

信奥算法

递推算法

快快编程
kkcoding.net

走楼梯

计数问题

小明共有 n 级楼梯要走，每一步他只可以向上走2级楼梯或者1级楼梯，请问共有多少种不同的走法。例如 $n=3$ 时共有三种走法：可以先走1级再走2级，或者先走2级再走1级，或者每次都走1级。输入一个正整数 n （ $n \leq 90$ ），输出一个正整数代表**共有多少种走法**可以正好走完 n 级台阶。

输入样例：

3

输入样例：

4

输入样例：

5

输出样例：

3

输出样例：

5

输出样例：

8

输入1个数

用一维数组储存答案

输出1个数

$f[i]$ 代表走到第 i 级共几种走法



走楼梯

计数
问题

手算 $i=1,2,3,4,\dots$ 的答案

走到第1级共1种走法

走1步

走到第2级共2种走法

1+1, 2

走到第3级共3种走法

1+1+1, 2+1, 1+2

走到第4级共5种走法

1+1+2, 2+2,
1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1

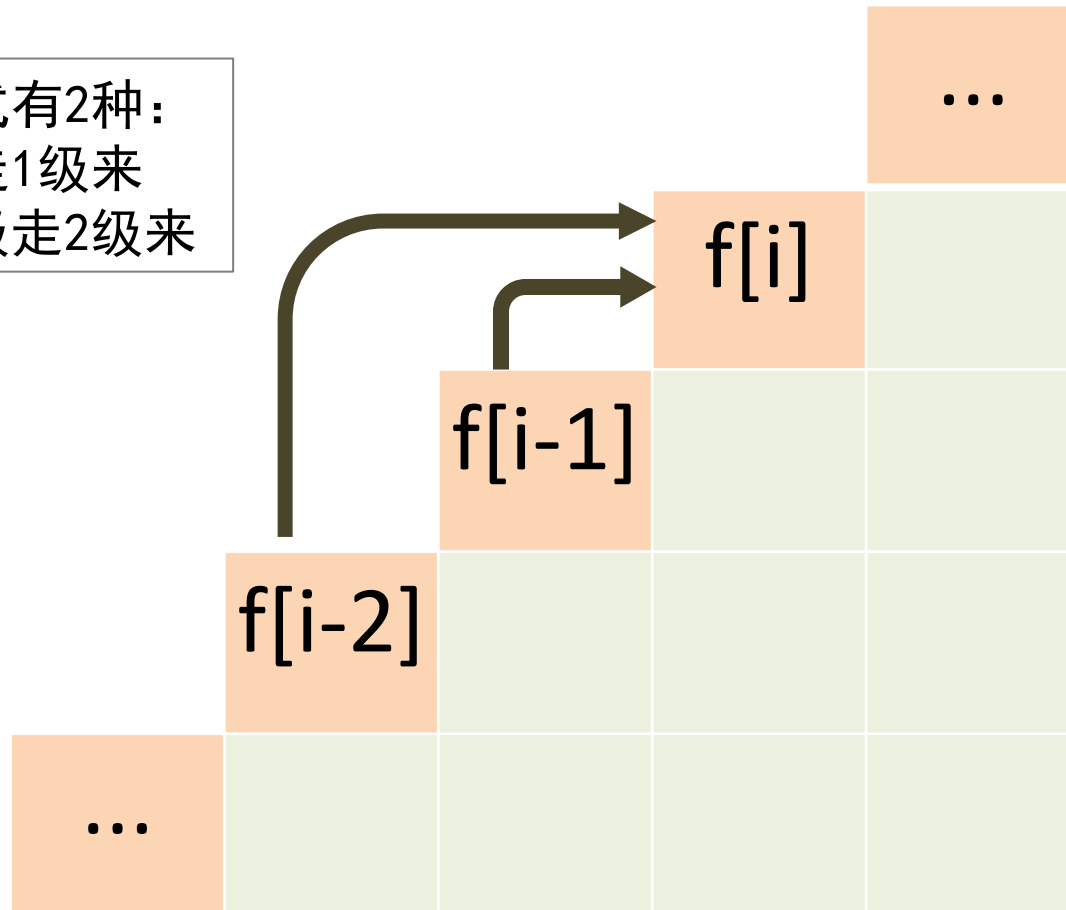
i	0	1	2	3	4	5	6	7
f[i]	1	1	2	3	5	8	13	21

走楼梯

计数
问题

$f[i]$ 代表走到第*i*级共有多少种方法

到达第*i*级的方式有2种：
可以从第*i*-1级走1级来
也可以从第*i*-2级走2级来



快编程
kcoding.net

走楼梯

斐波那契

$f[i]$ 代表走到第*i*级共有多少种方法

若*i*==1

$$f[1] = 1$$

若*i*==2

$$f[2] = 2$$

初始
条件

若*i*>=3

$$f[i] = f[i - 1] + f[i - 2]$$

递推
方程

加法
原理

分类
讨论

到达第*i*级的方式有2种：
可以从第*i*-1级走1级来
也可以从第*i*-2级走2级来

走楼梯

斐波那契

$f[i]$ 代表走到第*i*级共有多少种方法

若*i*==1

$$f[1] = 1$$

若*i*==2

$$f[2] = 2$$

初始
条件

若*i*>=3

$$f[i] = f[i - 1] + f[i - 2]$$

递推
方程

递推方程对1,2不适用

因为*f*[*i*]依赖前2格

所以*i*为1,2时要额外处理

走楼梯

```
1  #include<iostream>
2  using namespace std;
3  long long n,f[91];
4  int main(){
5      cin>>n;
6      f[1]=1;
7      f[2]=2;
8      for(int i=3;i<=n;i++)
9          f[i]=f[i-1]+f[i-2];
10     cout<<f[n]<<endl;
11     return 0;
12 }
```

为什么用long long

91改成90可以吗

铺地砖

计数问题

有一个 $2*n$ 的长方形地面，而你恰好有 n 块 $1*2$ 的相同地砖。请问共有几种铺设方法？

输入样例：
2

输出样例：
2

输入样例：
3

输出样例：
3

输入1个数

用一维数组储存答案

输出1个数

$f[i]$ 代表 $2*i$ 的长方形共几种铺法

请同学手算 $i=1,2,3,4,\dots$ 的答案
用纸和笔画图列举铺设方案

输入样例：

1

输出样例：

1

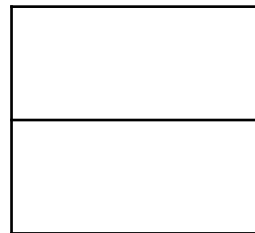
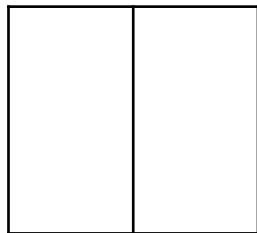


输入样例：

2

输出样例：

2

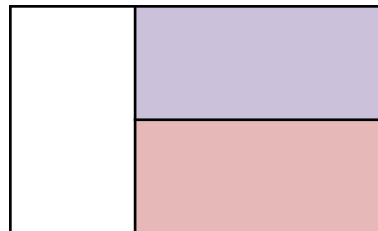
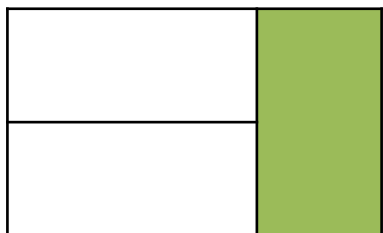
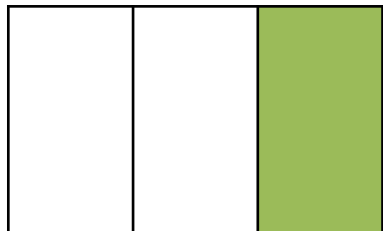


输入样例:

3

输出样例:

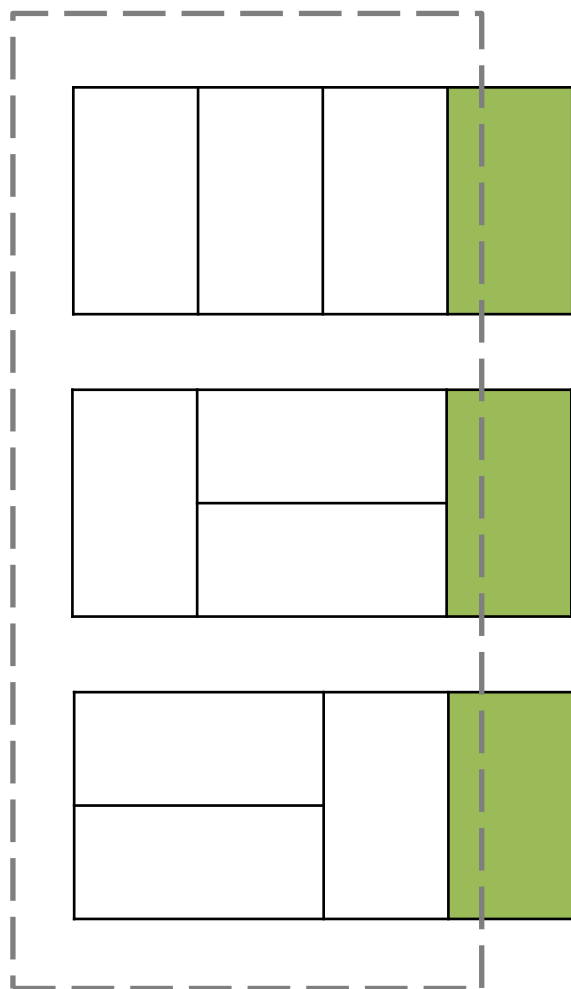
3



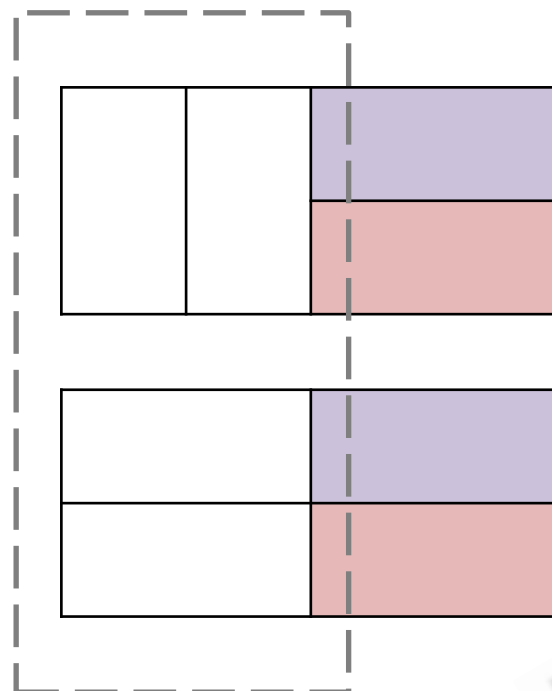
输入样例：
4

输出样例：
5

分类讨论
两种情况



3列情况



2列情况

$$f[4]=f[3]+f[2]$$

斐波那契

快快编程
kkcoding.net

铺地砖

斐波那契

$f[i]$ 代表 $2 \times i$ 的长方形共几种铺法

若 $i==1$

$$f[1] = 1$$

若 $i==2$

$$f[2] = 2$$

初始
条件

若 $i \geq 3$

$$f[i] = f[i - 1] + f[i - 2]$$

递推
方程

解题步骤

发现

输入一个数输出一个数

定义

一维数组 f 记录所有答案
明确 $f[i]$ 代表的含义
可以照抄原题中的问题

手算

$f[1], f[2], f[3], f[4]$ 找规律

总结

递推关系式
初始条件

思考： 计算范围

最大值 $2^{64}-1$

在unsigned long long的范围内，
能计算斐波那契数列里最大到第几项？

A. 约第30项

B. 约第90项

C. 约第200项

D. 约第1000项

思考：计算范围

```
1  #include<iostream>
2  using namespace std;
3  unsigned long long n,f[100];
4  int main(){
5      cin>>n;
6      f[1]=1;
7      f[2]=2;
8      for(int i=3;i<=n;i++)
9          f[i]=f[i-1]+f[i-2];
10     for(int i=1;i<=n;i++)
11         cout<<i<<": "<<f[i]<<endl;
12     return 0;
13 }
```

输入99
观察结果

地砖铺设

有一个 $2*n$ 的长方形地面，而你恰好有 n 块 $1*2$ 的相同地砖。
请问共有几种铺设方法？ $1 \leq n \leq 100000$

因为该数字可能非常大，
请输出方案数除以 1000007 的余数。

真实值远超
long long范围



输入样例：

2

输出样例：

2

输入样例：

3

输出样例：

3

地砖铺设

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  const int N=100009;
4  const int MOD=1000007;
5  long long n,f[N];
6  int main(){
7      cin>>n;
8      f[1]=1;
9      f[2]=2;
10     for(int i=3;i<=n;i++)
11         f[i]=f[i-1]+f[i-2];
12     cout<<f[n]%MOD<<endl;
13     return 0;
14 }
```

错在哪里?

如何改正?

地砖铺设

```

1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  const int N=100009;
4  const int MOD=1000007;
5  long long n,f[N];
6  int main(){
7      cin>>n;
8      f[1]=1;
9      f[2]=2;
10     for(int i=3;i<=n;i++)
11         f[i]=(f[i-1]+f[i-2])%MOD;
12     cout<<f[n]<<endl;
13     return 0;
14 }
```

%是个邪恶的符号

取模：高频易错点

每步计算都要取模

避免中间步骤溢出

汉诺塔

有三根杆子A，B，C。A杆上有N个($N > 1$)穿孔圆盘，盘的尺寸由下到上依次变小。要求将所有圆盘移至C杆：

规则如下：

- 1.每次只能移动一个圆盘
- 2.大盘不能叠在小盘上面

请问最少要移动多少次？

输入样例：

2

输入样例：

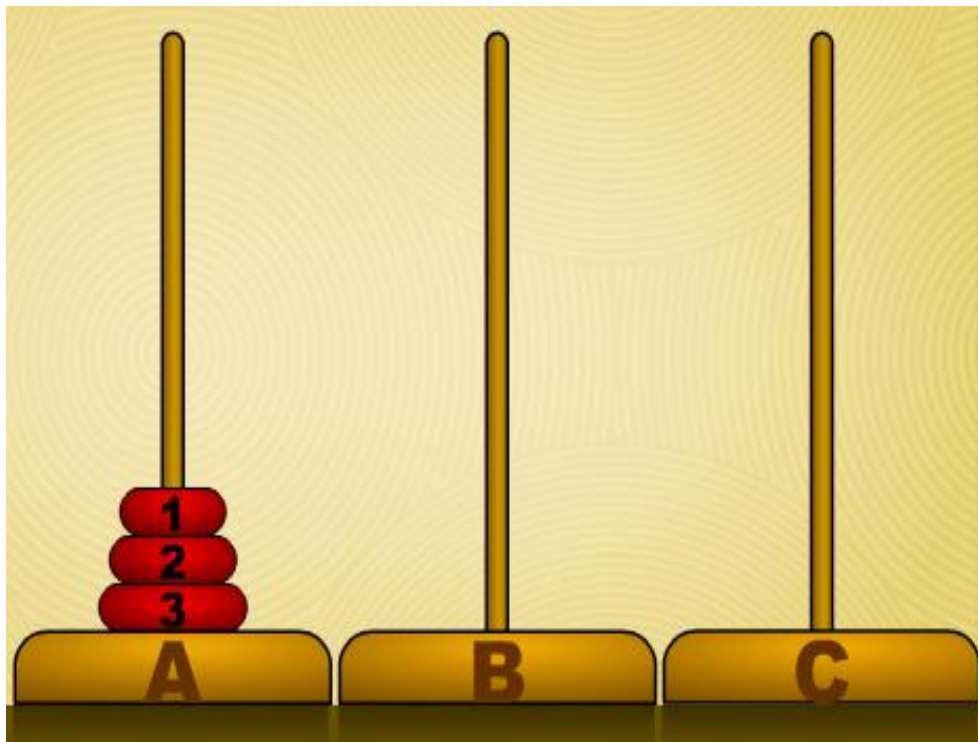
3

输出样例：

3

输出样例：

7



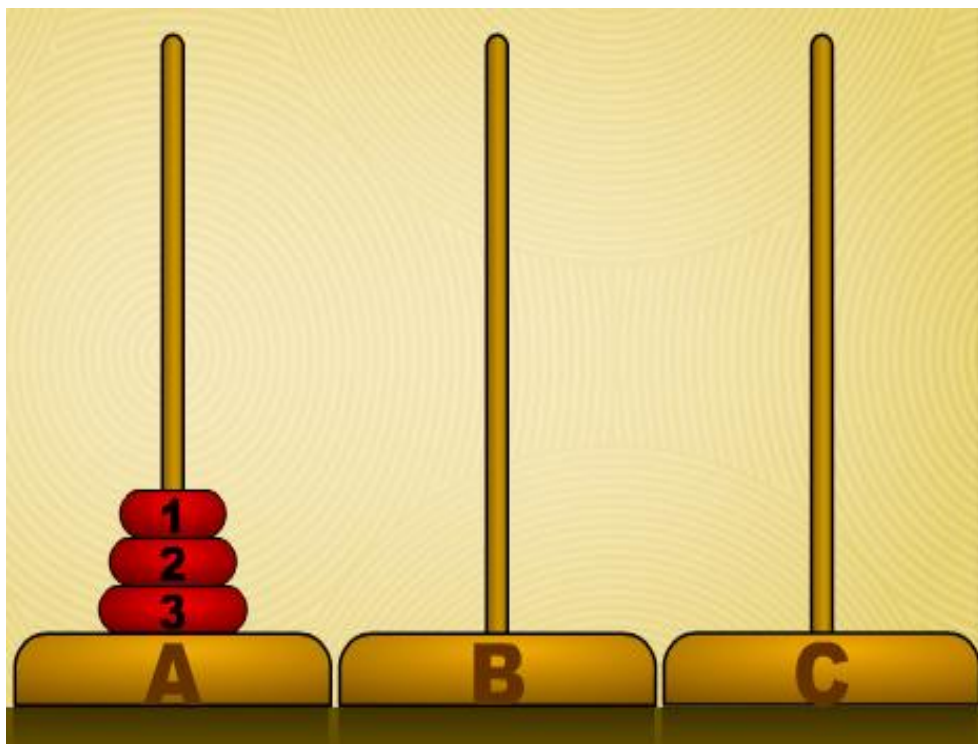
汉诺塔

老师打开"汉诺塔"软件，演示最少步数完成更级别挑战

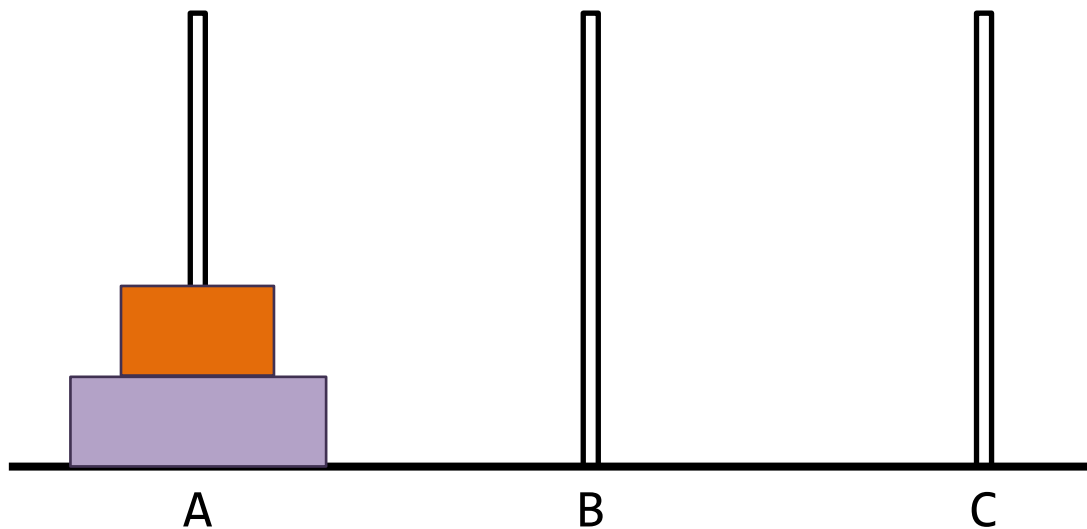
挑战2层汉诺塔

挑战3层汉诺塔

挑战4层汉诺塔

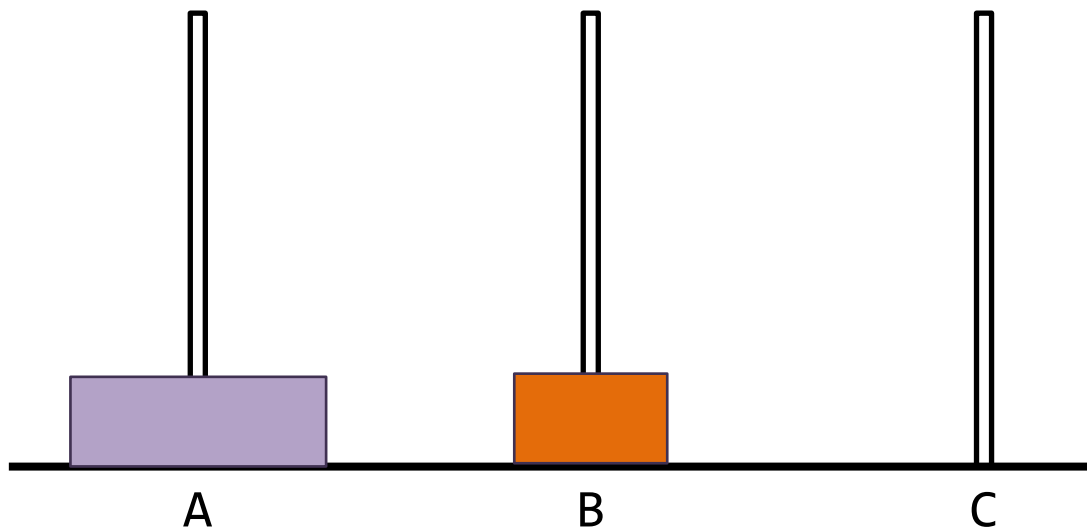


简化问题 $n=2$



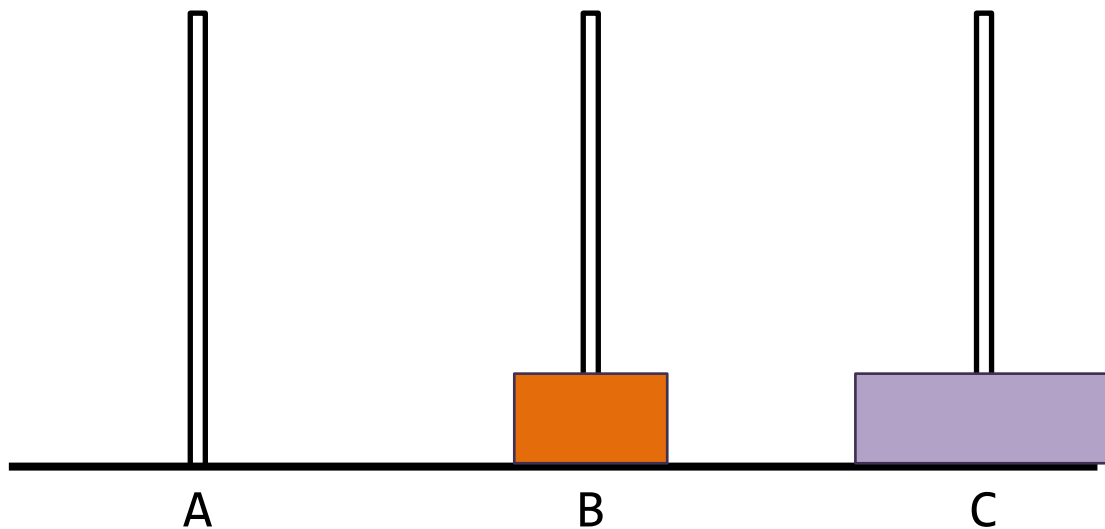
初始状态

简化问题 $n=2$



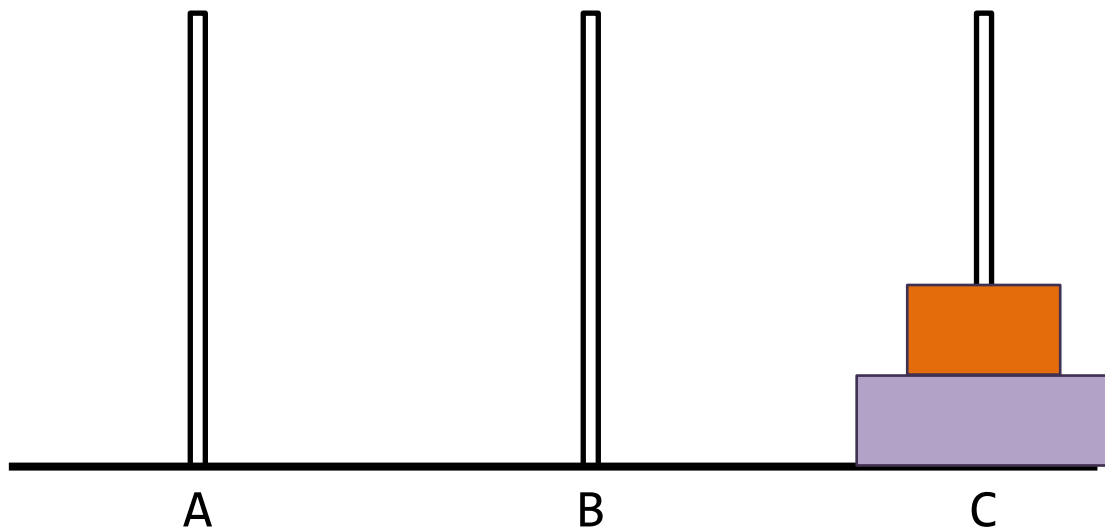
第1步: 从A到B

简化问题 $n=2$



第2步：从A到C

简化问题 $n=2$



第3步：从B到C

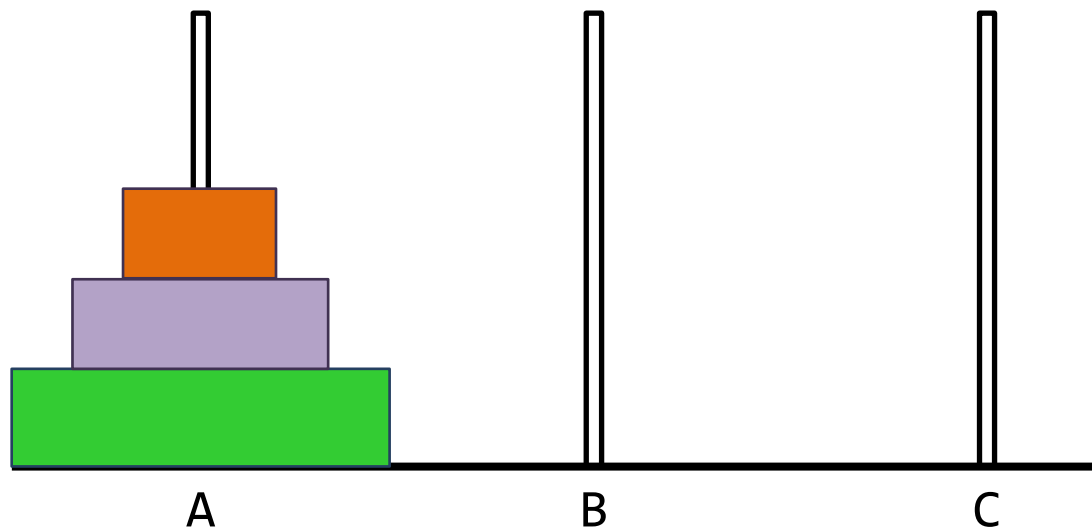
简化问题 $n=3$

已知 $n=2$ 对应的
最少移动次数答案 $h[2]$ 为3

思考 $n=3$ 的问题时
利用 $n=2$ 的答案
不用重复计算

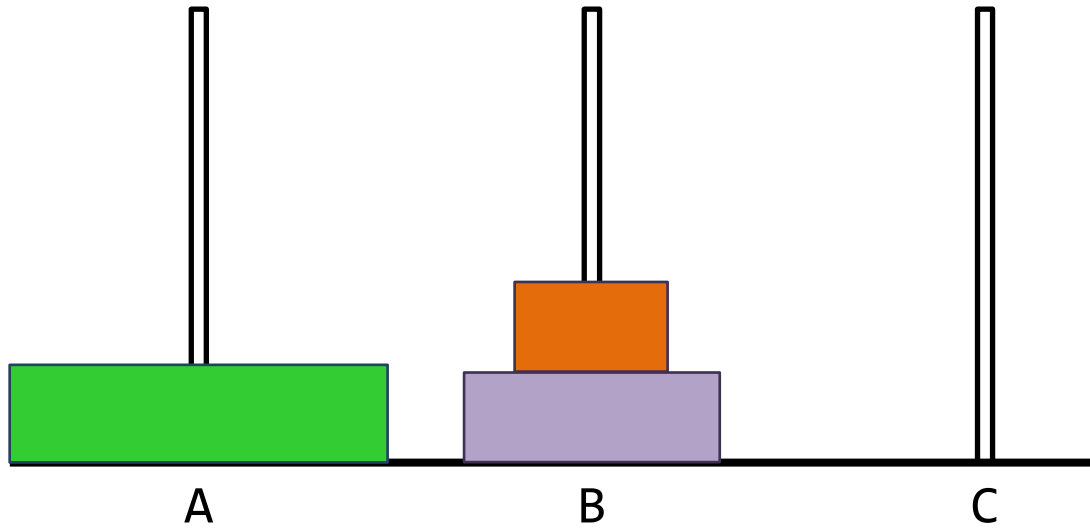
启发递推关系式

简化问题 $n=3$



初始状态

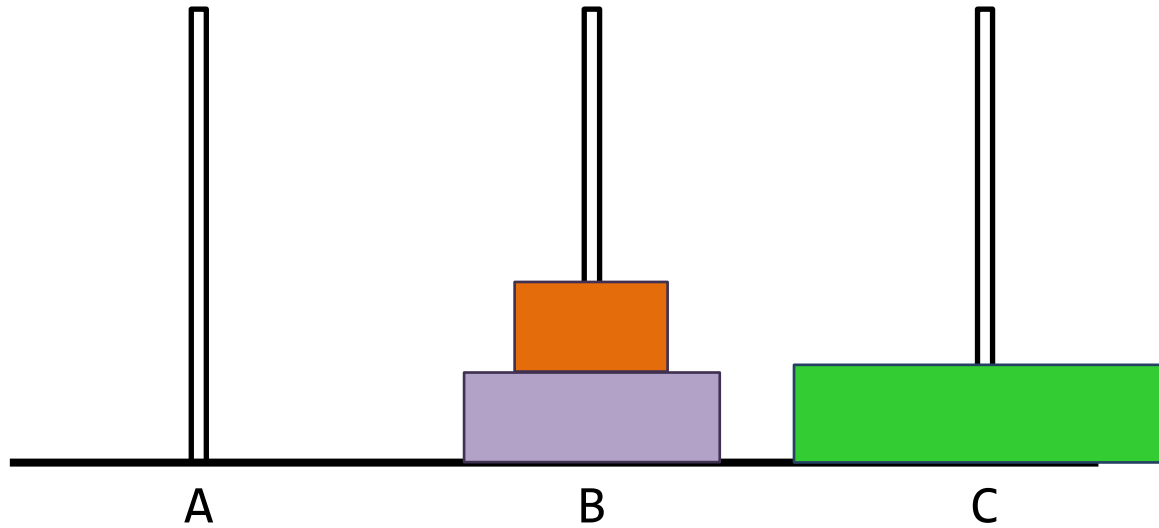
简化问题 $n=3$



第一
阶段

$h[2]=3$ 步：从A到B

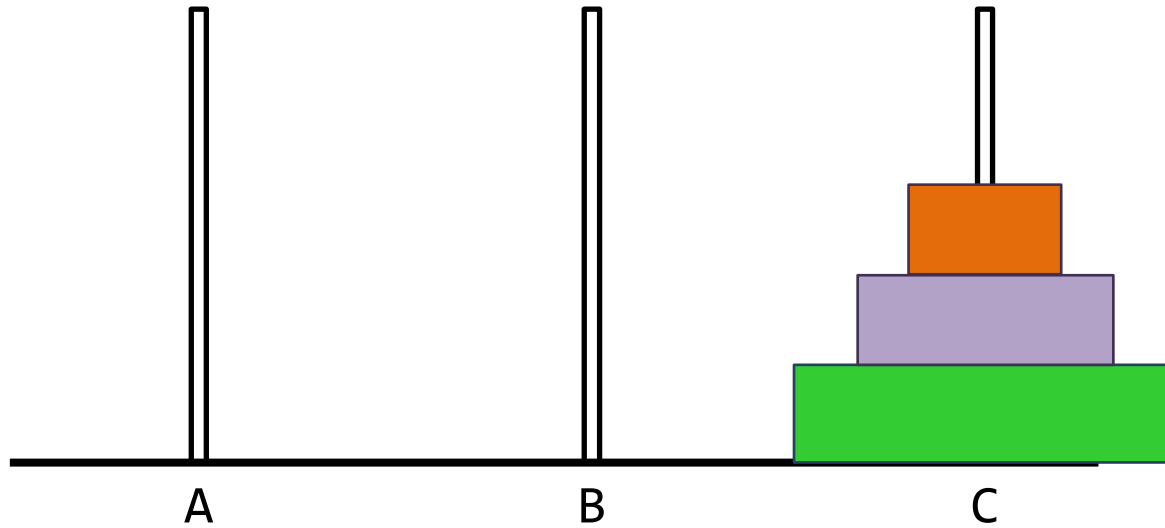
简化问题 $n=3$



第
二
阶
段

1步：从A到C

简化问题 $n=3$



第三阶段

$h[2]=3$ 步：从B到C

简化问题 $n=3$

用 $f[2]$ 递推 $f[3]$

$$h[3] = h[2] + 1 + h[2]$$

将2盘
从A移到B

将底部1盘
从A移到C

将2盘
从B移到C

原问题

发现：用 $f[2]$ 递推 $f[3]$

推广：用 $f[n-1]$ 递推 $f[n]$

$$h[n] = h[n-1] + 1 + h[n-1]$$

将 $(n-1)$ 盘
从 A 移到 B

将底部 1 盘
从 A 移到 C

将 $(n-1)$ 盘
从 B 移到 C

汉诺塔

$h[i]$ 代表*i*层汉诺塔最少移动次数

若*i*==1

$$h[1] = 1$$

初始
条件

若*i*>=2

$$h[i] = h[i - 1] \times 2 + 1$$

递推
方程

- 1.先将*i*-1个盘子从A移到B，共移动*h*[*i*-1]次
- 2.再将最大盘子从A移到C，共移动1次
- 3.最后将*i*-1个盘子从B移到C，共移动*h*[*i*-1]次

汉诺塔

```
1  #include<iostream>
2  using namespace std;
3  long long n,h[100];
4  int main(){
5      cin>>n;
6      h[1]=1;
7      for(int i=2;i<=n;i++)
8          h[i]=h[i-1]*2+1;
9      cout<<h[n]<<endl;
10     return 0;
11 }
```

初始
条件

递推
方程

思考： 计算范围

在unsigned long long的范围内，
能计算的最大汉诺塔答案是第几层？

戴克词语

Dyck words

戴克词必须满足两个条件

- 1.只包含A和B两个字母，A的总个数等于B的总个数
- 2从左向右拼写时A的个数永远不小于B的个数。

输入正整数n， $n \leq 50$

输出长度为2n的戴克词个数

输入样例：

1

输入样例：

2

输出样例：

1

输出样例：

2

AB

AABB

ABAB

ABBA

ABAA

AABBAB

AABABB

AABBBA



戴克词语

Dyck words

戴克词必须满足两个条件

- 1.只包含A和B两个字母，A的总个数等于B的总个数
- 2从左向右拼写时A的个数永远不小于B的个数。

输入正整数 n ， $n \leq 50$

输出长度为 $2n$ 的戴克词个数

输入样例：

1

输入样例：

2

输入1个数

输出1个数

输出样例：

1

输出样例：

2

用一维数组储存答案

AB

AABB

ABAB

$d[i]$ 代表长度为 $2*i$ 的戴克词共几种

快快
kkcoding.net

解题步骤

发现

输入一个数输出一个数

定义

一维数组 d 记录所有答案
 $d[i]$ 代表 $2*i$ 的戴克词共几种

手算

请同学计算
 $d[1], d[2], d[3], d[4]$ 的答案

5分钟后请分享答案

$d[3]$ 是5

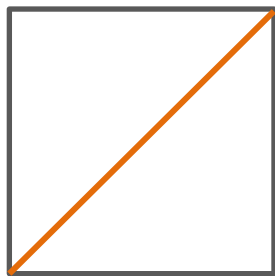
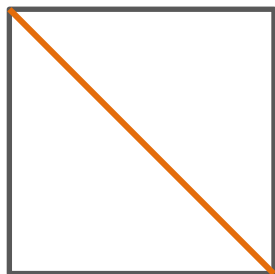
AAABBB, AABABB, AABBAB, ABAABB, ABABAB

切割多边形

输入正整数 n ，对于一个正 $n+2$ 边形，能切割出 n 个三角形。
求共有多少种切割方法。

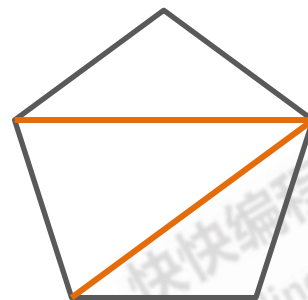
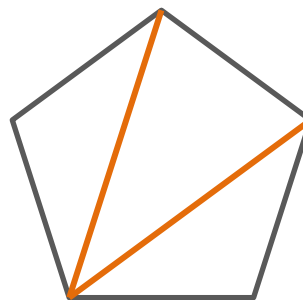
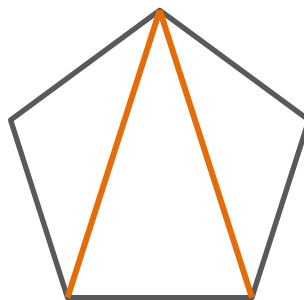
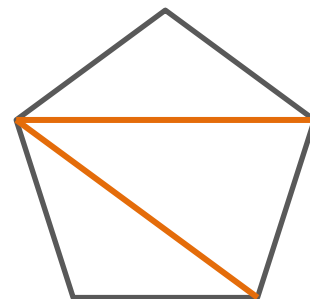
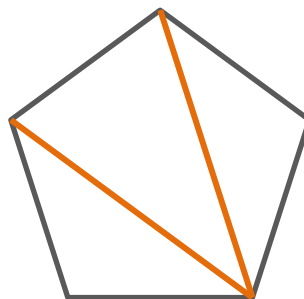
输入样例：
2

输出样例：
2



输入样例：
3

输出样例：
5

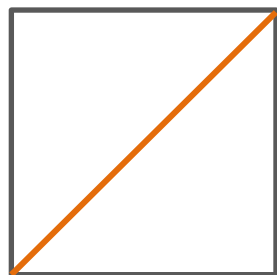
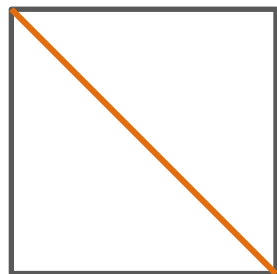


切割多边形

输入正整数 n ，对于一个正 $n+2$ 边形，能切割出 n 个三角形。
求共有多少种切割方法。

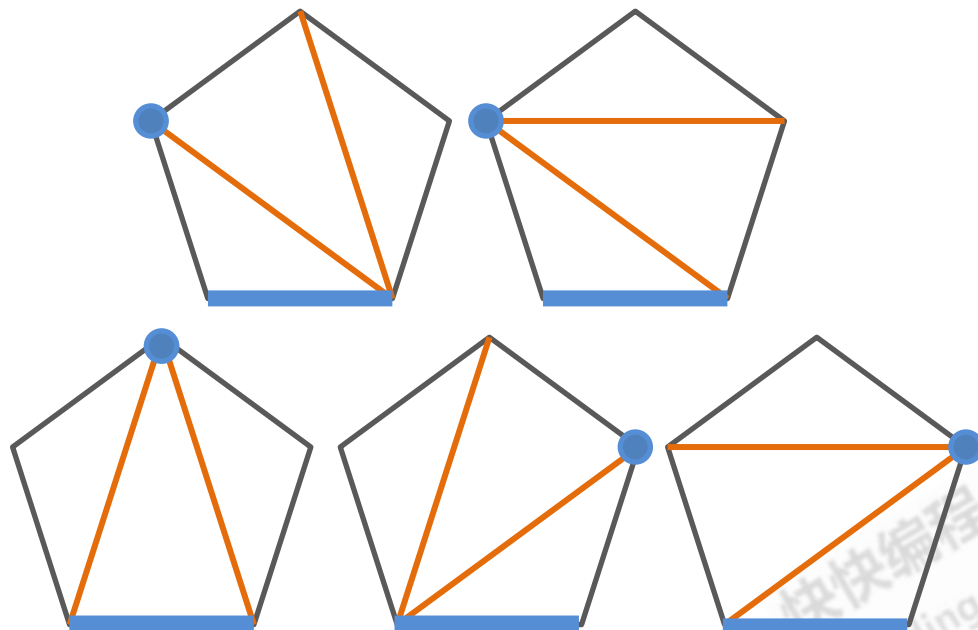
输入样例：
2

输出样例：
2



输入样例：
3

输出样例：
5



解题步骤

发现

输入一个数输出一个数

定义

一维数组 p 记录所有答案
请同学说出 $p[i]$ 代表的含义

手算

计算
 $p[1], p[2], p[3], p[4]$ 的答案

卡特兰数

catalan number

第一项为1
第二项为2
第三项为5
第四项为14
第五项为42
第六行为132
.....

卡特兰数 与 组合数

卡特兰数

第一项为1
第二项为2
第三项为5
第四项为14
第五项为42
第六项为132
.....

组合数

$C(2,1) = ?$
 $C(4,2) = ?$
 $C(6,3) = ???$
 $C(8,4) = ???$
 $C(10,5) = ???$
 $C(12,6) = ???$
.....

卡特兰数

$f[i]$ 代表卡特兰数第*i*项

i	0	1	2	3	4	5	6	7
f[i]	1	1	2	5	14	42	132	429

若*i*==1

$$f[1] = 1$$

初始
条件

若*i*>=2

$$f[i] = f[i - 1] \times \frac{4i - 2}{i + 1}$$

递推
方程

卡特兰数

现场完成
该程序

```
1  #include<iostream>
2  using namespace std;
3  long long n,f[100];
4  int main(){
5      cin>>n;      初始
6      f[1]=1;      条件
7      for(int i=2;i<=n;i++)
8          f[i]=f[i-1]*(4*i-2)/(i+1);
9      cout<<f[n]<<endl;
10     return 0;
11 }
```

递推
方程

卡特兰数应用

有一排群山共 n 次上坡和 n 次下坡，求山的形状共有几种可能性。

$n=3$ 的答案为5



思考：上山下山和戴克词语里的AB有啥联系？

卡特兰数应用

共 n 辆车编号从1到 n ，依次入栈，求出栈顺序共几种可能性。

$n=3$ 的答案为5

123, 132, 213, 231, 321

不可能的出栈顺序例如312

为什么不可能？

思考：入栈出栈和戴克词语里的AB有啥联系？

思考：入栈出栈和上山下山有啥联系？



ABABAB

入出入出入出



AABBBAB

入入出出出入出



ABAABBB

入出入入出出



AABABB

入入出出入出



AAABBB

入入入出出出

快快编程作业

954

741

244

拓展题

129, 742, 305, 629