1.1 p_i no nulos. A simétrica y definida positiva.

$$p_i^T A p_j = 0 \quad i \neq j$$

P.D. Supongamos que,

$$p_i = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{i-1} p_{i-1} + \alpha_{i+1} p_{i+1} + \dots + \alpha_n p_n$$

Ahora, como A es definida positiva

$$0 < p_i^T A p_i = p_i^T A (\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{i-1} p_{i-1} + \alpha_{i+1} p_{i+1} + \dots + \alpha_n p_n)$$

$$= \alpha_1 \underbrace{p_i^T A p_1}_{0} + \dots + \alpha_{i-1} \underbrace{p_i^T A p_{i-1}}_{0} + \alpha_{i+1} \underbrace{p_i^T A p_{i+1}}_{0} + \dots + \alpha_n \underbrace{p_i^T A p_n}_{0}$$

Por Hip

$\Rightarrow \quad = 0$!

$\therefore$ los p_i's son linealmente independientes.

1.2 Ya que los P_i's son linealmente independientes

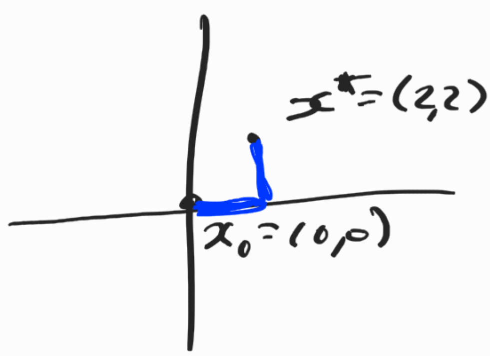
$\Rightarrow$ Tenemos que, podemos escribir el camino de x^0 a x^* como una combinación lineal de las direcciones P_i's

$$x^* - x^0 = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i P_i$$

Donde σ_i se determinan como el tamaño de paso.

Por lo que, solo es necesario realizar n iteraciones para determinar el tamaño de los pasos si $x^*, x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo



$P_1 = (1,0)$

$P_2 = (0,1)$

$\Rightarrow \sigma_1 = 2$

$\sigma_2 = 2$

2.1

1. Muestre que la segunda condición fuerte de Wolfe implica la condición de curvatura

La segunda condición fuerte de Wolfe

$$|\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|$$

$\Rightarrow$ $s_k^T y_k > 0$ $\quad s_k = \alpha_k p_k \quad y_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$

<u>Dem</u>

$\Rightarrow$ $|\nabla f_{k+1}^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k| \qquad c_2 \in (0,1)$

Utilizando la segunda condición de Wolfe vemos que,

$$\nabla f_{k+1}^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k$$

$$\nabla f_{k+1}^T p_k - \nabla f_k^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k - \nabla f_k^T p_k$$

$$y_k^T p_k \geq (c_2 - 1) \nabla f_k^T p_k$$

Vemos que, $\nabla f_k^T p_k < 0$ por ser dirección de descenso y $(c_2 - 1) < 0$

$\Rightarrow \quad y_k^T p_k > b > 0$ b constante

Multiplicamos por $\alpha_k > 0$

$$y_k^T \alpha_k p_k = y_k^T s_k = \underline{s_k^T y_k > 0}$$

2.2.

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$$

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$$

P.D. $H_{k+1} B_{k+1} = I$

Vemos que, $s_k = x_{k+1} - x_k \neq 0$ fuera del mínimo y se cumple que,

$$B_{k+1} s_k = y_k$$

$$\Rightarrow H_{k+1} B_{k+1} \cdot s_k = H_{k+1} y_k$$

$$= (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) y_k + \rho_k s_k s_k^T y_k$$

$$= (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (y_k - \rho_k y_k s_k^T y_k) + \rho_k s_k s_k^T y_k$$

Vemos que $s_k^T y_k = y_k^T s_k = \rho_k^{-1}$

$$\Rightarrow = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (y_k - y_k) + s_k$$

$$= (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (\bar{0}) + s_k = s_k$$

$$\Rightarrow (H_{k+1}B_{k+1})(s_k) = s_k \quad y \quad s_k \neq \bar{0}$$

$$\therefore \quad H_{k+1}B_{k+1} = \underline{I} /\!/$$