Contrat Été 2023

CARNET DE BORD, UNIVERSITÉ MCGILL

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

03/06/2023

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR
Police d'écriture : **CMU Serif Roman**

Table des matières

1 Erreurs rencontrées

1.1 Ancienne méthode : Calculer la fonction de courant barotrope directement

Concrétement, l'ancienne méthode (voir rapport précédent) consistait à trouver le rotationnel de $\mathbf{u}_{BT}$, soit $\zeta_{BT} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u}_{BT})$ pour solutionner l'équation de Poisson,

$$\nabla^2(\psi_{BT}) = \| \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}_{BT} \|. \tag{1.1}$$

Une foit ψ_{BT} en main, il est trivial (on s'en rapelle) de retrouver $\mathbf{u}_{BT}$ à l'aide de la relation

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\nabla}\psi = -\Big(\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{k}}\psi\Big). \tag{1.2}$$

Malheureusement, certains problèmes émergeaient de l'application de cette méthode.

1.2 Fluctuation relative de la fonction de courant barotrope

On définit la fluctuation relative de la fonction de courant barotrope $\delta\psi_{BT}$ de sorte que cette quantité satisfait la relation

$$\psi_{BT}^{t+\delta t} = \psi_{BT}^{t} + \delta\psi_{BT} + Er\,(\psi_{BT}), \tag{1.3}$$

où $Er\,(\psi_{BT})$ est une fonction pseudo-aléatoirement linéaire qui représente l'erreur numérique associée à une solution. Cette dernière est proportionnelle à la solution de l'équation 2.2, de sorte que

$$Er\,(\psi_{BT}) \propto \psi_{BT}. \tag{1.4}$$

Alors, si l'on solve l'équation 2.2 avec une précision de 5 chiffres par exemple, l'erreur par rapport à la fluctuation relative de la fonction de courant barotrope va se faire sentir sur les résultats. Essentiellement, l'erreur numérique donne naissance à l'inégalité suivante

$$\text{Erreur relative} = \left|\frac{Er\,(\psi_{BT})}{\psi_{BT}}\right| \leq \left|\frac{Er\,(\psi_{BT})}{\delta\psi_{BT}}\right| \qquad \text{car (généralement)} \qquad |\psi_{BT}| \geq |\delta\psi_{BT}|. \tag{1.5}$$

Donc, si l'on veut diminuer l'échelle de l'erreur numérique relative, on doit absolument solutionner $\delta\psi_{BT}$ plutôt que ψ_{BT} sinon on perd une résolution importante. Encore une fois, on y faisait référence dans le rapport précédent. Si l'on faisait ça, nous aurions plutôt

$$\text{Erreur relative} = \underbrace{\left\{ \left|\frac{Er\,(\delta\psi_{BT})}{\psi_{BT}}\right| \leq \left|\frac{Er\,(\delta\psi_{BT})}{\delta\psi_{BT}}\right| \right\}}_{\text{Solution } \delta\psi_{BT}} << \underbrace{\left\{ \left|\frac{Er\,(\psi_{BT})}{\psi_{BT}}\right| \leq \left|\frac{Er\,(\psi_{BT})}{\delta\psi_{BT}}\right| \right\}}_{\text{Solution } \psi_{BT}}. \tag{1.6}$$

Nous aurions donc bien des avantages à changer de méthode (on va le faire).

1.3 Pas de temps

Techniquement, on peut argumenter que nous calculions 2 fois le pas de temps, accidentellement. En différences finies, les équations du mouvement ont la forme

$$\mathbf{u}^{t+\delta t} = \underbrace{\mathbf{u}^{t} + RHS \cdot \Delta t}_{\tilde{u}} \underbrace{-\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \Delta t.}_{\text{Correction P}} \tag{1.7}$$

Par définition, on sait que

$$\nabla^2\psi^{t+\delta t} = \zeta^{t+\delta t}, \tag{1.8}$$

et on décompose en partie barotrope et barocline, de sorte que

$$\nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} + \psi_{BC}^{t+\delta t} = \zeta_{BT}^{t+\delta t} + \zeta_{BC}^{t+\delta t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} = \zeta_{BT}^{t+\delta t}, \qquad \text{et} \qquad \nabla^2\psi_{BC}^{t+\delta t} = \zeta_{BC}^{t+\delta t}. \tag{1.9}$$

Comme présenté à l'équation 1.7, on peut décomposer le RHS de la dernière équation selon

$$\nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} = \tilde{\zeta}_{BT} - \cancelto{0}{\boldsymbol{\nabla}\times(\Delta t\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi)}. \tag{1.10}$$

On solutionne l'équation de Poisson, on trouve $\psi^{t+\delta t}$, puis on retrouve le courant à l'aide de l'équation (à se souvenir),

$$\mathbf{u}_{BT} = \hat{\mathbf{k}}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi_{BT}) = -\boldsymbol{\nabla}\times\left(\psi_{BT}\hat{\mathbf{k}}\right). \tag{1.11}$$

Finalement, on additionne les parties baroclinique et barotropes pour obtenir

$$\mathbf{u}^{t+\delta t} = \mathbf{u}_{BT}^{t+\delta t} + \mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t}. \tag{1.12}$$

Donc au final, s'il y a une erreur, elle est à l'équation 1.12. Concrétement, on additionne deux parties qui constituent une même chose. Par contre, on obtient ces quantités depuis une quantités qui est entre deux pas de temps, à un temps peu définit. Par exemple, on assume que

$$\mathbf{u}^{t+\delta t} = \tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t. \tag{1.13}$$

Puis, on décompose en deux parties à l'aide de 1.12, soit barotrope et baroclines,

$$\mathbf{u}_{BT}^{t+\delta t} = \overline{\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t}^{z} = \tilde{\mathbf{u}}_{BT} - \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t, \tag{1.14a}$$

$$\mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t} = \mathbf{u}^{t+\delta t} - \mathbf{u}_{BT}^{t+\delta t}. \tag{1.14b}$$

où $\overline{\alpha}^z$ dénote la moyenne verticale d'une quantité α. On développe

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t} &= \mathbf{u}^{t+\delta t} - \tilde{\mathbf{u}}_{BT} + \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t,\\ &= \tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t\ - \tilde{\mathbf{u}}_{BT} + \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t,\\ &= \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_{BT}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Cette dernière quantité est la définition de $\tilde{\mathbf{u}}_{BC}$, donc on devrait être convaincu que

$$\boxed{\mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t} = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_{BT} = \tilde{\mathbf{u}}_{BC}.} \tag{1.16}$$

2 Nouvelle méthode proposée par David

Comme mentionné précédemment, il est possible de seulement calculer la correction à ψ_{BT} plutôt que ψ_{BT} pour minimiser l'erreur relative sur la solution. On divise notre *RHS* en deux parties, soit barotropes et baroclines,

$$R\vec{H}S = R\vec{H}S_{BT} + R\vec{H}S_{BC}. \tag{2.1}$$

Nous savons que les équations

$$\nabla^2\psi^{t+\delta t} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}^{t+\delta t} \qquad \text{et} \qquad \nabla^2\psi^{t} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}^{t} \tag{2.2}$$

sont toujours valides. On se souvient aussi que les équations du mouvement en différence finie sont données par

$$\mathbf{u}^{t+\delta t} = \mathbf{u}^{t} + R\vec{H}S\cdot\Delta t - \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\Delta t. \tag{2.3}$$

Les parties barocline et barotrope sont respectivement exprimées par

$$\mathbf{u}_{BT}^{t+\delta t} = \mathbf{u}_{BT}^{t} + R\vec{H}S_{BT}\cdot\Delta t - \Delta t\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{2.4a}$$

$$\mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t} = \mathbf{u}_{BC}^{t} + R\vec{H}S_{BC}\cdot\Delta t, \tag{2.4b}$$

étant donné que le gradient de pression est un phénomène barotrope. Pour cette même raison, on peut justement affirmer hors de tout doute que l'équation 2.2 est séparable en partie barotrope et barcocline, soit

$$\nabla^2\psi_{BT}^{t} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}_{BT}^{t} \quad \text{et} \quad \nabla^2\psi_{BT}^{t+\delta t} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}_{BT}^{t+\delta t}, \tag{2.5a}$$

$$\nabla^2\psi_{BC}^{t+\delta t} = \nabla^2\tilde{\psi}_{BC} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t} = \boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\mathbf{u}}_{BC}, \tag{2.5b}$$

car $\tilde{\mathbf{u}}_{BC} = \mathbf{u}_{BC}^{t+\delta t}$. Donc, en développant la partie barotrope, on obtient

$$\nabla^2\big(\psi_{BT}^t + \delta\psi \cdot \Delta t\big) = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{u}_{BT}^t + R\vec{H}S_{BT} \cdot \Delta t - \cancelto{0}{\boldsymbol{\nabla}\phi} \cdot \Delta t\right), \tag{2.6}$$

puis en soustrayant la relation 2.5a à la dernière équation (2.6), on arrive à

$$\nabla^2(\delta\psi) = \boldsymbol{\nabla} \times \left(R\vec{H}S_{BT}\right). \tag{2.7}$$

Finalement, on retrouve la partie barotrope de notre *RHS* à l'aide de la relation

$$\delta\mathbf{u}_{BT} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\nabla}(\delta\psi) = -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\delta\psi\,\hat{\mathbf{k}}\right). \tag{2.8}$$

Pour terminer avec

$$\mathbf{u}^{t+\delta t} = \mathbf{u}^t + \Delta t \cdot \left(R\vec{H}S_{BC} + \delta\mathbf{u}_{BT}\right). \tag{2.9}$$