Contrat Été 2023

CARNET DE BORD, UNIVERSITÉ MCGILL

RÉALISÉ DANS LE CADRE
D'UN PROJET POUR

ISMER–UQAR

28/04/2023

Rédaction
Charles-Édouard Lizotte
charles-edouard.lizotte@uqar.ca
ISMER-UQAR

Table des matières

1 Système d'équations à résoudre

Dans cette section, nous posons les bases du problème à résoudre, soit trouver la solution du gradient de pression induit à la surface fixe, $\nabla\phi$. Dans notre modèle en eau peu profonde, le système d'équations aux différences finies est donné par

$$u_k^{t+1} = u_k^t + \Delta t \cdot \left(G_x^t(x,y) - \frac{\partial \phi^{t+1/2}}{\partial x} \right), \tag{1.1a}$$

$$v_k^{t+1} = v_k^t + \Delta t \cdot \left(G_y^t(x,y) - \frac{\partial \phi^{t+1/2}}{\partial y} \right); \tag{1.1b}$$

$$h_k^{t+1} = h_k^t + \Delta t \cdot \left(\frac{\partial (h_k^t u_k^t)}{\partial x} + \frac{\partial (h_k^t v_k^t)}{\partial y} \right). \tag{1.2}$$

Soit $2 \times nk$ expressions pour les équations du mouvement (1.1ab) et k expressions pour la conservation de la masse (1.2). Sous cette notations, l'indice au pied k représente le niveau de la couche et l'exposant ($t + 1/2$ par exemple) représente le pas de temps. Finalement, les termes $G_{x,y}$ sont des termes valise incorporant tout le RHS des équations du mouvement, sans la correction $\nabla\phi$. Ces derniers sont donc exprimés par

$$\boldsymbol{G}^t(x,y) = \underbrace{\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}}_{\text{Advec.}} \underbrace{+ \mathbf{f} \times \boldsymbol{u}}_{\text{Coriolis}} \underbrace{+ \frac{\delta_{(k,1)}\, \boldsymbol{\tau}_{oc}}{\rho_i h_1}}_{\text{Vent}} \underbrace{+ g_k' \nabla(\eta_k)}_{\text{Press. hydro.}} \underbrace{+ \boldsymbol{D}}_{\text{Dissip.}} \tag{1.3}$$

Finalement, l'équation de continuité pour le système est donnée par la conservation du transport barotrope, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{nk} \left(\frac{\partial (u_k^t h_k^t)}{\partial x} + \frac{\partial (v_k^t h_k^t)}{\partial y} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{U}_{BT}^t = 0, \tag{1.4}$$

Comme illustré dans la documentation du MITgcm et/ou pour ceux et celles qui auront lu mon mémoire de maîtrise, il est possible de réarranger les équations 1.1ab et 1.4 de sorte à obtenir une équation de Poisson,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi^{t+1/2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{t+1/2}}{\partial y^2} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{U}_{BT}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_{BT}}{\partial y} \right),} \tag{1.5}$$

où

$$\tilde{U}_{BT} = \sum_{k}^{nk} h_k^t \left(u_k^t + G_x^k(x,y) \right), \qquad \& \qquad \tilde{V}_{BT} = \sum_{k}^{nk} h_k^t \left(u_k^t + G_y^k(x,y) \right). \tag{1.6}$$

Bref, en trouvant la solution à l'équation 1.5, nous aurons accomplit un premier pas de temps.

2 Conditions frontières

2.1 Relier le gradient de pression et la frontière physique

Pour résoudre l'équation 1.5, il nous faut au moins une condition frontières de type Dirichlet (soit ϕ définit aux frontières). Par contre, il est aussi possible de résoudre l'équation de Poisson à l'aide d'une condition Neumann (moyennant l'apparition d'une constante d'intégration inconnue), comme illustré dans le rapport précédent. Dans le cas qui nous intéresse, nous n'avons malheureusement aucune condition frontière Dirichlet sur la pression ϕ, mais nous en avons une pour le gradient de ϕ aux murs. C'est pourquoi allons donc appliquer une condition Neumann.

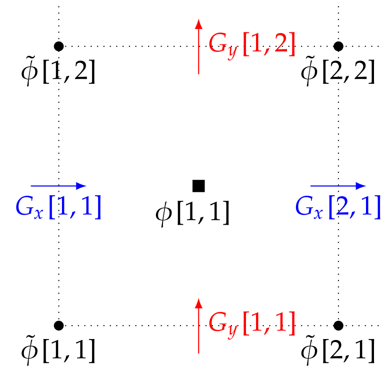

FIGURE 1 – *Illustration du nouveau schéma de différence finit avec $\tilde{\phi}$.*

La condition *no normal flow* aux frontières nécessitent que les équations 1.1ab satisfassent les relations

$$\text{(Murs est \& ouest)} \qquad \left.\frac{\partial \phi^{t+1/2}}{\partial x}\right|_{x_0,x_f} = \Delta t \cdot G_x^k(\{x_0, x_f\}, y) \;\forall\; y, \tag{2.1a}$$

$$\text{(Murs nord \& sud)} \qquad \left.\frac{\partial \phi^{t+1/2}}{\partial y}\right|_{y_0,y_f} = \Delta t \cdot G_y^k(x, \{y_0, y_f\}) \;\forall\; x. \tag{2.1b}$$

N.B. Notre condition Neumann aux frontières est donc satisfaite par (2.1ab) pour toutes les couches k. Il serait donc probablement possible de faire le calcul avec toutes les couches et moyenner la réponse et/ou se vérifier.

Le solveur d'équation elliptique à l'étude est MUDPACK (voir le rapport précédent). Généralement, les solveurs d'équations elliptiques ne sont pas *staggered*, c'est-à-dire que la solution ϕ et sa dérivée $\partial\phi$ sont définies aux **mêmes points de grille**. Par conséquent, il est **impératif** de placer nos points de grille pour ϕ sur la frontière si l'on veut avoir une condition frontière.

2.2 La problématique en quelques mots

Deux problèmes découlent de cette situation :

- L'endroit où nous avons définit la pression ϕ, ainsi que le *RHS* de l'équation 1.5 n'est pas en contact avec la frontière du modèles (au points u à l'ouest et au points v au sud) ;
- Si l'on recentre ϕ de sorte à se définir une $\tilde{\phi}$ à la même position que f et ζ, (voir figure 1), alors il faudrait extrapoler et/ou moyenner les termes $G_{x,y}$ pour les obtenir aux murs, car les conditions frontière sur $\partial\phi\big/\partial x$ & $\partial\phi\big/\partial y$ sont données par les équations 2.1ab.

2.3 Première solution : Moyenner les conditions frontières issues des termes G

Assumons qu'on positionne la pression sur les mêmes points que ζ & f, de sorte à définir un $\tilde{\phi}$ dit *unstaggered*, alors il faudrait moyenner les équations 2.1 entre les $G_{x,y}$, de sorte à obtenir

$$\text{(Murs est \& ouest)} \qquad \left.\frac{\partial \tilde{\phi}^{t+1/2}}{\partial x}\right|_{\{x_0,x_f\}} = \Delta t \cdot \overline{G_x^t(\{x_0, x_f\}, y)}^{y}, \tag{2.2a}$$

$$\text{(Murs nord \& sud)} \qquad \left.\frac{\partial \tilde{\phi}^{t+1/2}}{\partial y}\right|_{\{y_0,y_f\}} = \Delta t \cdot \overline{G_y^t(x, \{y_0, y_f\})}^{x}, \tag{2.2b}$$

où les annotations $\overline{a}^x$ et $\overline{a}^y$ dénotent les moyennes horizontales d'une quantitée a entre deux points de grilles. Concrétement, cette étape est très réaliste. Par contre, un lecteur avisé remarquerait que l'on ne peut pas appliquer cette méthode aux coins de notre domaine ($\tilde{\phi}[1,1]$, $\tilde{\phi}[1,ny]$, $\tilde{\phi}[nx,1]$ et $\tilde{\phi}[nx,ny]$). Il faudrait donc extrapoler la valeur de $\tilde{\phi}$ à l'aide d'une expansion en série de Taylor.

Finalement, une fois solvé, il faudrait par la suite retrouver le gradient de pression aux points u & v en faisant une moyenne à 4 termes, ce qui nous fait perdre beaucoup de temps, mais qui n'est pas insurmontable.

2.4 Seconde solution : extrapoller les conditions frontières à l'aide d'une série de Taylor

Comme démontré dans le rapport précédent, il serait possible de directement calculer les termes G sur les points de grille $\tilde{\phi}$, en estimant chacune des quantités au mur. Par exemple, nous savons que

$$\text{(Murs est \& ouest)} \qquad G^t(\{x_0, x_f\}, y) = u \cdot \cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} + v \cdot \cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} - fv + g'_k\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right) + D_x + \delta_{(k,1)}\left(\frac{\tau_x}{h_1}\right) \tag{2.3a}$$

$$\text{(Murs nord \& sud)} \qquad G^t(x, \{y_0, y_f\}) = u \cdot \cancelto{0}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)} + v \cdot \cancelto{0}{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} + fu + g'_k\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y}\right) + D_y + \delta_{(k,1)}\left(\frac{\tau_y}{h_1}\right) \tag{2.3b}$$

En gros,

- On connait τ partout, car c,est nous qui le posons, par contre il faudrait interpoler la valeur de h_1 aux bords.
- Il serait nécessaire d'extrapoler u et v aux frontières à l'aide d'une série de Taylor en $\Delta x/2$.
- Il faudrait trouver un moyen détourné de trouver le gradient de pression hydrostatique $\nabla(\eta_k)$ aux frontières. Surement avec une série de Taylor en $\Delta x/2$ de nouveau.
- Finalement, il faudrait trouver le coefficient de dissipation, qui est un Laplacien. Mais nous avons déjà eu cette discussion dans le rapport précédent.

Concrétement, il serait donc avisé de ne pas faire ça…

2.5 Troisième solution :

3 Test MUDPACK avec

3.1 Tableau des paramètres du test

Table 1 – *Tableau contenant l'ensemble des paramètres pour les test avec MUDPACK.*

Paramètres	Symboles	Valeur
Condition mur ouest	nxa	-
Condition mur est	nxb	-
Condition mur nord	nyc	-
Condition mur sud	nyd	-
Nombre premier diviseur en x	ixp	2
Nombre premier diviseur en y	jxq	2
Multiplicateur par 2 en x	iex	9
Multiplicateur par 2 en y	jey	9
Nombre de points en x	nx	513
Nombre de points en y	ny	513
Initial guess	iguess	0
Nombre de cycles max.	maxcy	5
Methode	method	0
Espace du workspace	nx× ny	-
position x initiales	xa	0.
position y initiale	yc	0.
position x finale	xb	10.
position y finale	yd	10.
Tolérance de l'erreur	tolmax	0.
kcycle (valeur conseillée)	-	2
iprer (valeur conseillée)	-	2
ipost (valeur conseillée)	-	1
intpol (valeur conseillée)	-	3

3.2 Tests avec conditions Dirichlet

On arrive à un écart d'environ 2%

3.3 Tests avec conditions mixtes

Avec les conditions mixtes, j'arrive à une erreur d'environ 3e-3%, ce qui est quand même bon