

实验五 连续时间 LTI 系统的复频域分析

一、实验目的

- 1、掌握拉普拉斯变换的物理意义、基本性质及应用；
- 2、掌握用拉普拉斯变换求解连续时间 LTI 系统的时域响应；
- 3、掌握系统函数的概念，掌握系统函数的零、极点分布（零、极点图）与系统的稳定性、时域特性等之间的相互关系；
- 4、掌握用 MATLAB 对系统进行变换域分析的常用函数及编程方法。

基本要求：掌握拉普拉斯变换及其基本性质，掌握应用拉普拉斯变换求解系统的微分方程，能够自己编写程序完成对系统时域响应的求解。掌握并理解系统函数的概念，掌握系统函数零极点与系统时域和频域特性之间的关系，能够编写程序完成对系统的一些主要特性如稳定性、因果性等分析。

二、实验原理及方法

1、连续时间 LTI 系统的复频域描述

拉普拉斯变换（The Laplace transform）主要用于系统分析。描述系统的另一种数学模型就是建立在拉普拉斯变换基础上的“**系统函数（System Function）**”—— $H(s)$ ：

$$H(s) = \frac{Y(s) \rightarrow \text{系统冲击响应的拉氏变换} L[y(t)]}{X(s) \rightarrow \text{系统激励信号的拉氏变换} L[x(t)]} \quad 5.1$$

系统函数 $H(s)$ 的实质就是系统**单位冲激响应（Impulse Response） $h(t)$** 的拉普拉斯变换。因此，系统函数也可以定义为：

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad 5.2$$

所以，系统函数 $H(s)$ 的一些特点是和系统的时域响应 $h(t)$ 的特点相对应的。在教材中，我们求系统函数的方法，除了按照拉氏变换的定义式的方法之外，更常用的是根据描述系统的**线性常系数微分方程（Linear Constant-Coefficient Differential Equation）**，经过拉氏变换之后得到系统函数 $H(s)$ 。

假设描述一个连续时间 LTI 系统的线性常系数微分方程为：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad 5.3$$

对式 4.3 两边做拉普拉斯变换，则有

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

即

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad 5.4$$

式 5.4 告诉我们，对于一个能够用线性常系数微分方程描述的连续时间 LTI 系统，它的系统函数是一个关于复变量 s 的有理多项式的分式，其分子和分母的多项式系数与系统微分方程左右两端的系数是对应的。根据这一特点，可以很容易的根据微分方程写出系统函数表达式，或者根据系统函数表达式写出系统的微分方程。

系统函数 $H(s)$ 大多数情况下是复变函数，因此， $H(s)$ 可以有多种表示形式：

1、直角坐标形式： $H(s) = \text{Re}(s) + j\text{Im}(s)$

2、零极点形式：

$$H(s) = \frac{k \prod_{j=1}^M (s - z_j)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}$$

3、部分分式和形式： $H(s) = \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{s - s_k}$ （假设系统的 $N > M$ ，且无重极点）

根据我们所要分析的问题的不同，可以采用不同形式的系统函数 $H(s)$ 表达式。

在 MATLAB 中，表达系统函数 $H(s)$ 的方法是给出系统函数的分子多项式和分母多项式的系数向量。由于系统函数的分子和分母的多项式系数与系统微分方程左右两端的系数是对应的，因此，用 MATLAB 表示系统函数，就是用系统函数的两个系数向量来表示。

应用拉普拉斯变换分析系统的主要内容有：

- 1、分析系统的稳定性；
- 2、分析系统的频率响应。

分析方法主要是通过绘制出系统函数的零极点分布图，根据零极点分布情况，判断系统的稳定性。

MATLAB 中有相应的复频域分析函数，下面简要介绍如下：

[z,p,k] = tf2zp(num,den): 求系统函数的零极点，返回值 z 为零点行向量， p 为极点行向量， k 为系统传递函数的零极点形式的增益。 num 为系统函数分子多项式的系数向量， den 为系统函数分母多项式系数向量。

H = freqs(num,den,w): 计算由 num,den 描述的系统的频率响应特性曲线。返回值 H 为频率向量规定的范围内的频率响应向量值。如果不带返回值 H ，则执行此函数后，将直接在屏幕上给出系统的对数频率响应曲线（包括幅频特性取向和相频特性曲线）。

[x,y] = meshgrid(x1,y1): 用来产生绘制平面图的区域，由 $x1, y1$ 来确定具体的区域

范围，由此产生 s 平面区域。

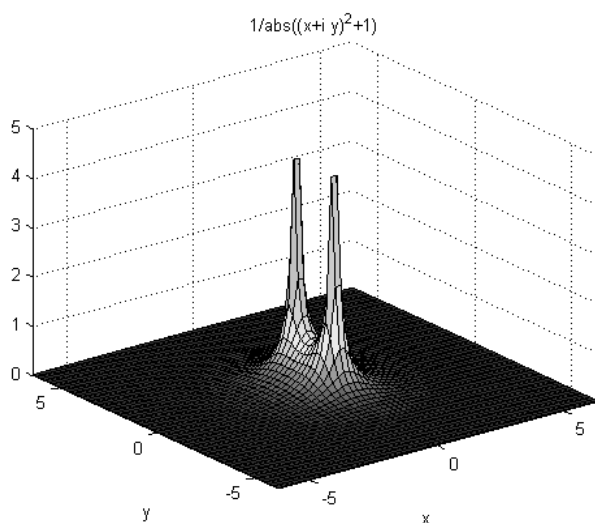
`meshgrid(x,y,fs)`: 绘制系统函数的零极点曲面图。

`H = impulse(num,den)`: 求系统的单位冲激响应, 不带返回值, 则直接绘制响应曲线, 带返回值则将冲激响应值存于向量 **h** 之中。

例: 求出连续时间信号 $f(t) = \sin(t)\varepsilon(t)$ 的拉氏变换式, 并画出图形。

```
clear;
x1=-5:0.1:5;      %设置 s 平面的横坐标范围
y1=-5:0.1:5;      %设置 s 平面的纵坐标范围
[x,y]=meshgrid(x1,y1); %产生矩阵
s=x+i*y;          %产生矩阵 s 来表示所绘制曲面图的复平面区域,
%其中矩阵 s 包含了复平面  $-6 < \sigma < 6$ ,  $-6 < j\omega < 6$  范围内以间隔 0.01 取样的所有样点
fs=1./(s.*s+1);    %计算拉氏变换在复平面上的样点值
ffs=abs(fs);       %求幅值
mesh(x,y,ffs);     %绘制拉氏变换的三维网格曲面图
surf(x,y,ffs);     %绘制带阴影效果的三维曲面图
axis([-5,5,-5,5,0,8]); %设置坐标显示范围
colormap(hsv);     %设置图形中多条曲线的颜色顺序
```

说明: 从拉普拉斯变换的三维曲面图中可以看出, 曲面图上有象山峰一样突出的尖峰, 这些峰值点在 s 平面的对应点就是信号拉氏变换的极点位置。而曲面图上的谷点则对应着拉氏变换的零点位置。因此, 信号拉氏变换的零极点位置决定了其曲面图上峰点和谷点位置。



2、系统函数的零极点分布图

系统函数的**零极点图** (**Zero-pole diagram**) 能够直观地表示系统的零点和极点在 s 平面上的位置, 从而比较容易分析系统函数的**收敛域** (**Region of convergence**) 和**稳定性** (**stability**)。

下面给出一个用于绘制连续时间 LTI 系统的零极点图的扩展函数 `splane(num,den)`:

```
% spline
% This function is used to draw the zero-pole plot in the s-plane
function spline(num,den)
```

```

p = roots(den); % Determine the poles
q = roots(num); % Determine the zeros
p = p'; q = q';
x = max(abs([p q])); % Determine the range of real-axis
x = x+1;
y = x; % Determine the range of imaginary-axis
plot([-x x],[0 0],':');hold on; % Draw the real-axis
plot([0 0],[-y y],':');hold on; % Draw the imaginary-axis
plot(real(p),imag(p),'x');hold on; % Draw the poles
plot(real(q),imag(q),'o');hold on; % Draw the zeros
title('zero-pole plot');
xlabel('Real Part');ylabel('Imaginal Part')
axis([-x x -y y]); % Determine the display-range

```

对于一个连续时间 LTI 系统，它的全部特性包括**稳定性**、**因果性（Causality）**和它具有何种**滤波特性（Frequency-domain aspect）**等完全由它的零极点在 s 平面上的位置所决定。

3、拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系

根据课堂上所学的知识可知，拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系可表述为：傅里叶变换是信号在虚轴上的拉普拉斯变换，也可用下面的数学表达式表示

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \quad 5.5$$

上式表明，给定一个信号 $h(t)$ ，如果它的拉普拉斯变换存在的话，它的傅里叶变换不一定存在，**只有当它的拉普拉斯变换的收敛域包括了整个虚轴，则表明其傅里叶变换是存在的**。下面的程序可以以图形的方式，表现拉普拉斯变换与傅里叶变换的这种关系。

```

% Relation_ft_Lt
% This program is used to observe the relationship between the Fourier transform
% and the Laplace transform of a rectangular pulse.
clear, close all,
a = -0:0.1:5;
b = -20:0.1:20;
[a, b] = meshgrid (a, b);
c = a+i*b; %确定绘图区域
c = (1-exp (-2* (c+eps)))/(c+eps);
c = abs (c); %计算拉普拉斯变换
subplot (211)
mesh (a,b,c); %绘制曲面图
surf (a,b,c);
view (-60,20) %调整观察视角
axis ([-0,5,-20,20,0,2]);
title ('The Laplace transform of the rectangular pulse');
w = -20:0.1:20;
Fw = (2*sin(w+eps).*exp(i*(w+eps)))/(w+eps);
subplot (212); plot(w,abs(Fw))

```

```
title ('The Fourier transform of the rectangular pulse')
```

```
xlabel ('frequency w')
```

上面的程序不要求完全读懂，重点是能够从所得到的图形中，观察拉和理解普拉斯变换与傅里叶变换之间的相互关系就行。

4、系统函数的极点分布与系统的稳定性和因果性之间的关系

一个稳定的 LTI 系统，它的单位冲激响应 $h(t)$ 满足绝对可积条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad 5.6$$

同时，我们还应该记得，一个信号的傅里叶变换的存在条件就是这个信号满足绝对可积条件，所以，如果系统是稳定的话，那么，该系统的频率响应也必然是存在的。又根据傅里叶变换与拉普拉斯变换之间的关系，可进一步推理出，**稳定的系统，其系统函数的收敛域必然包括虚轴。稳定的因果系统，其系统函数的全部极点一定位于 s 平面的左半平面。**

所以，对于一个给定的 LTI 系统，它的稳定性、因果性完全能够从它的零极点分布图上直观地看出。

例题 5-1: 已知一个因果的 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{d^6 y(t)}{dt^6} + 10 \frac{d^5 y(t)}{dt^5} + 48 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 148 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 306 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 401 \frac{dy(t)}{dt} + 262 y(t) = 262 x(t)$$

编写程序，绘制出系统的零极点分布图，并说明它的稳定性如何。

解: 这是一个高阶系统，显然手工计算它的极点是很困难的。可以利用前面给出的扩展函数 `splane()`，来绘制系统的零极点分布图。范例程序如下：

```
% Program5_1
% This program plots the zero-pole diagram of an LTI system described
% by the linear constant-coefficient differential equation
clear, close all,
b = 262;
a = [1 10 48 148 306 401 262];
subplot (221)
splane (b,a)
title ('The zero-pole diagram')
```

执行该程序后，得到系统的零极点分布图如图 5.1 所示。由于已知该系统是因果系统，从零极点分布图上看，它的全部极点都位于 s 平面的左半平面上，所以系统是**稳定的**。

然后，直接在命令窗口键入

```
>> roots(a)
```

回车后，就得到系统的极点为：

```
ans =
```

```
-0.5707 + 2.4716i
```

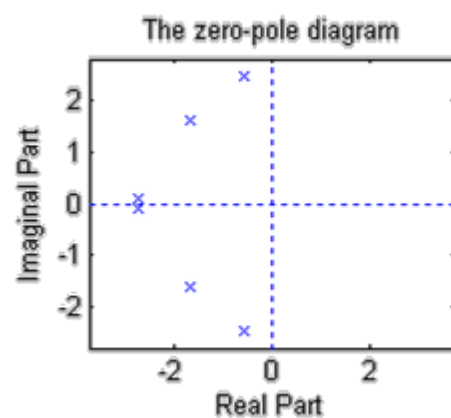


图 5.1

-0.5707 - 2.4716i
 -2.7378 + 0.0956i
 -2.7378 - 0.0956i
 -1.6915 + 1.6014i
 -1.6915 - 1.6014i

若题目中没有说明该系统是否是因果的，则需要做详细的分析。从零极点分布图上可以看出，该系统可能的收敛域共有四种可能，另外三种可能如下：

(a) 收敛域为 $\text{Re}\{s\} < -2.7378$ ，此种情况说明，该系统是一个**反因果系统 (Anticausal system)**，由于收敛域不包含虚轴，故此系统是不稳定的。

(b)、(c) 收敛域为 $-2.7378 < \text{Re}\{s\} < -1.6915$ 和 $-1.6915 < \text{Re}\{s\} < -0.5707$ ，此两种情况说明该系统是一个单位冲激响应为双边信号的非因果系统，收敛域仍不包含虚轴，所以，系统是不稳定的。

总之，系统的稳定性主要取决于系统函数的收敛域是否包含整个虚轴，而系统的因果性则取决于系统极点位置的分布。

需要特别强调的是，MATLAB 总是把由分子和分母多项式表示任何系统都当作是因果系统。所以，利用 `impz()` 函数求得的单位冲激响应总是因果信号。

5、系统函数的零极点分布与系统的滤波特性

系统具有何种滤波特性，主要取决于系统的零极点所处的位置。没有零点的系统，通常是一个低通滤波器。

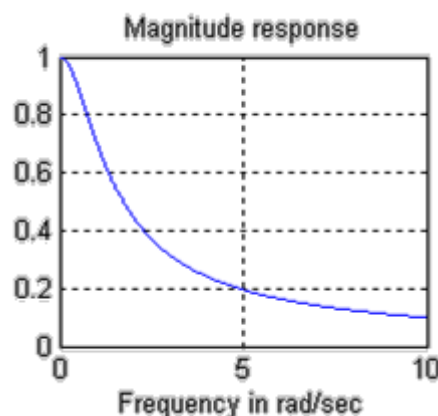
例题 5-2 已知一个系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

图 5.2

显然，这是一个一阶系统，无零点。为了确定该系统具有何种滤波特性，需要把系统的频率响应特性曲线绘制出来加以判断。借助实验三中的范例程序 `Program3_1`，可以绘制系统的频率特性曲线如图 5.2 所示。

通过编程，可以将系统的零极点分布图和系统的频率响应特性以及系统的单位冲激响应特性绘制在一个图形窗口的各个子图中，这样便于观察系统的零极点分布情况与系统的时域和频域之间的关系。如图 5.3 所示



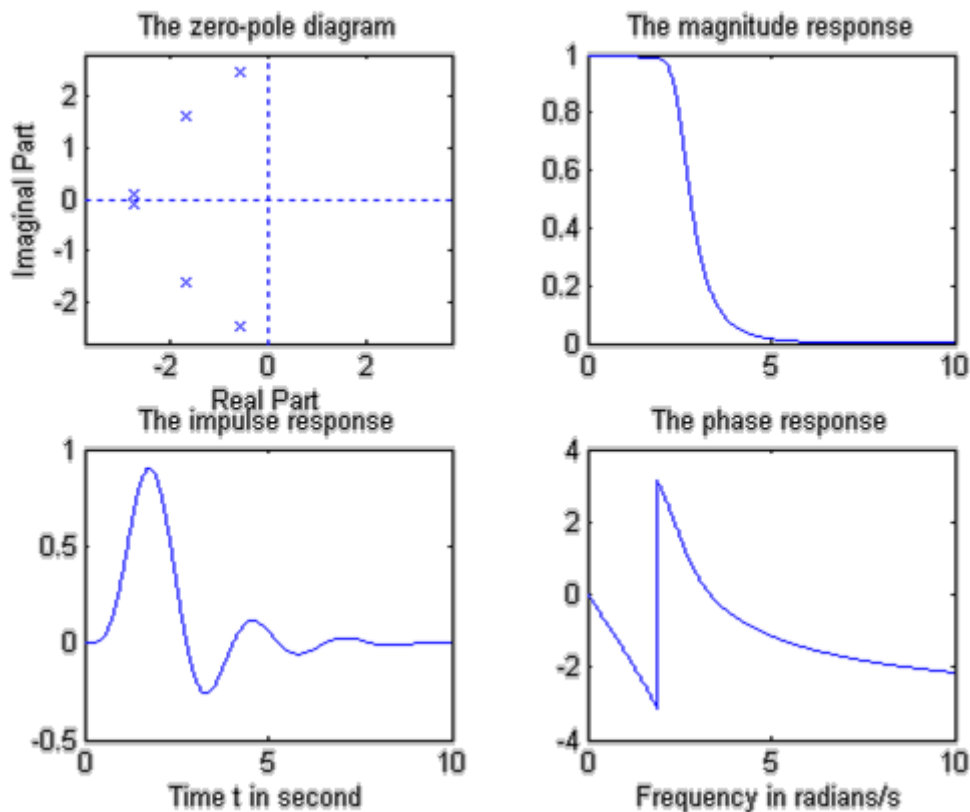


图 5.3 系统的零极点分布与系统的单位冲激响应、频率响应

6、拉普拉斯逆变换的计算

我们已经知道，直接用**拉普拉斯逆变换（Inverse transform）**的定义公式计算逆变换是很困难的，通常的计算拉普拉斯逆变换的方法是长除法（Long division）和部分分式分解法（Partial fraction expansion）。MATLAB 的内部函数 `residue()` 可以帮助我们完成拉普拉斯逆变换的计算。

例题 5-3 已知某信号的拉普拉斯变换表达式为

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

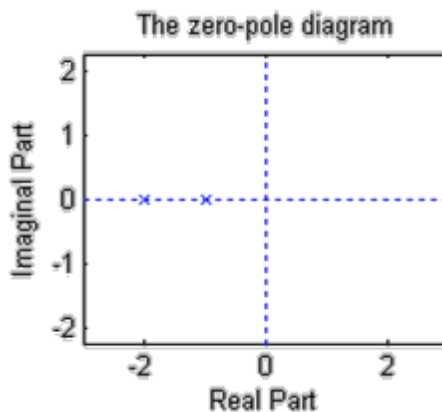
求该信号的时域表达式。

解：由于题目没有指定收敛域，所以必须考虑所有可能的情况。为此，可以先计算出该信号的拉普拉斯变换表达式的极点。很显然， $X(s)$ 有两个极点，分别为 $s = -1$, $s = -2$ 。零极点分布图如例题图 5-3 所示。

在 MATLAB 命令窗口键入：

```
>> b = 1;
>> a = [1 3 2];
>> [r, p, k] = residue(b, a)
```

命令窗口立即给出计算结果为：



```

r =
    -1
     1
p =
    -2
    -1
k =
    []

```

例题图 5-3

根据 r、p、k 之值，可以写出 X(s) 的部分分式之和的表达式为：

$$X(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

然后根据不同的 ROC，可写出 X(s) 的时域表达式 x(t)。

第一种情况，ROC 为 $\text{Re}\{s\} < -2$ ，则 x(t) 为反因果信号，其数学表达式为

$$x(t) = e^{-2t}u(-t) - e^{-t}u(-t)$$

第二种情况，ROC 为 $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$ ，则 x(t) 为双边非因果信号，其数学表达式为

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$$

第三种情况，ROC 为 $\text{Re}\{s\} > -1$ ，则 x(t) 为因果信号，其数学表达式为

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)$$

在这个例题中，函数 residue() 仅仅完成了部分分式分解的任务，至于逆变换的数学表达式的结果是什么，还得结合收敛域的不同才能写出。

如果 X(s) 的分子的阶不小于分母的阶，则 k 将不等于一个空矩阵，例如，当

$X(s) = \frac{s^3}{s^2 + 3s + 2}$ 时，我们在命令窗口中键入：

```

>> b = [1 0 0 0];
>> a = [1 3 2];
>> [r,p,k]=residue(b,a)

```

则：

```

r =
     8
    -1
p =
    -2
    -1
k =
     1    -3

```

这里的 k = [1 3]，实际上是将 X(s) 做了一个长除法后，得到的商的多项式。所以，根据上面的 r、p、k 之值，可写出 X(s) 的部分分式之和的表达式为：

$$X(s) = s - 3 + \frac{8}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

有关函数 residue() 的详细用法，可通过在线帮助加以了解。

三、实验内容及步骤

实验前，必须首先阅读本实验原理，了解所给的 MATLAB 相关函数，读懂所给出的全部范例程序。实验开始时，先在计算机上运行这些范例程序，观察所得到的信号的波形图。并结合范例程序所完成的工作，进一步分析程序中各个语句的作用，从而真正理解这些程序。

实验前，一定要针对下面的实验项目做好相应的实验准备工作，包括事先编写好相应的实验程序等事项。

1. 将绘制零极点图的扩展函数文件 `splane` 以 `splane` 为文件名存盘。
2. 运行程序 `Relation_ft_lt`，观察拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系。在点击工具条上的旋转按钮，再将鼠标放在曲面图上拖动图形旋转，从各个角度观察拉普拉斯曲面图形，并同傅立叶变换的曲线图比较，加深对拉普拉斯变换与傅里叶变换之间关系的理解与记忆。
3. 编写程序 `Q5_3`，能够接受从键盘输入的系统函数的分子分母多项式系数向量，并绘制出系统的零极点图、系统的单位冲激响应、系统的幅度频率响应和相位频率响应的图形。各个子图要求按照图 5.3 布置。

4. 执行程序编写 `Q5_3`，输入因果的系统函数 $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$ 的分子分母系数向量，

绘制图形，分析从图形中可以看出该系统的零点和极点位置是多少？从时域和零极点分布特征两个方面说明该系统是否是稳定的系统？从频率响应特性上看，该系统具有何种滤波特性？

5. 执行程序编写 `Q5_3`，输入因果的系统函数

$$H(s) = \frac{\frac{1}{a}s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

此处 a 取 1，执行程序 `Q5_3`，输入该系统的分子分母系数向量，仿真分析，从图形中可以看出，该系统的零点和极点的位置是多少？从时域和零极点分布特征两个方面说明该系统是否是稳定的系统？从频率响应特性上看，该系统具有何种滤波特性？

改变系统函数中的 a 值，分别取 0.6、0.8、4、16 等不同的值，反复执行程序 `Q5-3`，观察系统的幅度频率响应特性曲线（带宽、过渡带宽和阻带衰减等）。观察 a 取不同的值时系统的幅度频率响应特性曲线的变化（带宽、过渡带宽和阻带衰减等），请用一段文字说明零点位置对系统滤波特性的这些影响。

6. 对于因果系统 $H(s) = \frac{\frac{1}{a}s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ ，已知输入信号为 $x(t) = \sin(t) + \sin(8t)$ ，要求

输出信号 $y(t) = K \sin(t)$ ， K 为一个不为零的系数，根据 `Q5-5` 所得到的不同 a 值时的幅度频率响应图形，选择一个合适的 a 值从而使本系统能够实现本题的滤波要求。选择的依据是什么？编写一个 MATLAB 程序 `Q5_6`，仿真这个滤波过程，要求绘制出系统输入信

号、系统的单位冲激响应和系统的输出信号波形。

7. 已知一个因果系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$ ，作用于系统的输入信号为

$x(t) = e^{-4t}u(t)$ ，试用 MATLAB 帮助你求系统的响应信号 $y(t)$ 的数学表达式。

四、实验报告要求

- 1、按要求完整书写你所编写的全部 MATLAB 程序
- 2、详细记录实验过程中的有关信号波形图（存于自带的 U 盘中），图形要有明确的标题。全部的 MATLAB 图形应该用打印机打印，然后贴在本实验报告中的相应位置，禁止复印件。
- 3、实事求是地回答相关问题，严禁抄袭。