Semaine 2

Joshua Freeman

March 2021

5 Disjonctions de cas

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'étudier si $\frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2}$ est entier. Notons que pour ceci il suffit qu'un des facteurs en numérateur soit pair. Supposons d'une part que $n \equiv 0 \equiv m \mod 2$. Dans ce cas,

$$n + m + 2 \equiv 0 \mod 2,$$

et notre propriété est démontrée. Dans tous les cas restants, au moins l'un des deux est impair. Sans perte de généralité, supposons que c'est n. On aura alors $n + 1 \equiv 0 \mod 2$ et t sera entier.

2. Il s'agit de montrer $v \equiv 0 \mod 2 \iff x, y, z$ sont tous pairs. Notons pour cela qu'**un carré est toujours congru à** 0 **ou** 1 **modulo** 4.

   (a) $\implies$. Considérons le cas où il y a deux nombres du triplet x, y, z pairs et un impair. Dans ce cas v est congru à 2 modulo 4, ce qui est absurde pour un carré en général. Ce cas n'arrivera donc jamais tant que v, x, y, z, satisferont $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$ (de la même manière pour x, y, z tous impairs). D'autre part qu'en est-il si un deux cette fois sont pairs et un seul impair ? Puisque v^2 est alors congru à $1 \mod 4$, ceci est contradictoire avec le fait qu'il soit pair. Or dans le cas où tous les trois xy, et z sont pairs on a bien $v^2 \equiv 0 \mod 4 \implies v \equiv 0 \mod 2$. Ayant dénombré tous les cas possibles, on peut affirmer que $v \equiv 0 \mod 2 \implies x, y, z$ tous pairs.

   (b) $\impliedby$. Trivialement, on peut montrer qu'on a déjà prouvé cela en citant ce qu'on a dit plus haut :

   > Dans le cas où tous les trois xy, et z sont pairs on a bien $v^2 \equiv 0 \mod 4 \implies v \equiv 0 \mod 2$.

cqfd

6 Implications

1. $x^2 + ax + b = 0$

   (a) $P \implies Q$. Supposons que $z, \overline{z}$ soient les deux solutions de l'équation. Alors, par le théorème fondamental de l'algèbre,

$$x^2 + ax + b = (x - z)(x - \overline{z}) \iff a = -(z + \overline{z}) \wedge b = z\overline{z}.$$

   En tant que nombre complexe, $z = \alpha + i\beta = \rho e^{i\phi}, \rho, \phi, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On remarque alors que $z\overline{z} = \rho^2 e^{i\phi - i\phi} = \rho^2 \in \mathbb{R}$, et que $-(z + \overline{z}) = -(\alpha + \beta i + \alpha - \beta i) = -2\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) Contre-exemple pour $Q \overset{?}{\implies} P$.
   Soit $a = 2, b = 1$. Alors les deux solutions sont $x_1 = x_2 = -1$. On remarque que $x_1 \neq \overline{x_2}$.

2. $(A = B)$?? $(B \setminus A = A \setminus B)$

   (a) $A = B \implies B \setminus A = A \setminus B$. $A = B \implies B \setminus B = B \setminus A = A \setminus B$.

   (b) $B \setminus A = A \setminus B \implies B = A$

   Proof. Soit Soit $A, B, B \setminus A = A \setminus B$. Alors on a

$$(x \in A \wedge x \notin B) \iff (x \in B \wedge x \notin A).$$

   Ceci est équivalent à

$$[\neg((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))] \wedge [\neg(x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)].$$

On réécrit brièvement ceci (grâce aux lois de Morgan) comme

$$\left[\underbrace{((x \notin A) \vee (x \in B))}_{r} \vee \underbrace{((x \in B) \wedge (x \notin A))}_{p}\right] \wedge \left[\underbrace{(x \notin B \vee x \in A)}_{s} \vee \underbrace{(x \in A \wedge x \notin B)}_{q}\right].$$

Comme $p \impliedby r$ et $q \impliedby s$, on peut écrire

$$[x \notin A \vee x \in B] \wedge [x \notin B \vee x \in A].$$

Autrement dit,

$$x \in A \iff x \in B. \tag{1}$$

On a donc bien que $A = B$. $\square$