{i+1}^n) - F(E_i^n)\right).}_{\text{Variation}} \tag{1.13b}$$

où ϕ est le limiteur. Dans le cas qui nous intéresse (limiteur *superbee*) – car il existe toutes sortes de limiteurs – nous avons

$$r_{i+1/2} = \left(\frac{E_i - E_{i-1}}{E_{i+1} - E_i}\right), \qquad r_{i-1/2} = \left(\frac{E_{i-1} - E_{i-2}}{E_i - E_{i-1}}\right) \tag{1.14}$$

où le limiteur est exprimé par

$$\phi = \max\left\{\begin{matrix}\min(1, 2r) \\ \min(2,\ r)\end{matrix}\right\}. \tag{1.15}$$

Voilà. Il faudra implémenter ça, plutôt que ma fonction d'algèbre linéaire, malheureusement. C'est fait, en tout cas !

Charles-Édouard Lizotte

2. Coefficient d'atténuation

Dany mentionnait l'article de **auclair2022model** qui offre un coefficient d'atténuation qui avait été proposé par **sutherland2019two**.

2.1. Article de auclair2022model

2.1.1 Atténuation des vagues par la glace

Grossièrement, on s'éloigne de la méthode de **Kohout2011wave**, ce qui est une bonne nouvelle. L'article de **sutherland2019two** semble empiriquement meilleur pour obtenir un coefficient d'atténuation physique α [m^{-1}]. Dans l'article, on illustre le terme source de l'atténuation par la glace par

$$S_{ice} = -\beta(A, h, f)\, E_{waves}. \tag{2.1}$$

Le coefficient d'atténuation temporel β [s^{-1}] est donné par

$$\beta = \frac{\nu\omega^2\Delta_0}{2g\epsilon h}, \tag{2.2}$$

où

$$\nu = \frac{1}{2}\epsilon^2\omega h^2, \tag{2.3}$$

est l'épaisseur relative d'une couche perméable de glace recouvrant notre eau et Δ_0 est un paramètre relié à l'amplitude du mouvement des vagues à l'intérieur de cette même couche. Il est donc suggéré de mettre ensemble ces deux équations pour obtenir,

$$\beta = \frac{\epsilon\Delta_0 h\omega^3}{4g}. \tag{2.4}$$

Les deux paramètres libres ϵ et Δ_0 peuvent être combinés. Selon les données de **sutherland2019two**, on devrait avoir une relation empirique du genre

$$\epsilon\Delta_0 = 0.5. \tag{2.5}$$

Mentionnons qu'on peut aussi obtenir le taux d'atténuation par floe a – comme utilisé par **Kohout2011wave** – et le mettre en relation avec le taux d'atténuation physique par distance α. La relation est donnée par

$$\alpha = \frac{Aa}{D}, \tag{2.6}$$

où D est le diamètre du floe et A est la concentration de glace.

3. Recherche d'une métrique sur l'hétérogénéité des paquets de glace

On pourrait commencer à regarder du côté de l'entropie. CLairement, il faudrait voir si on peut relier une *mesure du désordre* avec l'atténuation d'énergie dans un domaine de glace.

Mais comment représenter une mesure du désordre ?