

Contrat Été 2023

RÉSUMÉ FORMEL DE LA RECHERCHE

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER-UQAR

28/11/2023

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR
Police d'écriture : **CMU Serif Roman**

Table des matières

1	Le modèle en eau peu profonde à plusieurs couches	2
1.1	Les équations du mouvement	2
1.2	Conservation de la masse	3
1.3	Résolution du gradient de pression	3
1.4	Conditions frontières	5
1.4.1	Conditions frontière sur les courants (No normal flow)	5
1.4.2	Conditions frontières sur la dérivée première (Free slip condition)	5
1.4.3	Condition sur les laplaciens et la fonction de courant	5
2	Aperçu théorique de l'ajout des vagues au modèle en eau peu profonde	6
2.1	La dérive de Stokes selon SUZUKI et FOX-KEMPER	6
2.1.1	Les équations du mouvement WAB	6
2.1.2	Connecter les équations WAB avec le modèle en eau peu profonde	7
2.1.3	Conservation de la masse	8
2.2	Contrainte de cisaillement du vent à la surface	9
2.3	Champs échangés par les deux modèles	9
3	Techniques numériques en lien avec le couplage	10
3.1	Interpolation géométrique	10
3.1.1	Du modèle « shallow water » au modèle Wavewatch	10
3.1.2	De Wavewatch au modèle « shallow water »	10
3.1.3	Interpolation grille C et grille A	11
3.2	Cheminement des étapes de couplage et d'interpolation	11
3.3	Rampe au moment du couplage	11
4	Paramètres physiques des équations	13
4.1	Stress du vent appliqué à la surface des deux modèles	13
4.2	Vent donné en input de Wavewatch III	13
4.3	Le paramètre de Charnock (désambiguation)	14
4.4	Ce que Wavewatch III voit en input	14
4.5	Tableau et résumé des quantités physiques importantes	15
4.6	Switches du modèles Wavewatch III	16
5	Faire fonctionner les modèles couplés	17
5.1	Compilation du modèle <i>shallow water</i>	17
5.1.1	Modifier le fichier « parameters.fgo »	17
5.1.2	Compilation du modèle avec l'exécutable « compile model »	17
5.2	Compilation du modèle Wavewatch III	18
5.2.1	Compilation du modèle avec l'exécutable « make oxygen »	18
5.3	Création des inputs et assimilation par Wavewatch III	18
5.3.1	Création d'un nouveau cas	18
5.4	Rouler les modèles en MPI	18

Chapitre 1

Le modèle en eau peu profonde à plusieurs couches

1.1 Les équations du mouvement

Le système d'équation décrivant l'écoulement dans le modèle en eau peu profonde (*shallow water*) est exprimé par

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (f + \zeta_k) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_k = -\nabla B_k + \mathbf{D}_k + \delta(k, 1) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_a}{\rho_o H_k} \right) \quad \text{où} \quad k \in \{1, 2, \dots, n_z\}. \quad (1.1.1)$$

où l'indice k représente l'indicateur numérique de la couche et n_z est le nombre total de couches, comme illustré à la figure 1.1. Dans l'expression précédente, la fonction de Bernouilli B_k – une quantité qui illustre les transferts entre l'énergie cinétique et potentielle – est exprimée par

$$B_k = \rho_k^{-1} p_k + |\mathbf{u}_k|^2 / 2. \quad (1.1.2)$$

Rapidement, \mathbf{u}_k est la vitesse du courant horizontal dans la couche k , f est la fréquence de Coriolis (en *Rad/s*), ζ_k la vorticité horizontale dans la couche k , la quantité $\boldsymbol{\tau}_a$ représente la contrainte de cisaillement imposée par le vent à la surface, ρ_k est la densité de l'eau dans la couche k et H_k est l'épaisseur fixe moyenne de cette même couche. La quantité p_s représente la pression de surface induite par la surface fixe (*rigid lid*) et le vecteur \mathbf{D}_k décrit la dissipation dans chaque couche, nous y reviendrons bientôt. Il est aussi courant d'utiliser la variable $\phi_k = \rho_k^{-1} p_k$ en [m^2/s^2] dans la description du gradient de pression.

Dans l'expression du gradient de la fonction de Bernouilli ∇B_k , la pression p_k est décomposée selon la couche, de sorte que

$$p_k = \begin{cases} p_s & \text{si } k = 1 \\ p_{k-1} + \rho_1 g'_k \eta_k & \text{autrement} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

où

$$g'_k = g \left(\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_1} \right) \quad (1.1.4)$$

est la gravité réduite de la couche k .

***N.B.** Dans notre propre nomenclature, la quantité « η_k » représente l'élévation de la surface d'une couche « k », en opposition à la nomenclature de K. VALLIS (2006), où η_k représente l'élévation du bas de la couche k . En cas de doute, se référer à la figure 1.1). Le but est de rester cohérent avec l'article de CHEN, D. STRAUB et NADEAU (2021).

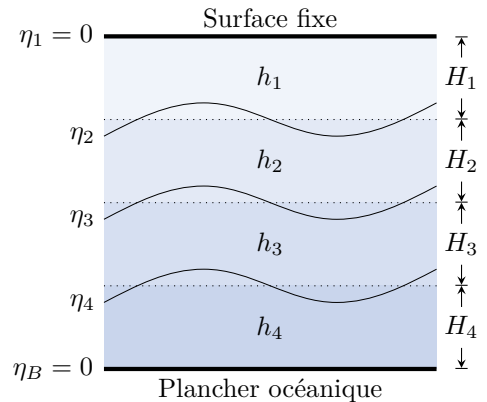


FIGURE 1.1 – Illustration conceptuelle d'un modèle « *shallow water* » à $n_z = 4$ couches. La densité volumique de chaque couche est grossièrement illustrée à l'aide du contraste des couleurs.

De leur côté, les termes de dissipation D_k sont exprimés par

$$D_k = \underbrace{-A_h \nabla^4 \mathbf{u}_k^{t-1}}_{\text{Hyperviscosité}} - \underbrace{\delta(k, n_z) \cdot r \mathbf{u}_k^{t-1}}_{\text{Frottement au fond}}, \quad (1.1.5)$$

où l'expression $\delta(k, i)$ réfère ici au delta de Kronecker qui est l'expression mathématique d'une *switch* dont les valeurs sont 1 lorsque $k = i$ et 0 autrement,

$$\delta(k, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

L'indicateur $t-1$ réfère au pas de temps précédent, car nous utilisons un schéma temporel de type *leapfrog*. L'absence d'indice temporel dénote donc le pas de temps courant d'une quantité, soit \mathbf{u}^t par exemple. Une meilleure description du pas de temps est fournie dans la section 1.3.

1.2 Conservation de la masse

Dans le modèle en eau peu profonde, le système d'équation incarnant la conservation de la masse est donné par

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = \nabla \cdot (h_k \mathbf{u}_k) + \underbrace{\delta(k, 1) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{U}^b)}_{\text{Autre transport de surface}}, \quad (1.2.1)$$

où \mathbf{U}^b pourrait représenter n'importe quel transport de surface, tel que le transport de Stokes, le transport d'Ekman, comme dans CHEN, D. STRAUB et NADEAU (2021). De base, aucune quantité n'est précisée ici, donc gardons $\mathbf{U}^b = 0$.

1.3 Résolution du gradient de pression

Concrètement, le *timestepping* de type *leapfrog* pour les équations du mouvement est exprimé par

$$\mathbf{u}_k^{t+1} = \underbrace{\mathbf{u}_k^{t-1} + (2\Delta t) \cdot \mathbf{G}_k^t}_{\tilde{\mathbf{u}}_k} - \nabla \phi_s. \quad (1.3.1)$$

où \mathbf{G}^t est un vecteur valise qui contient tout le *RHS* des équations 1.1.1, mais sans le terme de pression de surface ($\nabla \phi_s$). Le terme \mathbf{G}_k^t est calculé au pas de temps courant de manière à s'incruster dans le *timestepping* de type *leapfrog*. Ainsi, l'expression

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^{t+1} = \mathbf{u}_k^{t-1} + (2\Delta t) \cdot \mathbf{G}_k^t, \quad (1.3.2)$$

représente donc le nouveau courant sans la correction associée à la pression de surface, qui est pour l'instant inconnue.

Conceptuellement, on peut décomposer notre courant en deux sections, soit une composante *barotrope* et une composante *barocline*. La composante barotrope est le courant moyenné par l'épaisseur des couches, tandis que la composante barocline représente l'anomalie par rapport à cette moyenne, de sorte à retrouver

$$\tilde{\mathbf{u}}_{BT} = \frac{1}{H} \left(\sum_k^n d_k \tilde{\mathbf{u}}_k \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{BC, k} = \tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathbf{u}}_{BT}. \quad (1.3.3a)$$

Puis à l'aide de ce courant barotrope, on peut construire une vorticité barotrope

$$\tilde{\zeta}_{BT} = \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}_{BT}], \quad (1.3.4)$$

qui est défini sur toute la hauteur de la colonne d'eau.

Mais on peut aussi calculer la vorticité de notre futur courant, de sorte à retrouver

$$\begin{aligned}\zeta_{BT}^{t+1} &= \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \mathbf{u}_{BT}^{t+1}], \\ \zeta_{BT}^{t+1} &= \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times (\tilde{\mathbf{u}}_{BT} + \nabla \phi_s)], \\ \zeta_{BT}^{t+1} &= \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}_{BT}] + \hat{\mathbf{k}} \cdot \cancel{[\nabla \times \nabla \phi_s]}^0.\end{aligned}\tag{1.3.5}$$

Comme le rotationnel d'unpp gradient est toujours nul, on arrive à la conclusion inévitable que

$$\zeta_{BT}^{t+1} = \tilde{\zeta}_{BT}.\tag{1.3.6}$$

La correspondance entre la vorticité relative est donnée par $\zeta = \nabla^2 \psi$, donc on obtient une nouvelle équation de Poisson donnée par

$$\boxed{\nabla^2 \psi_{BT}^{t+1} = \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}_{BT}] \text{ avec C.F. Dirichlet } \psi_{BT} \Big|_{x_0, x_f} = \psi_{BT} \Big|_{y_0, y_f} = 0.}\tag{1.3.7}$$

Donc en trouvant ψ_{BT} à l'aide d'un solveur elliptique (Fishpack dans notre cas), on trouve aussi \mathbf{u}_{BT} à l'aide de la relation avec la fonction de courant,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.\tag{1.3.8}$$

Puis finalement, on recombine les courants mis-à-jour à l'aide de la relation

$$\mathbf{u}_k^{t+1} = \mathbf{u}_{BT} + \mathbf{u}_{BC,k}\tag{1.3.9}$$

$$= \nabla \times (\hat{\mathbf{k}} \psi_{BT}) + \mathbf{u}_{BC,k},\tag{1.3.10}$$

où $\mathbf{u}_{BC} = \tilde{\mathbf{u}}_{BC}$ comme $\nabla \phi_s$ est une composante barotrope.

1.4 Conditions frontières

1.4.1 Conditions frontière sur les courants (No normal flow)

Aux murs, nous appliquons la condition *no normal flow* (ou la condition d'imperméabilité). Cette condition de type Dirichlet est caractérisée par un courant normal nul aux frontières. Mathématiquement, la condition se traduit par

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (1.4.1)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur normal à la frontière. Numériquement, on peut énoncer que sur une grille cartésienne la condition *no normal flow* symbolise

$$(\text{Front. verticales}) \quad u[1, :] = u[nx, :] = 0, \quad (1.4.2a)$$

$$(\text{Front. horizontales}) \quad v[:, 1] = v[:, ny] = 0. \quad (1.4.2b)$$

Avec nos points fantômes, on peut étendre les extrémités des frontières et affirmer que ces derniers sont aussi reliés par les relations

$$(\text{Courant } u) \quad u[0, :] = u[1, :] \quad \text{et} \quad u[nx + 1, :] = u[:, ny], \quad (1.4.3a)$$

$$(\text{Courant } v) \quad v[:, 0] = v[:, 1] \quad \text{et} \quad v[:, ny + 1] = v[nx, :]. \quad (1.4.3b)$$

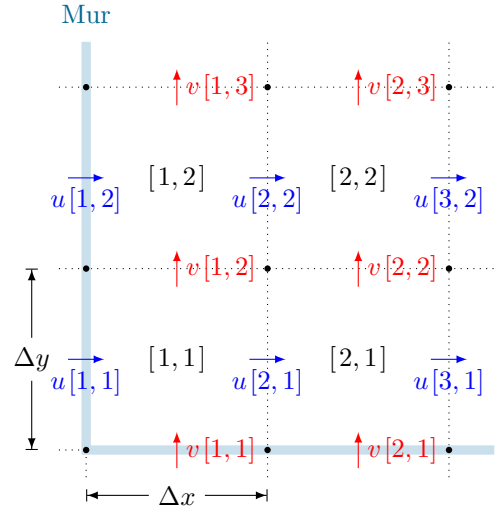


FIGURE 1.2 – Représentation de la grille numérique utilisée pour le modèle en eau peu profonde (type *Arakawa-C*)

1.4.2 Conditions frontières sur la dérivée première (Free slip condition)

La seconde condition est la *free slip condition* (ou la condition de glissement libre). La *free slip condition* tient à l'hypothèse que la couche limite est si petite qu'on peut essentiellement l'ignorer, ce qui est souvent le cas pour l'étude des fluides à grande échelle. Concrètement, il n'y a **pas de contrainte de cisaillement au mur**, de sorte que

$$\left(\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{\{xi,xf\}} = 0, \quad \text{et} \quad \left(\tau_y = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{\{yi,yf\}} = 0. \quad (1.4.4)$$

où μ est la viscosité (TAN 2018). Ainsi, l'expression 1.4.4 force la condition frontière sur la dérivée première à satisfaire

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\{xa,xf\}} = 0 \quad \forall y, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\{yi,yf\}} = 0 \quad \forall x.} \quad (1.4.5)$$

Ce qui se traduit concrètement par

$$(\text{Courant } u) \quad u[:, 0] = u[:, 1] \quad \text{et} \quad u[:, ny + 1] = u[:, ny], \quad (1.4.6a)$$

$$(\text{Courant } v) \quad v[0, :] = v[1, :] \quad \text{et} \quad v[nx + 1, :] = v[nx, :]. \quad (1.4.6b)$$

1.4.3 Condition sur les laplaciens et la fonction de courant

Au murs, on retrouve les quantités $\nabla^2 \mathbf{u}$, $\nabla^2 \mathbf{v}$, ζ et ψ . Pour se simplifier la tâche et faire comme dans l'article de (DUHAUT et D. N. STRAUB 2006), on applique

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{v} = \psi = \zeta = 0 \Big|_{\text{au mur}}. \quad (1.4.7)$$

Chapitre 2

Aperçu théorique de l'ajout des vagues au modèle en eau peu profonde

2.1 La dérive de Stokes selon Suzuki et Fox-Kemper

***N.B.** Comme dans la notation de K. VALLIS (2006), le vecteur $\mathbf{v} = (u, v, w)$ dénote le courant d'un écoulement 3D, tandis que le vecteur $\mathbf{u} = (u, v)$ est en deux dimensions.

On peut définir une dérive de Stokes (\mathbf{v}_S) lorsqu'il y a un fort rapport suffisant d'échelle en dimension et en temps entre les vagues et la circulation. Comme l'expriment SUZUKI et FOX-KEMPER (voir 2016, pour un résumé),

« For these equations to be valid, there must be a separation of horizontal and temporal scales between the waves and the circulation, and the steepness of the waves must be limited [McWilliams et al., 2004]. In the coastal zone, strong variations of currents and surf zones may violate these limitations, but in open water they are more easily satisfied. »

ce qui nous permet de *filter* la dynamique des vagues pour étudier la dérive de Stokes comme une propriété émergente de l'effet des vagues.

SUZUKI et FOX-KEMPER (2016) caractérisent la dérive de Stokes (\mathbf{v}_S) comme un courant lagrangien (*wave-filtered Lagrangian velocity*). Dans le langage courant, un **quantité lagrangienne** se fait advecter (p.e. un traceur lagrangien). Dans le cadre de l'article, on parle plus d'un **courant lagrangien** (\mathbf{v}_L) comme un courant qui advecte à l'intérieur des équations du mouvement 2.1.2. Le courant lagrangien est défini comme

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v} + \mathbf{v}_S. \quad (2.1.1)$$

***N.B.** Autrement dit, les vagues se font advecter, mais la dérive de Stokes non. Par contre, elle participe à advecter le courant \mathbf{v} , c'est pourquoi elle est aussi comptée comme une force qui agit avec Coriolis, aussi.

2.1.1 Les équations du mouvement WAB

SUZUKI et FOX-KEMPER (2016) divisent l'influence de la dérive de Stokes en 3 effets notoires afin de formuler les équations Boussinesq moyennées sur la période des vagues (*wave-averaged Boussinesq equations*) d'où l'acronyme WAB. Le système d'équations Boussinesq avec vagues le plus fondamental (autrement dit, le plus clair) est celui illustré à l'équation (5) du même article, soit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v}_L \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{Advection lagrangienne}} = \underbrace{-\mathbf{f} \times \mathbf{v}_L}_{\text{Force Cori. lagrangienne}} + \mathbf{b} + \mathbf{D} - \underbrace{\nabla p - u_L^j \nabla u_S^j}_{\text{Cisaillement de Stokes}}, \quad (2.1.2)$$

où les indices « j » dénotent la sommation d'Einstein. Ce système d'équation permet de diviser la dynamique en trois comportements. Comme mentionné par SUZUKI et FOX-KEMPER :

- ⇒ **L'advection lagrangienne** (*lagrangian advection*) transfert de l'énergie entre le courant moyen et la turbulence.
- ⇒ **La force de Coriolis lagrangienne** et la **force de cisaillement de Stokes** (*Stokes shear force*) transfèrent plutôt de l'énergie des vagues vers la circulation sous-jacente ou la turbulence.

Il est possible de ré-écrire le système d'équations 2.1.2 dans une notation plus propice à développer les équations en eau peu profonde (Voir SUZUKI et FOX-KEMPER 2016, équation 1), soit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}_L}_{\text{Wave influenced vertex force}} + \underbrace{f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_L}_{\text{Force de Stokes-Cori.}} = \mathbf{b} + \mathbf{D} - \nabla \left(p + \underbrace{\frac{1}{2} |\mathbf{v}_L|^2}_{\text{Modif. pression}} \right). \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Connecter les équations WAB avec le modèle en eau peu profonde

Le modèle en **eau peu profonde** est caractérisé par deux approximations :

- ⇒ Dans une couche, la densité volumique de l'eau est constante,

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_o. \quad (2.1.4)$$

- ⇒ On assume que les courants verticaux sont très faibles en comparaison des courant horizontaux,

$$w \ll (u, v) \implies \left(\frac{dw}{dt} \right), w^2 \longrightarrow 0. \quad (2.1.5)$$

L'équation du courant vertical est réduite à l'expression de la pression hydrostatique (2.1.6) – qu'on intègre verticalement pour obtenir la pression dans la première couche, soit

$$b = \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_o g \implies \int_z^{\eta_1=0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_o g \right) dz \implies p(x, y, z) = \rho_o g z + p_s(x, y) \quad (2.1.6)$$

où la surface fixe (*rigid lid*), nous permet d'imposer la pression de surface $p_s(x, y) \forall (x, y)$ comme constante d'intégration en z puisque la surface fixe impose $z = \eta_1 = 0 \forall (x, y)$. Dans notre couche de surface, le gradient de pression est donc décomposé de manière à obtenir,

$$\nabla p = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right]}_{\nabla_h} p_s + \rho_o g \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.1.7)$$

*N.B. Dans un modèle à plusieurs couches, l'intégration en 2.1.6 donnerait plutôt l'expression générale

$$p_k(x, y, z) = p_s(x, y) + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i g h_i \right) + g \rho_k \tilde{z} \quad \text{où} \quad \tilde{z} \equiv z - \left(\sum_i^{k-1} h_i \right). \quad (2.1.8)$$

et le gradient de pression se convertirait en

$$\nabla p = \underbrace{\left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right]}_{\nabla_h} \left(p_s + g \sum_i^{k-1} \rho_i h_i(x, y) \right) + \rho_k g \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.1.9)$$

où l'indice k dénote la couche en question.

L'expression décrivant l'écoulement horizontal du modèle en eau peu profonde est ainsi formulée par

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{(f + \zeta) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}}_{\text{Craik-Leibovich}} + \underbrace{\zeta \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_S + f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_S}_{\text{Stokes-Coriolis}} = -\nabla B_S + \mathbf{D} + \underbrace{\frac{\tau_o}{\rho H}}_{\text{Modulation du vent}}, \quad (2.1.10)$$

où la nouvelle fonction de Bernoulli prenant compte de la dérive de Stokes (B_S) est exprimée par

$$B_S = B + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{U}_S/H_k) + (\mathbf{U}_S^2/H_S^2)/2 + \phi_s, \quad (2.1.11)$$

où \mathbf{U}_S est le transport de Stokes fournit par le modèle de vagues et $\phi_s \equiv p_s/\rho_o$. L'introduction de $\boldsymbol{\tau}_o$ dans l'équation 2.1.10 est confirmée par BREIVIK et al. (2015), mais nous y reviendrons à la section 2.2.

À plusieurs couches, les équations horizontales du modèle en eau peu profonde sont exprimées par

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (f + \zeta_k) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_k + \underbrace{\delta(k, 1) \cdot (f + \zeta_1) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}_S}_{\text{Stokes-Coriolis et Craik-Leibovich}} = -\nabla B_{S,k} + \underbrace{\mathbf{D}_k + \delta(k, 1) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_o}{\rho_k H_k} \right)}_{\text{Modulation du vent par vagues}}, \quad (2.1.12)$$

ce qui laisse apparaître deux termes importants, soient Stokes-Coriolis et Craik-Leibovich. D'autres termes associés à la dérive de Stokes pourraient être implémentés (voir WU, BREIVIK et RUTGERSSON (2019) par exemple) si l'on considère aussi la vorticité associ e   la dérive de Stokes dans l equation 2.1.12, mais  a ne fera pas partie de notre étude. La fonction de Bernoulli serait exprim e par

$$B_{S,k} = B_k + \delta(k, 1) \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_S^2/2), \quad (2.1.13)$$

$$B_k = p_k + \mathbf{u}_k^2/2. \quad (2.1.14)$$

2.1.3 Conservation de la masse

On peut obtenir l equation de conservation de la masse dans chaque couche en intégrant l equation d'incompressibilité. Rapidement,

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ \triangleright & \int_{z_{bot}}^{z_{top}} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \right\} dz, \\ \triangleright & \underbrace{w(z_{top}) - w(z_{bot})}_{\partial h_k / \partial t} + \int_{z_{bot}}^{z_{top}} (\nabla \cdot \mathbf{u}_k) = 0, \\ \triangleright & \frac{\partial h_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{z_{bot}}^{z_{top}} \mathbf{u}_k \right) = 0, \\ \triangleright & \boxed{\frac{\partial h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (h_k \mathbf{u}_k) = 0}, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

   z_{top} et z_{bot} décrivent respectivement le haut et le bas de la couche d'eau en question.

***N.B.** L'expression

$$\int_{z_{bot}}^{z_{top}} (\nabla \cdot \mathbf{u}_k) = \nabla \cdot \left(\int_{z_{bot}}^{z_{top}} \mathbf{u}_k \right) = \nabla \cdot (h_k \mathbf{u}_k), \quad (2.1.16)$$

est valide pour deux raison : les variables z et x, y sont indépendantes et le courant est homogène dans chaque couches comme approximation dans le modèle en eau peu profonde.

L'article de WU, BREIVIK et RUTGERSSON (2019) est assez explicite sur l'addition du transport de Stokes   l'intérieur de l equation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = \nabla \cdot (h_k \mathbf{u}_k) + \underbrace{\delta(k, 1) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{U}_S)}_{\text{Transport de Stokes}}. \quad (2.1.17)$$

2.2 Contrainte de cisaillement du vent à la surface

Comme illustré dans l'article de BREIVIK et al. (2015), la contrainte de cisaillement du vent à la surface est modifié de 3 manières :

- ⇒ La rugosité de la surface est prise en compte à l'aide concept *friction velocity*, ($\tau_{fv} = \rho_a |\mathbf{u}_*| \mathbf{u}_*$),
- ⇒ Le champ de vague vient prendre du momentum au vent (τ_{IN}),
- ⇒ Le champ de vagues libère une partie de son énergie à la circulation sous-jacente (τ_{DS}).

On passe donc d'un stress atmosphérique fixe à un stress dépendant du champ de vagues, de sorte que l'on passe de

$$\tau_a = \rho_a c_D |\mathbf{u}_{10}| \mathbf{u}_{10} \quad \Rightarrow \quad \tau_{oc} = \tau_{fv} - (\tau_{IN} - \tau_{DS}). \quad (2.2.1)$$

À l'aide d'une *switch* de couplage δ_{COU} , la contrainte de cisaillement à la surface est donc exprimée par

$$\tau = \underbrace{\delta_{COU} \cdot \tau_{oc}}_{\text{Couplé}} + \underbrace{(1 - \delta_{COU}) \cdot \tau_a}_{\text{Non-couplé}}. \quad (2.2.2)$$

*N.B. De plus amples informations sur le stress et le vent se retrouvent aux sections 4.1 et 4.2.

2.3 Champs échangés par les deux modèles

Le modèle *shallow water* envoie une seule quantité au modèle de vagues, soit

- ⇒ Le **courant de la première couche** (u_1, v_1).

Le modèle Wavewatch III envoie 4 quantités au modèle *shallow water*, soit

- ⇒ Le **transport de Stokes** \mathbf{U}_S ;
- ⇒ La **friction velocity** (vitesse de friction) \mathbf{u}_* ;
- ⇒ Le **momentum absorbé par le champ de vagues** τ_{IN} ;
- ⇒ Le **momentum dispersé par le champ de vagues** à la circulation sous-jacente τ_{IN} ;

Wavewatch pourrait aussi nous offrir plusieurs quantités intéressantes pour le couplage, j'en ai compilé une bonne partie dans le tableau 2.1 avec les informations retrouvées dans la documentation de Wavewatch, son code et la littérature adjacente. Comme il y a eu beaucoup d'incertitude quand à la nature des quantités, mentionnons que tous les τ fournis par Wavewatch III sont divisés par ρ_{Atm} . C'est mentionné explicitement dans la sous-routine du modèle *w3src3md.ftn*, mais pas dans la documentation.

TABLE 2.1 – Tableau d'investigation récapitulatif des outputs de Wavewatch III.

Documentation	de WW3	(Voir <i>ww3 shel.inp</i>)	Code de WW3		Littérature
Nom de code	Output tag	Description	Variable	Unités	Symbole
UST	UST	<i>Friction velocity</i>	UST	ms^{-1}	\mathbf{u}_*
CHARN	CHA	<i>Charnok parameter</i>	CHARN	–	α
CGE	CGE	<i>Energy flux</i>	CGE	Wm^{-2}	$C_g E$
PHIAW	FAW	<i>Air-sea energy flux</i>	PHIAW	Wm^{-2}	?
TAUWI[X,Y]	TAW	<i>Net wave-supported stress</i>	TAUWIX/Y	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	τ_w ou τ_{IN}
TAUWN[X,Y]	TWA	<i>Negative part of wave-supported stress</i>	TAUWNX/Y	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	$\tau_w < 0$
TAUO[X,Y]	TWO	<i>Wave to ocean momentum flux</i>	TAUOX/Y	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	τ_{DS}
PHIOC	FOC	<i>Wave to ocean energy flux</i>	PHIOC	Wm^{-2}	?
TUS[X,Y]	TUS	<i>Stokes transport</i>	TUSX/Y	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	\mathbf{U}_S
USS[X,Y]	USS	<i>Surface Stokes drift</i>	USSX/Y	m s^{-1}	\mathbf{u}_S

Chapitre 3

Techniques numériques en lien avec le couplage

3.1 Interpolation géométrique

3.1.1 Du modèle « shallow water » au modèle Wavewatch

Le modèle Wavewatch III roule sur une grille **trois fois plus petite** que celle du modèle *shallow water*, entre autres pour sauver du temps de computation. Donc, lorsqu'on envoie le champ de courant (u_1, v_1) à Wavewatch III, on fait avant tout une moyenne de R^2 points où R est le ratio des deux grilles (3 dans notre cas). R^2 représente aussi la taille du *stencil*.

Mathématiquement, ça se traduit par

$$(u^{i,j}, v^{i,j}) = \sum_{\substack{k=1+(i-1) \times R \\ l=1+(j-1) \times R}}^{i \times R, j \times R} (u_{k,l}, v_{k,l}), \quad (3.1.1)$$

mais ça revient juste à faire la moyenne dans un carré de $R^2 = 3 \times 3$, comme on passe de la grosse grille à la petite grille (comme on peut le voir à la figure 3.1a).

*N.B. L'indice en exposant réfère à la grille de résolution plus faible (donc celle qui sera envoyée à Wavewatch III) et l'indice au pied réfère à la grille à haute résolution, soit celle du modèle *shallow water*.

3.1.2 De Wavewatch au modèle « shallow water »

À l'inverse, lorsqu'on reçoit les champs de Wavewatch III, on utilise un *stencil* de taille R^2 qui fait la moyenne géométrique des points adjacents (comme illustré à la figure 3.1a). Par exemple, pour le modèle *shallow water*, la quantité au point (4,4) $Q^{4,4}$ est calculée à l'aide d'une moyenne pondérée des points de Wavewatch, soit

$$Q_{4,4} = [1 \times Q^{1,1} + 2 \times Q^{1,2} + 2 \times Q^{2,1} + 4 \times Q^{2,2}] / 9 \quad (3.1.2)$$

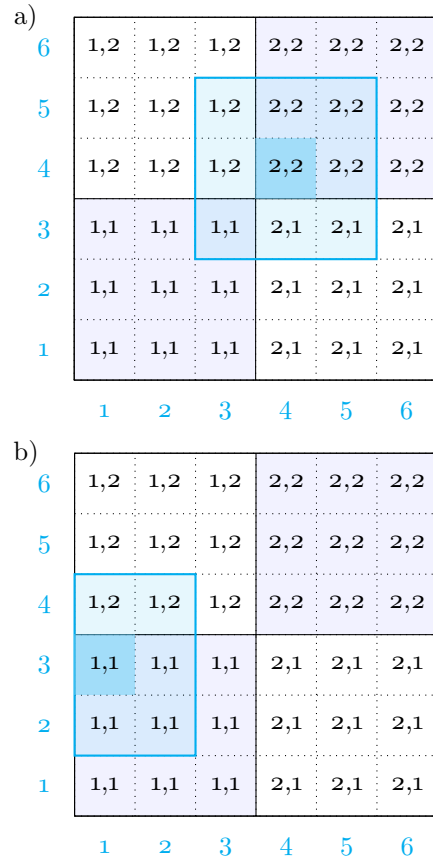


FIGURE 3.1 – Mise en relation des grilles du modèle «shallow water» (haute résolution, indicateurs bleus) et Wavewatch III (basse résolution, indicateurs noirs). En a) et b) « Stencil » utilisé pour réaliser l'interpolation géométrique à ratio R impair.

où le tout est divisé par $R^2 = 9$ (voir figure 3.1a).

À la frontière, on réduit la taille du *stencil* de sorte à s'adapter à la forme du mur (voir figure 3.1b). Par exemple, pour le modèle *shallow water*, le point (1,3) est calculé à l'aide de la moyenne pondérée des points de Wavewatch, soit

$$Q_{1,3} = [2 \times Q^{1,2} + 4 \times Q^{1,1}] / 6 \quad (3.1.3)$$

où le tout est divisé par $2 \times 3 = 6$, soit la taille du *stencil* (voir figure 3.1b).

3.1.3 Interpolation grille C et grille A

Le modèle Wavewatch III est déployé sur une grille A, tandis que le modèle *shallow water* est construit sur une grille de type Arakawa-C, ce qui vient avec son lot de problème.

Une fois l'interpolation géométrique exécutée, il est important de replacer les quantités sur la bonne grille. C'est pourquoi nous interpolons la valeur des champs. Par exemple, avant d'être moyenné puis envoyé à Wavewatch, le courant de surface du modèle *shallow water* u doit être interpolé de sorte à ce que

$$u_{i,j}^A = [u_{i,j}^C + u_{i-1,j}^C] / 2, \quad (3.1.4)$$

où l'exposant A réfère trivialement à la grille de type A et l'indice C réfère à la grille de type C.

On effectue l'étape inverse lorsqu'on reçoit les champs de Wavewatch III.

3.2 Cheminement des étapes de couplage et d'interpolation

Avant de réaliser l'échange des champs par canal MPI, l'ordre des étapes est le suivant :

1. Le modèle *shallow water* interpole les champs de courant de la première couche (u_1, v_1) sur une grille A :

$$(u_1^C, v_1^C) \mapsto (u_1^A, v_1^A), \quad (3.2.1)$$

2. Le modèle *shallow water* fait un moyennage des cases pour atteindre la résolution réduite de Wavewatch III (voir équation 3.1.1).
3. On envoie le courant à faible résolution sur une grille A à Wavewatch III par un canal MPI.
4. On reçoit les quantités de Wavewatch à basse résolution par le canal MPI.
5. On réalise l'interpolation géométrique sur les quantités pour avoir une meilleure résolution (voir équation 3.1.3 et 3.1.4).
6. On fait une interpolation pour passer d'une grille Arakawa-A vers une grille Arakawa-C, de sorte que

$$\left\{ \begin{pmatrix} \tau_{x,IN}^A, \tau_{y,IN}^A \\ u_*^A, v_*^A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau_{x,DS}^A, \tau_{y,DS}^A \\ U_S^A, V_S^A \end{pmatrix} \right\} \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} \tau_{x,IN}^C, \tau_{y,IN}^C \\ u_*^C, v_*^C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau_{x,DS}^C, \tau_{y,DS}^C \\ U_S^C, V_S^C \end{pmatrix} \right\} \quad (3.2.2)$$

et le tour est joué...

Les deux modèles enchaînent ensuite sur leur *timestepping* et leur propre *RHS*.

3.3 Rampe au moment du couplage

Comme le modèle Wavewatch a un *spin up* assez **brutal**, on se permet de mettre une rampe de couplage étalée sur 1 mois (31 jours). D'un côté, ça permet de limiter la réponse du modèle *shallow water* à un changement brusque de régime. De l'autre, ça donne un peu de temps au modèle de vagues pour se stabiliser. Après toutes expériences que j'ai réalisées, je peux dire que le modèle de vagues prend un bon 4 jours avant de se stabiliser complètement

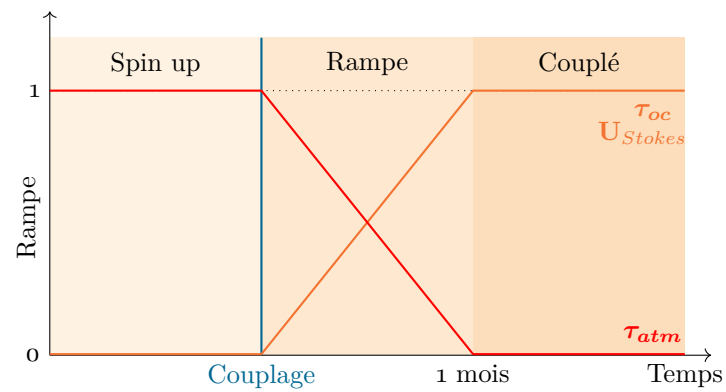


FIGURE 3.2 – Illustration conceptuelle de la rampe pour éviter le spin up du modèle de vagues.

Chapitre 4

Paramètres physiques des équations

4.1 Stress du vent appliqué à la surface des deux modèles

Stress du vent appliqué à la surface est donné par

$$\tau_{atm} = \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\tau_0}{2} \right) \cdot \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot y}{L_y} \right) \right)}_{\text{Variation y}} \cdot \underbrace{(1 + S \cdot \sin(f \cdot t))}_{\text{Variation temps}}, \quad (4.1.1)$$

où f est une fréquence en $[\text{rad s}^{-1}]$ – soit la fréquence de Coriolis dans notre cas.

*N.B. L'équation précédente est observable dans la sous-routine *model/subs/rhs.fgo*.

Variable	Valeur	Unités	Description
τ_o	0.1	N m^{-2}	Valeur maximale du stress atmosphérique
y	$[0, L_x]$	m	Déplacement latitudinal
L_y	2×10^6	m	Longueur du domaine
f	7×10^{-7}	rads^{-1}	Fréquence de Coriolis
t	–	s	Temps

4.2 Vent donné en input de Wavewatch III

Comme données entrantes, Wavewatch ne prend pas le stress atmosphérique τ_{atm} , car il le calcule à l'interne. Il prend plutôt le vecteur vent à $z = 10$ m de la surface de l'eau (\mathbf{u}_{10}). En premier lieu, pour transformer notre contrainte de cisaillement 4.1.1, on connaît la relation

$$\tau_a = \rho_a c_D |\mathbf{u}_{10}| \mathbf{u}_{10}, \quad (4.2.1)$$

où ρ_a est la densité de l'air et c_D est le coefficient de trainée au dessus de l'océan. Si l'on assume la valeur de la contrainte de cisaillement (0.1 N m^{-2} dans notre cas), alors on peut facilement trouver le vent à 10m d'altitude \mathbf{u}_{10} .

On commence par obtenir la valeur de c_D à l'aide de la relation de Charnok (CHARNOCK 1955) aussi tirée de GILL (1982, p.30),

$$c_D = \left[\frac{\kappa}{\ln(z/z_0)} \right]_{z=10m}^2 \quad \text{où} \quad z_0 = \frac{\gamma_{Ch} \tau_a}{\rho_a g} = \frac{\gamma_{Ch} c_D |u_{10}|^2}{g}. \quad (4.2.2)$$

Puis enfin, on retrouve \mathbf{u}_{10} à l'aide de ρ_a et c_D ,

$$u_{10} = \sqrt{\frac{\tau_a}{\rho_a c_D}}. \quad (4.2.3)$$

***N.B.** Toutes ces équations se retrouvent dans la fonction python *build winds.py* qui construit un fichier de type NetCDF déchiffrable par *Wavewatch III*.

Variable	Valeur	Unités	Description
c_D	À déterminer	–	Coefficient de traînée
κ	0.41	–	Constante de Von Karman
z	10	m	Hauteur de la mesure du vent (Typiquement 10m)
z_o	À déterminer	m	Rugosité de l'interface (<i>roughness lenght</i>)
γ_{Ch}	0.0185	–	Valeur minimale du paramètre de Charnock
τ_a	[0, 0.1]	N m ⁻²	Stress atmosphérique
g	9.81	m s ⁻²	Accélération gravitationnelle
ρ_a	1.225	Kg m ⁻³	Densité atmosphérique

4.3 Le paramètre de Charnock (désambiguation)

Comme illustré dans le tableau précédent, nous avons utilisé 0.0185 comme valeur du paramètre de Charnock. Le paramètre de Charnock est une quantité adimensionnelle qui dépend de l'état du champ de vagues et qui est curieusement corrélé à l'âge du champ de vagues (JANSSEN 2004, p.60). On le calcule à l'aide de la relation

$$\alpha_c = \frac{z_0 g}{u_*^2}. \quad (4.3.1)$$

Comme mentionné dans JANSSEN (2004), sa valeur est très ambiguë – le modèle de vagues de l'ECWAM utilise une valeur de 0.0185 mais l'American Meteorological Society propose plutôt une valeur de 0.015.

Donc, si l'on ne connaît pas vraiment l'état des vagues, on ne peut pas vraiment estimer le coefficient de traînée de l'équation 4.2.2 sans le coefficient de Charnock. Par contre, le site du modèle ECWAM mentionne ceci :

This parameter accounts for increased aerodynamic roughness as wave heights grow due to increasing surface stress. It depends on the wind speed, wave age and other aspects of the sea state and is used to calculate how much the waves slow down the wind.

When the atmospheric model is run without the ocean model, this parameter has a constant value of 0.018. When the atmospheric model is coupled to the ocean model, this parameter is calculated by the ECMWF Wave Model.

et l'article de JANSSEN (2004, p.163) mentionne

The constant $\hat{\alpha}$ was chosen in such a way that for old windsea the Charnock parameter [α_{ch}] has the value of 0.0185 in agreement with observations collected by Wu (1982) on the drag over sea waves.

Donc, c'est pourquoi j'ai pris la valeur de 0.0185 pour calculer le vent à 10 mètre de la surface, à l'aide des relations de la sous-section 4.2.

4.4 Ce que Wavewatch III voit en input

Comme la *switch* ST3 est activée, le modèle utilise le module *wavewatch/ftn/w3src3md.ftn* et donc il calcule la *friction velocity* à l'aide de la sous-routine *CALC USTAR(WINDSPEED,TAUW,USTAR,Zo,CHARN)*. Plus précisément,

1. Il calcule la partie du **transfert de momentum vers les vagues** τ_w (*wave supported stress*) à l'aide de **tables** (voir sous-routine *w3sin3* dans *wavewatch/ftn/w3src3md.ftn*).
2. Il **se sert de nouveau de tables** pour trouver la **vitesse de friction** u_* (*friction velocity*) en fonction du transfert de momentum aux vagues τ_w ou τ_{IN} ;

3. Il calcule le **coefficient de trainée** c_D à l'aide de la relation

$$c_d = \left(\frac{u_*}{u_{10}} \right)^2; \quad (4.4.1)$$

4. Il calcule la **rugosité** z_0 (*roughness lenght*) à l'aide de

$$z_0 = 10 \exp(-\kappa \sqrt{c_D}); \quad (4.4.2)$$

5. Il trouve le **paramètre de Charnok** α_{ch} vâ l'aide de

$$\alpha_{ch} = \frac{z_0 g}{u_*^2}. \quad (4.4.3)$$

4.5 Tableau et résumé des quantités physiques importantes

J'ai réunis dans le tableau suivant tous les paramètres physiques intéressants pour recréer les expériences.

	Paramètres	Symbole	Valeur	Unités
Modèles en eau peu profonde	Taille du domaine	$L_x = L_y$	2000	km
	Nombre de points	$n_x = n_y$	513	–
	Pas de temps	Δt	300	s
	Paramètre de Coriolis	f	7×10^{-5}	rad s ⁻¹
	Amplitude du vent	τ_{atm}	0.1	N m ⁻²
	Coef. d'hyperviscosité	A_h	$dx^4 \times 10^{-5}$	s ⁻¹
	Coef. de frottement au fond	r_{drag}	10^{-7}	s ⁻¹
	Épaisseur de la couche en surface	H_1	482	m
	Épaisseur de la seconde couche	H_2	1042	m
	Épaisseur de la couche au fond	H_3	2475	m
	Densité de l'eau (première couche)	ρ_1	1026.42	kg m ⁻³
	Densité de l'eau (seconde couche)	ρ_2	1027.27	kg m ⁻³
	Densité de l'eau (troisième couche)	ρ_3	1027.87	kg m ⁻³
	Gravité réduite (seconde couche)	g_2'	8.01×10^{-3}	ms ⁻²
	Gravité réduite (troisième couche)	g_3'	5.80×10^{-3}	ms ⁻²
Modèles Wavewatch III	Taille du domaine (incluant terre)	$L_y = L_y$	~ 2023.39	km
	Nombre de points de grille	$n_x = n_y$	173	–
	Taille du domaine couplé	$L_y^* = L_x^*$	2000	km
	Nombre de points de grilles couplés	$n_x^* = n_y^*$	171	–
	Pas de temps global maximum	Δt_g	300	s
	Pas de temps max. (Cond. CFL x,y)	$\Delta t_{CFL}^{x,y}$	150	s
	Pas de temps max. (Cond. CFL x,y)	$\Delta t_{CFL}^{k,\theta}$	150	s
	Pas de temps min. des termes source	Δt_{Src}	50	s
	Coef. de réflexion au mur	R_o	0.1	–
	Densité de l'air	ρ_a	1.225	Kg m ⁻³
Vent	Stress maximum du vent	τ_o	0.1	N m ⁻¹
	Écart de variation (<i>Step</i>)	S	0.05	–
	Accélération gravitationnelle	g	9.81	m s ⁻²
	Constante de Von Karmann	κ	0.41	–
	Coefficient de Charnok	γ_{Ch}	0.0185	–
	Densité de l'air	ρ_a	1.225	kg m ⁻³

4.6 Switches du modèles Wavewatch III

Le modèle Wavewatch III est modulable à l'aide de *switches*, voici celles qui ont été utilisées dans le cadre de cette recherche.

Nom	Description
F90	FORTTRAN-90 style date and time capturing and program abort.
NOGRB	No GRIB package included.
NOPA	Compilation as a stand-alone program.
LRB4	4 bytes words in direct acces files.
NC4	Use NetCDF4.
DIST	Distributed memory model.
MPI	Use MPI.
PR3	Propagation scheme : Higher-order schemes with Tolman (2002a) averaging technique.
UQ	Third-order (UQ) propagation scheme.
FLX0	Flux computation : No routine used ; flux computation included in source terms.
LN1	Linear input : Cavaleri and Malanotte-Rizzoli with filter.
ST3	Input and dissipation : WAM4 and variants source term package.
NL1	Non-linear interactions : Discrete interaction approximation (DIA).
BT0	Bottom friction : No bottom friction used.
DB0	No depth-induced breaking used.
TR0	No triad interactions used.
BS0	No bottom scattering used.
IS0	No-damping by sea-ice.
REF1	Enables reflection of shorelines and icebergs.
XX0	No supplemental source term used.
WNT1	Wind input interpolation (time) : Linear interpolation.
WNX0	Wind input interpolation (space) : No interpolation.
CRT0	Current input interpolation (time) : No interpolation.
CRX0	Current input interpolation (time) : No interpolation.
TRKNC	Activates the NetCDF API in the wave system tracking post-processing program.
O0	Output of namelists in grid preprocessor.
o1	Output of boundary points in grid preprocessor.
o2	Output of the grid point status map in grid preprocessor.

Chapitre 5

Faire fonctionner les modèles couplées

Voici les étapes à suivre pour faire rouler les deux modèles sur Oxygen.

5.1 Compilation du modèle *shallow water*

Avant tout, il faut aller dans le répertoire du modèle *shallow water*. Dans le cas qui nous intéresse, le modèle sur Oxygen se trouve au répertoire

```
>>> cd aos/home/celizotte/Desktop/Modele-shallow-water-multicouche/
```

*N.B. À chaque fois qu'on modifie le modèle *shallow water*, il faut le recompiler.

5.1.1 Modifier le fichier « *parameters.fgo* »

Toutes les *switches* et les paramètres à modifier se retrouvent dans le fichier *parameters.fgo*. Si l'on veut que le modèle soit couplé avec Wavewatch, il faut absolument utiliser la *switch* `COU = .true`.

Un exemple de fichier de paramètres pour les modèles couplés est fournit sous le nom de *parameters COU.fgo*. Tandis qu'un version non-couplée est fournit sous le nom de *parameters tmp.fgo*.

5.1.2 Compilation du modèle avec l'exécutable « *compile model* »

Une fois les paramètres modifiés à souhait, il faut compiler le modèle *shallow water* à l'aide de l'exécutable *compile model*. Lorsque ce dernier sera exécuté, il suffit de rentrer la valeur « 1 », pour signifier la compilation avec Oxygen.

```
>>> ./compile_model
!! Enter machine: 1) Oxygen (McGill computer); computer 2) Bepsi (personal computer); 3) Beluga
(Compute Canada)
>>> 1
!! Using setting for Oxygen with fishpack stored at ${fishpack_path} and lapack at ${lapack_path}
!! Parameters file copied from ${model_path} to ${case}
!! Compilation of $case/exec completed on the computer Oxygen.
```

Une fois compilé, l'exécutable du modèle « *exec* » se déplace automatiquement dans le dossier *newcase*, ainsi qu'un copie des paramètres utilisées pour la compilation.

5.2 Compilation du modèle Wavewatch III

La compilation du modèle *Wavewatch III* n'est nécessaire qu'une seule fois – à moins que vous modifiez le fichier de *switches*, ce qui arrive rarement.

5.2.1 Compilation du modèle avec l'exécutable « make oxygen »

5.3 Création des inputs et assimilation par Wavewatch III

5.3.1 Création d'un nouveau cas

5.4 Rouler les modèles en MPI

Bibliographie

- CHARNOCK, H (1955). « Wind stress on a water surface ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 81.350, p. 639-640.
- GILL, Adrian E (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press : Elsevier.
- JANSSEN, Peter (2004). *The interaction of ocean waves and wind*. Cambridge University Press.
- DUHAUT, Thomas HA et David N STRAUB (2006). « Wind stress dependence on ocean surface velocity: Implications for mechanical energy input to ocean circulation ». In : *Journal of physical oceanography* 36.2, p. 202-211.
- K. VALLIS, Goeffrey (2006). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamic : Fundamentals and Large-scale Circulation*. Second Edition. The Edinburg Building, Cambridge CB2 2RU, UK : Cambridge University Press.
- BREIVIK, Øyvind et al. (2015). « Surface wave effects in the NEMO ocean model: Forced and coupled experiments ». In : *Journal of Geophysical Research: Oceans* 120.4, p. 2973-2992.
- SUZUKI, Nobuhiro et Baylor FOX-KEMPER (2016). « Understanding Stokes forces in the wave-averaged equations ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 121.5, p. 3579-3596.
- TAN, Hua (2018). « Applying the free-slip boundary condition with an adaptive Cartesian cut-cell method for complex geometries ». In : *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 74.4, p. 661-684. URL : <https://par.nsf.gov/servlets/purl/10108399>.
- WU, Lichuan, Øyvind BREIVIK et Anna RUTGERSSON (2019). « Ocean-Wave-Atmosphere Interaction Processes in a Fully Coupled Modeling System ». In : *Journal of Advances in Modeling Earth Systems* 11.11, p. 3852-3874.
- CHEN, Yanxu, David STRAUB et Louis-Philippe NADEAU (2021). « Interaction of nonlinear Ekman pumping, near-inertial oscillations and geostrophic turbulence in an idealized coupled model ». In : *Journal of Physical Oceanography*.