Carlos Gallegos

Actividad de fin de semana

Pre clase 12 de Octubre

Considerando la función h : R 2 $\rightarrow$ R con las siguiente regla de correspondencia, si C es la colección de curvas de nivel de h, encuentra la familia de curvas ortogonales a C. Además proporciona una representación gráfica de cada familia de curvas.

1. $h(x, y) = x^2 - 2y$

Notamos que ya tenemos la ecuación la cual es $x^2 - 2y = c$
Para encontrar las curvas ortogonales a c primero derivamos implícitamente para x, nos queda:

$$2x - 2y' = 0$$

Como queremos las curvas ortogonales, podemos cambiar y' por $-\frac{1}{y'}$, sustituyendo:

$$2x + \frac{2}{y'} = 0$$

Ahora simplemente resolvemos la ecuación diferencial, la cual, a simple viste se nota que se puede resolver por variables separables:

$$-\frac{2}{y'} = 2x \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y'} = x$$

$$y' = -\frac{1}{x}$$

Sabemos que para resolver una ecuación de variables separables integramos ambos lados de la igualdad:

$$\int ydy = \int \frac{-1}{x}dx \quad \Longrightarrow \quad y = -log(x) + c0$$

Por lo que , la familia de curvas ortoganles a c está dada por $y = -log(x) + c0$ con coϵR y $x > 0$.

2. $h(x, y) = 9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$

Tenemos que la ecuación $9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = c$. Donde, para encontrar las curvas ortogonales a c debemos derivar implícitamente para x, nos queda:

$$9(x - 1) + 4(y + 2)y' = 0$$

Como queremos las curvas ortogonales, podemos cambiar y' por $-\frac{1}{y'}$, sustituyendo:

$$9(x - 1) - 4(y + 2)\frac{1}{y} = 0 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{4(y+2)}{9(x-1)}$$

Para resolver la ecuación diferencial, notamos que es variables separables, la cual se resuelve integrand ambos lados de la igualdad.

$$\int \frac{1}{4(y+2)}dy = \int \frac{1}{9(x+1)}dx$$

Nos queda:

$$\frac{log(y+2)}{4} = \frac{log(x+1)}{9} + c0$$

Por lo que, la familia de curvas ortogonales a c está dada por $\frac{log(y+2)}{4} = \frac{log(x+1)}{9} + c0$ con $c0\epsilon R$.

3. $h(x, y) = xy$

Tenemos la ecuación xy=c. Para encontrar las curvas ortogonales primero derivamos implícitamente respecto a x, lo hacemos por regla de la cadena:

y+xy'=0

Ahora, como queremos la familia de curvas ortogonales, hacemos el cambio en la pendiente de forma que debemos sustituir y' por $-\frac{1}{y'}$:

$$y - x\frac{1}{y'} = 0 \quad \rightarrow \quad x = yy'$$

Notamos que se resuelve por variables separables, de forma que integramos ambos lados de la ecuación y nos queda como resultado:

$$\int ydy = \int xdx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c0$$

$y^2 = x^2 + c0.$

Por lo que, la familia de curvas a c está dada por $y^2 = x^2 + c0$ con $c0\epsilon R$

Pre clase 14 Octubre

Para cada una de las siguientes ecuaciones proporciona la ecuación lineal homogénea asociada y su solución, encontrar una solución particular usando coeficientes indeterminados y dar la solución general.

1.$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = -3x^2$

Primero debemos encontrar la ecuación lineal homogénea asosiada, la cual notamos que es $y'' + 3y' - y = 0$. Ahora tomamos como ecuación auxiliar $t^2 + 3t - 1 = 0$.

Usamos la fórmula general para encontrar las raíces de nuestra ecuación, en este caso nos quedan dos suliciones las cuales son:

$$t1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \qquad t2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Sabemos que la solución de la ecuación va a estar dada:

$$yh(x) = c1e^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}x} + c2e^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}x}$$

Ahora buscamos una solución particular:

$$yp(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

Por úlitmo, sabemos que la solución general está dada por la suma de la solución particular y la solución a la ecuación lineal asociada homogénea. Por lo que tenemos como solución:

$$\text{y(x)} = 3x^2 + 18x + 24 + c1e^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}x} + c2e^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}x}$$

2.$-3y'' + y' - y = -2e^{3x}$

Primero debemos encontrar la ecuación lineal homogénea asosiada, la cual notamos que es $-3y'' + y' - y = 0$. Ahora tomamos como ecuación auxiliar $-3t^2 + t - 1 = 0$.

Usamos la fórmula general para encontrar las raíces de nuestra ecuación, en este caso nos quedan dos suliciones las cuales son:

$$t1 = \frac{-1+\sqrt{11i}}{6} \qquad t2 = \frac{-1-\sqrt{11i}}{6}$$

Sabemos que la solución de la ecuación va a estar dada:

$$yh(x) = c1e^{\frac{-1+\sqrt{11i}}{6}} + c2e^{\frac{-1-\sqrt{11i}}{6}}$$

Ahora buscamos una solución particular:

$$yp(x) = \frac{2}{25}e^{3x}$$

Por úlitmo, sabemos que la solución general está dada por la suma de la solución particular y la solución a la ecuación lineal asociada homogénea. Por lo que tenemos como solución:

$$\text{y(x)} = \frac{2}{25}e^{3x} + c1e^{\frac{-1+\sqrt{11i}}{6}} + c2e^{\frac{-1-\sqrt{11i}}{6}}$$

3. $2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 4sen(x)$

Primero debemos encontrar la ecuación lineal homogénea asosiada, la cual notamos que es $2y'' - 4y' + 4y = 0$. Ahora tomamos como ecuación auxiliar $2t^2 - 4t + 4 = 0$.

Usamos la fórmula general para encontrar las raíces de nuestra ecuación, en este caso nos quedan dos suliciones las cuales son:

$$t1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad t2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Sabemos que la solución de la ecuación va a estar dada:

$$yh(x) = c1e^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + c2e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

Ahora buscamos una solución particular:

$$yp(x) = -\frac{4}{17}senx + \frac{16}{17}cosx$$

Por úlitmo, sabemos que la solución general está dada por la suma de la solución particular y la solución a la ecuación lineal asociada homogénea. Por lo que tenemos como solución:

$$\text{y(x)} = -\frac{4}{17}senx + \frac{16}{17}cosx + c1e^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + c2e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$