Primer Parcial Carlos Alberto Gallegos Tena

(1)

Ejercicio 1: definición de campo

Campo: es un conjunto que tiene dos operaciónes binarias donde, sea k el conjnato y $+, \cdot$ las operaciones, entonces k es campo si $k+k \to k$ y $k \cdot k \to k$.

Ejercicio 2. Se k conjunto

- ¿Cuándo k es un campo? R= cuando tenga dos operaciones binarias tales que $k+k \to k$ y $k \cdot k \to k$

¿Cuándo un conjunto V es un espacio vectorial sobre el campo k? R= cuando existen dos operaciones tales que, Sea $+, \cdot$ las operaciones, entonces $V+V \to V$ y $k \cdot V \to V$.

Ejercicio 3: Z_7 el conjunto de clases de residuo mod 7. Demuestra que Z_7 es un campo.

$Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Es un campo sí sólo si $Z+Z \to Z$ y $\cancel{Z \cdot Z \to Z}$

Entonces, tomamos $a, b \in Z_7$

y vemos que $a+b = c \to c \bmod 7 \equiv$ es Z_7

$a \cdot b = c_2 \to c_2 \bmod 7 =$ es Z_7

Si es campo

Ejercicio 4:

Sea un subconjunto de vectores $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n\}$ de V ~~campo~~ espacio vectorial sobre el campo K.

$c \in K$

Entonces A son linealmente independientes

si $c_1\bar{v}_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n \bar{v}_n = 0$.

Determinar si $\{(01,0,1), (2,10)\}$ es conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{R}^3$.

$$c + (1,0,1) = (c+1, \cancel{0}, c) \checkmark$$
$$c \cdot (1,0,1) = (c, 0, c)$$

$c + (2,1,0)$ ~~*~~ es combinación lineal de $(1,1,0)$.

$\{(1,0,1), (2,1,0)\} \rightarrow$ no son linealmente independientes.

Ejercicio 5: $R = f + g \in V$ ✓

$(f+g)+b = (f)+(g+b)$ ✓

$(f+g) = g+f$ ✓

Sea $h(x) = 0x = 0 \rightarrow f + h = f$ ✓

Sea $Y = (-1f)$ Existe $f + (-1f) = 0 \rightarrow f + Y = 0$ ✓

$f \cdot g = fa \in V$ donde $a \in \mathbb{R}$ ✓

$(a+b)f = (af + bf)$ ✓

$1f = f$ ✓

$\boxed{\text{Si es espacio.}}$

Ejercicio 6:

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): ecuación diferencial que contien derivadas respecto a una sola variable.

Ecuación diferencial parcial: involucra derivadas parciales de una o más varibles dependientes de dos o más variables independientes.

Ecuación diferencial lineal: cuando las soluciones son combinaciones lineales de otras soluciones. Cuando tiene la forma de

$$a_n(x)y^n + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

Ec. dif. homogénea: si el operador diferencial respecto a la variable es cero. Es decir, si

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y) = g(x) = 0 \qquad \to g(x) = 0$$

Ejercicio 7:

$\cdot$) $y''' = 0$ $\qquad$ $\cdot\cdot$) $(y+x)dy - (y-x)dx = 0$

Ejercicio 9: Demuesta que la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ es Riemmam integrable en $[0,1]$.

El teorema fundamental del cálculo integral, nos dice que toda función continua en algún intervalo, es Riemam integrable. Por lo que basta demostrar que

$$e^{\frac{x^2}{2}} \text{ es continua en } [0,1].$$

Notamos que ~~f~~ es continua $[0,1]$

también
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{2} = e^{\frac{0^2}{2}} = 1$$
$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Por ello, queda demostrado que es Riemam integrable por la continuidad de función.

Ejercicio 10. Calcular las integrales indefinidas

- $\int \frac{\log(x)}{x} dy$ Hacemos cambio de variable

$u = \log x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

por lo que $dx = x du$

Hacemos el cambio $\int \frac{u}{x} \cdot x du = \int u du$

$\rightarrow = \frac{u^2}{2} + c \rightarrow \boxed{\frac{(\log x)^2}{2} + c}$

- $\int \frac{1}{x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x} dx$

$\frac{1}{x(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2)}$

- $\int \sqrt[25]{\log(x - \cos(x^2-1)) - 3tg(x)}\, dy$ Solución: estamos integrando respecto a y.

Por loque es una constante y por teorema fundamental nos que $= \sqrt[25]{\log \cdots} \int 1 dy = \boxed{\sqrt[25]{\log(x - \cos(x^2-1)) - 3tg(x)} \cdot y + c}$

- $\int \frac{5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x} dx$ Sol: Hacemos cambio de variable

$u = 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x$

$du = 10x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 4x - 4\, dx$

⑥

Por lo que $= \int \frac{5x^4+4x^3-3x^2+2x-2}{u} \cdot \frac{1}{10x^4+8x^3-6x^2+4x-4} du$

$= \int \frac{5x^4+4x^3-3x^2+2x-2}{10x^2+8x^3-6x^2+4x-4} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du$

es directa $= \frac{1}{2} \log(u) + c$

Regresando a nuestra variable original

$$\boxed{= \frac{1}{2} \log(2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-4x) + c}$$

Ejercicio 11

• $(3x-6y+4)y' + x - y = -3$ con $y(0)=1$

$\cancel{L = (3x - 6\frac{d^0}{dx^0}}$ $= 3xy' - 6yy' + 4y' + x - y = -3$

$\Rightarrow 3xy' - 6yy' + 4y' - y = x - 3$

$L = 3x\frac{d}{dx} - 6\frac{d^0}{dx^0}\frac{d}{dx} + 4\frac{d}{dx} - \frac{d^0}{dx^0}$

$L(y) = x - 3$

Es lineal no homogénea.
No es de variables separables.

• $w' = tg^2(z+w)$ con $z_0 = 0$ y $w(z_0) = 0$

$L = \frac{d}{dz}$

• $r' = 2\sqrt{r+1}\cos(\theta)$ con $\theta_0 = \pi$ y $r(\theta_0) = 0$

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\sqrt{r+1}\cos(\theta) \rightarrow \frac{dr}{\sqrt{r+1}} = 2\cos(\theta)$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r+1}} = \int 2\cos(\theta) = 2\sqrt{r+1} = 2\,sen(\theta) + C$$

$$\rightarrow \boxed{\sqrt{r+1} = sen(\theta) + C} \text{ sol implicita}$$

$$r(\pi) = sen(\pi) \cdot$$

Ejercicio 12:

Para ser espacio vectorial se debe cumplir

sea $a, b, c \in C^2$

$a + b \in C^2$ ✓ Sea $w_1 + z_1 = y_1 \rightarrow (w_1 + z_1, w_2 + z_2) = (y_1, y_2) \in C^2$

$(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓ si se cumple

$a+b = b+a$ ✓ $\rightarrow (w_1, w_2) + (z_1, z_2) = (w_1 + z_1, w_2 + z_2)$

y $w_1 + z_1 = z_1 + w_2$

Existe 0 neutro aditivo ✓

Existe inverso aditivo ✓

$(wz_1, wz_2) \in C^2$ ✓

C^2 Es espacio vectorial sobre C.

$(1,1) \in C \rightarrow \cancel{(1,1)\cdot(z_1,z_2)} = (1, (z_1, z_2) = (z_1, z_2)$ ✓

Base $(1,0), (0,1)$