Ejercicio 2:

La integral indefinida es simplemente una antiderivada a una función. La integral definida es cuando queremos encontrar el área bajo la curva de alguna función en un intervalo indicado.

Decimos que hay una integral impropia cuando los límites de integración ocasionan alguna discontinuidad en nuestra función a integrar.

Ejercicio 3:

1- $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ Simplificamos a

$$\int \left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

resolvemos directamente

$$\boxed{x-2(\arctan(x))+C}$$

2- $\int \frac{\log(x)}{x^2}\,dx$ Integramos por partes:

$u=\log x \quad du=\frac{1}{x}$

$dv=\frac{1}{x^2} \quad v=-\frac{1}{x}$

$$-\frac{\log x}{x}-\int -\frac{1}{x^2}\,dx = \boxed{\frac{-\log x}{x}-\frac{1}{x}+C}$$

3- $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ Simplificamos

$$\int 1 - \frac{2}{1+\cos x}\, dx$$

$$x - 2\int \frac{1}{1+\cos x}\, dx + C$$

cambio de variable $\quad u = \frac{x}{2} \quad du = \frac{1}{2}\, dx$

$$\int \frac{2}{1+\cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \sec^2(u)\, 2\, du = 2\tan(u)$$

$$\rightarrow \boxed{x - 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C}$$

4- $\int \frac{1-\cos t}{\log t}\, dr \rightarrow$ como es respecto a "r"

$$= \boxed{\frac{1-\cos t}{\log t}\, r + C}$$

5- $\int \frac{\text{arctg}^2(x)}{x^2+1}\,dx$ Hacemos cambio de variable

$$u = \text{arctg}(x) \quad du = \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{u^2}{x^2+1}(x^2+1)\,du = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\text{arctg}^3(x)}{3} + C}$$

6- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ Cambio de variable

$$u = \sqrt{x} \quad du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int \frac{e^u}{\cancel{\sqrt{x}}}\,2\cancel{\sqrt{x}}\,du = 2e^u + C$$

$$\boxed{= 2e^{\sqrt{x}} + C}$$

7. $\int \frac{4x^3-6x^2+x-3}{2x^4-4x^3+x^2-6x-1}$ Cambio de variable

$$u = 2x^4-4x^3+x^2-6x-1$$

$$du = 8x^3-12x^2+2x-6\,dx$$

$$\int \frac{4x^3-6x^2+x-3}{u}\,\frac{1}{8x^3-12x^2+2x-6}\,du = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}\,du = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2x^4-4x^3-x^2-6x-1)}$$

$$= \boxed{\log(12x^4-4x^3+x^2-6x-11) \quad \frac{1}{2} + C}$$

8. $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$ Cambio de variable

$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$$\int \frac{\cos u}{\cancel{\sqrt{x}}} \, 2\cancel{\sqrt{x}}\, du = \int 2\cos u \, du$$

$$= 2\,\text{sen}\,u = \boxed{2\,\text{sen}(\sqrt{x}) + C}$$

Ejercicio 4:

- $y' - y = 3x - y''$ Ecuación lineal coef constantes
  Grado 2 Homogénea

- $\frac{d^5y}{dx^5} = 3x - 6\,\text{sen}(x) \rightarrow$ Grado 5 Homogénea
  lineal

- $6\,\frac{6w}{6t} = 8t^3 \rightarrow$ Grado 1 No Homogénea

- $\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial^3\theta}{\partial t^3} = 5t - \frac{\partial\theta}{\partial t} \rightarrow$ Grado 3 Homogénea

5 - $3xy - \phi xy + \mu x = \csc(xy)$ $\rightarrow$ Grado 2
No homogénea

6 - $\cos(xy)\ \dfrac{d^7y}{dx}$ $\rightarrow$ Grado 7 homogénea.

7. $\dfrac{1}{y}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{y}{x^2}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + 1 + \dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) \cdots\cdots)y' = 0$

$\rightarrow$ Grado 1 no homogénea

8. $\dfrac{dy}{dx} = 2y^3 + y + 4$ $\rightarrow$ Grado 1 no homogénea

9. $\dfrac{1}{t}\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = \log(s^2 t)$ $\rightarrow$ Grado 1 no homogénea

Ejercicio 5

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2y^3 + y + 4$ $\rightarrow$ $\dfrac{dy}{2y^3+y+4} = dx$ Si

$$\int \frac{dy}{2y^3+y+4} = \int dx \rightarrow \boxed{\log(12y^3+y+4) = x + C}$$

2: $\dfrac{1-x^2}{y^2} = y'$ $\rightarrow$ $\int 1 - x^2\,dx = \int y^2\,dy$ Si

$$= \boxed{x - \frac{x^3}{3} = \frac{y^3}{3} + C}$$

4. $y' = y(2 + \text{sen}(x))$ Si

$$\frac{1}{y}\,dy = (2 + \text{sen}(x))\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int (2 + \text{sen}(x))\,dx = \boxed{\log(y) = 2x - \cos x + C}$$

5. No es de variables separables por que no se puede obtener la forma

$M\,dy = N\,dx$ donde M depende solamente de y y N de x.

6. $s^2 + \frac{ds}{dt} = \frac{s+1}{st}$

$st\,s^2 + st\frac{ds}{dt} = s+1 \rightarrow$ No es separable

7 $y' = \frac{1}{xy^3} \rightarrow y^3\,dy = \frac{1}{x}\,dx$ Sí

$\int y^3\,dy = \int \frac{1}{x}\,dy = \frac{y^4}{4} = \log(|x|) + C$

8. $(xy^2 + 3y^2)\,dy - 2x\,dx = 0$

$\rightarrow (xy^2 + 3y^2)\,dy = 2x\,dx \rightarrow$ No es sep.

9. $Sen(x+y) = y' \rightarrow sen(x+y) = y'$

Identidades

$\rightarrow \quad sen(x)\cos(y) + \cos(x)\,sen(y) = \frac{dy}{dx}$

No es separable

10. $x\frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{3u}$ Sí.

$\int \frac{3u}{1-u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{-3\log(u^2-1)}{2} = \log(|x|) + C$

11 $y' = 1$ Sí es separable

$\int dy = \int dx \rightarrow y = x + C$