

# Leçon 914 – Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

4 décembre 2019

## 1 Extraits du Rapport

### Rapport de jury 2017,2018,2019

*Le programme de l'option offre de très nombreuses possibilités d'exemples. Si les exemples classiques de problèmes sur les machines de Turing figurent naturellement dans la leçon, le jury apprécie des exemples issus d'autres parties du programme : théorie des langages, logique, ... Le jury portera une attention particulière à une formalisation propre des réductions, qui sont parfois très approximatives.*

## 2 Cœur de la leçon

- Définitions des langages et problèmes décidables/récursivement énumérables.
- Problème de l'arrêt, problème de correspondance de Post.
- Fonctions calculables, notions de réduction.

## 3 À savoir

- Théorème de Rice. Bien savoir l'appliquer et le prouver.
- Plein d'exemples au choix, de problèmes et de réductions (logique du premier ordre, vacuité de l'intersection de grammaires,  $\beta$ -équivalence de lambda termes, ...).

## 4 Ouvertures possibles

- Mettre en parallèle résultats positifs (décidabilité) et négatifs (indécidabilité).
- Exemples choisis de décidabilité/indécidabilité en logique. Liens avec l'incomplétude.
- Dixième problème de Hilbert.
- (dur) Un peu de hiérarchie arithmétique.

## 5 Conseils au candidat

- En une ligne, rappeler le modèle de calcul, les machines de Turing et leur codage.
- Être très clair sur les définitions de départ et l'exigence de calculabilité dans les réductions.
- Comprendre la différence récursivement énumérable/décidable/indécidable.
- Énoncer Rice sans erreur.

## 6 Questions classiques

- Justifier la propriété des réductions.
- Tel problème est-il décidable ? (savoir donner explicitement une machine de Turing pour un problème simple)
- Tel problème est-il indécidable ? (savoir donner une réduction simple)
- Expliquer ce que signifie Rice, et ses implications.
- Décidable/indécidable dans l'arithmétique : Peano, Presburger, Skolem.
- Décidable/indécidable pour les grammaires algébriques : vacuité, universalité, problème du mot et intersections, inclusion dans un rationnel... (Carton)
- Montrer qu'un ensemble indénombrable de langages contient au moins un langage indécidable.

## 7 Références

- [Car] Langages formels, calculabilité et complexité - CARTON - à la BU/LSV  
*Très bonne référence couvrant beaucoup de bases. Se méfier de certaines preuves faites un peu rapidement.*
- [Sip] Introduction to the Theory of Computation - Michael SIPSER - à la BU  
*En anglais. Intuition de la preuve donnée avant chaque preuve.*

## 8 Dev

- ++ Indécidabilité de l'arrêt et applications à quelques problèmes indécidables - ([Sip], p159,172) - 912,913  
*Ne faire RICE que si on sait bien le faire, qu'on le comprend, et qu'on sait l'appliquer.*
- + Problèmes indécidables pour les grammaires algébriques. - ([Car]) - 914,923  
*Ambiguïté, universalité. Insister sur la réduction, pas sur la notion de grammaire.*
- + Décidabilité de l'arithmétique de PRESBURGER - ([Car], Thm 3.63 p.164) - 909,914,924  
*Idee générale simple, mais attention aux détails. Réfléchir au codage, à sa sémantique, et à la complexité globale de la construction.*
- + Indécidabilité de l'arithmétique de PEANO - (?) - 914,924  
*Passer par l'encodage des fonctions calculables. Assez long si on fait tout.*