

ASMNW - Lösung 6

Peter von Rohr

2018-04-09

Aufgabe 1: Kontrollfragen LASSO

Kontrollfrage 1:

- a. Wieso brauchen wir Alternativen zu Least Squares?
- b. Wie sehen die Alternativen zu Least Squares aus?

Kontrollfrage 2: Gegeben das einfache lineare Modell

$$y = Xb + e \tag{1}$$

- a. Welche Anforderung bezüglich des Ranges der Matrix \mathbf{X} besteht, damit Least Squares verwendet werden kann?
- b. Aus welchem Grund besteht diese Anforderung aus 2a?

Lösung

Antwort 1:

- a. Least Squares kann nur verwendet werden, wenn $n > p$ gilt, d.h. die Anzahl der Beobachtungen grösser ist als die Anzahl zu schätzender Parameter. Da es aber immer häufiger Anwendungen gibt, bei denen das nicht der Fall ist, brauchen wir Alternativen zu Least Squares.
- b. Es wurden drei Alternativen vorgestellt: (1) Subset-Selection, (2) Regularisierung und (3) Dimensionsreduktion

Antwort 2:

- a. Matrix \mathbf{X} muss vollen Spaltenrang haben, d.h. $n > p$ sein
- b. Nur so ist die Inverse $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ berechenbar

Aufgabe 2: Kontrollfragen Bayes

Kontrollfrage 1: Gegeben sei das folgende einfache lineare Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \epsilon_i \tag{2}$$

wobei

- y_i die i -te Beobachtung einer Zielgrösse ist
- β_0 für den Achsenabschnitt steht
- x_1 eine erklärende Variable ist und
- ϵ_i für den Restterm steht

Für den Restterm nehmen wir an, dass deren Varianz konstant gleich σ^2 ist. Teilen Sie die Komponenten im Modell (2) in der folgenden Tabelle in bekannte und unbekannte Größen ein.

Was	bekannt	unbekannt
y_i		

Was	bekannt	unbekannt
x_1		
β_0		
β_1		
σ^2		

Kontrollfrage 2:

Unter der Annahme, dass bei der Zielgrösse und der erklärenden Variablen keine Daten fehlen, welcher Einteilung bei den Frequentisten entspricht dann die Bayes'sche Einteilung in bekannte und unbekannte Grössen?

Lösung

Antwort 1:

Was	bekannt	unbekannt
y_i	X	
x_1	X	
β_0		X
β_1		X
σ^2		X

Antwort 2:

Die Einteilung in bekannte und unbekannte Grössen entspricht unter der Annahme, dass keine Daten fehlen, der frequentistischen Einteilung in Daten und Parameter. Dabei entsprechen die Daten den bekannten Grössen und die Parameter den unbekannten Grössen.

Aufgabe 3: Vergleich zwischen Bayes und Least Squares

Gegeben ist das Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 * x_i + \epsilon_i \quad (3)$$

wobei

- y_i Zielgrösse der Beobachtung i
- β_0 Achsenabschnitt
- x_i erklärende Variable der Beobachtung i
- β_1 fixer Parameter der erklärenden Variable x
- ϵ_i zufälliger Resteffekt der Beobachtung i

Wir nehmen an die Resteffekte seien unkorreliert und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und konstanter Varianz $\text{var}(\epsilon_i) = \sigma^2$

Auf der Webseite ist unter dem Link <https://charlotte-ngs.github.io/GELASMFS2017/w6/simpleLinReg.csv> ein Datensatz mit 20 Beobachtungen verfügbar. Diesen Datensatz können Sie mit dem folgenden R-Befehl einlesen. Als Kontrolle können wir die Dimension der eingelesenen Daten bestimmen.

```
sDataFn <- "simpleLinReg.csv"
sDataLink <- file.path("https://charlotte-ngs.github.io/GELASMFS2017/w6", sDataFn)
```

```
dfDataRead <- read.csv(file = sDataLink, stringsAsFactors = FALSE)
dim(dfDataRead)
```

Mit dem folgenden Programm schätzen wir den Achsenabschnitt und den Koeffizienten der erklärenden Variablen mit einer Bayesschen Methode, welche auch als Gibbs Sampler bezeichnet wird.

```
### # Matrix X als Inzidenzmatrix des Achsenabschnitts und
### # der erklärenden Variablen
X <- cbind(1,dfDataRead$x)
### # y als Vektor der Beobachtungen
y <- dfDataRead$y
### # Zuweisung der Startwerte
beta = c(0, 0)
# loop for Gibbs sampler
niter = 100000 # number of samples
meanBeta = c(0, 0)
for (iter in 1:niter) {
  # sampling intercept
  w = y - X[, 2] * beta[2]
  x = X[, 1]
  xpxi = 1/(t(x) %*% x)
  betaHat = t(x) %*% w * xpxi
  beta[1] = rnorm(1, betaHat, sqrt(xpxi)) # using residual var = 1
  # sampling slope
  w = y - X[, 1] * beta[1]
  x = X[, 2]
  xpxi = 1/(t(x) %*% x)
  betaHat = t(x) %*% w * xpxi
  beta[2] = rnorm(1, betaHat, sqrt(xpxi)) # using residual var = 1
  meanBeta = meanBeta + beta
  if ((iter%20000) == 0) {
    cat(sprintf("Intercept = %6.3f \n", meanBeta[1]/iter))
    cat(sprintf("Slope = %6.3f \n", meanBeta[2]/iter))
  }
}
```

```
## Intercept = 10.869
## Slope = 3.285
## Intercept = 10.866
## Slope = 3.287
## Intercept = 10.868
## Slope = 3.285
## Intercept = 10.868
## Slope = 3.285
## Intercept = 10.867
## Slope = 3.285
```

Das oben gezeigte Programm hat 10^5 Runden des Gibbs Samplers gemacht und als Resultat erhalten wir die Schätzung für den Achsenabschnitt als

$$\hat{\beta}_0 = 10.87$$

Die Bayessche Schätzung für den Koeffizienten der erklärenden Variablen lautet

$$\hat{\beta}_1 = 3.29$$

Ihre Aufgabe

- Vergleichen Sie die Bayessche Schätzung mit der Schätzung aufgrund von Least Squares.
- Da die Daten ursprünglich simuliert waren, kennen wir die wahren Werte diese sind in der nachfolgenden Tabelle gezeigt. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle für einen übersichtlichen Vergleich.

Parameter	Wahr	Bayes	LeastSquares
Achsenabschnitt	10.9		
Koeffizient	3.4		

Lösung

Zur Schätzung der unbekannten Parameter mit Least Squares verwenden wir die Funktion `lm()`.

```
lmFitSimpleReg <- lm(dfDataRead$y ~ dfDataRead$x, data = dfDataRead)
summary(lmFitSimpleReg)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = dfDataRead$y ~ dfDataRead$x, data = dfDataRead)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.5194 -0.6423 -0.1178  0.6371  1.9057
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   10.8670     0.3398   31.98 < 2e-16 ***
## dfDataRead$x    3.2858     0.2729   12.04 4.78e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9821 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8895, Adjusted R-squared:  0.8834
## F-statistic: 145 on 1 and 18 DF, p-value: 4.784e-10
```

Die Tabelle mit allen Lösungen sieht wie folgt aus.

	Parameter	Wahr	Bayes	LeastSquares
(Intercept)	Achsenabschnitt	10.9	10.87	10.87
dfDataRead\$x	Koeffizient	3.4	3.29	3.29

Die gerundeten Resultate der Parameterschätzungen unterscheiden sich nicht zwischen den beiden Methoden Bayes und Least Squares.