

实验三 连续时间 LTI 系统的频域分析

一、实验目的

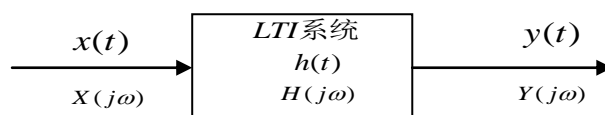
- 1、掌握系统频率响应特性的概念及其物理意义；
- 2、掌握系统频率响应特性的计算方法和特性曲线的绘制方法，理解具有不同频率响应特性的滤波器对信号的滤波作用；
- 3、学习和掌握幅度特性、相位特性以及群延时的物理意义；
- 4、掌握用 MATLAB 语言进行系统频响特性分析的方法。

基本要求：掌握 LTI 连续和离散时间系统的频域数学模型和频域数学模型的 MATLAB 描述方法，深刻理 LTI 系统的频率响应特性的物理意义，理解滤波和滤波器的概念，掌握利用 MATLAB 计算和绘制 LTI 系统频率响应特性曲线中的编程。

二、实验原理及方法

2.1 连续时间 LTI 系统的频率响应

所谓**频率特性**，也称为**频率响应特性**，简称**频率响应**（Frequency response），是指系统在**正弦信号**激励下的稳态响应随**频率**变化的情况，包括响应的幅度随频率的变化情况和响应的相位随频率的变化情况两个方面。



连续时间 LTI 系统的时域及频域分析图

上图中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 分别为系统的时域激励信号和响应信号， $h(t)$ 是系统的单位冲激响应，它们三者之间的关系为： $y(t) = x(t) * h(t)$ ，由傅里叶变换的时域卷积定理可得到：

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

或者：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$H(j\omega)$ 为系统的频域数学模型，它实际上就是系统的单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。即

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

系统对某一频率分量的影响表现为两个方面，一是信号的幅度要被 $|H(j\omega)|$ 加权，二是信号的相位要被 $\varphi(\omega)$ 移相。由于 $|H(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 都是频率 ω 的函数，所以，系统对不同频率的频率分量造成的幅度和相位上的影响是不同的。

2.2 LTI 系统的群延时

从信号频谱的观点看，信号是由无穷多个不同频率的正弦信号的**加权和**(Weighted sum)所组成。正如刚才所述，信号经过 LTI 系统传输与处理时，系统将会对信号中的所有频率分量造成幅度和相位上的不同影响。从相位上来看，系统对各个频率分量造成一定的**相位移**(Phase shifting)，相位移实际上就是**延时**(Time delay)。**群延时**(Group delay)的概念能够较好地反映系统对不同频率分量造成的延时。

LTI 系统的群延时定义为：

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

群延时的物理意义：群延时描述的是信号中某一频率分量经过线性时不变系统传输处理后产生的响应信号在时间上造成的延时的时间。

如果系统的相位频率响应特性是线性的，则群延时为常数，也就是说，该系统对于所有的频率分量造成的延时时间都是一样的，因而，系统不会对信号产生**相位失真**(Phase distortion)。反之，若系统的相位频率响应特性不是线性的，则该系统对于不同频率的频率分量造成的延时时间是不同的，因此，当信号经过系统后，必将产生相位失真。

2.3 用 MATLAB 计算系统频率响应

在本实验中，表示系统的方法仍然是用系统函数分子和分母多项式系数行向量来表示。实验中用到的 MATLAB 函数如下：

`[H,w] = freqs(b,a)`：b,a 分别为连续时间 LTI 系统的微分方程右边的和左边的**系数向量**(Coefficients vector)，返回的频率响应在各频率点的样点值（复数）存放在 H 中，系统默认的**样点数目**为 200 点；

`Hm = abs(H)`：求模数，即进行 $Hm = |H|$ 运算，求得系统的幅度频率响应，返回值存于 Hm 之中。

`real(H)`：求 H 的实部；

`imag(H)`：求 H 的虚部；

`phi = atan(-imag(H)./(real(H)+eps))`：求相位频率相应特性，atan()用来计算反正切值；

或者

`phi = angle(H)`：求相位频率相应特性；

`tao = grpdelay(num,den,w)`：计算系统的相位频率响应所对应的群延时。

计算频率响应的函数 `freqs()`的另一种形式是：

`H = freqs(b,a,w)`：在指定的频率范围内计算系统的频率响应特性。在使用这种形式的 `freqs` 函数时，要在前面先指定频率变量 w 的范围。例如在语句 `H = freqs(b,a,w)`之前加上语句：`w = 0:2*pi/256:2*pi`。下面举例说明如何利用上述函数计算并绘制系统频率响应特性曲线的编程方法。

例 1：假设给定一个连续时间 LTI 系统，下面的微分方程描述其输入输出之间的关系

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2 = x(t)$$

编写的 MATLAB 范例程序，绘制系统的幅度响应特性、相位响应特性、频率响应的实部和频率响应的虚部。程序如下：

```
% Program3_1
% This Program is used to compute and draw the plots of the frequency response
% of a continuous-time system
b = [1];          % The coefficient vector of the right side of the differential equation
a = [1 3 2];      % The coefficient vector of the left side of the differential equation
[H,w] = freqs(b,a); % Compute the frequency response H
Hm = abs(H);      % Compute the magnitude response Hm
phai = angle(H);  % Compute the phase response phai
Hr = real(H);     % Compute the real part of the frequency response
Hi = imag(H);     % Compute the imaginary part of the frequency response
subplot(221)
plot(w,Hm), grid on, title('Magnitude response'), xlabel('Frequency in rad/sec')
subplot(223)
plot(w,phai), grid on, title('Phase response'), xlabel('Frequency in rad/sec')
subplot(222)
plot(w,Hr), grid on, title('Real part of frequency response');
xlabel('Frequency in rad/sec');
subplot(224)
plot(w,Hi), grid on, title('Imaginary part of frequency response');
xlabel('Frequency in rad/sec')
```

例 2： 三阶归一化的 Butterworth 低通滤波器的频率响应为：

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$$

利用 MATLAB 绘出该系统的幅频响应和相频响应。

解 程序如下：

```
w=linspace(0,5,200);
b=[1];
a=[1 2 2 1];
[h,w]=freqs(b,a,w);
subplot(2,1,1);
plot(w,abs(h));
set(gca,'xtick',[0 1 2 3 4 5]);
set(gca,'ytick',[0 0.4 0.707 1]);
xlabel('角频率(\omega)rad/s');
ylabel('幅度 |H(j\omega)|');
grid on;
subplot(2,1,2);
```

```

plot(w,angle(h));
set(gca,'xtick',[0 1 2 3 4 5]);
xlabel('角频率(\omega)rad/s');
ylabel('相位\phi(rad)');grid on;

```

运行结果如图所示

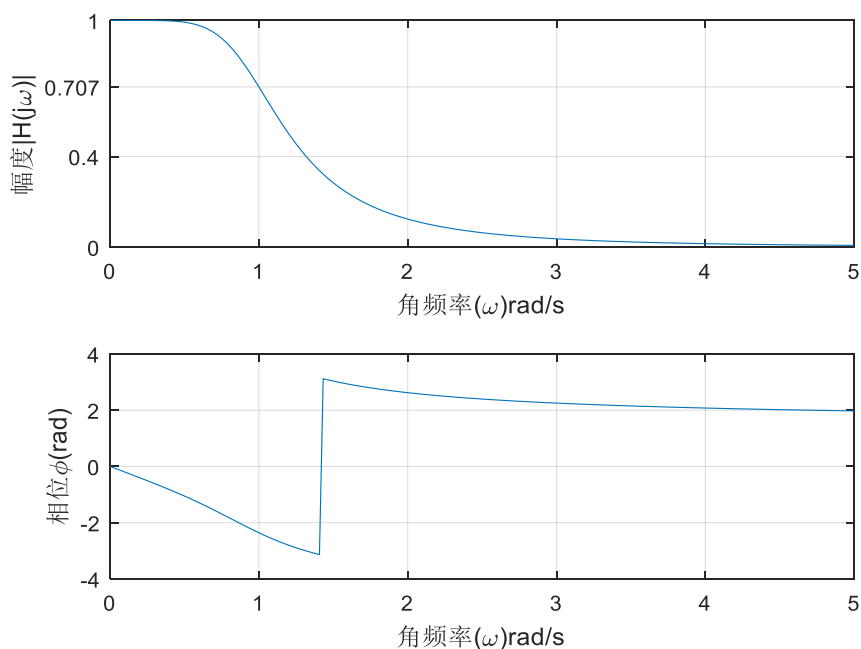
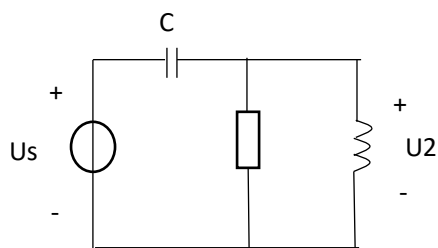


图 例 2 图

例 3： 如图所示，常见的 R、L、C 元件构造的二阶高通滤波器，用 MATLAB 求其系统函数并绘制幅度响应和相位响应曲线。假设 $L=0.4\text{H}$ ， $C=0.05\text{F}$ ， $R=2\ \Omega$ 。



解 电路的系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_s(j\omega)} = \frac{RLC(j\omega)^2}{RLC(j\omega)^2 + j\omega L + R} = \frac{0.04(j\omega)^2}{0.04(j\omega)^2 + 0.04j\omega + 2}$$

截止频率为：

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7.0711$$

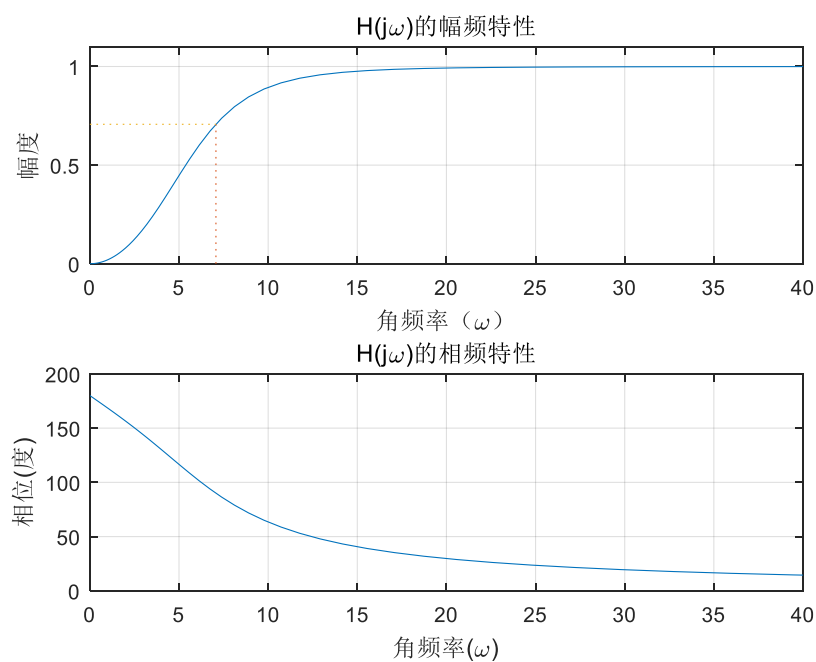
$$|H(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

实现以上分析的 MATLAB 程序如下：

%二阶高通滤波器的频率特性

```
b=[0.04 0 0];
a=[0.04 0.4 2];
[h,w]=freqs(b,a,100);
h1=abs(h);
h2=angle(h);
subplot(211);
plot(w,h1);
hold on;
plot([7.0711 7.0711],[0 0.707],':');
plot([0 7.0711],[0.707 0.707],':');
axis([0,40,0,1.1]);
grid
xlabel('角频率 (\omega) ');
ylabel('幅度');
title('H(j\omega)的幅频特性');
subplot(212);
plot(w,h2*180/pi);
axis([0,40,0,200]);
grid
xlabel('角频率(\omega)');
ylabel('相位(度)');
title('H(j\omega)的相频特性');
%end
```

程序仿真图如下：



由图可以看出，当 ω 从 0 增大时，该高通滤波器的幅度从 0 开始上升，当 $\omega = \omega_c = 7.0711$ 时，幅度等于 0.707， $\omega > \omega_c$ 后进入通带。

三、实验内容及步骤

实验前，必须首先阅读本实验原理，了解所给的 MATLAB 相关函数，读懂所给出的全部范例程序。实验开始时，先在计算机上运行这些范例程序，观察所得到的信号的波形图。并结合范例程序所完成的工作，进一步分析程序中各个语句的作用，从而真正理解这些程序。

实验前，一定要针对下面的实验项目做好相应的实验准备工作，包括事先编写好相应的实验程序等事项。

1. 给定三个连续时间 LTI 系统，它们的微分方程分别为

$$\text{系统 1: } \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 1 \frac{dy(t)}{dt} + 2.5y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\text{系统 2: } \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

系统 3:

$$\frac{d^6 y(t)}{dt^6} + 10 \frac{d^5 y(t)}{dt^5} + 48 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 148 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 306 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 401 \frac{dy(t)}{dt} + 262y(t) = 262x(t)$$

编程绘制以上微分方程描述的系统的幅度响应特性、相位响应特性、频率响应的实部和频率响应的虚部曲线图。分析各系统的特性。

2. 输入信号 $x(t) = \cos(t) + \cos(8t)$ ，系统采用题目 1 中的系统 3，编写程序，计算输入信号的幅度频谱，系统的幅度频率响应，系统输出信号 $y(t)$ 的幅度频谱，系统的单位冲激响应 $h(t)$ ，利用 3×2 一共 6 个子图，分别画出输入信号的时域图、幅度谱、系统单位冲激响应、系统幅频特性、输出信号的时域图、频域图。
3. 编写程序，能够接受从键盘输入的系统微分方程系数向量，并分别绘制内容 1 中所给三个系统的群延时曲线图。分析不同频率时对应的延时是多少，并分析这种系统是否存在相位失真？系统 3 对内容 2 中的输入信号产生的输出信号数学表达式为？
4. 已知 R、L、C 元件构造的二阶低通滤波器电路的系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{1}{0.08(j\omega)^2 + 0.4j\omega + 1}$$

试用 MATLAB 绘制幅度响应曲线和相位响应曲线，并分析该系统的频率特性。

5. 已知电路的系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 22500}{(j\omega)^2 + 200j\omega + 20000}$$

试用 MATLAB 绘制幅度响应曲线和相位响应曲线，并分析该系统的频率特性。

四、实验报告要求

- 1、按要求完整书写你所编写的全部 MATLAB 程序
- 2、详细记录实验过程中的有关信号波形图，图形要有明确的标题。全部的 MATLAB 图形应该用打印机打印，然后贴在本实验报告中的相应位置，禁止复印件。
- 3、实事求是地回答相关问题，严禁抄袭。

