Contrat Été 2023

CARNET DE BORD, UNIVERSITÉ MCGILL

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

12/05/2023

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR

Table des matières

1 Nouvelle formulation pour le gradient de pression

David nous a éclairé de sa lumière mardi à 21h43 et nous est arrivé avec un solution super simple mais efficace. En premier lieu, on se souvient qu'on définit notre pas de temps *leapfrog* de manière à ce que

$$\boldsymbol{u}^{t+1} = \underbrace{\boldsymbol{u}^{t-1} + (2\Delta t)\cdot \boldsymbol{G}^t}_{\tilde{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{1.1}$$

On peut décomposer notre courant en deux composantes, soit barotrope et baroclines, de sorte à retrouver

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{BT} = \frac{1}{H}\sum_{k}^{n} d_k \tilde{\boldsymbol{u}}_k, \tag{1.2a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{BC} = \tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT}. \tag{1.2b}$$

Puis à l'aide de ce courant barotrope, on peut construire une vorticité barotrope

$$\tilde{\zeta}_{BT} = \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT}]. \tag{1.3}$$

Mais on peut aussi calculer la vorticité de notre futur courant, de sorte à retrouver

$$\begin{aligned}
\zeta_{BT}^{t+1} &= \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\nabla \times \boldsymbol{u}_{BT}^{t+1}\right], \\
\zeta_{BT}^{t+1} &= \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\nabla \times \left(\tilde{\boldsymbol{u}}_{BT} + \boldsymbol{\nabla}\phi\right)\right], \\
\zeta_{BT}^{t+1} &= \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT}] + \cancelto{0}{\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \boldsymbol{\nabla}\phi]}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Comme le rotationnel d'un gradient est toujours nul, on arrive à la conclusion inévitable que

$$\zeta_{BT}^{t+1} = \tilde{\zeta}_{BT}. \tag{1.5}$$

La correspondance entre la vorticité relative est donnée par $\zeta = \nabla^2\psi$, donc on obtient une nouvelle équation de Poisson donnée par

$$\boxed{\nabla^2\psi_{BT} = \hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times \tilde{\boldsymbol{u}}_{BT}] \quad \text{avec C.F. Dirichlet} \quad \psi_{BT}\Big|_{x_0,x_f} = \psi_{BT}\Big|_{y_0,y_f} = 0.} \tag{1.6}$$

Donc en trouvant ψ_{BT}, on trouve aussi $\boldsymbol{u}_{BT}$ à l'aide de la relation avec la fonction de courant,

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.7}$$

Puis finalement, on retrouve

$$\boldsymbol{u}^{t+1} = \boldsymbol{u}_{BT} + \boldsymbol{u}_{BC}, \tag{1.8}$$

où $\boldsymbol{u}_{BC} = \tilde{\boldsymbol{u}}_{BC}$ car $\boldsymbol{\nabla}\phi$ est une composante barotrope.

1.1 Avantages

En premier lieu, cette méthode a l'avantage de ramener le problème directement aux frontières. Mentionnons qu'en raison de la condition *free slip* et *no normal flow*, les frontières doivent être sur les courants opur une grille Arakawa-C (notre cas). En second, nous n'avons plus besoin de calculer le gradient de pression à l'aide des cette méthode. On remplace plutôt notre variable inconnue par une fonction de courant barotrope ψ_{BT}.

1.2 Désavantages

Mentionnons que cette méthode est un peu plus lente. À trois couches, on note au moins un temps de calcul deux fois plus lent. Comme notre objectif final est de coupler cette version du modèle avec Wavewatch III, le temps de calcul ne devrait pas être un obstable pour ce modèle-ci.

2 Algorithme de solution à ψ_{BT}

La documentation de MUDPACK signalait qu'il est possible d'utiliser deux techniques pour améliorer le temps de calcul et limiter l'erreur numérique.

2.1 Calculer la correction à la solution plutôt que la solution

Nous avons en main une équation différentielle elliptique quelconque. Cette dernière peut être décrite par un opérateur $\mathcal{L}$ linéaire qui satisfait,

$$\mathcal{L}\left[\phi(t)\right] = f(t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}\left[\phi(t+\delta t)\right] = f(t+\delta t), \tag{2.1}$$

où la fonction f dépend de x, y de sorte que $f(t)$ est la notation simplifiée de $f(x, y, t)$ – il en est de même avec $\phi(t)$. Il est donc possible de définir une correction $e(t, \delta t)$ tel que

$$\mathcal{L}\left[e(t,\delta t)\right] = \mathcal{L}\left[\phi(t+\delta t) - \phi(t)\right] = f(t+\delta t) - f(t). \tag{2.2}$$

On peut donc solutionner $e(t, \delta t)$ au lieu de $\phi(t)$ et faire le chemin inverse à l'aide de

$$\phi(t+\delta t) = \phi(t) + e(t,\delta t). \tag{2.3}$$

N.B. Malheureusement, j'ai essayé et le résultat était peu concluant. Notre champ initialement calculé ($f(t + \delta t)$) n'est pas vraiment au temps $t + \delta t$ en fait. Donc il est peu aviser d'utiliser $f(t + \delta t) - f(t)$ comme RHS de notre équation elliptique pour trouver la correction $e(t, \delta t)$. J'en parlerai à David, car ça pourrait légitimement réduire l'erreur numérique, même si ça ne semble pas être un problème pour l'instant.

2.2 Utiliser le dernier champ comme tentative initiale

Essentiellement, il est conseillé d'utiliser $\phi(t)$ comme tentative initiale pour solutionner $\phi(t+\delta t)$ au lieu d'un champ vide comme une matrice nulle, par exemple.

3 Considérations d'échelle sur la correction à ψ_{BT}

Quelle est l'ordre de la correction appliquée à ψ_{BT} ? on parle d'un maximum autour de 4 $[s^{-1}]$. Comme les courants océaniques sont (à leur plus fort) de l'ordre de $O(10^{-1})$, alors

$$||\boldsymbol{u}|| = -\frac{\delta\psi}{\delta y} \Longrightarrow \frac{[\ ?\ s^{-1}\ ]}{[\simeq 3600m]} = O(10^{-1}). \tag{3.1}$$

Donc, à l'aide de la fameuse règle du produit croisé, on en déduit que els variations de ψ sont de l'ordre de 360 s^{-1}, donc \$O(10^2).

Si l'on met cette valeur en perspective, les corrections maximum de ψ à l'aide de MUDPACK ($\sim 3s^{-1}$), sont de l'ordre \$O(1). Donc nous sommes dans le royaume du pourcent, ce qui est rassurant car c'est ce que nous avions avec la correction du gradient de pression par *fft*.

4 Bibliographie