Carlos Alberto Gallegos Tena

Ejercicio 1: es una ecuación diferencial que es de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,d = 0$ donde $M_y = N_x$. Es decir, sus derivadas cruzadas son iguales. Es exacta si solo si existe $\phi(x,y)$ tal que $\phi_x(x,y) = M(x,y)$ y $\phi_y(x,y) = N(x,y)$. Donde ϕ tiene derivadas continuas

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\phi = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ejercicio 2: un función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado n en D si sólo si para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Ejercicio 3:

Ejercicio 4:

• $(y+3x-1)-(7x-y+1)y' = 0$ No es exacta

$M(x,y) = y+3x-1 \qquad M_y = 1$

$N(x,y) = -7x+y-1 \qquad N_x = 7$

Encontremos μ

$$\frac{M_y - N_x}{N} = ?$$

• $(ab^2 - atg(b)) + (2ab - a\sec^2(b))\frac{da}{db} = 0$

$M(a,b) = ab^2 - a\tan(b) \qquad M_a = b^2 - \tan(b)$

$N(b,a) = 2ab - a\sec^2(b) \qquad M_b = 2a - 2a\sec^2(b)\tan(b)$

Inexacta

$M(b,a) = ab^2 - atg(b) \qquad M_a$

$$\frac{dw}{dt} + 3t^2 w = 6t w^4 \quad \text{con } y(1) = 0 \rightarrow w(1) = 0$$

Ecuación de Bernoulli

$$P = 3t^2 w \quad Q = 6t w^4 \quad n = 4$$

Hacemos cambio de variable $z = y^{1-n} \rightarrow z = w^{-3}$

$$\frac{dz}{dt} = (1-4)\, w^{-4} \frac{dw}{dt}$$

Sustituyendo
$\rightarrow$

$$\frac{dz}{dt} = (1-4=-3)\, w^{-4} \left[6t w^4 - 3t^2 w \right]$$

$$\frac{dz}{dt} = -3 \left[6t - 3t^2 z \right]$$

$$z' + (3)\, 3t^2 \cancel{w} = (-3)\, 6t$$

$$\frac{dz}{dt} + 9t^2 = -18t \rightarrow dz = (-9t^2 - 18t)\, dt$$

es separable, se resuelve $\rightarrow \int dz = \int -9t^2 - 18t \, dt$

por lo que $\cancel{z} = -3t^3 - 9t^2 + C$

Regresando a nuestra variable $z = w^{-3}$

$$\rightarrow z = \frac{1}{w^3} = -3t^3 - 9t^2 + C \rightarrow w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3 - 9t^2 + C}}$$

por lo que $w(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3-9+C}} = 0 = \sqrt[3]{\frac{1}{-12+C}}$

por lo que $\boxed{C = 12}$ Solución $\boxed{w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3 - 9t^2 + 12}}}$

Ejercicio 5: sean P y Q funciones continuas en (a,b) que contiene el punto x_0. Entonces para cualquier valor inicial y_0 existe una única solución y en (a,b) al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad y(x_0) = y_0$$

Donde la solución está dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\, Q(x)\,dx + C\right]$$ para un valor específico de C.

donde μ es el factor integrante

Ejercicio 6:

• $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \to \underbrace{x\,\mathrm{sen}(x) + y^2}_{\text{NO}}$ / sea $t \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(x) + y^2 \to f(tx,ty) = tx\,\mathrm{sen}(tx) + t^2y^2$

$\underbrace{\text{No es homogénea porque } f(tx,ty) \neq tf(x,y)}$

• $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \to \underbrace{x^2y - x^3 + 3y^3}_{\text{SI}}$ sea $t \in \mathbb{R}$

$g(tx,ty) = t^2x^2ty - t^3x^3 + 3t^3y^3 \to t(txy) = t^3x^3 + 3t^3y^3$ ✓

~~Es~~ Es homogénea porque ~~no se puede expresar~~ ~~$tg(x,y) \neq g(tx,ty)$~~. $t\,g(x,y) = g(tx,ty)$

⑤

- $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \to \dfrac{x+y-1}{2x-y+3}$ sea $t \in \mathbb{R}$

$$h(tx,ty) = \frac{tx+ty-1}{2tx-ty+3} = \frac{t(x+y)-1}{t(2x-y)+3} = \frac{\cancel{t}(x+y-\frac{1}{t})}{\cancel{t}(2x-y+\frac{3}{t})}$$

$\underbrace{\text{No es homogénea porque}}$ $h(tx,ty) \neq t\,h(x,y)$

- $l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \to \log(xy) + e^{xy}$ $t \in \mathbb{R}$

$$l(tx,ty) = \log(tx\,ty) + e^{tx\,ty} = \log(t^2xy) + e^{t^2xy}.$$

$$= \log(t^2) + \log(xy) + e^{t^2xy}$$

como $\log(t^2xy) + e^{t^2xy} \neq t^2\log(xy) + t^2e^{xy}$

$\to$ $\underbrace{\text{No es homogénea}}$ $l(tx,ty) \neq t\,l(x,y)$

Ejercicio 7: $M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$ es homogénea si y solo si M y N son funciones homogéneas de grado n.

1) $x + y\,y' = 0$ H. grado 1

2) $y + x\,y' = 0$ H. grado 1

Ejercicio 8: (6)

- $x^2 + xy - y^2 = x^2 y' \rightarrow -(x^2 + xy - y^2) + x^2 y' = 0$

$-(t^2x^2 + t^2xy - t^2y^2) \rightarrow t^2(x^2 + xy - y^2)$

$t^2x^2 \longrightarrow$ Es homogénea por teorema visto en clase

Solución:

$(x^2 + xy - y^2)\,dx = x^2\,dy$ tomamos $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux$

$dy = u\,dx + x\,du$

Sustituyendo y Simplificando

$(x^2 + xux - u^2x^2)\,dx = x^2(x\,du + u\,dx)$

$x^2(1 + \cancel{u} - u^2)\,dx = x^3\,du + x^2\cancel{u}\,dx$

entre x^2

$x^2(1-u^2)\,dx = x^3\,du \rightarrow (1-u^2)\,dx = x\,du$

Es separable $\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{1-u^2}\,du$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{1-u^2}\,du \rightarrow \log(|x|) = \frac{\log(u+1) - \log(u-1)}{2} + C$

$\rightarrow \frac{\log(|u+1|) - \log(|u-1|)}{2} = \log(|x|) + C \xrightarrow{\text{aplicando } e} \frac{1}{\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = xe^C$

Regresando a $u = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{1}{\left(\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = xe^C \rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{y+x}}{\sqrt{y-1}} = xe^C}$

(7)

- $y' = \dfrac{x - y - \sqrt{x^2-y^2}}{x+y} \to (x+y)y' = x - y - \sqrt{x^2-y^2}$

$$\to (-x+y+\sqrt{x^2-y^2}) + (x+y)y' = 0$$

$M = (-x+y+\sqrt{x^2-y^2}) \to -tx + ty + \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2} = t(-x+y\ldots)$

$N = x+y \to tx + ty = t(x+y)$ ✓

Si es homogenea por teorema visto en clase

$(x+y)\,dy = (x - y - \sqrt{x^2-y^2})\,dx$ Tomando $u = \dfrac{y}{x}$

$y = ux \quad dy = u\,dx + x\,du$

$(x+ux)(u\,dx + x\,du) = (x - ux - \sqrt{x^2-(ux)^2})\,dx = (x - ux - \sqrt{x^2(1-u^2)})\,dx$

$$(x+ux)(u\,dx + x\,du) = (x - ux - x\sqrt{1-u^2})\,dx$$

$$= x\,dx - ux\,dx - x\sqrt{1-u^2}\,dx$$

$\dfrac{1}{x} \to (1+u)(u\,dx + x\,du) = dx - u\,dx - \sqrt{1-u^2}\,dx$

$\dfrac{1}{dx} \to (1+u)\left(u + x\dfrac{du}{dx}\right) = 1 - u - \sqrt{1-u^2}$

$$u + x\frac{du}{dx} + u^2 + ux\frac{du}{dx} = 1 - u - \sqrt{1-u^2} = x\frac{du}{dx}(1+u) + u^2 + u$$

$$x\frac{du}{dx}(1+u)+u^2+u=1-u-\sqrt{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}(1+u)=1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}$$

$$\rightarrow \frac{(1+u)}{1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}}\,du=\frac{1}{x}\,dx$$

Es separable

$$\int\frac{1+u}{1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx$$

Regresando el cambio

$$\int\frac{1+\frac{y}{x}}{1-2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2-\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=\log(|x|)+C$$