Carlos Gallegos

Actividad de fin de semana

Ejercicios 21/09

1. Encontrar la función N(x,y) para que la sigueinte ecuación sea exacta. Proporicionar solución:

$$\text{ycos(x)} + e^x + \text{N(x,y)y'} = 0$$

Primero sabemos que para que sea exacta se debe cumplir que $M_y = N_x$, por lo que se debe cumplir:

$$M_y = cos(x) \quad \rightarrow \quad N_x = cos(x)$$

Por lo que $N(x,y) = \int cos(x)dx = sen(x) + c$

Entonces, la ecuación diferencial para que sea exacta queda la forma:

$$\text{ycos(x)} + e^x + \text{sen(x)y'} = 0$$

Para encontrar la solución tomamos $\omega_x = ycos(x) + e^x$ y $\omega_y = sen(x)y'$

Para encontrar $\omega(x,y)$ integramos M y N y la formamos:

$$\int Mdx = ysen(x) + e^x + c \text{ y } \int Ndy = ysenx + c$$

Por lo que $\omega(x,y) = ysenx + e^x$.

Entonces tenemos que ycos(x) + e^x + N(x,y)y' = 0 es exacta con solución $\omega(x,y) = ysenx + e^x = c$. Notamos que va a ser solución en todo R^2.

2. Resolver $y' + sen(x)y^2 - sen(x)y = 0$

Intentando resolver por variables seperables, primero despejamos y agrupamos terminos:

$$\frac{dy}{dx} = -sen(x)y^2 + sen(x)y = sen(x)(y - y^2)$$
$$\frac{dy}{y-y^2} = sen(x)dx$$

Por lo que resolvemos por variables separables integrando ambas partes:

$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int sen(x)dx$

$-log(y) + log(y-1) = cos(x) + c$

Por lo que nos queda como solución implícita $log(y-1) - log(y) = cos(x) + c$ con $y > 1$.

Ejercicios día 23/09

1. Determina si la siguinete función F es homogénea, de ser así, indica de qué grado es.

$$\text{F(x,y)} = (\text{x} + \sqrt{y^2 - xy}) - \frac{xy+y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4})$$

Primero, tomamos un $t \epsilon R$ y notamos que al hacer F(tx,ty) nos queda:

$$F(tx,ty) = (tx + \sqrt{(ty)^2 - txty}) - \frac{txty+(ty)^2}{tx} + \frac{(tx)^5}{(ty)^4}$$

Agrupando términos:

$$= (tx + \sqrt{t^2(y^2 - xy)}) - \frac{t^2xy+t^2y^2}{tx} + \frac{t^5x^5}{t^4y^4}$$

Simplificando las divisiones:

$$= (tx + t\sqrt{(y^2 - xy)}) - \frac{t(xy+y^2)}{x} + \frac{tx^5}{y^4}$$

$$= t(x + \sqrt{y^2 - xy}) - \frac{xy+y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4}) = tF(x,y)$$

Por definición, como F(tx,ty) = tF(x,y), y por el grado del exponente, es homogénea de grado 1.

2-Determina si las siguinetes ecuaciones son homogéneas y proporciona su solución.
a) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

Si tomamos M(x,y) = $x^2 + y^2$ y N(x,y) = $-xy$, notamos que son homogéneas de orden 2. Por lo que, por definición es homogénea de grado 2. Para resolverla tomaremos cambio de variable u= $\frac{y}{x}$ y se tiene y= ux dy= xdu+udx, por lo que :

$$-u^2x^2dx - ux^3du = -u^2x^2 - x^2dx$$

$$--ux^3du = -x^2dx \rightarrow ux^3du = x^2dx$$

Despejando:

$$udu = \frac{1}{x}dx$$

Tenemos una ecuación de variables separables, la cual resuelve integrando ambos lados de la ecuación:

$\int udu = \frac{1}{x}dx$

$\frac{u^2}{2} = log(x) + c$

Regresando a nuestra variable original u= $\frac{y}{x}$ nos queda:

$$\frac{(\frac{y}{x})^2}{2} = log(x) + c$$

Simplificando

$$y = \sqrt{2x^2log(x)} + c$$

Por lo que $y^2 = 2x^2log(x) + c$ con $x > 0$ es la solución para la ecuación.

b) $ydx = (x + \sqrt{y^2 - x^2}dy$

Primero despejamos y nos queda:

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{y^2-x^2}}$$