Carlos Gallegos

Reposición segundo parcial

Ejercicio 1. Enuncia la definición de ecuación exacta.

Es una ecuación de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde las derivadas cruzadas son iguales, es decir, $M_y = N_x$. Es exacta sí sólo sí existe $\omega(x,y)$ tal que $\omega_x(x,y) = M(x,y)$ y $\omega_y(x,y) = N(x,y)$, donde ω tiene derivadas continuas.

Ejercicio 2. Proporciona la definición de función homogénea de grado n, vista en clase.

Una función $f : D \subset R^2 \to R$ es homogénea de grado n en D sí y sólo sí para cada $t \epsilon R$ se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

Ejercicio 3. Si L(u) = f(x) es una ecuación lineal inhomogénea con una solución u_p demuestra que la solución es de la forma $u_h + u_p$, donde L(u_h) = 0.

Solución: por definición tenemos que $L(u_p + u_h) = L(u_p) + L(u_h) = f + 0$. Sea u_{p2} otra solución particular a L, notamos que $L(u_{p2} - u_p) = L(u_{p2}) - L(u_p) = f - f = 0$.

Ahora, ya que $L(u_{p2} - u_p) = 0$, por definición podemos decir que es una solución homogénea, entonces nos queda de la forma $u_{p2} = u_h + u_p$.

Entonces, podemos obtener una solución general $L(u_g) = f$ si es que conocemos una solución particular y la solución homogénea.

Ejercicio 4. Resuelve las siguientes ecuaciones indicando qué tipo de ecuación es

1) $(y + 3x - 1) - (7x - y + 1)y' = 0$

Primero notamos que las derivadas cruzadas no son iguales. Por otro lado, la función que llamamos g es igual a cero. Por lo que tenemos una ecuación diferencial homogénea no exacta.

2)$(ab^2 - atg(b)) + (2ab - asec^2(b))\frac{da}{db}) = 0$

Notamos que la función g=0, por definición es una ecuación homogénea. Las derivadas cruzadas no son iguales, por lo que no es exacta.

3)$\frac{dw}{dt} + 3t^2 w = 6tw^4$, con y(1)=0

Por definición, tenemos una ecuación de Bernoulli con P=$t^2 w$, Q=$6tw^4$ y n=4.

Por definición vista en clase, hacemos un cambio de variable de la forma z=w^{1-n} $\to$ $z = w^-3$. Donde el método nos dice que $\frac{dz}{dt} = (1-4)w^-4\frac{dw}{dt}$. Sustituyendo en nuestra ecuación y simplificando nos queda:

$$\frac{dz}{dt} = -3[6t - 3t^2 z]$$

Podemos notar que nos queda una ecuación de variables separables, la cual se resuelve integrando ambos lados de la igualdad. Nos queda:

$$\int dz = \int -9t^2 - 18tdt$$

Las integrales salen directas:

$$z = -3t^3 - 9t^2 + C$$

Ahora vamos a regresar a nuestra variable original $z = w^-3$

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3-9t^2+C}}$$

Ya que tenemos nuestra solución la ecuación, vamos hacer nuestra condición inicial y(1)=0. Para ello susituímos:

$$w(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3-9+C}} = 0$$

Simplificando, nos queda que c=12. Por lo que resolviendo la ecuación de Bernoulli, y con condiciones iniciales w(1)=0, tenemos que la solución es $w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3-9t^2+C}}$ con c=12.

Ejercicio 5. Enuncia el Teorema de Existencia y Unicidad de la solución de una ecuación de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \text{ , con la condición inicial y(x0)=y0}$$

Sean P y Q funciones continuas en (a,b) que contiene el punto x_0. Entonces para cualquier valor inicial y_0 existe una única solución y en (a,b) al problema inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)_y = Q(x) \quad y(x_0) = y_0$$

Donde la solución está dada por

$$y(x) = \frac{1}{M(x)}[\int M(x)Q(x)dx + c]$$

Para un valor específico de c, donde M es el factor integrante.

Ejercicio 6. Indica si son homogéneas las siguientes funciones e indica su grado, de ser homogénea.

Solución: Una función $f : D \subset R^2 \to R$ es homogénea de grado n en D sí y sólo sí para cada $t\epsilon R$ se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Teniendo eso en mente, vamos a probar si son funciones homogéneas.

1)$f : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow xsen(x) + y^2$

Notamos que al hacer f(tx,ty)=$txsen(tx) + t^2y^2$. Notamos que para que fuera homogénea, se debería cumplir que txsen(tx) fuera igual a tx*tsen(x), lo cual no se cumple. Por lo que $f(tx, ty) \neq t^n f(x, y)$. Por definición, el inciso 1) no es una función homogénea.

2)$g : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow x^2y - x^3 + 3y^3$

Notamos que al hacer g(tx,ty)=$t^2x^2ty - t^3x^3 + 3t^3y^3$. Fácilmente se ve que se puede factorizar t^3, nos queda g(tx,ty)=$t^3(x^2y - x^3 + 3y^3)$.Como t^3 está multiplicando a toda la función, al final podemos escribir $t^3g(x, y)$. Por lo que $g(tx, ty) = t^3g(x, y)$. Por definición, el inciso 2) es una función homogénea de grado 3.

3)$h : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow \frac{x+y-1}{2x-y+3}$

Notamos que al hacer h(tx,ty)=$\frac{tx+ty-1}{2tx-ty+3}$. Notamos que no hay manera de factorizar por completo "t"; debido a ello, no podemos decir que t^n está multiplicando a nuestra función h. Por lo que $h(tx, ty) \neq t^n h(x, y)$. Por definición, el inciso 3) no es una función homogénea.

4)$i : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow log(xy) + e^{xy}$

Notamos que al hacer i(tx,ty)=$log(t^2xy)$ + e^{t^2xy}. Notamos que no hay manera de factorizar por completo "t", porque no es cierto que $log(t^2xy)$ es igual a $t^2log(xy)$; debido a ello, no podemos decir que t^n está multiplicando a nuestra función i. Por lo que $h(tx, ty) \neq t^n h(x, y)$. Por definición, el inciso 4) no es una función homogénea.

Ejercicio 7. ¿Cuándo una ecuación de la forma M(x, y) + N(x, y) $\frac{dy}{dx}$ = 0 es homogénea? Proporciona dos ejemplos

Una ecuación M(x, y) + N(x, y) $\frac{dy}{dx}$ = 0 es homogénea sí sólo sí M y N son funciones homogéneas de grado n.

Ejemplos:
1)x + yy'=0 $\rightarrow$ Denotamos M=x y N=y, ahora usamos $t\epsilon R$ y verificamos que cumple M(tx,ty)= tx $= t^1M(x, y)$. De igual manera se cumple N(tx,ty)= ty $= t^1M(x, y)$.Por lo que es homogénea de grado 1.

2)y+xy'=0$\rightarrow$ Denotamos M=y y N=x, ahora usamos $t\epsilon R$ y verificamos que cumple M(tx,ty)= ty $= t^1M(x, y)$. De igual manera se cumple N(tx,ty)= tx $= t^1M(x, y)$.Por lo que es homogénea de grado 1.

Ejercicio 8. Indica si las siguientes ecuaciones son homogéneas y de ser así proporciona su sulución haciendo al menos un cambio de variable.

1)$x^2 + xy - y^2 = x^2y'$

Primero hay que verificar si es homogénea. Para ellos denotamos M(x,y)= $x^2 + xy - y^2$ y N(x,y)=x^2.
Usando $t\epsilon R$, hacemos M(tx,ty)= $(tx)^2 + txty - (ty)^2t^2x^2 + t^2xy - t^2y^2 = t^2(x^2 + xy - y^2) = t^2M(x, y)$. Por lo que M es homogénea de grado 2.

Ahora para N(tx,ty)= $(tx)^2 = t^2x^2 = t^2N(x, y)$.

Como ambas funciones son homogéneas, podemos decir que tenemos una ecuación diferencial homogénea. Ahora la resolvemos:

Tenemos la ecuación $x^2 + xy - y^2 = x^2\frac{dy}{dx}$

Notamos que podemos hacer un cambio de variable de la forma u=$\frac{y}{x}$ $\rightarrow y = ux$, derivando por regla de al cadena dy= udx + xdu.Haciendo el cambio de variable:

$$x^2 + xux - (ux)^2 = x^2\frac{dy}{dx}$$

Simplificando:

$$[x^2 + xux - (ux)^2]dx = x^2dy \text{ sustituyendo dy} \rightarrow [x^2 + xux - (ux)^2]dx = x^2(udx + xdu)$$

$$x^2[1 + u - u^2]dx = x^2udx + x^3du$$

Dividimos entre x^2 ambos lados:

$$[1 + u - u^2]dx = udx + xdu \quad \rightarrow \quad dx + udx - u^2dx = udx + xdu$$

$$(1 - u^2)dx = xdu \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}dx = \frac{1}{(1-u^2)}du$$

Tenemos una ecuación diferencial de variables separable, la cual sabemos por teorema que se resuelve integrando ambos lados de la ecuación. Regresando a nuestra variable original:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{(1-u^2)}du$$

Las integrales son directas, nos queda logaritmo natural:

$$\frac{log(u+1)-log(u-1)}{2} = log(x) + c$$

Ahora regresamos a nuestra variable original u=$\frac{y}{x}$, nos queda:

$$\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y-1}} = xe^C$$

Por lo que, verificando que la ecuación es homogénea y resolviéndola por el método de variables separables, nos queda la solución implícita $\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y-1}} = xe^C$.

2)$y' = \frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$

Tenemos la ecuación $(x + y)y' = x - y\sqrt{x^2 - y^2}$. Primero verificamos si es homogénea y der así, la resolvemos por el método de cambio de variable.

Denotamos M(x,y)=$x-y\sqrt{x^2 - y^2}$ y N(x,y)=(x+y). Sea $t\epsilon R$, verificamos que M(tx,ty)=$tx-ty\sqrt{t^2x^2 - 2^ty^2} = tM(x, y)$ y N(tx,ty)=(tx+ty)= $tN(x, y)$. Como ambas funciones son homogéneas, es suficiente para decir que tenemos una ecuación diferencial homogénea de grado 1.

Para resolverla usaremos el método de cambio de variable, y después método de variables separables. Para ello, se propone el cambio u=$\frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = ux$, derivando por regla de la cadena nos queda $dy = udx + xdu$. Ahora sustituímos en nuestra ecuación:

$$(x + ux)(udx + xdu) = (x - ux - \sqrt{x^2 - (ux)^2})dx$$

Simplificando nos queda:

$$x\frac{du}{dx}(1 + u) + u^2 + u = 1 - u - \sqrt{1 - u^2}$$

$$\frac{1+u}{1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{x}dx$$

Notamos que tenemos una ecuación de variables separables, la cual por teoremas se resuelve integrando ambos lados de la igualdad.

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2-\sqrt{1-u^2}}du = \int \frac{1}{x}dx$$

Regresando a nuestra variable original, nos queda la solución implícita a la ecuación diferencial:

$$\int \frac{1+\frac{y}{x}}{1-2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}-\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\left(\frac{dy-\frac{y}{x}dx}{x}\right) = log(x) + C$$