Ejercicio 1: Definición de campo k

Sea k un conjunto no vacío. k es campo si sólo sí existen dos operaciones binarias

$*: k \times k \to k$ $\quad$ $\#: k \times k \to k$

tal que para cada $a, b, c \in k$

- $a * b$, $a \# b \in k$ $\quad$ $(a * b) * c = a * (b * c)$
  $a * b = b$, $a \# b = b \# a$ $\quad$ Existe e_* $e_\#$
  Existe $f, g \in k$, $\to$ $a * f = e_*$ $\quad$ $a \# g = e_\#$

  $(a * b) \# c = a * c \# b * c$

Ejercicio 2:

- ¿Cuándo k es un campo?

R= Cuando cumpla todas las propiedades del ejercicio 1.

- ¿Cuándo un conjunto V es espacio sobre k?

R= Si sólo si existen dos operaciones

$+: V + V \to V$ $\quad$ $\cdot: k \times V \to V$

y se cumplen ciertas propiedades

Ejercicio 6:

EDO: una ecuación que contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente.

EDP: una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables independientes.

Lineal: una ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, es lineal, si lo es en $y, y', \dots, y^{(n)}$, cuando tiene la forma

$$a_n(x) y^{(n)} + \dots + a_0(x) y = g(x)$$

Homogénea: una ecuación lineal

$$a_n(x) y^{(n)} + \dots + a_0(x) y = g(x)$$

es homogénea si $g(x) = 0 \rightarrow L(y) = \sum_{0}^{n} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} y = 0$

Si $g(x) \neq 0$ es no homogénea.

Ejercicio 7:

$1\ y' = 0 \rightarrow 2.$ $\cancel{y + y^2} = 0$

$y + y' = 0$

Ejercicio 8:

Sean V, W espacio vectorial sobre el campo k y $T: V \to W$ aplicación. Diremos que T es una transformación lineal si y solo si para cada $c \in k$ se cumple:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2. $T(cv) = c\,T(v)$

$\to T(au+bv) = aT(u) + bT(v)$

Ejemplos

1 - $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid T((x,y)) = (x+2y, x-y, y)$

2 - $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

3 - $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \mid T(x) = (x, x+1)$

Ejercicio 9:

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ (por teoremas de cálculo).

Sabemos que una función continua en algún intervalo, es Rieman integrable en dicho intervalo (por Teorema fundamental).

Por lo que $f(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$, entonces es integrable en $f: [0,1]$.

Ejercicio 10:

- $\int \frac{\log(x)}{x} dx$ cambio de variable

$u = \log x \quad du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{u}{x} \cdot x \, du = \int u \, du \rightarrow \frac{u^2}{2} + C$$

$$\boxed{\frac{(\log x)^2}{2} + C}$$

- $\int \frac{1}{x^5+x^4-x^3+x^2-2x} = \int \frac{1}{x(x-1)(x+2)(x^2+1)}$

Fracciones parciales

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x^2+1)} = 1$$

$$a(x-1)(x+2)(x^2+1) + b(x)(x+2)(x^2+1) + c(x)(x-1)(x^2+1) + d(x)(x-1)(x+2) = 1$$

$x = 1$

$$b(2)(2) = 1 \rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$x=0 \quad a(-1)(2)(1) = 1 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$

$x = -2 \quad c(-2)(-3)(5) = 1 \rightarrow c = \frac{1}{30}$

$x = \sqrt{-1} = i \quad d(i)(i-1)(i+2) = 1 \quad d = \frac{1}{i(i-1)(i+2)}$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{30}}{x+2} + \frac{\frac{1}{i(i-1)(i+2)}}{x^2+1}\, dx .$$

$$\boxed{-\frac{\ln(|x|)}{2} + \frac{\ln(|x+1|)}{4} + \frac{\ln(|x+2|)}{30} + \int \frac{1}{((i-1)(i+2)} dx + C}$$

$$\bullet \int \frac{5x^4+4x^3+\cancel{3}x^2+2x-2}{2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-4x} dx$$

cambio de variable

$$u = 2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-4x \quad du = 10x^4+8x^3+-6x^2+4x -4\,dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\log(2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-4x)+C}$$

$$\bullet \int \sqrt[25]{\log(x-\cos(x^2-1))-3tg(x)}\, dy$$

Como es respecto a $y \to = \boxed{\sqrt[25]{\log(x-\cos(x^2-1))-3tg(x)}\, y + C}$

Ejercicio 11

$\bullet (3x-6y+4)y' + x - 2y = -3$, con $y(0) = 1$

$L = (3x-6y+4)\frac{dy}{dx}$ + Lineal no homogenea

Solución $y(0) = -\frac{2\ln(3y-0-2)}{5} - \frac{6(1)}{5} = 0 + C$

$C = 2\ln(0) - \frac{6}{5}$

$\cdot\ w' = tg^2(z+w) \quad z_0=0 \quad y\ w(z_0)=0$

$L = \frac{dx}{dz} - L(g) = tg^2(z+w)$ No lineal

no homogénea

Solución $\quad w(z_0)=0 \rightarrow \frac{\tan(0+0)}{2\tan^2(0)+2} + 0 = C$

$\boxed{C=0}$

$\cdot\ r' = 2\sqrt{r+1}\,\cos(\theta) \quad$ con $\theta_0=\pi \quad y(\theta_0)=0$

$L = \frac{d}{d\theta} + 2\frac{d^0}{d\theta^0} + 1^{\frac{1}{2}}$ No lineal

no homogénea

Separable

Solución

$$\int \frac{1}{\sqrt{y+1}}\,dy = \int 2\cos(x)\,dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{r+1}} = \int 2\cos(\theta)\,d\theta \rightarrow \sqrt{r+1} = sen(\theta)+C$$

$y(\theta_0) = \sqrt{r+1} - sen(\pi) \Rightarrow C \quad \boxed{C=1}$

Ejercicio 12:

sea $u, v, w \in \mathbb{C}^2$ y $a, b, c \in \mathbb{C}$

- $u+v = (w_1+z_1, w_2+z_2)$ donde
  $w_1+z_1 \in \mathbb{C}^2$ ✓

- $(u+v)+w = (w_1+z_1, w_2+z_2) + (v_1, v_2)$ ✓
  $= (w_1, w_2) + (z_1+v_1, z_2+v_2)$

- $(u+v) = (w_1+z_1, w_2+z_2) = (z_1+w_1, z_2+w_2)$ ✓

- $0 \in \mathbb{C}^2 = (0,0)$ ✓

- $z \in \mathbb{C}^2 \rightarrow u+u' = u+(-u) = (w_1-w_1, w_2-w_2)$
  $= (0, 0)$

- $ab = (wz_1, wz_2) = (v_1+z_1, v_2+z_2)$
  $= av$ ✓

- $(ab)v = wz(w_1, w_2) = w(zw_1, zw_2)$ ✓

- $(a+b)v = w+z(w_1, w_2) = (ww_1+zw_1, ww_2+zw_2)$ ✓

- $1 \in \mathbb{C} \rightarrow 1w = w$

Es espacio vectorial por cumplir con todas sus características.