MODELACIÓN Y MÉTODO GRÁFICO

Melendrez Arriaga Esteban Miguel

Gallegos Tena Carlos Alberto

1. Un hipermercado necesita como mínimo 16 cajas de langostino, 5 cajas de nécoras y 20 de percebes. Dos mayoristas, A y B, se ofrecen al hipermercado para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden dicho marisco en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de langostino, 1 de nécoras y 2 de percebes. Por su parte, B envía en cada contenedor 2, 1 y 7 respectivamente. Cada contenedor que suministra A cuesta 21 000 pesos, mientras que los del mayorista B cuestan 30 000 pesos cada uno. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades mínimas con el menor costo posible?

X_1 cantidad de contenedores del proveedor A

X_2 cantidad de contenedores del proveedor B

Min Z= $21\,000x_1 + 30\,000x_2$

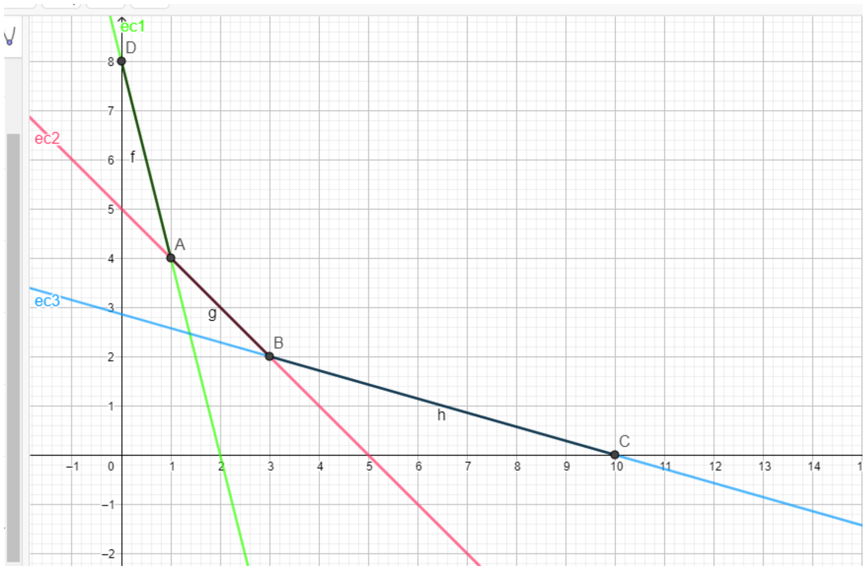
s.a :

$8x_1 + 2x_2 \geq 16$ ec1

$x_1 + x_2 \geq 5$ ec2

$2x_1 + 7x_2 \geq 20$ ec3

$x_1 , x_2 \geq 0$



Punto A para ec 1 y 2	Punto B para ec 2 y 3
$8x_1 + 2x_2 = 16$ .... 1 $x_1 + x_2 = 5$ 2	$x_1 + x_2 = 5$ ....2 $2x_1 + 7x_2 = 20$....................3
$x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 2$.......... 1 $x_1 + x_2 = 5$ 2	$x_1 + x_2 = 5$ ....2 $x_1 + \frac{7}{2}x_2 = 10$...................3
$-\frac{3}{4}x_2 = -3$	$-\frac{5}{2}x_2 = -5$
$x_2 = 4$	$x_2 = 2$
$x_1 + (4) = 5$	$x_1 + (2) = 5$
$x_1 = 1$	$x_1 = 3$

Z(A)= Z(1,4) = 21 000(1)+ 30 000(4)= 141 000

Z(B)=Z(2,3)= 21 000(2)**+** 30 000(3)=132 000

Z(C)= (10,0)= 21 000(10)**+** 30 000(0)=210 000

Z(D)= (0,8)= 21 000(0)**+** 30 000(8)=240 000

Solución Optima

$X_1 = 2$, $x_2 = 3$, 132 000

2. Cada mes una empresa puede gastar, como máximo 100, 000 en salarios y 180, 000 pesos en energía (electricidad y gasoil). La empresa sólo elabora dos tipos de productos A y B. Por cada unidad de A que elabora gana 80 pesos y 50 pesos por cada unidad de B. El costo salarial y energético que acarrea la elaboración de una unidad del producto A y una de B aparece en la siguiente tabla

	A	B
Costo salarial	200	100
Costo energético	100	300

Se desea determinar cuántas unidades de cada uno de los productos A y B debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo.

Tomamos a la cantidad de productos a como x1 y a la cantidad de productos como x2, por lo que las ganancias estarán dadas por la función:

$$z = 80x1 + 50x2$$

Como se tiene un límite de 100,000 en salarios y 180,000, se debe tener en cuenta que :

$$200x1 + 100x2 \leq 100{,}000$$

$$100x1 + 300x2 \leq 180{,}000$$

Por lo que se busca

$$Maximizar\ z = 80x1 + 50x2$$

Sujeto a

$$200x1 + 100x2 \leq 100{,}000$$

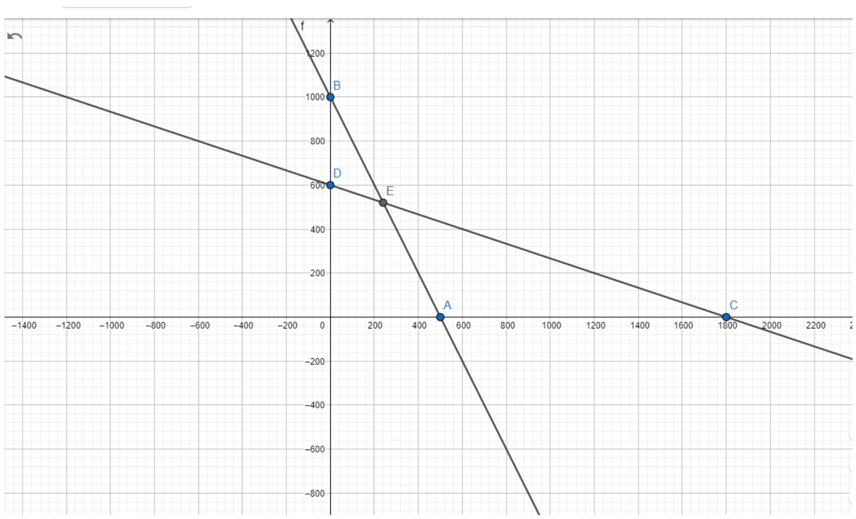
$$100x1 + 300x2 \leq 180{,}000$$

$$x1, x2 \leq 0$$

Método gráfico:

Para la primera ecuación tenemos que x1=500 y x2=1000

Para la segunda ecuación x1=1800 y x2=600



Notamos que tenemos 4 extremos encontrando la intersección de las dos rectas, (0,0) (500,0) (0,600) y (240,520). Evaluamos los puntos en la función a maximizar:

Z=80(0)+50(0)=0

Z=80(500)+0=40000

Z=0+50(600)=30000

Z=80(240)+50(520)=45200

Por lo que x1=240 y x2=520 son la cantidad de producto que maximizan las ganancias con las restricciones dadas.

3. Una fábrica textil elabora prendas de punto de calidades A y B. Las de calidad A se fabrican con 1 unidad de lana y 2 unidades de fibra sintética y las de calidad B con dos unidades de lana y 1 de fibra sintética. Los beneficios obtenidos en la venta de las prendas son de 1500 pesos para las de calidad A y 1000 pesos para las de calidad B. Sabiendo que sólo se dispone de 180 unidades de lana y 240 de fibra sintética, se pide:
   a. Determinar cuántas prendas de cada tipo deben elaborarse para obtener un beneficio máximo si la producción no puede ser superior a 1000 prendas

$\mathbf{x_1}$ prendas de calidades A
$\mathbf{x_2}$ prendas de calidades B

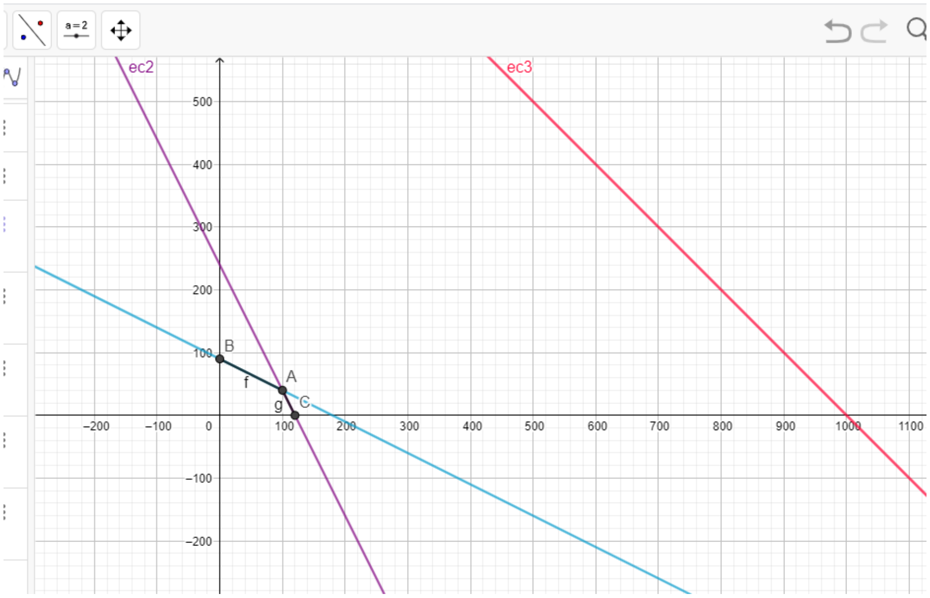
Max Z= 1500$\mathbf{x_1}$ + 1000$\mathbf{x_2}$
s.a :

$$\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} \leq 180 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ec1}$$

$2x_1 + x_2 \leq 240$ ec2

$x_1 + x_2 \leq 1000$ ec3

$x_1 , x_2 \geq 0$



Punto A para ec 1 y ec2

$x_1 + 2x_2 = 180$ 1

$2x_1 + x_2 = 240$ 2

\- - - ——————————————————

$x_1 + 2x_2 = 180$ 1

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 120$ 2

$\frac{3}{2}x_2 = 60$ ------- > $x_2 = 40$

$x_1 + 2(40) = 180$ -------------- > $x_1 = 100$

Z(A) = Z(100,4)= 1500(100)+ 1000(4) = 154 000

Z(B) =Z(0,90)= 1500(0)+ 1000(90) = 9000

Z(C)=(120,0)= 1500(120)+ 1000(0) = 180 000

Solución Optima

$X_1 = 120$, $x_2 = 0$, 180 000

4. Una compañía fabrica dos modelos de sombrero: Bae y Viz. La fabricación de los sombreros se realiza en las secciones de modelado, pintura y montaje. La fabricación de cada modelo Bae requiere de 2 horas de modelado, 3 de pintura y una de montaje. La fabricación del modelo Viz requiere tres horas de modelado, 2 de pintura y una de montaje. Las secciones de modelado y pintura disponen, cada una, de un máximo de 1500 horas cada mes y la de montaje de 600.
Si el modelo Bae se vende a 1000 pesos y el modelo Viz a 1200 pesos. ¿Que cantidad de sombreros de cada tipo se ha de fabricar para maximizar el beneficio mensual?

Primero tomamos x1= cantidad de Bae y x2= cantidad de Viz. La función que nos da las ganancias es:

$$Maximizar\ z = 1000x1 + 1200x2$$

Sujeto a

$$2x1 + 3x2 \leq 1500$$

$$3x1 + 2x2 \leq 1500$$

$$1x1 + 1x2 \leq 600$$

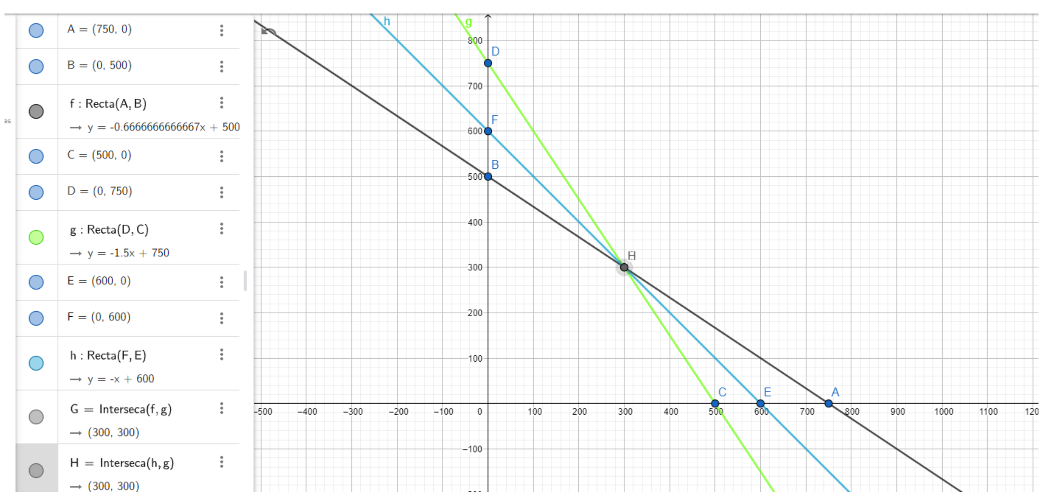
$$x1, x2 \leq 0$$

Método gráfico:

Para la primera ecuación tenemos x1=750 y x2=500

Para la segunda x1=500 y x2=750

Para la tercera x1=600 y x2=600



Nos quedan 4 extremos (0,0) (500,0) (0,500) y encontrando la intersección nos queda el punto (300,300)

Evaluando:

Z= 1000(0) + 1200(0)=0

Z= 1000(500) + 0 = 500000

Z=1000(0)+ 1200(500)=600000

Z=1000(300)+1200(300)=660000

Por lo que 300 de bae y 300 de viz maximizan las ganancias con un total de 660,000.

5 En un taller de motos estiman que, por término medio, revisión normal de una moto nueva supone 0.5 horas en la sección mecánica y 1 hora en la sección de electricidad; mientras que la revisión de una moto usada supone 3 horas de mecánica y 1 hora de electricidad. Por la revisión de una moto nueva se cobra 250 pesos y por la revisión de una moto usada se cobra 450 pesos.

Si la sección mecánica puede trabajar durante 9 horas al día como máximo y la electricidad durante 8 horas al día, también como máximo, calcular cómo se debe seleccionar el trabajo para obtener los máximos ingresos.

$\mathbf{x_1}$ motos nuevas

$\mathbf{x_2}$ motos usadas

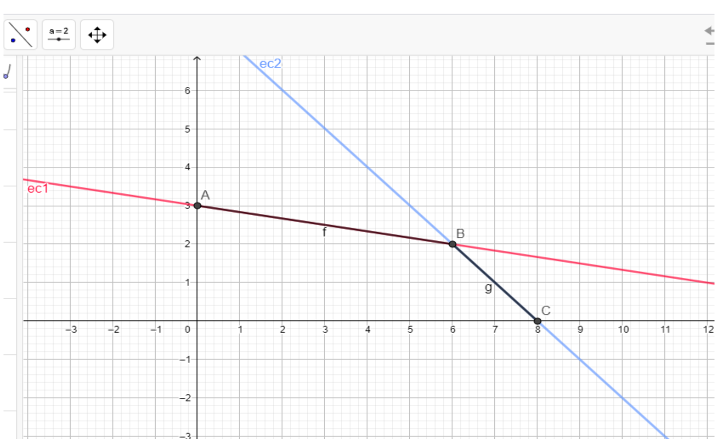
Max Z= $250\mathbf{x_1} + 450\mathbf{x_2}$

s.a:

$0.5\mathbf{x_1} + 3\mathbf{x_2} \leq 9$ …………………..ec1

$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \leq 8$ ……………………….ec2

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \geq 0$



Punto B

$0.5\mathbf{x_1} + 3\mathbf{x_2} = 9$ ……………..1

$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = 8$ …………………..2

$\mathbf{x_1} + 6\mathbf{x_2} = 18$ ………….1

$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = 8$ ……………..2

$5\mathbf{x_2} = 10$ --------------------> $\mathbf{x_2} = 2$

$\mathbf{x_1} + (2) = 8$ -------------------> $\mathbf{x_1} = 6$

Z(A)=Z(0,3)= 250**(**0**)** + 450**(**3**) =** 1350

Z(B) =Z(6,2)= 250**(**6**)** + 450**(**2**) =** 2400

Z(C)=Z(8,0)= 250(8) + 450**(**0**)** = 2000

solución Optima

$X_1 = 6$, $x_2 = 2$, 2400

6. En una granja se preparan dos clases de piensos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kg de A y 2 kg de B. Cada saco de Q contiene 10 kg de A y 5kg de B. cada saco de P se vende en 30 pesos y cada saco de Q se vende en 80 pesos. Si en la granja hay almacenados 80 kg de A y 25 de B, ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso deben preparar para obtener los máximos ingresos?

x1= pienso P y x2=pienso Q. La función de las ganancias está dada por

$$z = 30x1 + 80x2$$

Restricciones

$$8x1 + 10x2 \leq 80$$

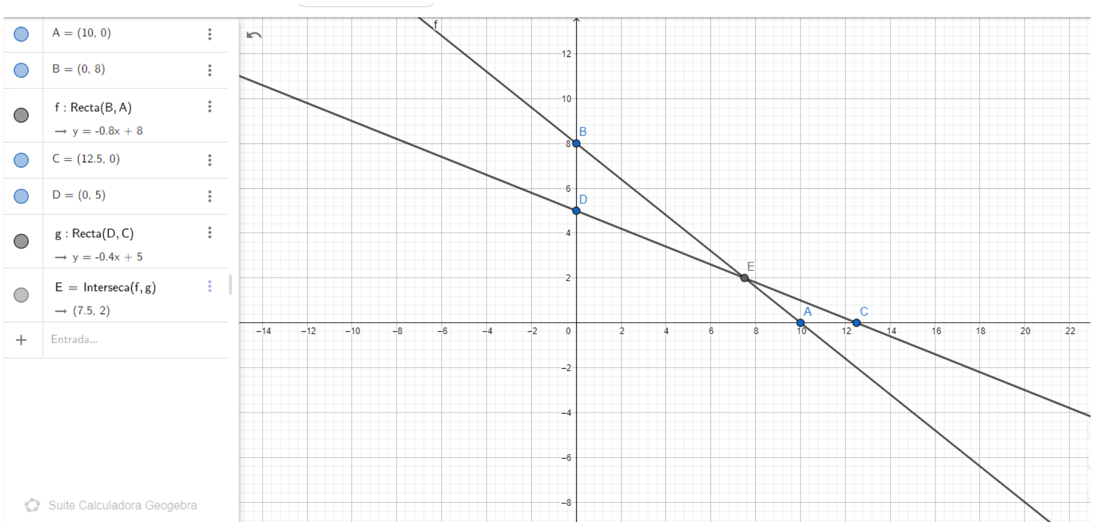
$$2x1 + 5x2 \leq 25$$

$$x1, x2 \leq 0$$

Método gráfico:

Para la ecuación 1 tenemos que x1=10 y x2=8

Para la 2 x1=12.5 y x2=5



Notamos que hay 4 extremos, (0,0) (10,0) (0,5) y la intersección de las ecuaciones la cual es (7.5,2). Vamos a tomar como 7 sacos porque no puede haber 7.5.

Evaluando

Z=0

Z=30(10)+0=30

Z=0+80(5)=400

Z=30(7)+80(2)=370

Por lo que para maximizar las ganancias tomamos x1=0 y x2=5 para tener ganancias de 400.

7 Un camión puede transportar como máximo 9 ton por viaje. En cierto viaje desea transportar al menos 4 ton de la mercancía A, y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobran 3 pesos por kg de A y dos pesos por kg de B, ¿Cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

$\mathbf{x_1}$ toneladas de mercancía A

$\mathbf{x_2}$ toneladas de mercancía B

Max Z= $3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2}$

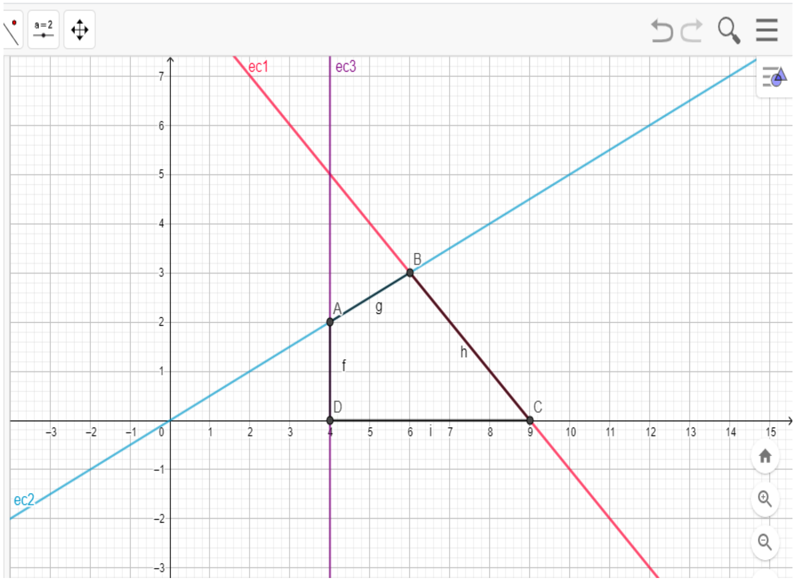
s.a :

$\mathbf{x_1 + x_2} \leq 9$ …………..ec1

$\mathbf{x_2} - \frac{1}{2}\mathbf{x_1} \geq 0$ …………ec2

$\mathbf{x_1} \geq 4$ ……………ec3

$x_1 , x_2 \geq 0$



Punto A para ec2 y ec3	Punto B para ec 1 y ec2
$2x_2 - \frac{1}{2}x_1 = 0$ 2	$x_1 + x_2 = 9$......................1
$x_1 = 4$ 3	$x_2 - \frac{1}{2}x_1 = 0$ 2
$2x_2 - \frac{1}{2}(4) = 0$	$\frac{3}{2}x_1 = 9$
$x_2 = 1$	$x_1 = 6$
	$6 + x_2 = 9$
	$x_2 = 3$

$Z(A) = Z(4,2) = 3(4) + 2(2) = 16$

$Z(B) = Z(6,3) = 3(6) + 2(3) = 24$

$Z(C) = Z(9,0) = 3(9) + 2(0) = 27$

$Z(D) = Z(4,0) = 3(4) + 2(0) = 12$

Solución Optima

$X_1 = 9,$ $x_2 = 0,$ 27

8. En una granja de pollos se da una dieta para engordar con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 pesos y el del tipo Y es de 30 pesos. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

Tomamos la cantidad de X como x1 y de Y como x2. Por lo que el gasto está dado por:

$$z = 10x1 + 30x2$$

Restricciones

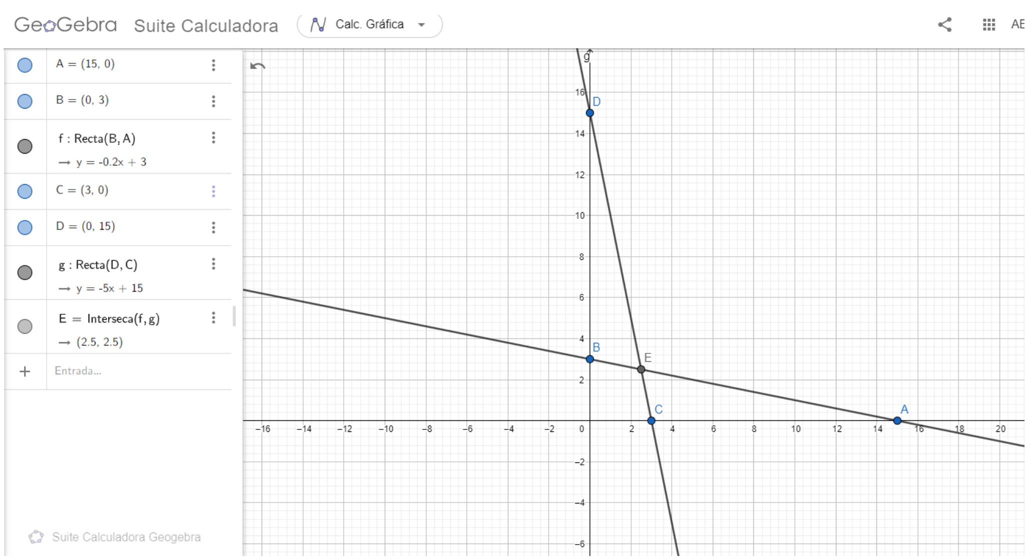
$$x1 + 5x2 \geq 15$$

$$5x1 + x2 \geq 15$$

Método gráfico:

Para la primera ecuación nos queda x1=15 y x2=3

Para la segunda ecuación x1=3 y x2=15



El punto para evaluar es la intersección de las rectas, la cual es el punto (2.5,2.5)

Z=10(2.5)+30(2.5)=100

9-. La compañía Hierros del Norte debe decidir cuántas toneladas de acero puro X y cuántas de chatarra Y se deben utilizar en la preparación de una aleación para un cliente. El costo por tonelada de acero puro es de 3 mil pesos y el de chatarra 6 mil pesos (por las impurezas); la demanda del cliente es de por lo menos 5 toneladas, y el aceptará más si se requiere. La disponibilidad de X es de 4 toneladas y 7 toneladas la de Y. La relación entre chatarra y acero puro no puede exceder 7/8. La fábrica tiene 18 horas disponibles para derretir y fundir; una tonelada de acero puro requiere 3 horas, mientras que la de chatarra sólo 2.

a. Escribir el problema de programación lineal.

Min Z= 3000x + 6000y

s.a

$x + y \geq 5$ ……………….ec1

$x \leq 4$ ………………..ec2

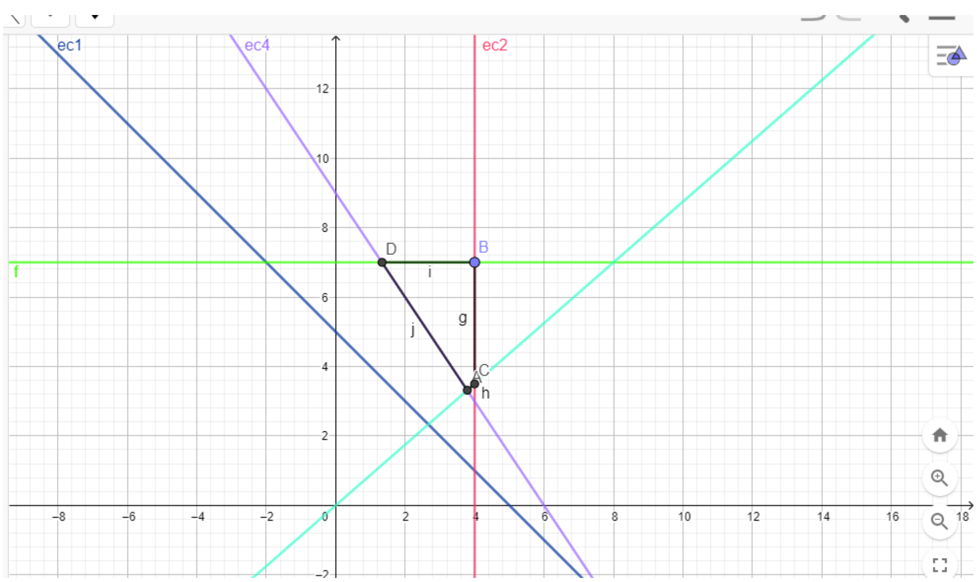
$y \leq 7$ ……………….ec3

$0 \leq \frac{7}{8}x - y$ ……………….ec 4

$3x + 2y \leq 18$ ……….ec5

$X, \ y \geq 0$

b. Resolverlo gráficamente.



Punto A para ec 4 y ec 5	Punto B ec 2 y ec 4	Punto D ec 3 y ec 5
$\frac{7}{8}x - y = 0$	x=4	y=7

3x + 2y = 18 $\frac{7}{4}$x – 2y= 0 3x + 2y = 18 $\frac{19}{4}$x = 18 X=$\frac{72}{19}$ $\frac{7}{8}(\frac{72}{19})$ – y= 0 Y= 3.32	$\frac{7}{8}$x – y= 0 $\frac{7}{8}(4)$ – y= 0 Y=3.5	3 x+2 y=18 3 x+2 (7)=18 X= 1.33

Min Z(A)= Z(3.79, 3.32)= 3000(3.79) + 6000(3.32) = 31 290

Min Z(B)= Z(4, 7)= 3000(4) + 6000(7) = 54 000

Min Z(C)= Z(4, 3.5)= 3000(4) + 6000(3.5) = 33 000

Min Z(D)= Z(1.33, 7)= 3000(1.33) + 6000(7) = 45 990

Valor optimo:

X= 3.79, Y= 3.32 , 31 290

10. Para el tratamiento de cierta enfermedad, hay que administrar tres vitaminas: X, Y, Z. Cada semana es preciso consumir, al menos, 437 mg de la vitamina X, 270 mg de la Y y 199 mg de la Z. Esta vitaminas se presentan en dos preparados: el A, con comprimidos de 80 mg que cuestan 25 pesos y cuya composición 20% de X, 40% de Y y 40% de Z. Y el preparado B, cuyos comprimidos pesan 90 mg, cuestan 30 pesos y tienen una composición de 30% de X, 60% de Y y 10% de Z. ¿Qué número de comprimidos de cada preparado harán más económico el tratamiento? ¿Se puede prescindir de alguna restricción en este problema? ¿Por qué?

Tomamos x1= cantidad de A y x2= cantidad de B. La función de los gastos está dada por

Z=25x1 + 30x2

Restricciones

$$16x1 + 27x2 \geq 437$$

$$32x1 + 54x2 \geq 270$$

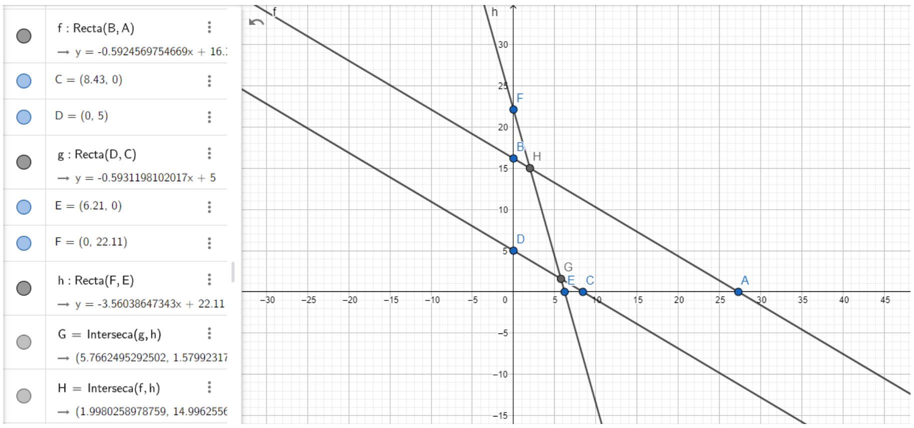
$$32x1 + 9x2 \geq 199$$

Método gráfico

Para la primera ecuación x1=27.31 y x2=16.18

Para la segunda x1=8.43 y x2=5

Para la tercera x1=6.21 y x2=22.111



Hay 3 puntos que pueden satisfacer las ecuaciones, (0,22.11) (27.31,0) y la intersección de la primera ecuación con la tercera, la cual es (2,15). Evaluando

Z=25(0)+30(22.11)=663.3

Z=25(27.31)=682.75

Z=25(2)+30(15)=500

Por lo que el más económico para cubrir el tratamiento sería x1=2 x2=15. Se puede ignorar la segunda ecuación

$$32x1 + 54x2 \geq 270$$

Porque las otras dos ya incluyen a dicha ecuación, es decir, si se cumplen las otras dos entonces se cumple ésta ecuación.