

Carlos Alberto Gallegos Tena

Ejercicio 1: es una ecuación diferencial que es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde

$M_y = N_x$. Es decir, sus derivadas cruzadas son iguales. Es exacta si solo si existe $\phi(x,y)$ tal que

$\phi_x(x,y) = M(x,y)$ y $\phi_y(x,y) = N(x,y)$. Donde ϕ tiene derivadas continuas

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejercicio 2: una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado n en D si solo si para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejercicio 3:

Ejercicio 4:

$$(y + 3x - 1) - (7x - y + 1)y' = 0 \quad \text{No es exacta}$$

$$M(x, y) = y + 3x - 1 \quad M_y = 1$$

$$N(x, y) = -7x - 1 \quad N_x = -7$$

Encontramos μ

$$\frac{M_y - N_x}{N} = ?$$

$$\frac{1 - (-7)}{-7x - 1} = \frac{8}{-7x - 1}$$

$$(ab^2 - a \tan(b)) + (2ab - a \sec^2(b)) \frac{da}{db} = 0$$

$$M(a, b) = ab^2 - a \tan(b) \quad M_a = b^2 - \tan(b)$$

$$N(b, a) = 2ab - a \sec^2(b) \quad M_b = 2a - 2a \sec^2(b) \tan(b)$$

Inexacta

$$M(b, a) = ab^2 - a \tan(b) \quad M_a$$

$$\frac{dw}{dt} + 3t^2 w = 6 + w^4 \quad \text{con } y(1) = 0 \rightarrow w(1) = 0 \quad (3)$$

Ecuación de Bernoulli

$$P = 3 + t^2 w \quad Q = 6 + w^4 \quad n = 4$$

Hacemos cambio de variable $z = w^{1-n} \rightarrow z = w^{-3}$

$$\frac{dz}{dt} = (1 - 4) w^{-4} \frac{dw}{dt}$$

Sustituyendo

$$\frac{dz}{dt} = (1 - 4 = -3) w^{-4} [6 + w^4 - 3t^2 w]$$

$$\frac{dz}{dt} = -3 [6 + -3t^2 z]$$

$$z' + (3) 3t^2 z = (-3) 6t$$

$$\frac{dz}{dt} + 9t^2 z = -18t \rightarrow dz = (-9t^2 - 18t) dt$$

es separable, se resuelve $\rightarrow \int dz = \int -9t^2 - 18t dt$

$$\text{por lo que } z = -3t^3 - 9t^2 + C$$

Regresando a nuestra variable $z = w^{-3}$

$$\rightarrow z = \frac{1}{w^3} = -3t^3 - 9t^2 + C \rightarrow w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3 - 9t^2 + C}}$$

$$\text{por lo que } w(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3 - 9 + C}} = 0 = \sqrt[3]{\frac{1}{-12 + C}}$$

$$\text{por lo que } C = 12 \quad \text{Solución } w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3 - 9t^2 + 12}}$$

Ejercicio 5: sean P y Q funciones continuas en (a,b) que contiene el punto x_0 . Entonces para cualquier valor inicial y_0 existe una única solución y en (a,b) al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad y(x_0) = y_0$$

Donde la solución está dada por

$$y(x) = \frac{1}{m(x)} \left[\int m(x) Q(x) dx + C \right] \quad \text{para un valor específico de } C.$$

donde m es el factor integrante

Ejercicio 6:

• $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(x,y) \rightarrow \boxed{x \operatorname{sen}(x) + y^2}$ sea $t \in \mathbb{R}$

No

$$f(x,y) = x \operatorname{sen}(x) + y^2 \rightarrow f(tx, ty) = tx \operatorname{sen}(tx) + t^2 y^2$$

No es homogénea porque $f(tx, ty) \neq t f(x, y)$

• $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(x,y) \rightarrow \boxed{x^2 y - x^3 + 3y^3}$ sea $t \in \mathbb{R}$

$$g(tx, ty) = t^2 x^2 ty - t^3 x^3 + 3t^3 y^3 \xrightarrow{S1} t(t^2 xy) = t^3 x^3 + 3t^3 y^3 \quad \checkmark$$

~~Es~~ Es homogénea porque ~~no se puede expresar~~ $t g(x, y) = g(tx, ty)$

• $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto \frac{x+y-1}{2x-y+3}$ sea $t \in \mathbb{R}$ ⑤

$$h(tx, ty) = \frac{tx+ty-1}{2tx-ty+3} = \frac{t(x+y)-1}{t(2x-y)+3} = \frac{t(x+y-\frac{1}{t})}{t(2x-y+\frac{3}{t})}$$

No es homogénea porque $h(tx, ty) \neq t h(x, y)$

• $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto \log(xy) + e^{xy}$ $t \in \mathbb{R}$

$$l(tx, ty) = \log(txty) + e^{txty} = \log(t^2xy) + e^{t^2xy}$$

$$= \log(t^2) + \log(xy) + e^{t^2xy}$$

como $\log(t^2xy) + e^{t^2xy} \neq t^2 \log(xy) + t^2 e^{xy}$

→ No es homogénea $l(tx, ty) \neq t l(x, y)$

Ejercicio 7: $M(x, y) + N(x, y) y' = 0$ es homogénea

si y solo si M y N son funciones homogéneas de grado n .

1) $x + y y' = 0$ H. grado 1

2) $y + x y' = 0$ H. grado 1

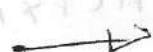
Ejercicio 8:

(6)

$$(x^2 + xy - y^2 = x^2 y) \rightarrow -(x^2 + xy - y^2) + x^2 y' = 0$$

$$-(x^2 + xy - y^2) \rightarrow x^2(x^2 + xy - y^2)$$

$$x^2 x^2$$



Es homogénea
por teorema visto en
clase

Solución:

$$(x^2 + xy - y^2) dx = x^2 dy \quad \text{tomamos}$$

$$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux$$

Substituyendo y
Simplificando

$$(x^2 + xux - \frac{u^2 x^2}{x^2}) dx = x^2 (x du + u dx)$$

$$dy = u dx + x du$$

$$x^2(1 + u - u^2) dx = x^3 du + x^2 u dx$$

entre x^2

$$x^2(1 - u^2) dx = x^3 du \rightarrow (1 - u^2) dx = x du$$

Es separable

$$\frac{1}{x} dx = \frac{1}{1 - u^2} du$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{1 - u^2} du \rightarrow \log(|x|) = \frac{\log(u+1) - \log(u-1)}{2} + C$$

$$\rightarrow \frac{\log(u+1) - \log(u-1)}{2} = \log(1+x) + C \rightarrow \frac{1}{(\frac{u-1}{u+1})^{\frac{1}{2}}} = x e^C$$

$$\text{Regresando a } u = \frac{y}{x} \rightarrow \left(\frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} = x e^C \rightarrow \left| \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y-1}} = x e^C \right|$$

(4)

$$y' = \frac{x - y - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + y} \rightarrow (x + y)y' = x - y - \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$\rightarrow (-x + y + \sqrt{x^2 - y^2}) + (x + y)y' = 0$$

$$M = -(x + y + \sqrt{x^2 - y^2}) \rightarrow -1x + 1y + \sqrt{1x^2 - 1y^2} = 1(-x + y \dots)$$

$$N = x + y \rightarrow 1x + 1y = 1(x + y) \quad \checkmark$$

Si es homogénea por teorema visto en clase

$$(x + y) dy = (x - y - \sqrt{x^2 - y^2}) dx \quad \text{Tomando } u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux \quad dy = u dx + x du$$

$$(x + ux)(u dx + x du) = (x - ux - \sqrt{x^2 - (ux)^2}) dx = (x - ux - \sqrt{x^2(1 - u^2)}) dx$$

$$(x + ux)(u dx + x du) = (x - ux - x\sqrt{1 - u^2}) dx$$

$$= x dx - ux dx - x\sqrt{1 - u^2} dx$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow (1 + u)(u dx + x du) = dx - u dx - \sqrt{1 - u^2} dx$$

$$\frac{1}{dx} \rightarrow (1 + u)(u + x \frac{du}{dx}) = 1 - u - \sqrt{1 - u^2}$$

$$u + x \frac{du}{dx} + u^2 + u x \frac{du}{dx} = 1 - u - \sqrt{1 - u^2} = x \frac{du}{dx} (1 + u) + u^2 + u$$

$$x \frac{du}{dx} (1+u) + u^2 + u = 1 - u - \sqrt{1-u^2}$$

$$x \frac{du}{dx} (1+u) = 1 - 2u - u^2 - \sqrt{1-u^2}$$

$$\rightarrow \frac{(1+u)}{1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{x} dx$$

Es separable

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Regresando el cambio

$$\int \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2 - \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2}} = \log(|x|) + C$$