Ejercicio 1:

Sucesión convergente: es una sucesión $a(n)$ que tiene límite finito. Es decir, $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ donde $L \neq \pm\infty$.

Se cumple que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite L si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $N \leq n$.

Es sucesión convergente si converge a L.

Ejemplo 1: $a_n = \frac{1}{n}$

Notamos que los términos son

$a_1 = 1$
$a_2 = .05$
$a_3 = .0\overline{33}$
$a_4 = 0.25$
$a_5 = 0.2$
$a_6 = 0.166$

donde

$\lim_{n \to \infty} a_n(\frac{1}{n}) = 0$ por lo que converge en $\underbrace{\text{cero}}$

Ejemplo 2: $a_n = \frac{n+1}{n}$

$a_1 = 2$
$a_2 = 3/2$
$a_3 = 4/3$
$a_4 = 5/4$

Entonces, resolviendo

$$\lim_{n \to \infty} a_n\left(\frac{n+1}{n}\right) = \underline{1}$$

Por lo que converge en $\underbrace{\text{uno}}$

Ejercicio 2:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ Notamos que tenemos una serie geométrica.

Por lo que sabemos por teoremas que converge con $-1 < x < 1$ y diverge con $-1 > x > 1$.

Ejercicio 3:

i Punto singular: son los puntos donde xo, yo no tienen solución o no son únicas.

ii- Curva singular: la curva formada por los puntos singulares

iii Solución singular: solución dada por puros puntos singulares.

iiii Punto nudo: para cuando se tiene que $x_0 = 0$ y $y_0 \neq 0$ se llama punto nudo.

Ejercicio 4: ecuación de Clairaut es de la forma

$$u = t\,\frac{du}{dt} + h\left(\frac{du}{dt}\right)$$ con h fución continua y diferenciable.

Tiene solución 1- General $u(t) = tC + h(c)$

2- Singular $t = -h'(r)$ y $u(r) = h(r) - rh'(r)$

con $h'(a) = \dfrac{dh(a)}{da}$

Ejercicio 5:

Tenemos la ecuación $F = 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 = k$

Primero derivamos implícitamente para x

$$\rightarrow 8(x-1) + 18(y-1)y' = 0$$

Ahora cambiamos $y' \rightarrow \frac{-1}{y'}$ para obtener la ecuación asociada a la trayectoria ortogonal

$$\rightarrow 8(x-1) + 18(y-1) \cdot \frac{-1}{y'} = 0$$

$$= 8(x+1) + \frac{-18(y-1)}{y'} = 0$$

$$\rightarrow 8(x+1) = \frac{18(y-1)}{y'} \rightarrow y' = \frac{18(y-1)}{8(x+1)}$$

Nos queda la ecuación

$$y' = \frac{9(y-1)}{8(x+1)}$$

la cual podemos resolver por método de variables separables

$$\int \frac{1}{9(y-1)} dy = \int \frac{1}{8(x+1)} dx$$

$$\frac{\log(|y-1|)}{9} = \frac{\log(|x+1|)}{8} + c_0$$

Por lo que la familia de curvas ortogonales a F está dada por $\log(|y-1|) = 9\left(\frac{\log(|x+1|}{8} + c_0\right)$ con $c_0 \in \mathbb{R}$

Ejercicio 6: método de Euler

i— $y' = 4xy$ con $y(1) = 1$, aproximar $y(1.5)$ con $h = 0.1$

Solución: sea $f(x,y) = 4xy$, por el método de Euler tenemos que

$$y_n = y_{n-1} + h(4x_{n-1}\,y_{n-1})$$

Con $h = 0.1$ $\quad y_n = y_{n-1} + 0.1(4x_{n-1}\,y_{n-1})$

tenemos la tabla

n	x_n	y_n
0	1	1
1	1.1	1.4
2	1.2	2.016
3	1.3	2.96
4	1.4	4.5
5	1.5	$\boxed{7.02}$

$y_1 = 1 + 0.1(4\cdot 1\cdot 1)$
$= 1.4$

$y_2 = 1.4 + 0.1(4\cdot 1.1\cdot 1.4)$
$= 2.016$

$y_3 = 2.016 + 0.1(4\cdot 1.2\cdot 2.016)$
$y_3 = 2.96$

$y_4 = 2.96 + 0.1(4\cdot 1.3\cdot 2.96)$
$= 4.5$

$y_5 = 4.5 + 0.1(4\cdot 1.4\cdot 4.5)$

Por lo que el valor aproximado de $y(1.5)$ usando $h = 0.1$ es $\boxed{7.02}$

¿ $y' = \cos(x)$ con $y(0) = 1$ $y(0.5)$? con
$h = 0.01$

Solución: Por el método de Euler tenemos
que $y_n = y_{n-1} + 0.01\,(\cos(x)\, x_{n-1}\, y_{n-1})$

Tomaremos $h = 0.1$ porque con $h = 0.01$ serían 50
iteraciones

n	x_n	y_n
0	·1	1
1	0.9	1.05
2	0.8	1.12
3	0.7	1.19
4	0.6	1.26
5	0.5	1.34

Ejercicio 7: ecuación lineal homogénea de segundo orden

Sea $ay'' + by' + cy = f(x)$ $a \neq 0$ una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, tenemos que

$$ay'' + by' + cy = 0$$ es la ecuación lineal homogénea asociada de segundo orden.

Ejemplo 1: sea $2y'' + 4y' - 6 = \cos(x)$
$\Rightarrow$ homogénea $\Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$

Ejemplo 2: sea $6y'' - 3y' + 3 = 0$
homogénea $\Rightarrow 6x^2 - 3x + 3 = 0$

Ejercicio 8

i $7y'' - 3y' + 6y = 0$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$

Solución: tenemos una ecuación diferencial homógena de segundo orden donde la ecuación lineal homogénea asociada es

$$y_h = 7t^2 - 3t + 6 = 0$$

donde las raices son

$$t_1 = \frac{\sqrt{159}i}{14} + \frac{3}{14} \qquad t_2 = -\frac{\sqrt{159}i}{14} + \frac{3}{14}$$

Tenemos raices complejas, por lo que (por lemas vistos en clase) la solución a la ecuación hom. asociada es

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \rightarrow \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$
$$y_2(x) = e^{\alpha}\operatorname{sen}\beta x$$

entonces $\boxed{y(x) = c_1 e^{\frac{3x}{14}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{159}}{14}x\right) + c_2 e^{\frac{3x}{14}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{159}}{14}x\right)}$

con $y(0) = 0 = c_1 e^{\frac{3\cdot 0}{14}} \cdot \operatorname{sen}(0) + c_2 e^{\frac{3\cdot 0}{14}} \cdot \cos(0)$

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \rightarrow c_2 = 0$

con $y'(0) = 0 = c_1 e^{\frac{3\cdot 0}{14}} \frac{(3\operatorname{sen} 0 + \sqrt{159})}{14} = c_1 + \frac{\sqrt{159}}{14}$

La solución

$\boxed{y(x) = 0.9 e^{\frac{3x}{14}} \operatorname{sen} + 0}$ $\rightarrow c_1 = \boxed{0.9}$

ii. $3y'' + 2y' + y = 0$ con $y(0)=1$ y
$y'(0)=2$

Solución: tenemos que la ecuación lineal homogénea asociada es

$$y(\lambda) = 3t^2 + 2t + 1 = 0$$

donde las raices son

$$t_1 = \frac{\sqrt{2i}}{3} - \frac{1}{3} \qquad t_2 = -\frac{\sqrt{2i}}{3} - \frac{1}{3}$$

Tenemos raices complejas, por lo que la solución

es $y(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}} + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$

Condiciones iniciales

con $y(0) = 1 = \dfrac{C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 0}{3}\right)}{e^{\frac{0}{3}}} + \dfrac{C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 0}{3}\right)}{e^{\frac{0}{3}}}$

$$= C_1 \cdot \frac{\cancel{0.45}\ 0}{1.39} + C_2 \frac{\cancel{0.44}}{1.59}\ \frac{1}{1}$$

$$= C_1 \cdot 0.\cancel{32} + C_2\cancel{0.44} = 1 \rightarrow \boxed{C_2 = 1}$$

Ahora con

$$y'(0) = 2 = C1 \cdot 0.47$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{2}{0.47} = \boxed{4.25}$$

Por lo que la solución $\boxed{y(x) = 4.25 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)e^{\frac{-x}{3}} + \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}}$

Ejercicio 9 ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

i. Definición: son ecuaciones de la forma.

$$ay'' + by' + cy = f(x) \to 2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

Se consideran operadores lineales.

$$\underbrace{2y'' + 3y' + y = \cancel{f(x)} = 0}_{f}$$

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

ii - Homogénea asociada

iii - Auxiliar $\to 2t^2 + 3t + y = 0$

iv - Pate no homogénea $\to (f(x))$

Ejercicio 10: linealmente independendientes.

Se determina con el wronstiano $\neq 0$

Ejercicio 11

i * $y'' + y' + y = e^x$

Solución: como bien sabemos, primero encontramos la solución a la ec. homogénea asociada

$y_h: = t^2 + t + 1 = 0$ donde

$t_1 = \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}$ $\quad t_2 = \frac{-\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}$

como son raíces complejas, la solución está dada por

$$y_h(x) = \boxed{c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}}$$

Ahora, usamos el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular

usamos la forma $y_p(x) = x^s\left(\sum_0^n A_j x^j\right) e^{rx}$

con $s = 0$, por lo que

$\alpha + \beta i = \underline{1}$ con $y_0 = Ae^x$

derivamos $y'_0 = Aex \rightarrow y''_0 = Ae^x$

tenemos que $Ae^x - \frac{e^x}{3} \rightarrow A = \frac{1}{3}$

Por lo que $y_0 = \frac{1}{3}e^x \rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{3}e^x}$

Por el principio de superpoción, la solución general es $y_p + y_h$ $\rightarrow$ $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^x + c_1 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}x}{2} e^{-\frac{x}{2}} + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}}$