

Semaine 2

Joshua Freeman

March 2021

5 Disjonctions de cas

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'étudier si $\frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2}$ est entier. Notons que pour ceci il suffit qu'un des facteurs en dénominateur soit pair. Supposons d'une part que $n \equiv 0 \equiv m \pmod{2}$. Dans ce cas,

$$n + m + 2 \equiv 0 \pmod{2},$$

et notre propriété est démontrée. Dans tous les cas restants, au moins l'un des deux est impair. Sans perte de généralité, supposons que c'est n . On aura alors $n + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ et t sera entier.

2. Il s'agit de montrer $v \equiv 0 \pmod{2} \iff x, y, z$ sont tous pairs. Notons pour cela qu'un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4.

- (a) \implies . Considérons le cas où il y a deux nombres du triplet x, y, z pairs et un impair. Dans ce cas v est congru à 2 modulo 4, ce qui est absurde pour un carré en général. Ce cas n'arrivera donc jamais tant que v, x, y, z , satisferont $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$ (de la même manière pour x, y, z tous impairs). D'autre part qu'en est-il si un deux cette fois sont pairs et un seul impair ? Puisque v^2 est alors congru à 1 modulo 4, ceci est contradictoire avec le fait qu'il soit pair. Or dans le cas où tous les trois xy , et z sont pairs on a bien $v^2 \equiv 0 \pmod{4} \implies v \equiv 0 \pmod{2}$. Ayant dénombré tous les cas possibles, on peut affirmer que $v \equiv 0 \pmod{2} \implies x, y, z$ tous pairs.
- (b) \impliedby . Trivialement, on peut montrer qu'on a déjà prouvé cela en citant ce qu'on a dit plus haut :
| Dans le cas où tous les trois xy , et z sont pairs on a bien $v^2 \equiv 0 \pmod{4} \implies v \equiv 0 \pmod{2}$.

cqfd

6 Implications

1. $x^2 + ax + b = 0$

- (a) $P \implies Q$. Supposons que z, \bar{z} soient les deux solutions de l'équation. Alors, par le théorème fondamental de l'algèbre,

$$x^2 + ax + b = (x - z)(x - \bar{z}) \iff a = -(z + \bar{z}) \wedge b = z\bar{z}.$$

En tant que nombre complexe, $z = \alpha + i\beta = \rho e^{i\phi}$, $\rho, \phi, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On remarque alors que $z\bar{z} = \rho^2 e^{i\phi - i\phi} = \rho^2 \in \mathbb{R}$, et que $-(z + \bar{z}) = -(\alpha + \beta i + \alpha - \beta i) = -2\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi $a, b \in \mathbb{R}$.

- (b) Contre-exemple pour $Q \stackrel{?}{\implies} P$.

Soit $a = 2, b = 1$. Alors les deux solutions sont $x_1 = x_2 = -1$. On remarque que $x_1 \neq \bar{x}_2$.

2. $(A = B) ?? (B \setminus A = A \setminus B)$

- (a) $A = B \implies B \setminus A = A \setminus B$. $A = B \implies B \setminus B = B \setminus A = A \setminus B$.

- (b) Contre-exemple pour $B \setminus A = A \setminus B \implies B = A$

Proof. Soit Soit $A, B, B \setminus A = A \setminus B$. Alors on a

$$(x \in A \wedge x \notin B) \iff (x \in B \wedge x \notin A).$$

Ceci est équivalent à

$$[\neg((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))] \wedge [\neg(x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)].$$

On réécrit brièvement ceci (grâce aux lois de Morgan) comme

$$\left[\underbrace{((x \notin A) \vee (x \in B))}_r \vee \underbrace{((x \in B) \wedge (x \notin A))}_p \right] \wedge \left[\underbrace{(x \notin B \vee x \in A)}_s \vee \underbrace{(x \in A \wedge x \notin B)}_q \right].$$

Comme $p \iff r$ et $q \iff s$, on peut écrire

$$[x \notin A \vee x \in B] \wedge [x \notin B \vee x \in A].$$

Autrement dit,

$$x \in A \iff x \in B. \tag{1}$$

On a donc bien que $A = B$. □