

实验 2 连续时间信号的频域分析

一、实验目的

- 1、掌握连续时间周期信号的傅里叶级数的物理意义和分析方法；
- 2、观察截短傅里叶级数而产生的“Gibbs 现象”，了解其特点以及产生的原因；
- 3、掌握连续时间傅里叶变换的分析方法及其物理意义
- 4、掌握各种典型的连续时间非周期信号的频谱特征以及傅里叶变换的主要性质；
- 5、学习掌握利用 MATLAB 语言编写计算 CTFS、CTFT 和 DTFT 的仿真程序，并能利用这些程序对一些典型信号进行频谱分析，验证 CTFT、DTFT 的若干重要性质。

二、实验原理及方法

2.1 连续时间周期信号的傅里叶级数 CTFS 分析

任何一个周期为 T 的正弦周期信号，只要满足狄利克利条件，都可以用一组三角函数 $\{\sin(n\Omega t), \cos(n\Omega t)\}$ 的组合表示。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\Omega t) + b_1 \sin(\Omega t) + a_2 \cos(2\Omega t) + b_2 \sin(2\Omega t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)] \end{aligned} \quad (1)$$

式中， a_0, a_n, b_n 称为傅里叶系数。

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

即可以用一组正弦波和余弦波合成任意的周期信号。

式 (1) 的三角函数形式傅里叶级数可以写成余弦函数的形式：

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

其中： $A_0 = a_0$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

指数形式的傅里叶级数为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

其中系数

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

傅里叶级数中 $A_n \sim n\Omega$ 图像为单边幅度谱， $\varphi_n \sim n\Omega$ 为单边相位谱， $|F_n| \sim n\Omega$ 图像为幅度谱， $\phi_n \sim n\Omega$ 为相位谱，

上面的傅里叶级数的合成式说明，我们可以用无穷多个不同频率的周期复指数信号来合成任意一个周期信号。然而，用计算机（或任何其它设备）合成一个周期信号，显然不可能做到用无限多个谐波来合成，只能取这些有限个谐波分量来近似合成。

假设谐波项数为 N ，则上面的和成式为：

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{jn\Omega t}$$

显然， N 越大，所选项数越多，有限项级数合成的结果越逼近原信号 $f(t)$ 。本实验可以比较直观地了解傅里叶级数的物理意义，并观察到级数中各频率分量对波形的影响包括“Gibbs”现象：即信号在不连续点附近存在一个幅度大约为 9% 的过冲，且所选谐波次数越多，过冲点越向不连续点靠近。这一现象在观察周期矩形波信号和周期锯齿波信号时可以看得很清楚。

2.2 连续时间信号的傅里叶变换 CTFT

连续时间信号的傅里叶变换为：

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$F(j\omega)$ 称为频谱密度函数，简称频谱。一般是复函数，可记为：

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(j\omega)|$ 反映信号各频率分量的幅度随频率 ω 的变化情况，称为信号幅度频谱。 $\varphi(\omega)$ 反映信号各频率分量的相位随频率 ω 的变化情况，称为信号相位频谱。

给定一个连续时间非周期信号 $x(t)$ ，它的频谱也是连续且非周期的。对于连续时间周期信号，也可以用傅里变换来表示其频谱，其特点是，连续时间周期信号的傅里叶变换时有冲激序列构成的，是离散的——这是连续时间周期信号的傅里叶变换的基本特征。

1. 连续时间周期信号的傅里叶级数的 MATLAB 实现

设周期信号 $f(t)$ 的基本周期为 T ，且满足狄里克利条件，则其傅里叶级数的系数：

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

基本角频率为：
$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

对周期信号进行分析时，我们往往只需对其在一个周期内进行分析即可，通常选择**主周期**（Principle period）。假定 $f_1(t)$ 是 $f(t)$ 中的主周期，则

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

计算机不能计算无穷多个系数，所以我们假设需要计算的谐波次数为 N ，则总的系数个数为 $2N+1$ 个。在确定了时间范围和时间变化的步长即 T 和 dt 之后，对某一个系数，上述系数的积分公式可以近似为：

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-jn\Omega t} dt = \sum_k f(t_k) e^{-jn\Omega t_k} dt / T$$

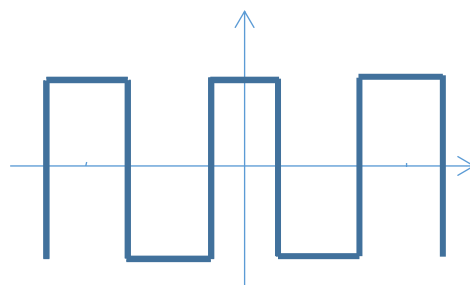
$$= [f_1(t_1), f_1(t_2), \dots, f_1(t_M)] \cdot [e^{-jn\Omega t_1}, e^{-jn\Omega t_2}, \dots, e^{-jn\Omega t_M}] \cdot dt / T$$

对于全部需要的 $2N+1$ 个系数，上面的计算可以按照矩阵运算实现。MATLAB 实现系数计算的程序如下：

```
dt = 0.01;
T = 2; t = -T/2:dt:T/2; w0 = 2*pi/T;
f1 = input('Type in the periodic signal x(t) over one period x1(t)='); % f1 的表达式
N = input('Type in the number N=');
k = -N:N; L = 2*N+1;
Fk = f1*exp(-j*k*w0*t)*dt/T;
```

需要强调的是，时间变量的变化步长 dt 的大小对傅里叶级数系数的计算精度的影响非常大， dt 越小，精度越高，但是，计算机计算所花的时间越长。

例 1：试用 MATLAB 求如图 1 所示的周期方波信号(高为 0.5)的傅里叶级数分解。



解：周期方波信号是一个偶函数，又是一个奇谐函数，因此其傅里叶级数只含有奇次谐波的余弦项，即周期方波信号可以分解为：

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt = \frac{4}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 0.5 \cos(n\Omega t) dt, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

求傅里叶系数的程序如下：

```
syms t n T;
y=0.5*cos(n*2*pi/T*t);
an=(4/T)*int(y,-T/4,T/4);
```

运行结果为：

$$a_n = 2 \sin(1/2 \pi n) / \pi n$$

则此周期方波信号可以分解为：

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

将其展开为三角函数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left[\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \dots \right]$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2j-1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos(n\omega t) \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

例 2：根据例 1 的结果，试用正弦信号的叠加近似合成一频率为 50Hz，幅值为 3 的方波。

解：由例 1 可知，周期方波信号可以分解为：

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$\text{则 } f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2j-1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos(n\omega t) \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

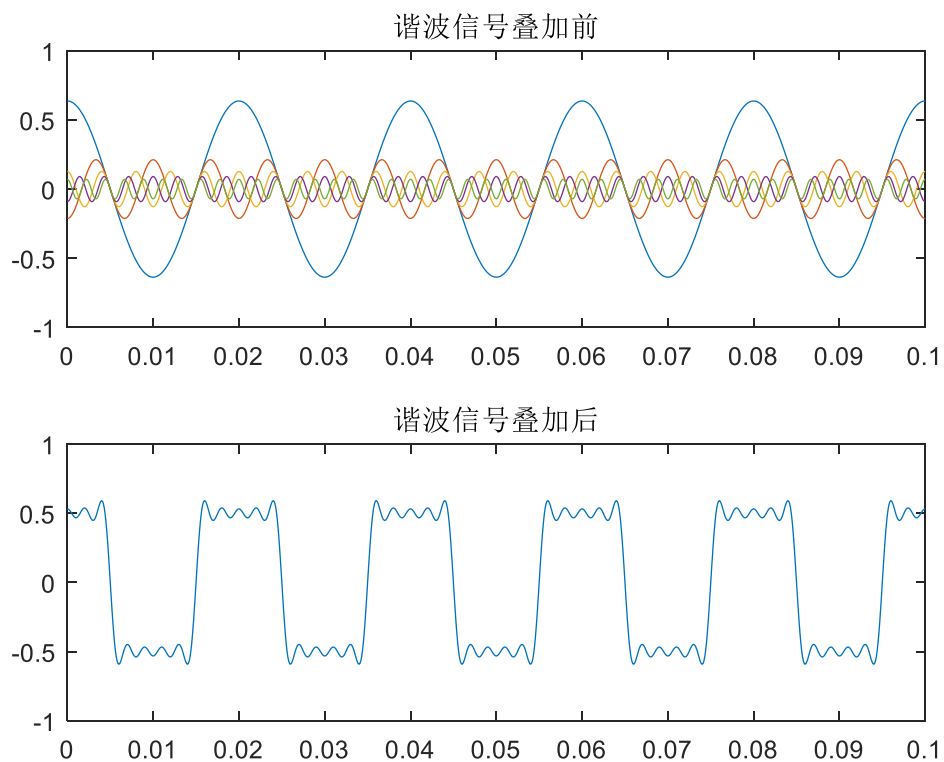
MATLAB 程序如下：

```
clear all;
fs=10000;
t=0:1/fs:0.1;
f0=50;
sum=0;
```

```

subplot(211);
for n=1:2:9
    plot(t,(2/pi)*(1/n)*sin(pi*n/2)*cos(n*2*pi*f0*t));
    title('谐波信号叠加前');
    hold on;
end
subplot(212);
for n=1:2:9
    sum=sum+2/pi*(1/n)*sin(pi*n/2)*cos(n*2*pi*f0*t);
end
plot(t,sum);
title('谐波信号叠加后');

```



例 2 仿真图

例 3：观察例 1 所示周期方波信号的吉布斯现象。

解：已知周期方波信号的傅里叶级数为：

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n=1,3,5,\dots)$$

执行下列程序，令 N 分别为 10,20,30,40，观察波形的特点，了解吉布斯现象的特点。

MATLAB 程序如下：

```

clear all;
t=-1.5:0.01:1.5;
w0=4;
for M=1:4
    N=10*M;

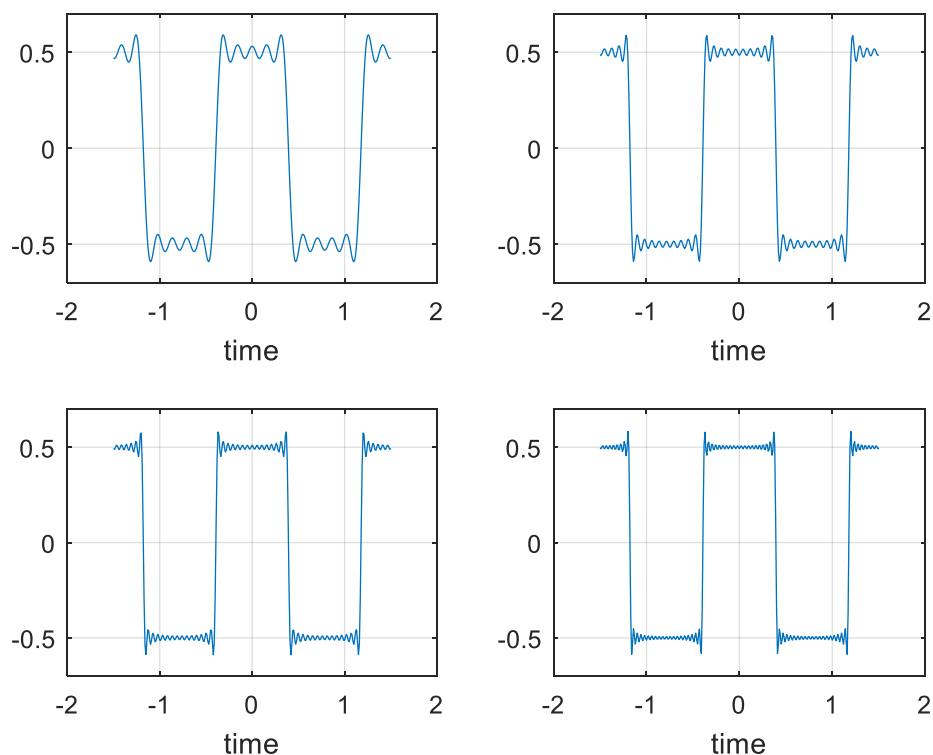
```

```

xN=0;
for n=1:N
    an=(2/(n*pi))*sin(n*pi/2);
    xN=xN+an.*cos(n*w0*t);
end
subplot(2,2,M);
plot(t,xN);
grid on;
xlabel('time');
axis([-2 2 -0.7 0.7]);
end

```

波形图如下：



例 3 仿真图

从上述波形可以看出，傅里叶级数所取项数越多，相加后波形越逼近原周期方波信号。但注意，如果我们用周期信号傅里叶级数的部分和来近似周期信号，在不连续点附近，部分和有起伏。随着 N 的增加，起伏的峰值大小保持不变而趋于一个常数，大约等于总跳变值的 9%，并从不连续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去，这种现象通常称为吉布斯现象。

例 4：已知周期方波信号如例 1 图所示，使用 MATLAB 计算并绘出周期方波信号的频谱图。

解：周期方波信号可以分解为：

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n=1,3,5,\dots)$$

程序如下：

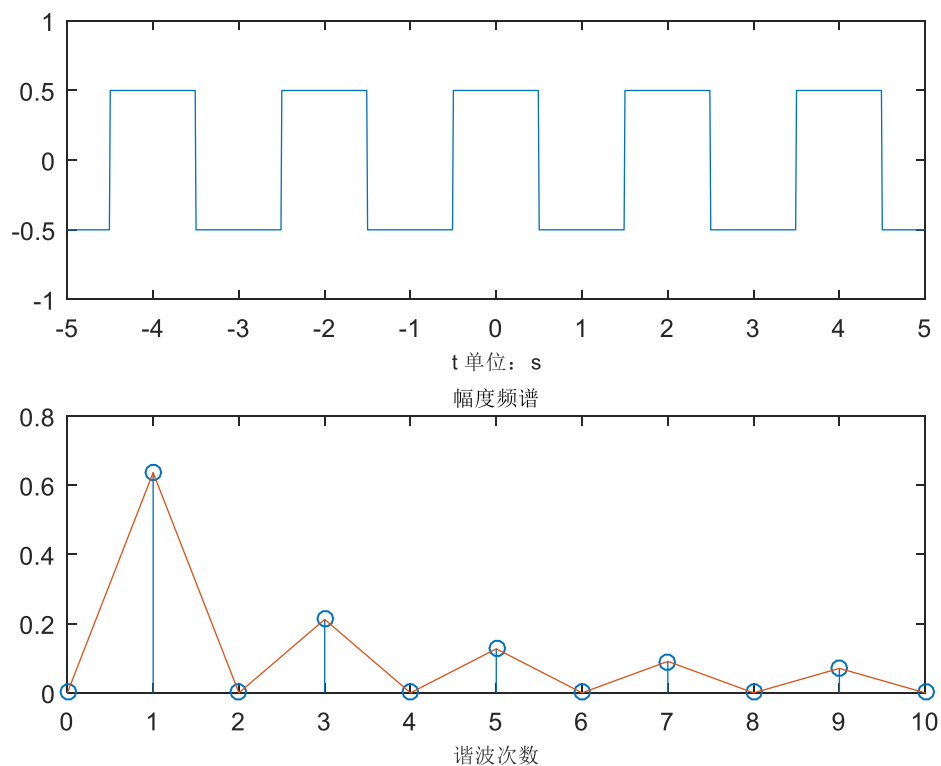
%周期方波信号频谱图

```

display('Please input the value of m');
m=input('m=');
an=zeros(m+1,1);
an(1)=0;
for i=1:m
    an(i+1)=2/(i*pi)*sin(i*pi/2);
    cn(i+1)=abs(2/(i*pi)*sin(i*pi/2));
end
t=-5:0.01:5;
x=0.5*square(pi*(t+0.5));
subplot(211);
plot(t,x);
axis([-5 5 -1 1]);
xlabel('t 单位: s','FontSize',8);
subplot(212);
k=0:m;
stem(k,cn);
hold on;
plot(k,cn);
title('幅度频谱','FontSize',8);
xlabel('谐波次数','FontSize',8);

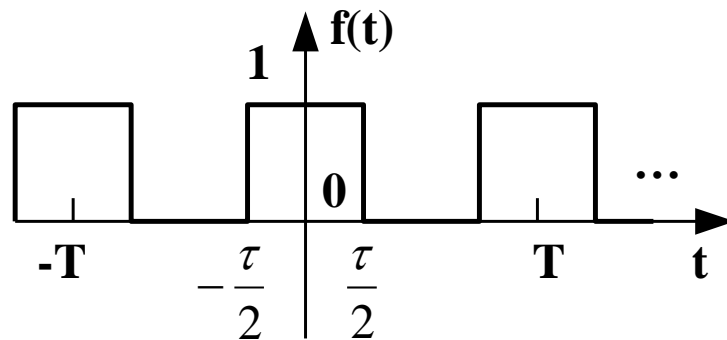
```

波形如图 4 所示。



例 4 仿真图

例 5：试用 MATLAB 计算并绘出下图所示的周期矩形脉冲的幅度频谱图和相位频谱图。



解：程序如下：

%求矩形脉冲的傅里叶系数

```
syms t n T tao;
```

```
y=1*cos(n*(2*pi)/T*t);
```

```
an=(2/T)*int(y,-tao/2,tao/2)
```

```
y0=1;
```

```
a0=(1/T)*int(y0,-tao/2,tao/2)
```

运行的结果为：

```
an =
```

```
(2*sin((pi*n*tao)/T))/(n*pi)
```

```
a0 =
```

```
tao/T
```

%矩形脉冲的频谱图

```
display('please input the value of T,tao and m');
```

```
T=input('T=');
```

```
tao=input('tao=');
```

```
m=input('m=');
```

```
an=zeros(m+1,1);phase=zeros(m+1,1);
```

```
an(1)=1/T*tao;cn(1)=1/T*tao;
```

```
for i=1:m
```

```
    an(i+1)=2*sin(tao*i*pi/T)/i/pi;
```

```
    cn(i+1)=abs(2*sin(tao*i*pi/T)/i/pi);
```

```
    if an(i)>=0
```

```
        phase(i)=0;
```

```
    else
```

```
        phase(i)=pi;
```

```
    end
```

```
end
```

```
t=-5*T:0.01:5*T;
```

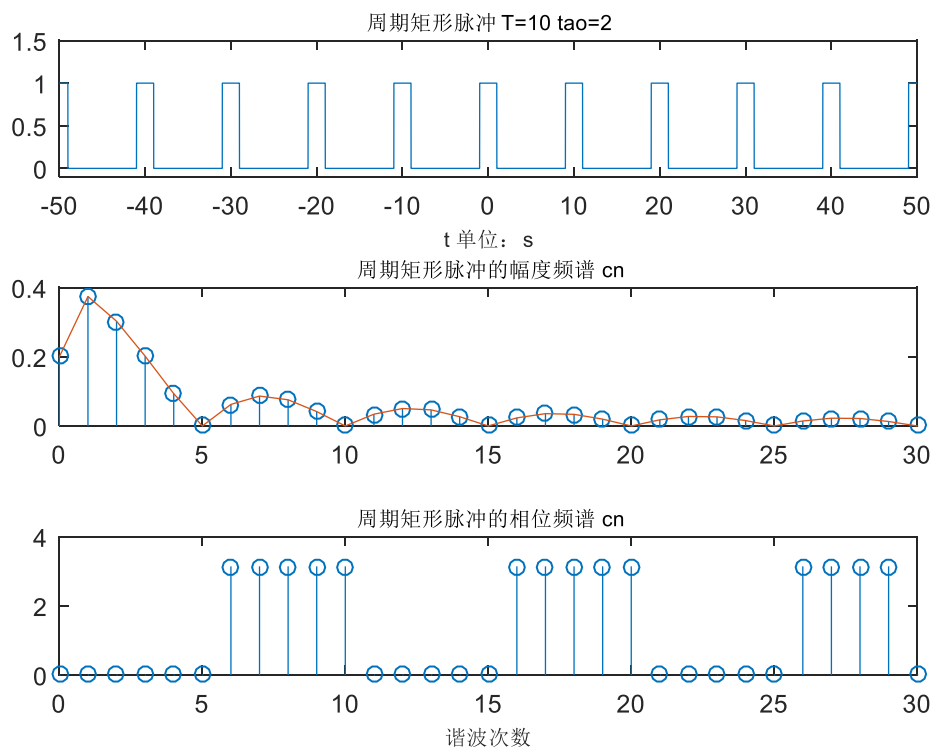
```
x=0.5*(square(2*pi/T*(t+(tao/2)),tao*100/T)+1);
```



```

subplot(311);plot(t,x);
title('周期矩形脉冲 T=10 tao=2','FontSize',8);
axis([-5*T 5*T -0.1 1.5]);
xlabel('t 单位: s','FontSize',8);
subplot(312);
k=0:m;
stem(k,cn);
hold on;
plot(k,cn);
title('周期矩形脉冲的幅度频谱 cn','FontSize',8);
subplot(313);
stem(k,phase);
title('周期矩形脉冲的相位频谱 cn','FontSize',8);
xlabel('谐波次数','FontSize',8);
运行结果如下图:

```



2. 连续时间信号傅里叶变换的 MATLAB 实现

4.1 用 MATLAB 实现 CTFT 的计算

MATLAB 进行傅里叶变换有两种方法，一种利用符号运算的方法计算，另一种是数值计算，本实验要求采用数值计算的方法来进行傅里叶变换的计算。严格来说，用数值计算的方法计算连续时间信号的傅里叶变换需要有个限定条件，即信号是**时限信号**（**Time limited signal**），也就是当时间 $|t|$ 大于某个给定时间时其值衰减为零或接近于零，这个条件与前面

提到的为什么不能用无限多个谐波分量来合成周期信号的道理是一样的。计算机只能处理有限大小和有限数量的数。

采用数值计算算法的理论依据是：

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-jk\omega T} T$$

若信号为时限信号，当时间间隔 T 取得足够小时，上式可演变为：

$$X(j\omega) = T \sum_{k=-N}^N x(kT)e^{-jk\omega T}$$

$$= [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{2N+1})] \cdot [e^{-j\omega t_1}, e^{-j\omega t_2}, \dots, e^{-j\omega t_{2N+1}}] T$$

上式用 MATLAB 表示为：

$$X = x * \exp(j * t' * w) * T$$

其中 X 为信号 $x(t)$ 的傅里叶变换， w 为频率 Ω ， T 为时间步长。

相应的 MATLAB 程序：

```
T = 0.01; dw = 0.1;           %时间和频率变化的步长
t = -10:T:10;
w = -4*pi:dw:4*pi;
X(jw)可以按照下面的矩阵运算来进行：
X=x*exp(-j*t'*w)*T; %傅里叶变换
X1=abs(X);           %计算幅度谱
phai=angle(X);       %计算相位谱
```

为了使计算结果能够直观地表现出来，还需要用绘图函数将时间信号 $x(t)$ ，信号的幅度谱 $|X(j\omega)|$ 和相位谱 $\angle X(j\omega)$ 分别以图形的方式表现出来，并对图形加以适当的标注。

4.2 用 MATLAB 实现傅里叶逆变换

连续时间傅里叶逆变换可用式 2.7 进行计算。式 2.7 重写如下：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

从定义式可看出，其计算方法与傅里叶变换是一样的，因此可以采用同样的矩阵运算的方法来计算，即

$$x(t) = X(j\omega) * \exp(j\omega' * t) * d\omega$$

具体的 MATLAB 函数如下：

```
t = -5:0.01:5; % 指定信号的时间范围，此范围应根据信号的持续时间确定。
dw = 0.1; w = -4*pi:dw:4*pi;
X = input('Type in the expression of X(jw)');
x = X * exp(jw'*t) * dw;
```

然后用绘图函数就可以绘制出逆变换得到的时域信号波形图。

另外，MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 提供了“能直接求解傅里叶变换及其逆变换的函数 `fourier` 和 `ifourier`。感兴趣可以自查资料。

例 6 用数值计算法实现门函数 $f(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$ 的傅里叶变换，并画出幅度频谱图。

分析： 该信号的频谱为 $F(j\omega) = 2Sa(\omega)$ ，其第一个过零点频率为 π ，一般将此频率认为是信号的带宽。但考虑到 $F(j\omega)$ 的形状（为抽样函数），假如将精度提高到该值的 50 倍，

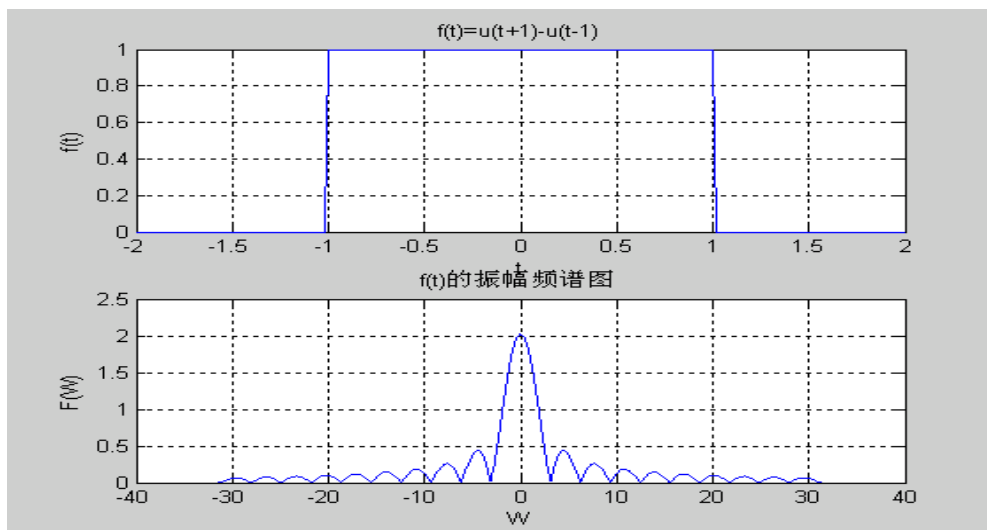
即取 $\omega_0 = 50\omega_B = 50\pi$ ，则据此确定的 Nyquist 取样间隔为：
$$\tau \leq \frac{1}{2F_0} = \frac{1}{2 \times \frac{\omega_0}{2\pi}} = 0.02。$$

MATLAB 程序如下：

```
R=0.02; %取样间隔 τ=0.02
t=-2:R:2; % t 为从-2 到 2, 间隔为 0.02 的行向量,有 201 个样本点
ft=[zeros(1,50),ones(1,101),zeros(1,50)]; % 产生 f(t)的样值矩阵（即 f(t)的样本值组成的行向量）

W1=10*pi; %取要计算的频率范围
M=500; k=0:M; w=k*W1/M; %频域采样数为 M, w 为频率正半轴的采样点
Fw=ft*exp(-j*t'*w)*R; %求傅氏变换 F(jw)
FRw=abs(Fw); %取振幅
W=[-fliplr(w),w(2:501)]; %由信号双边频谱的偶对称性，利用 fliplr(w)形成负半轴的点，% w(2:501)为正半轴的点，函数 fliplr(w)对矩阵 w 行向量作 180 度反转
FW=[fliplr(FRw),FRw(2:501)]; %形成对应于 2M+1 个频率点的值
Subplot(2,1,1); plot(t,ft); grid; %画出原时间函数 f(t)的波形，并加网格
xlabel('t'); ylabel('f(t)'); %坐标轴标注
title('f(t)=u(t+1)-u(t-1)'); %文本标注
subplot(2,1,2); plot(W,FW); grid on; %画出振幅频谱的波形,并加网格
xlabel('W'); ylabel('F(W)'); %坐标轴标注
title('f(t)的振幅频谱图'); %文本标注
```

运行结果如下：



三、实验内容和要求

实验前，必须首先阅读本实验原理，读懂所给出的全部范例程序。实验开始时，先在计算机上运行这些范例程序，观察所得到的信号的波形图。并结合范例程序应该完成的工作，进一步分析程序中各个语句的作用，从而真正理解这些程序。

实验前，一定要针对下面的实验项目做好相应的实验准备工作，包括事先编写好相应的实验程序等事项。

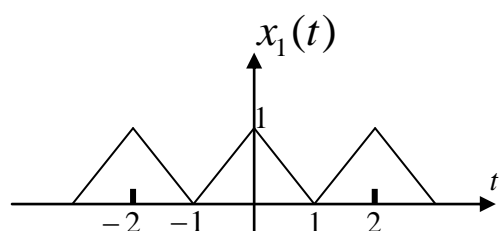
1. 分析例 5 中当周期矩形脉冲的周期 T 保持不变时，脉冲宽度 τ 与频谱的关系。(1)

$T=4\pi, \tau=\pi, m=40$; (2) $T=4\pi, \tau=\pi/2, m=40$; (3) $T=4\pi, \tau=\pi/4, m=40$ 。

2. 分析当周期矩形脉冲的脉冲宽度 τ 保持不变时，周期 T 与频谱的关系。(1)

$T=4\pi, \tau=\pi, m=40$; (2) $T=16\pi, \tau=\pi, m=160$; (3) $T=100\pi, \tau=\pi, m=1000$ 。

2. 给定如下周期信号：



(1) 手工计算 $x_1(t)$ 傅里叶级数的系数。

(2) 用 MATLAB 以计算 $x_1(t)$ 的傅里叶级数的系数，画出相应的图形。

(3) 手工计算和仿真出来的系数是否相同？如果不同，分析原因。

(4) 绘制出原始信号 $x_1(t)$ 的波形图，用有限项级数合成的 $y_1(t)$ 的波形图，以及 $x_1(t)$ 的幅度频谱和相位频谱的谱线图。输入不同的 N 值，观察合成的信号波形中，是否会产生 Gibbs 现象？为什么？

3. 给定两个时限信号：

$$x_1(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t < -1 \\ 1, & -1 \leq t < 1 \\ -t+2, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)[u(t+1) - u(t-1)]$$

(1) 利用单位阶跃信号 $u(t)$ ，将 $x_1(t)$ 表示成一个数学闭式表达式，并手工绘制 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的时域波形图。

(2) 手工计算 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的傅里叶变换(如能够用傅里叶变换的性质计算最好)，并手工绘制出它们的幅度谱和相位谱。

(3) 利用编程，计算并绘制出信号的时域波形、幅度谱。

3. 求出抽样信号函数的傅里叶变换，观察并验证傅里叶变换的尺度变换性质。

四、实验报告要求

1、按要求完整书写你所编写的全部 MATLAB 程序

- 2、详细记录实验过程中的有关信号波形图（存于自带的 U 盘中），图形要有明确的标题。
全部的 MATLAB 图形应该用打印机打印，然后贴在本实验报告中的相应位置，禁止复印件。
- 3、实事求是地回答相关问题，严禁抄袭。