1- Hacemos

$$y^2 - 2yc + c^2 = cx$$

entonces $\boxed{y = 2\sqrt{x} + c}$

Notamos que solución particular

$$4(x)\,2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x} =$$

$$4/x\;2\;\frac{1}{4/x} + 2x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x}$$

$$2 + \frac{\cancel{2x}}{3\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = \boxed{2 + \frac{\cancel{x}}{x} - 2\sqrt{x}}$$

Entonces $\rightarrow$ $y(1) = 2 + \frac{1}{1} - 2 = \boxed{0}$

2-

$$y' = \frac{1-x^2}{y^2}$$

Notamos que e variable separables donde

$$y' = \frac{1-x^2}{y^2} \rightarrow y^2 y' = 1 - x^2$$

Por lo que

$$\int y^2\, dy = \int 1 - x^2\, dx \rightarrow \frac{y^3}{3} = x - \frac{x^3}{3}$$

Por lo que $\boxed{y = \sqrt[3]{3\left(x - \frac{x^3}{3}\right)}}$

$$\frac{dw}{dr} = w(2\,sen(r))$$

Primero

$$dw = w(2\,sen(r))\,dr$$

$$\frac{dw}{w} = 2\,sen(r)\,dr$$

Es separable

$$\int \frac{1}{w}\,dw = \int 2\,sen(r)\,dr$$

$$log(w) = -2\cos(r) + C$$

Por lo que

$$w = e^{-2\cos(r)} + C$$

3-

$0.3kg \rightarrow 1$ litro $\quad 400\,l$

$A(0) = 2 \quad \therefore A(10) = ?$

$y' = 400y + 10x + 2$

$\int -400y + y' = \int 10x + 2\,dx$

$-\frac{400y^2}{2} + 1 = \frac{10x^2}{2} + 2x$

$y = \cancel{200}\sqrt{\frac{10x^2}{2} + 2x + 1}$

$y = 2\sqrt{\frac{10x^2}{2} + 2x + 1}$

Donde

$y(0) = 2\sqrt{0 + 0 + 1} = 2\sqrt{1} = 2$

y $\quad y(10) = 2\sqrt{\frac{10(10)^2}{2} + 20 + 1}$

$= \boxed{24.82}$

4- $\frac{dw}{dt} - w = e^{3t}$

$M(t,y) = -(e^{3t} + w) \rightarrow M_w = -1$

$N(t,y) = 1 \rightarrow N_t = 0$

$\frac{M_w - N_t}{N} = \frac{-1 - 0}{1} = -1 \;\; \cancel{o}$

$\frac{N_t - M_w}{-(e^{3t}+w)} = \frac{-1}{-(e^{3t}+w)}$ No hay factor integrante

Notamos que es de la forma

$\frac{du}{dt} + P(t)u = Q(t)u^n \quad n \neq 1$

donde $P = -w \quad Q = e^{3t}$

La homogenea asociada es

$w' - w = 0$

$y = \frac{e^{3x}}{2} + e^{x} \; ($

5 - Para que sea factor integrante

se necesita q

$\mu(x)\, y(x) \longrightarrow$ es exacta

Tomamos

$$M(x,y) = \left(\sqrt{1+sen^2 x}\, y - x\right) \exp\left(\int_0^x \sqrt{1+sen^2(t)}\, dt\right)$$

$$N(x,y) = 1 \exp\left(\int_0^x \sqrt{1+sen^2(t)}\, dt\right)$$

Por lo que

$M_y = \; ?$

6- $P(x) \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,2] \\ 3 \text{ si } x \in (2,\infty) \end{cases}$

$y' + P(x)\,y = x$

i) $x \in [0,2] \rightarrow y' = x - (1)y$

$y = \cancel{\frac{x^2}{2}} \cancel{+k}$ con $x = 0$

$y(0) = 0$ $\boxed{y = x - 1 + \frac{1}{e^x}\,C}$

ii) $x \in (2,\infty)$

$y' + 3y = x \longrightarrow \cancel{x} = \frac{9y+1}{3}$

$\boxed{y = \left(-\frac{1}{e^{3x}} - 3x + 1\right)\frac{-1}{9}\;C}$

cel

7 - Por definición una ecuación es exacta si solo si

- Existe una función $\phi(x,y)$ tal que $\phi_x(x,y) = M(x,y)$ y $\phi_y(x,y) = N(x,y)$.
- ϕ tiene derivadas continuas y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\phi = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo que se cumple

en este caso que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \phi = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo que exacta

8- $(x^{\frac{10}{3}} - 2y) + xy' = 0$

Para ver si es exacta hacemos

$M(x,y) = x^{\frac{10}{3}} - 2y \rightarrow M_y = \cancel{\frac{10}{3} x^{\frac{7}{3}}} \boxed{-2}$

$N(x,y) = x \rightarrow N_x = 1$

Por lo que $M_y \neq N_x \rightarrow -2 \neq 1$

No es exacta

$w(1) = \pi$

• $\left(\frac{1}{\theta} + 2w^2\theta\right) + \left(2w\theta^2 - \cos w\right)\frac{dw}{d\theta} = 0$

$M(\theta,w) = \frac{1}{\theta} + 2w^2\theta \rightarrow M_w = \boxed{4w\theta}$

$N(\theta,w) = 2w\theta^2 - \cos w \rightarrow N_\theta = \boxed{4w\theta} - 0$

Si es exacta $\boxed{M_w = N_\theta}$ ✓

$\cancel{\theta^2 y^2} = \cancel{\operatorname{sen}(y)}$ $\boxed{\theta^2 w^2 = \operatorname{sen}(w) - \ln(\theta) + C}$

9- Tenemos la curva de nivel

$$F(x,y) = k \quad \text{con pendiente} \quad f_k(x,y)$$

Por definición sabemos que la pendiente está dada por la derivada por lo que

$$f_k(x,y) = \frac{dy}{dx}$$

Sabemos que en R^2, la derivada de una función está dada por sus derivadas parciales donde $m = -\frac{F_x}{F_y}$

Por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = f_k(x,y)$$

$$x^2+y^2 = k \rightarrow x^2+y^2-k = 0 \rightarrow y = \sqrt{k-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{k-x^2}} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{k-x^2}}$$

Teremos $k = x^2+y^2 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2-x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{y^2}} = \frac{-x}{y} \qquad y' = \frac{-x}{y}$$

Como es la pendiente ortogonal

$$y_2' = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Separable

$$\rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx \rightarrow \log(y) = \log(x) + C$$

$$\rightarrow y = e^C x \rightarrow \boxed{y = xC} \text{ con } c = k$$

10- $2x^2 + y^2 = k \rightarrow y = \sqrt{k - 2x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sqrt{k - 2x^2}} \rightarrow \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 + y^2 - 2x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y^2} \rightarrow \frac{dy}{y^2} = -2x\, dx$$

$$\cancel{\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int -2x\, dx \rightarrow -\frac{1}{y} = -x^2 + C}$$

Como buscamos la familia ortogonal

$$\frac{dy}{dx}_2 = \frac{y^2}{2x} \rightarrow \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \frac{1}{2x}\, dx$$

$$\rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\log(|x|) + C$$

$$y = -2\left(\frac{1}{\log(x) + C}\right)$$

11- $3x^2 + y + [x^2y - x]\, y' = 0$

$M(x,y) = 3x^2 + y \rightarrow M_y = 1$

$N(x,y) = x^2y - x \rightarrow N_x = 2x - 1$

No es exacta

$$(x^2y - x)\, dy = (-3x^2 - y)\, dx$$

$$\left(y - \frac{1}{x}\right) dy - \left(-3 - \frac{y}{x^2}\right) dx = 0$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = -3x + C$$

$\cdot\ r^4 - r + w - r\,\frac{dw}{dr} = 0$

$M(r,w) = r^4 - r + w \qquad M_w = \underline{1}$

No es exacta

$N(r,w) = -r \qquad M_r = -\underline{1}$

$-r^3 + 1 + \frac{w}{-r} + w' = 0$

$w' - \frac{w}{r} = r^3 - 1 \qquad y = x\log(x) + \frac{x^4}{3} + cx$

12 - $x M(x,y) + y N(x,y) = 0$

$N(x,y)\,dy = -M(x,y)\,dx$ → queremos llegar

$$d\left(x M(x,y) + y N(x,y)\right) = dx\, M(x,y) + M(x,y)\frac{dy}{dx}x + dy\, N(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}y$$

$= dx\, M(x,y) + xM(x,y)y' + dy\, N(x,y) + N(x,y)y'y$

$= dx\, M(x,y) + dy\, N(x,y) + (x\,\cancel{M(x,y)}\,y' + y\,\cancel{N(x,y)}\,y')$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

13 —

14 — $y' - \mathrm{sen}(x-y) = 0$ $\quad v = y - x \quad y = x+v$

$v' = y' - 1$

$v' + 1 \mp \mathrm{sen}(v) = 0$

$v' = -\mathrm{sen}(v) - 1$

$\dfrac{dv}{-\mathrm{sen}(v) - 1} = +1\,dx \rightarrow \displaystyle\int -\frac{1}{\mathrm{sen}(v)+1}\,dv = \int dx$

$$\frac{2}{\dfrac{\mathrm{sen}(v)}{\cos(v)+1} + 1} = x + C$$

Regresando a nuestra variable

$$\boxed{\frac{2}{\dfrac{\mathrm{sen}(y-x)}{\cos(y-x)} + 1} = x + C}$$

15- $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

Tenemos que $y_p(x) = u(x)$

$$y(x) = u(x) + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du(x)}{dx} + \frac{dc}{dx}$$

Haciendo el cambio $y = u + \frac{1}{v} \rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

—