

# Leçon 913 – Machines de Turings. Applications.

4 décembre 2019

## 1 Extraits du Rapport

### Rapport de jury 2019

*Il s'agit de présenter un modèle de calcul. Le candidat doit expliquer l'intérêt de disposer d'un modèle formel de calcul et discuter le choix des machines de Turing. La leçon ne peut se réduire à la leçon 914 ou à la leçon 915, même si, bien sûr, la complexité et l'indécidabilité sont des exemples d'applications. Plusieurs développements peuvent être communs avec une des leçons 914, 915, mais il est apprécié qu'un développement spécifique soit proposé.*

### Rapport de jury 2018

*[idem] + [...] soit proposé, comme le lien avec d'autres modèles de calcul, ou le lien entre diverses variantes des machines de Turing.*

## 2 Cœur de la leçon

- Définitions des machines de TURING déterministes.
- Reconnaisabilité (mot, langage). Codages de langages.
- Machine de TURING universelle.
- Définition d'un problème décidable, indécidable. Problème de l'arrêt.

## 3 À savoir

- Stabilité des notions pour les variantes des machines de TURING : non déterminisme (existantiel, universel, alternant), plusieurs rubans, alphabet ou nombre d'états restreints.
- Machine non déterministes.
- Langages récursifs, récursivement énumérables.
- Indécidabilité, RICE et réductions.
- Calculabilité : définition d'une fonction calculable.
- Exemples de fonctions calculables : fonctions arithmétiques.
- Expressivité : équivalence avec les fonctions récursives.
- Complexité : définition de la complexité en temps, espace.

## 4 Ouvertures possibles

- Ne pas oublier des exemples, pour montrer comment fonctionne le modèle.
- Équivalence avec le lambda-calcul.
- Limites de la stabilité (machines en espace linéaire/constant, machines n'écrivant pas sur leur entrée, calculant en temps  $o(\log \log n)$ ).
- Lien avec des notions plus faibles de calcul (automates, grammaires algébriques).
- Lien avec les machines à compteur (de MINSKY), ou les machines RAMs.
- Des classes au delà du récursivement énumérable. (si on sait justifier leur intérêt)

## 5 Conseils au candidat

- Beaucoup de choses à dire, pas besoin de partir dans des choses pas maîtrisées.
- Cf rapport, ne pas avoir une leçon trop inspirée des leçons 914, 915.
- Chaque livre a une définition des machines de Turing : il faut rester cohérent, et faire attention aux résultats utilisés.
- MOTIVER ! Justifier le formalisme introduit et son utilité en comparaison aux autres modèles.
- Une machine de TURING peut calculer une fonction, reconnaître un langage, ou bien l'énumérer. Comprendre les différences et les liens entre ces notions.
- Faire attention à la reconnaissabilité pour les machines non déterministes.
- Attention aux définitions de bases sur la reconnaissabilité, où des petits changements de définition peuvent fortement changer ce qu'on obtient. Notamment sur les notions d'arrêt sur toute entrées.
- Attention à bien travailler sur des  $Q$  et  $\Sigma$  finis.
- Il est facile d'illustrer le principe du ruban et de la tête de lecture par un dessin.

## 6 Questions classiques

- Quel est l'intérêt des machines de Turing ?
- Quel sens donner au *calcul* d'une machine de Turing non déterministe ?
- Pourquoi préférer les machines de TURING aux machines RAM ?
- Quel est l'intérêt d'une machine de Turing universelle ?
- Dans quel sens une machine de Turing est-elle proche d'un ordinateur classique ?
- En quoi les classes de complexités sont liées à l'efficacité des algorithmes ?
- Pourquoi étudier principalement la décidabilité plutôt que la calculabilité ?

## 7 Références

- [Car] Langages formels, calculabilité et complexité - CARTON - à la BU/LSV  
*Très bonne référence couvrant beaucoup de bases. Se méfier de certaines preuves faites un peu rapidement.*
- [Wol] Introduction à la calculabilité : cours et exercices corrigés - WOLPER - à la BU/LSV  
*Appréciable pour sa pédagogie, et la compréhension des concepts majeurs.*
- [Sip] Introduction to the Theory of Computation - Michael SIPSER - à la BU  
*En anglais. Intuition de la preuve donnée avant chaque preuve.*
- [Aro] Computational Complexity : A Modern Approach - Arora BARAK - au LSV  
*En anglais. Les premiers chapitres couvrent les notions nécessaires et donnent souvent une bonne intuition. Manque parfois de formalisme, à croiser avec le PERIFEL.*

## 8 Dev

- + Une fonction TURING calculable est  $\mu$ -recursive. - ([Wol], [Car]) - 912,913  
*Preuve précise mais non pédagogique dans le Cori, claire mais non précise dans le Wolper, précise mais pas finie dans le Carton ...*
- Théorème de COOK-LEVIN - ([Car], p. 191) - 913,915,916,928  
*Preuve que SAT est NP-complet. Aller jusqu'à 3-SAT est ambitieux. Bien comprendre la notion de localité du calcul d'une machine de TURING.*
- + Indécidabilité de l'arrêt et applications à quelques problèmes indécidables - ([Sip], p159,172) - 912,913  
*Ne faire RICE que si on sait bien le faire, qu'on le comprend, et qu'on sait l'appliquer.*
- ++ Équivalence entre deux variantes des machines de TURING - ([Sip], p136) - 912,913