

Bayes'scher Ansatz

Peter von Rohr

27 März 2017

Frequentisten und Bayesianer

Unterschiede zwischen Frequentisten und Bayesianern bestehen hauptsächlich in

- ▶ deren Verständnis von Wahrscheinlichkeiten
- ▶ deren Unterteilung von Modell- und Datenkomponenten
- ▶ deren Techniken zur Schätzung von Parametern

Bekannte und Unbekannte Größen

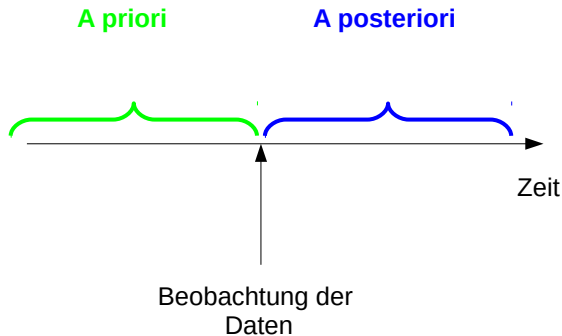
Angenommen: einfaches lineares Regressionsmodell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \epsilon_i \quad (1)$$

Was	bekannt	unbekannt
y_i	X	
x_{i1}	X	
β_0		X
β_1		X
σ^2		X

Schätzung Unbekannter Grössen

- ▶ Parameterschätzung
- ▶ a posteriori Verteilung der unbekannten Grössen gegeben die bekannten Grössen



A Posteriori Verteilung

- ▶ Für unser Regressionsmodell
 - ▶ Annahme: σ^2 sei bekannt und ist im Folgenden nicht mehr erwähnt
 - ▶ a posteriori Verteilung für β : $f(\beta|\mathbf{y})$
- ▶ Berechnung durch **Satz von Bayes**, dieser basiert auf der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} f(\beta|\mathbf{y}) &= \frac{f(\beta, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y})} \\ &= \frac{f(\mathbf{y}|\beta)f(\beta)}{f(\mathbf{y})} \end{aligned} \tag{2}$$

Komponenten der A Posteriori Verteilung

- ▶ $f(\mathbf{y}|\beta)$: Likelihood
- ▶ $f(\beta)$: a priori Verteilung von β
- ▶ $f(\mathbf{y})$: Normalisierungskonstante

Problem

- ▶ A Posteriori Verteilung häufig nicht explizit als Verteilung darstellbar
- ▶ Lösung durch
 1. Julian Besag 1974: A Posteriori Verteilung ist bestimmt durch vollbedingte Verteilungen
 2. Gute Pseudozufallszahlen-Generatoren in Software
- ▶ A Posteriori Verteilung für Regression: $f(\beta|\mathbf{y})$
- ▶ Vollbedingte Verteilungen für Regression:
 - ▶ $f(\beta_0|\beta_1, \mathbf{y})$
 - ▶ $f(\beta_1|\beta_0, \mathbf{y})$

wobei β der Vektor bestehen aus $\beta^T = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix}$

Ablauf einer Analyse: Vorbereitung

- ▶ Schritt 1: Festlegung der a priori Verteilungen
- ▶ Schritt 2: Bestimmung der Likelihood aufgrund von Daten und Modell
- ▶ Schritt 3: Berechnung der a posteriori Verteilung
- ▶ Schritt 4: Bestimmung der vollbedingten Verteilungen

Ablauf einer Analyse: Umsetzung

Beispiel der Regression

- ▶ Schritt 5: Initialisierung aller unbekannten Größen (β_0 , β_1) auf einen Startwert
- ▶ Schritt 6: Bestimme neuen Wert für β_0 durch Ziehen einer Zufallszahl aus $f(\beta_0|\beta_1, \mathbf{y})$
- ▶ Schritt 7: Bestimme neuen Wert für β_1 durch Ziehen einer Zufallszahl aus $f(\beta_1|\beta_0, \mathbf{y})$
- ▶ Schritt 8: Loop viele Wiederholungen über Schritte 6-7 und speichere alle gezogenen Zahlen
- ▶ Schritt 9: Parameterschätzungen als Mittelwerte der gespeicherten Zufallszahlen

R-Programm

```
beta = c(0, 0); meanBeta = c(0, 0)
niter = 10000 # number of samples
for (iter in 1:niter) {# loop for Gibbs sampler
  # sampling intercept
  w = y - X[, 2] * beta[2]; x = X[, 1]
  xpxi = 1/(t(x) %*% x); betaHat = t(x) %*% w * xpxi
  # using residual var = 1
  beta[1] = rnorm(1, betaHat, sqrt(xpxi))
  # sampling slope
  w = y - X[, 1] * beta[1]; x = X[, 2]
  xpxi = 1/(t(x) %*% x)
  betaHat = t(x) %*% w * xpxi
  # using residual var = 1
  beta[2] = rnorm(1, betaHat, sqrt(xpxi))
  meanBeta = meanBeta + beta
}
```

Fragen und Dank

- ▶ Fragen?
- ▶ Vielen Dank!!