Semaine 3

Joshua Freeman

Mars 2021

7 Démonstrations par l'absurde

1. (a) Pour commencer, soit α est irrationnel et $b = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p,q) = 1$ rationnel. Supposons que $\alpha b = \frac{c}{d}, c, d \in \mathbb{Z}, \gcd(c,d) = 1$. Alors $\alpha = \frac{qc}{pd}$, ce qui contredit le fait que α soit irrationnel. On a donc que quand on multiplie un nombre irrationnel par un nombre rationnel, on obtient un nombre irrationnel.

   (b) Remarquons d'abord que 2 est rationnel, comme nombre entier. Ensuite, supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p,q) = 1$. Ceci implique que $2q^2 = p^2$. Or, comme on le voit dans le tableau ci-dessous, ceci implique que p est pair.

$p \mod 2$	$p^2 \mod 2$
0	0
1	1

   On peut donc écrire $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. On a donc $2k^2 = q^2$, et donc, de la même manière, q est pair. On a donc une contradiction : $2 > 1$ est un diviseur commun à p, q et pourtant nous avions présupposé que $\gcd(p,q) = 1$. C'est absurde. $\sqrt{2}$ est irrationnel. Enfin, comme $2\sqrt{2}$ est irrationnel comme produit d'un nombre irrationnel par un nombre rationnel.

2. Supposons que $\sqrt{41} + 3\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p,q) = 1. \implies \sqrt{41} = \frac{p}{q} - 3\sqrt{2} \implies 41 = \frac{p^2}{q^2} - 6\sqrt{2}\frac{p}{q} + 18$. Ceci implique que $\underbrace{18 - 41 + \frac{p^2}{q^2}}_{\textbf{rationnel}} = \underbrace{6\sqrt{2}\frac{p}{q}}_{\textbf{irrationnel}}$. Ceci est absurde... *Conclusion.* On a bien $\sqrt{41} + \sqrt{18} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

3. Entrons tout de suite dans le vif du sujet. Notons que $\forall \epsilon > 0, \exists m_0, \forall n \geq m_0, |x_n - x| < \epsilon$. Soit $n \geq \max(n_0, m_0)$, où m_0 est le m_0 donné pour $\epsilon = x - b > 0$. Alors on a bien $|x_n - x| \leq x - b \implies \underbrace{b \leq x_n}_{\lightning}$. Ceci est absurde. De la même manière, soit $n \geq \max(n_0, m_0)$, où m_0 est le m_0 donné pour $\epsilon = a - x > 0$. Alors on a $|x_n - x| \leq a - x \implies \underbrace{x_n \leq a}_{\lightning}$.

   Conclusion. On a bien $a \leq x \leq b$.