Carlos Gallegos

Quinto Parcial

Repaso

Campo

Definición: Sea K un conjunto no vacío. Diremos que K es un campo si y solo si existen dos operaciones binarias:

: KxK $\rightarrow$ K   +: KxK$\rightarrow$K

tal que para cada a,b,cϵK

a*b, a+b son de K

a*b=b*a , a+b=b+a

(a*b)*c=a*(b*c), a+(b+c)=(a+b)+c

Existen e_*, e_+ en K tales que $a * e_* = a, a + e_+ = a$

Existen $f, g\epsilon R$ tales que a*f=e_*, a+g=e_+

(a*b)+c=a*c+b*c

Espacio vectorial

Definición: Sea V un conjunto no vacío y K un campo. Diremos que V es un espacio vectorial sobre K si y solo si existen dos operaciones

+:VxV $\rightarrow V$ $\cdot : KxV \rightarrow V$

tal que para que $u, v, w\epsilon V$ y cada $a, b, c\epsilon K$

u+v son de V

(u+v)+w=u+(v+w) y u+v=v+u

Existe $0\epsilon V$ tal que v+0=v y existe $z\epsilon V$ tal que v+z=0

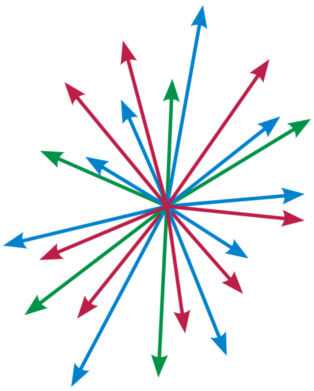
a·v =abϵV

(ab)v=a(bv)

(a+b)v=a(bv) y c(u+v) = cu + cv

1ϵK 1v=v

Imágen ilustrativa



Combinación: sean V espacio vectorial sobre K y u1, ... , us ϵV, una combinación lineal de dichos vectores es de la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^{s} a_i u_i$$

con a1,....,akϵK

Base: sean V espacio vectorial sobre K y B $\subset$ V no vacío, diremos que B genera a V si y solo si para cualquier v ϵ V, v es combinación lineal de vectores en B. Esto es, existen v1, . . . , vn ϵ B y b1, . . . , bn ϵ K tales que v = b1v1 + $\cdots$ + bnvn.

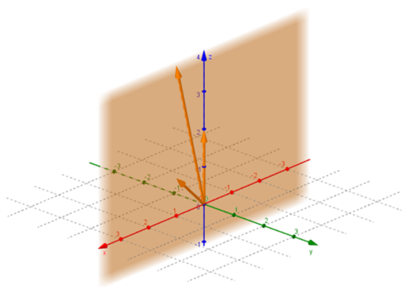
Teorema: Sea V espacio vectorial finitamente generado sobre el campo K , esto es, existe una conjunto con cardinalidad finita que genera V. Entonces todas las bases de V tienen la misma cardinalidad.

Sea V finitamente generado, la dimensión de V, denotada por dimV, es igual a la cardinalidad de una de sus bases. Esto es, si B es una base para V, entonces

$$\text{dimV} = |B|$$

Donde $|B|$ es la cardinalidad de B.

Un espacio que no es finitamente generado, se denomina de dimensión infinita.



Transformación lineal: sean V, W espacio vectorial sobre el campo K y T : V $\rightarrow$ W aplicación. Diremos que T es una transformación lineal si y solo si para cada u, v ϵ V y cada c ϵ K se cumple que:

T(u+v)=T(u)+T(v)

T(cv)=cT(v)

La siguiente tabla nos muestra algunas integrales de repaso para tener en mente, se usarán más adelante para resolver los problemas.

Tabla de integrales inmediatas:

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
Funciones simples	***Funciones compuestas***
$\int dx = x + C$	
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$	$\int u^n \cdot u' \cdot dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u \cdot u' dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos u \cdot u' dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u' dx = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' dx = tg\, u + C$
$\int (1 + tg^2 x)\,dx = tg\, x + C$	$\int (1 + tg^2\, \mathrm{u}) \cdot \mathrm{u}' dx = tg\, u + C$
$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = cotg\, x + C$	$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u' dx = cotg\, u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\,tg\, x + C$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u' dx = arc\,tg\, u + C$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = arc\,cotg\, x + C$	$\int \frac{-1}{1+u^2} \cdot u' dx = arc\,cotg\, u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\,\operatorname{sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' dx = arc\,\operatorname{sen} u + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\,\cos x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' dx = arc\,\cos u + C$

Ejemplos de resolución de integrales:

1-$\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}} dx$

Primero notamos que podemos separar las fracciones $\int \frac{e^{4x}}{e^{3x}} dx + \int \frac{3}{e^{3x}} dx$

La primera integral notamos que es directa usando las fórmulas, y en la segunda podemos hacer una cambio de variable de la forma

$$e^x + 3[\int e^u]du \text{ con u=-3x y du = -3dx}$$

Hacemos la sustitución y nos queda:

$$e^x - e^u = e^x - e^{-3x}$$

Por transitividad de la igualdad $\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}}dx = e^x - e^{-3x} + c$ y queda resuelta nuestra integral.

2-$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$

Se integra por fracciones parciales, para lleos desarrollamos el polinomio:

$$\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}dx$$

Entonces encontramos un a, b y c para $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$

Nos queda el sistema $a(x-2)(x+3) + b(x)(x+3) + c(x)(x-2) = x+1$

Sustituyendo primero x=0, x=2, obtenemos que a=$-\frac{1}{6}$, b=$\frac{3}{10}$ y c=$-\frac{2}{15}$

$$\int[-\frac{1}{6x} + \frac{3}{10(x-2)} - \frac{2}{15(x+3)}]dx$$

Ahora integramos directamente:

$$-\frac{ln}{6} + \frac{3ln(x-2)}{10} - \frac{2ln(x+3)}{15}$$

Por lo tanto,$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = -\frac{ln}{6} + \frac{3ln(x-2)}{10} - \frac{2ln(x+3)}{15} + c$

3-$\int xcosxdx$

La vamos a integrar por partes, tomamos u=x, u'=1 entonces v'=cos y v=-senx, por lo tanto nos queda

$$=xsenx - \int senx = xsenx + cosx$$

Entonces, nos queda que :

$$\int xcosxdx = xsenx - \int senx = xsenx + cosx + c$$

Conceptos introductorios

Ecuación diferencial:

Definición: Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (ED).

Ordinaria: si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Parcial: Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial (EDP).

Orden: El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

Una ecuación diferencial

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

es la forma normal de

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Una ecuación es lineal

Las derivadas son de y y no de potencias de ella,composici´on con otras funciones o productos de la derivadas con la variable independiente

Las variables ai solo dependen cuando mucho de x. En caso contrario será no lineal.

Operador lineal:

Un operador lineal L diremos que es un operador diferencial lineal si y solo si es de la siguiente forma

$$L = \sum_0^n ai(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

y para constantes c, d y y, y' dos funciones al menos diferenciables hasta orden n, entonces L(cy + dy')= cL(y) + dL(y').

Definición de ecuación homogénea:

Una ecuación lineal

$$a_n(x)y^{(n)} + ... + a_0(x)y = g(x)$$

se denomina homogénea si g(x)=0.

$$\text{L(y)=}\sum_0^n ai(x) \frac{d^i}{dx^i} y = 0$$

Si g(x) es diferente de cero, entonces es no homogénea.

Solución trivial

Si tenemos una ecuación de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + ... + a_0(x)y = g(x)$$

una ecuación diferencial lineal homogénea, entonces y = 0 es siempre una solución a la ecuación; se denomina la solución trivial.

También si se tienen u y v soluciones de la ecuación, entonces u + v tambien es solución.
El proceso de determinación de las soluciones de una e.d. se llama resolución o integración de la ecuación.

Una solución de la ecuación diferencial en que una o más de esas n constantes toman un valor particular se llama solución particular de la ecuación diferencial La solución con las n constantes indeterminadas se llama solución general de la ecuación diferencial.

Solución implícita y explícita

Una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes se dice que es una solución explícita.

Se dice que una relación G(x, y) = 0 es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria F(x, y 0 , . . . , y (n)) = 0, en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ω que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Un problema que involucra ecuaciones diferenciales se llama bien planteado si:

Tiene solución
Su solución es única.
La solución depende de modo continuo de las condiciones complementarias y de todos los parámetros del problema.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto G(x, y, c) = 0 de soluciones llamado familia de soluciones uniparamétrica. Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n F(x, y, y 0 , ..., y (n)) = 0, buscamos una familia de soluciones n-paramétrica G(x, y, c1, . . . , cn) = 0.

Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se llama solución particular.

Variables separables

Si tenemos una ecuación diferncial $y' = f(x, y)$.

se puede expresar como una función g(x) que sólo depende de x, por una función p(y) que solo depende de y, entonces la ecuación diferencial es separable o se puede resolver mediante separación de variables. Se tiene la forma:

y'=g(x)p(y)

La solución se obtiene el integrar ambos lados de la igualdad

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

En algunos casos podemos reducir ecuaciones diferenciales a ecuaciones del tipo variables separables.

Ecuaciones exactas:

Es una ecuación de la forma

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Donde las derivadas cruzadas son iguales, es decir, $M_y = N_x$. Es exacta sí sólo sí existe $\omega(x, y)$ tal que $\omega_x(x, y) = M(x, y)$ y $\omega_y(x, y) = N(x, y)$, donde ω tiene derivadas cruzadas continuas.

$y' + P(x)y = Q(x)$, con la condición inicial y(x0)=y0

Sean P y Q funciones continuas en (a,b) que contiene el punto x_0. Entonces para cualquier valor inicial y_0 existe una única solución y en (a,b) al problema inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)_y = Q(x) \quad y(x_0) = y_0$$

Donde la solución está dada por

$$y(x) = \frac{1}{M(x)}[\int M(x)Q(x)dx + c]$$

Para un valor específico de c, donde M es el factor integrante.

Si L(u) = f(x) es una ecuación lineal inhomogénea con una solución u_p la solución es de la forma $u_h + u_p$, donde L(u_h) = 0.

Demostración:

Por definición tenemos que $L(u_p + u_h) = L(u_p) + L(u_h) = f + 0$. Sea u_{p2} otra solución particular a L, notamos que $L(u_{p2} - u_p) = L(u_{p2}) - L(u_p) = f - f = 0$.

Ahora, ya que $L(u_{p2} - u_p) = 0$, por definición podemos decir que es una solución homogénea, entonces nos queda de la forma $u_{p2} = u_h + u_p$.

Entonces, podemos obtener una solución general $L(u_g) = f$ si es que conocemos una solución particular y la solución homogénea.

Ejemplo de ecuación de Bernoulli

$\frac{dw}{dt} + 3t^2w = 6tw^4$, con y(1)=0

Por definición, tenemos una ecuación de Bernoulli con P=t^2w, Q=$6tw^4$ y n=4.

Podemos hacer un cambio de variable de la forma z=w^{1-n} $\rightarrow z = w^-3$. Donde el método nos dice que $\frac{dz}{dt} = (1-4)w^-4\frac{dw}{dt}$. Sustituyendo en nuestra ecuación y simplificando nos queda:

$$\frac{dz}{dt} = -3[6t - 3t^2z]$$

Podemos notar que nos queda una ecuación de variables separables, la cual se resuelve integrando ambos lados de la igualdad. Nos queda:

$$\int dz = \int -9t^2 - 18tdt$$

Las integrales salen directas:

$$z = -3t^3 - 9t^2 + C$$

Ahora vamos a regresar a nuestra variable original $z = w^-3$

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3-9t^2+C}}$$

Ya que tenemos nuestra solución la ecuación, vamos hacer nuestra condición inicial y(1)=0. Para ello susituímos:

$$w(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{-3-9+C}} = 0$$

Simplificando, nos queda que c=12. Por lo que resolviendo la ecuación de Bernoulli, y con condiciones iniciales w(1)=0, tenemos que la solución es $w = \sqrt[3]{\frac{1}{-3t^3-9t^2+C}}$ con c=12.

Funciones homogéneas:

Una función $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ es homogénea de grado n en D sí y sólo sí para cada $t\epsilon R$ se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Una ecuación M(x, y) + N(x, y) $\frac{dy}{dx} = 0$ es homogénea sí sólo sí M y N son funciones homogéneas de grado n.

Ejemplos:
1)x + yy'=0

$\rightarrow$ Denotamos M=x y N=y, ahora usamos $t\epsilon R$ y verificamos que cumple M(tx,ty)= tx $= t^1M(x, y)$. De igual manera se cumple N(tx,ty)= ty $= t^1M(x, y)$.Por lo que es homogénea de grado 1.

2)y+xy'=0

$\rightarrow$ Denotamos M=y y N=x, ahora usamos $t\epsilon R$ y verificamos que cumple M(tx,ty)= ty $= t^1M(x, y)$. De igual manera se cumple N(tx,ty)= tx $= t^1M(x, y)$.Por lo que es homogénea de grado 1.

Ejemplos de funciones homogéneas:

Una función $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ es homogénea de grado n en D sí y sólo sí para cada $t\epsilon R$ se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Teniendo eso en mente, vamos a probar si son funciones homogéneas.

1)$f : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow xsen(x) + y^2$

Notamos que al hacer f(tx,ty)=$txsen(tx) + t^2y^2$. Notamos que para que fuera homogénea, se debería cumplir que txsen(tx) fuera igual a tx*tsen(x), lo cual no se cumple, porque tomando t=5 notamos que difieren, y como se debe cumplir para todo t real, no se cumple laigualdad. Por lo que $f(tx, ty) \neq t^n f(x, y)$. Por definición, el inciso 1) no es una función homogénea.

2)$g : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow x^2y - x^3 + 3y^3$

Notamos que al hacer g(tx,ty)=$t^2x^2ty - t^3x^3 + 3t^3y^3$. Fácilmente se ve que se puede factorizar t^3, nos queda g(tx,ty)=$t^3(x^2y - x^3 + 3y^3)$.Como t^3 está multiplicando a toda la función, al final podemos escribir $t^3g(x, y)$. Por lo que $g(tx, ty) = t^3g(x, y)$. Por definición, el inciso 2) es una función homogénea de grado 3.

3)$h : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow \frac{x+y-1}{2x-y+3}$

Notamos que al hacer h(tx,ty)=$\frac{tx+ty-1}{2tx-ty+3}$. Notamos que no hay manera de factorizar por completo "t"; debido a ello, no podemos decir que t^n está multiplicando a nuestra función h. Por lo que $h(tx, ty) \neq t^nh(x, y)$. Por definición, el inciso 3) no es una función homogénea.

4)$i : R^2 \Rightarrow R, (x, y) \Rightarrow log(xy) + e^{xy}$

Notamos que al hacer i(tx,ty)=$log(t^2xy) + e^{t^2xy}$. Notamos que no hay manera de factorizar por completo "t", porque no es cierto que $log(t^2xy)$ es igual a $t^2log(xy)$; debido a ello, no podemos decir que t^n está multiplicando a nuestra función i. Por lo que $h(tx, ty) \neq t^nh(x, y)$. Por definición, el inciso 4) no es una función homogénea.

Ejemplo ecuación exacta:

Encontrar la función N(x,y) para que la sigueinte ecuación sea exacta. Proporicionar solución:

ycos(x) + e^x + N(x,y)y' = 0

Primero sabemos que para que sea exacta se debe cumplir que $M_y = N_x$, por lo que se debe cumplir:

$$M_y = cos(x) \quad \rightarrow \quad N_x = cos(x)$$

Por lo que $N(x, y) = \int cos(x)dx = sen(x) + c$

Entonces, la ecuación diferencial para que sea exacta queda la forma:

ycos(x) + e^x + sen(x)y' = 0

Para encontrar la solución tomamos $\omega_x = ycos(x) + e^x$ y $\omega_y = sen(x)y'$

Para encontrar $\omega(x, y)$ integramos M y N y la formamos:

$$\int Mdx = ysen(x) + e^x + c \text{ y } \int Ndy = ysenx + c$$

Por lo que $\omega(x, y) = ysenx + e^x$.

Entonces tenemos que ycos(x) + e^x + N(x,y)y' = 0 es exacta con solución $\omega(x, y) = ysenx + e^x = c$. Notamos que va a ser solución en todo R^2.

2. Resolver $y' + sen(x)y^2 - sen(x)y = 0$

Intentando resolver por variables seperables, primero despejamos y agrupamos terminos:

$$\frac{dy}{dx} = -sen(x)y^2 + sen(x)y = sen(x)(y - y^2)$$
$$\frac{dy}{y-y^2} = sen(x)dx$$

Por lo que resolvemos por variables separables integrando ambas partes:

$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int sen(x)dx$

$-log(y) + log(y-1) = cos(x) + c$

Por lo que nos queda como solución implícita $log(y-1) - log(y) = cos(x) + c$ con $y > 1$.

1. Determina si la siguinete función F es homogénea, de ser así, indica de qué grado es.

$$\text{F(x,y)} = (\text{x} + \sqrt{y^2 - xy}) - \frac{xy+y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4})$$

Primero, tomamos un $t\epsilon R$ y notamos que al hacer F(tx,ty) nos queda:

$$\text{F(tx,ty)} = (\text{tx} + \sqrt{(ty)^2 - txty}) - \frac{txty+(ty)^2}{tx} + \frac{(tx)^5}{(ty)^4}$$

Agrupando términos:

$$= (tx + \sqrt{t^2(y^2 - xy)}) - \frac{t^2xy+t^2y^2}{tx} + \frac{t^5x^5}{t^4y^4}$$

Simplificando las divisiones:

$$= (tx + t\sqrt{(y^2 - xy)}) - \frac{t(xy+y^2)}{x} + \frac{tx^5}{y^4}$$
$$= \text{t(x} + \sqrt{y^2 - xy}) - \frac{xy+y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4}) = \text{tF(x,y)}$$

Por definición, como F(tx,ty) = tF(x,y), y por el grado del exponente, es homogénea de grado 1.

2-Determina si las siguinetes ecuaciones son homogéneas y proporciona su solución.
a) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

Si tomamos M(x,y) = $x^2 + y^2$ y N(x,y) = $-xy$, notamos que son homogéneas de orden 2. Por lo que, por definición es homogénea de grado 2. Para resolverla tomaremos cambio de variable u= $\frac{y}{x}$ y se tiene y= ux dy= xdu+udx, por lo que :

$$\text{-}u^2x^2dx - ux^3du = -u^2x^2 - x^2dx$$

$$\text{-}-ux^3du = -x^2dx \rightarrow ux^3du = x^2dx$$

Despejando:

$$\text{udu} = \frac{1}{x}dx$$

Tenemos una ecuación de variables separables, la cual resuelve integrando ambos lados de la ecuación:

$\int udu = \frac{1}{x}dx$

$\frac{u^2}{2} = log(x) + c$

Regresando a nuestra variable original u= $\frac{y}{x}$ nos queda:

$$\frac{(\frac{y}{x})^2}{2} = log(x) + c$$

Simplificando

$$y = \sqrt{2x^2log(x)} + c$$

Por lo que $y^2 = 2x^2log(x) + c$ con $x > 0$ es la solución para la ecuación.

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Definimos:

a) Ecuación auxiliar

Se denomina ecuación auxiliar de L(x)=0 a la ecuación:

$$r^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j r^j = 0$$

b) Polinomio auxiliar

Al polinomio p(r) $= r^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j r^j$ se le denomina polinomio auxiliar.

c) Autovalores propios

Se denominan autovalores propios a las raíces de la ecuación auxiliar, pueden ser simples o múltiples con el mismo criterio que las correspondientes raíces de la ecuación, siendo el órden el mismo que el órden como raíz correspondiente.

Teorema de existencia y unicidad caso homogéneo:

Sean a, b, c, x0, y0, y1 ϵ R, existe una única solución a la ecuación con valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad y(x_0) = y0, y'(x0) = y1$$

La solución es válida para todo x es real.

También definimos que un parr de soluciones y1 y y2 son linealmente independientes en el intervalo I si y solo si ninguna de ellas es múltiplo constante de la otra. En caso contrario se denominan linealmente dependientes en I.

Teorema:

Si y1 y y2 son dos soluciones cualesquiera a la ecuación diferencial previamente vista, linealmente independientes en un intervalo I con x0 es I,entonces se pueden determinar constantes únicas C1 y C2 tales que C1y1 + C2y2 satisface el problema con valores iniciales en I.

Sean y1, solución a la ecuación diferencial ay00 + by0 + cy = f1 y y2 solución a la ecuación diferencial ay00 + by0 + cy = f2. Entonces, para cualquiera constates c1, c2 ϵ R la función c1y1 + c2y2 es solución de la ecuación diferencial ay00 + by0 + cy = c1f1 + c2f2.

Donde f1 y f2 son funciones que dependen de x.

Ejemplo:

Considerando la función h : R 2 $\rightarrow$ R con las siguiente regla de correspondencia, si C es la colección de curvas de nivel de h, encuentra la familia de curvas ortogonales a C. Además proporciona una representación gráfica de cada familia de curvas.

1. $h(x, y) = x^2 - 2y$

Notamos que ya tenemos la ecuación la cual es $x^2 - 2y = c$
Para encontrar las curvas ortogonales a c primero derivamos implícitamente para x, nos queda:

$$2x - 2y' = 0$$

Como queremos las curvas ortogonales, podemos cambiar y' por $-\frac{1}{y'}$, sustituyendo:

$$2x + \frac{2}{y'} = 0$$

Ahora simplemente resolvemos la ecuación diferencial, la cual, a simple viste se nota que se puede resolver por variables separables:

$$-\frac{2}{y'} = 2x \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y'} = x$$

$$y' = -\frac{1}{x}$$

Sabemos que para resolver una ecuación de variables separables integramos ambos lados de la igualdad:

$$\int ydy = \int \frac{-1}{x}dx \quad \Longrightarrow \quad y = -log(x) + c0$$

Por lo que , la familia de curvas ortoganles a c está dada por $y = -log(x) + c0$ con coϵR y $x > 0$.

2. $h(x, y) = 9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$

Tenemos que la ecuación $9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = c$. Donde, para encontrar las curvas ortogonales a c debemos derivar implícitamente para x, nos queda:

$$9(x - 1) + 4(y + 2)y' = 0$$

Como queremos las curvas ortogonales, podemos cambiar y' por $-\frac{1}{y'}$, sustituyendo:

$$9(x - 1) - 4(y + 2)\frac{1}{y} = 0 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{4(y+2)}{9(x-1)}$$

Para resolver la ecuación diferencial, notamos que es variables separables, la cual se resuelve integrand ambos lados de la igualdad.

$$\int \frac{1}{4(y+2)}dy = \int \frac{1}{9(x+1)}dx$$

Nos queda:

$$\frac{log(y+2)}{4} = \frac{log(x+1)}{9} + c0$$

Por lo que, la familia de curvas ortogonales a c está dada por $\frac{log(y+2)}{4} = \frac{log(x+1)}{9} + c0$ con $c0\epsilon R$.

3. $h(x, y) = xy$

Tenemos la ecuación xy=c. Para encontrar las curvas ortogonales primero derivamos implícitamente respecto a x, lo hacemos por regla de la cadena:

y+xy'=0

Ahora, como queremos la familia de curvas ortogonales, hacemos el cambio en la pendiente de forma que debemos sustituir y' por $-\frac{1}{y'}$:

$$y - x\frac{1}{y'} = 0 \quad \rightarrow \quad x = yy'$$

Notamos que se resuelve por variables separables, de forma que integramos ambos lados de la ecuación y nos queda como resultado:

$$\int ydy = \int xdx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c0$$

$y^2 = x^2 + c0$.

Por lo que, la familia de curvas a c está dada por $y^2 = x^2 + c0$ con $c0\epsilon R$

Para cada una de las siguientes ecuaciones proporciona la ecuación lineal homogénea asociada y su solución, encontrar una solución particular usando coeficientes indeterminados y dar la solución general.

1.$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = -3x^2$

Primero debemos encontrar la ecuación lineal homogénea asosiada, la cual notamos que es $y'' + 3y' - y = 0$. Ahora tomamos como ecuación auxiliar $t^2 + 3t - 1 = 0$.

Usamos la fórmula general para encontrar las raíces de nuestra ecuación, en este caso nos quedan dos suliciones las cuales son:

$$t1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \qquad t2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Sabemos que la solución de la ecuación va a estar dada:

$$yh(x) = c1e^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}x} + c2e^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}x}$$

Ahora buscamos una solución particular:

$$yp(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

Por úlitmo, sabemos que la solución general está dada por la suma de la solución particular y la solución a la ecuación lineal asociada homogénea. Por lo que tenemos como solución:

$$\text{y(x)} = 3x^2 + 18x + 24 + c1e^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}x} + c2e^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}x}$$

2.$-3y'' + y' - y = -2e^{3x}$

Primero debemos encontrar la ecuación lineal homogénea asosiada, la cual notamos que es $-3y'' + y' - y = 0$. Ahora tomamos como ecuación auxiliar $-3t^2 + t - 1 = 0$.

Usamos la fórmula general para encontrar las raíces de nuestra ecuación, en este caso nos quedan dos suliciones las cuales son:

$$t1 = \frac{-1+\sqrt{11i}}{6} \qquad t2 = \frac{-1-\sqrt{11i}}{6}$$

Sabemos que la solución de la ecuación va a estar dada:

$$yh(x) = c1e^{\frac{-1+\sqrt{11i}}{6}} + c2e^{\frac{-1-\sqrt{11i}}{6}}$$

Ahora buscamos una solución particular:

$$yp(x) = \frac{2}{25}e^{3x}$$

Por úlitmo, sabemos que la solución general está dada por la suma de la solución particular y la solución a la ecuación lineal asociada homogénea. Por lo que tenemos como solución:

$$\text{y(x)} = \frac{2}{25}e^{3x} + c1e^{\frac{-1+\sqrt{11i}}{6}} + c2e^{\frac{-1-\sqrt{11i}}{6}}$$

3. $2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 4sen(x)$

Primero debemos encontrar la ecuación lineal homogénea asosiada, la cual notamos que es $2y'' - 4y' + 4y = 0$. Ahora tomamos como ecuación auxiliar $2t^2 - 4t + 4 = 0$.

Usamos la fórmula general para encontrar las raíces de nuestra ecuación, en este caso nos quedan dos suliciones las cuales son:

$$t1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad t2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Sabemos que la solución de la ecuación va a estar dada:

$$yh(x) = c1e^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + c2e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

Ahora buscamos una solución particular:

$$yp(x) = -\frac{4}{17}senx + \frac{16}{17}cosx$$

Por úlitmo, sabemos que la solución general está dada por la suma de la solución particular y la solución a la ecuación lineal asociada homogénea. Por lo que tenemos como solución:

$$\text{y(x)} = -\frac{4}{17}senx + \frac{16}{17}cosx + c1e^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + c2e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

Ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes

Sean A y B dos operadores con coeficientes constantes de orden n y sean pA y pB sus polinomios característicos respectivamente, entonces A = B si y solo si pA = pB.

Si y1, . . . , yn son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial L(y) = 0 en el intervalo I; entonces su wronskiano no es la función nula en I.

Ejemplo de superposición y variación de parámeteros

Proporciona una solución particular a la siguiente ecuación aplicando el principio de superposición y el de variación de parámetros. Luego da la solución general, recordando que dicha solución debe ser la suma de la particular con la solución de la homogónea.

$$y'' - 2y' + y = log(x) + e^{2x}$$

Con $x > 0$

Solución:

Primero notamos que la ecuación lineal homogénea asociada es $y^2 - 2y + 1 = 0$ donde las soluciones están dadas de la siguiente forma:

$$(y-1)(y-1) = 0 \text{ con y1=1 y2=2}$$

Por lo que la solución a la ecuación lineal con coeficientes constantes es:

$$\text{yh(x)=} \ e^x C1 + xe^2 C2$$

Ahora vamos a aplicar el principio de supersición y variación de parámetros:

Primero resolvemos $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ y nos queda como solución particular yp(x)=Ae^{2x} donde y'p=2Ae^{2x} y y"p=4Ae^{2x}. Resolviendo el sistema nos queda que A=1 y que yp1(x)= e^{2x}.

Ahora para $y'' - 2y' + y = log(x)$ nos queda el sistema

$$v1'(x)e^x + v2'(x)xe^x = 0$$
$$v1'(x)e^x + v2'(x)(e^x + xe^x) = log(x)$$

Resolviendo por regla de Cramer nos queda $v1'(x) = xlog(x)\frac{1}{e^x}$ y $v2'(x) = log(x)\frac{1}{e^x}$. Por lo que v1 y v2 estáran dadas por:

$$v1(x) = \int xlog(x)\frac{1}{e^x} \text{ y } v2(x) = \int log(x)\frac{1}{e^x}$$

Entonces la solución particular es yp2(x)=$e^x \int xlog(x)\frac{1}{e^x} + xe^x \int log(x)\frac{1}{e^x}$.

Ahora por el principio de superposición y variación de parámetros, tenemos que la solución general es la solución particular mas la solución de la ecuación homogénea, por lo que juntando todo nos quead:

$$\text{yg(x)= yh(x) + yp1(x) + yp2(x)}$$

Sustituyendo:

$$\text{yg(x)=} \ e^x C1 + xe^2 C2 + e^{2x} + e^x \int xlog(x)\frac{1}{e^x} + xe^x \int log(x)\frac{1}{e^x}$$

Ejemplo de calculo de polinomios cárácterísticos:

Calcula los polinomios característicos de los operadores L (en términos del operador D) asociados a las siguientes ecuaciones, tambien calculas sus raíces.

1.$\frac{d^5y}{dx^5} - 2\frac{d^4y}{dx^4} - 8\frac{d^3y}{dx^3} + 16\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 18y = 0$

Solución:

El polinomio característico queda como:

$$\text{L}=D^5 - 2D^4 - 8D^3 + 16D^2 - 9D + 18$$

Para encontrar las raices vamos a factorizar:

$D^5 - 2D^4 - 8D^3 + 16D^2 - 9D + 18 = (D-2)(D-3)(D+3)(D^2+1)$

Por lo que las raíces son (2,-3,3,i,-i).

2.$4\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} - y = 0$

Solución:

El polinomio caractéristico queda como:

$$\text{L}=4D^4 + 2D^3 + D - 1$$

Para encontrar las raices vamos a factorizar:

$4D^4 + 2D^3 + D - 1 = (D+1)(2D-1)(2D^2+1)$

Por lo que las raíces son (-1,1/2,$i\frac{1}{\sqrt{2}}, -i\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Soluciones de ecuaciones diferenciales lineales por el método de series de potencias

Método del anulador:

Sea L(y) = g(x) una ecuación diferencial completa (no homogénea, inhomogénea) donde L es un operador con coeficientes constates. Este método consiste en encontrar un operador A con coeficientes constates que anule a la función g, es decir A(g) = 0. Así, aplicando el operador a la ecuación dada obtenemos A $\cdot$ L(y) = A(g) = 0, por lo cual, las soluciones de L(y) = 0 tambien son solución de A(L(y)) = 0. Se resuelve esta ecuación y luego se escoge las que satisfacen L(y) = g(x).

> Se puede aplicar este método cuando la función g es de la forma
>
> $$x^m e^{\alpha x} cos(\beta x) \qquad x^m e^{\alpha x} sen(\beta x).$$

Función g	Operador anulador
x^{m-1}	D^m
$e^{\alpha x}$	$D-\alpha$
$x^{m-1}e^{\alpha x}$	$(D-\alpha)^m$
$cos(\beta x)$, $sen(\beta x)$	$D^2+\beta^2$
$x^{m-1}cos(\beta x)$, $x^{m-1}sen(\beta x)$	$(D^2+\beta^2)^m$
$e^{\alpha x}cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}sen(\beta x)$	$(D-\alpha)^2+\beta^2$
$x^{m-1}e^{\alpha x}cos(\beta x)$, $x^{m-1}e^{\alpha x}sen(\beta x)$	$((D-\alpha)^2+\beta^2)^m$

Cauchy-Euler:

Se denomina ecuación de Cauchy-Euler (o Ecuación equidimensional) a una ecuación diferencial lineal de la forma

$$\sum_{j=0}^{n} cjx^j D^j(y) = g(x)$$

Con c real y x diferente de cero.

Obsrevar que el coeficiente de $y^{(}n)$ es cnx^n la cual se anula en 0. Ahora si procedemos a dividir por ese coeficiente nos resulta que las funciones coeficientes para jϵ 0, . . . , n - 1 no son continuas en 0. Por lo que la solución se calcula en el intervalo (0, ∞) o bien en ($-\infty$, 0). En la resolución se puede utilizar dos métodos.

Método 1:

Hagamos el cambio de variable x = e^t entonces nuestra ecuación se transforma en:

$$\sum_{j=0}^{n} cj\frac{d^j y}{dt^j} = 0$$

Método 2:

Se centra en buscar una solución de la ecuación y = x^r con r un número por determinar.

Tenemos que $D^i(y) = (\prod_{k=0}^{j}(r-k))x^{r-j}$. Al sustituir esta función y sus derivadas en la ecuación se tiene x^r (q(r)) = 0 siendo q un polinomio con variable r. Ya que $x^r \neq 0$ se tiene que q debe ser 0. Las soluciones de esta ecuación permiten obtener un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial xy"' - 2y" = 0. Esta es una ecuación de Cauchy-Euler, basta multiplicar a la ecuación por x^2. Realizando el cambio de variable u = y" se obtiene la ecuación diferencial xu' - 2u = 0, la cual es una ecuación lineal de primer orden con solución general u(x)=C1 x^2. Al deshacer el cambio de variable se sigue que y”=k1 x^2. Al integrar obtenemos

$$y(x) = c1x^4 + c2x + c3$$

Soluciones en torno a puntos ordinarios

Se dice que x0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial lineal y” + P(x)y’ + Q(x)y = 0, donde P y Q son funciones analíticas en una vecindad (entorno) del punto x0; esto es, cada una de ellas se puede expresar como serie de potencias en una vecindad de dicho punto. En caso contrario se denomina punto singular.

Ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py = 0 \quad conp\epsilon R$$

se denomina ecuación de Hermite.

Para encontrar su solución, primero vemos que 0 es un punto ordinario, puesto las funciones $-2x$ y 2p son analíticas en cero.