

# Züchtungslehre - Eigenschaften von BLUP-Zuchtwerten

Peter von Rohr

2016-11-18

# Vergleich verschiedener Zuchtwertschätzmethoden

- ▶ Einige Methoden zur Schätzung / Vorhersage von Zuchtwerten
  - ▶ Zuchtwerte aufgrund von Eigenleistungen
  - ▶ Zuchtwerte aufgrund von Nachkommenleistungen
  - ▶ BLUP Zuchtwertschätzung mit Vatermodell
  - ▶ BLUP Zuchtwertschätzung mit Tiermodell
- ▶ Vergleich zwischen Methoden
  - ▶ Vor- und Nachteile
  - ▶ Welche Tiere bekommen Zuchtwerte
  - ▶ Berücksichtigung der Umwelt
  - ▶ Verwandtschaft

# Daten

- ▶ Merkmal: Zunahmen bis zu Absetzen
- ▶ Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über das Datenmaterial

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	WWG
4	M	1	NA	4.5
5	F	3	2	2.9
6	F	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

- ▶ Varianzkomponenten:  $\sigma_e^2 = 40$  und  $\sigma_a^2 = 20$ .

# Eigenleistungen

- Geschätzter Zuchtwert  $\hat{a}_i = h^2(y_i - \mu)$

Tier	Zuchtwert
4	0.180
5	-0.353
6	-0.020
7	-0.153
8	0.347

- Annahme:  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 3.96$
- Nur Tiere mit Eigenleistung bekommen Zuchtwerte
- Verwandtschaft nicht berücksichtigt
- Abgesehen von  $\mu$  keine Umwelteffekte berücksichtigt

# Nachkommenleistungen

- ▶ Geschätzter Zuchtwert:  $\hat{a} = \frac{2n}{n+k}(\tilde{y} - \mu)$

Tier	n	y	BV
1	2	4.20	0.074
2	2	3.40	-0.172
3	2	3.95	-0.003

- ▶  $n$  steht für die Anzahl Nachkommen
- ▶  $k = \frac{4-h^2}{h^2}$

# Vatermodell

- ▶ Vorläufer des Tiermodells, immer noch verwendet
- ▶ Lineares gemischtes Modell
  - ▶ fixe Effekte analog zum Tiermodell
  - ▶ Vatereffekte  $s$  als zufällige Effekte
- ▶ Verwandtschaften nur über Väter
- ▶ nur Väter bekommen Zuchtwerte
- ▶ Modell

$$y = Xb + Zs + e$$

wobei  $\text{var}(s) = A * \sigma_s^2$

- ▶  $\sigma_s^2$ : Varianz der Vatereffekte mit  $\sigma_s^2 = \frac{1}{4}\sigma_a^2$

# Beispiel

- ▶ Gleicher Datensatz, wie beim Tiermodell

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	WWG
4	M	1	NA	4.5
5	F	3	NA	2.9
6	F	1	NA	3.9
7	M	4	NA	3.5
8	M	3	NA	5.0

- ▶ Ziele:
  - ▶ Schätzung der fixen Effekte für das Geschlecht
  - ▶ Vorhersage der Zuchtwerte für Väter

# Inzidenzmatrizen

- ▶  $X$  gleich wie beim Tiermodell
- ▶  $Z$  verknüpft Beobachtungen zu Vatoreffekten  $s$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## Verwandtschaft nur über Väter

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.333 & 0.000 & -0.667 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ -0.667 & 0.000 & 1.333 \end{bmatrix}$$

# Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} 3.000 & 0.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.000 & 2.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 \\ 1.000 & 1.000 & 16.663 & 0.000 & -7.337 \\ 1.000 & 1.000 & 0.000 & 13.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.000 & -7.337 & 0.000 & 15.663 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 8.4 \\ 7.9 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

# Lösungen

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.336 \\ 3.382 \\ 0.022 \\ 0.014 \\ -0.043 \end{bmatrix}$$

# Vergleich: Tiermodell - Vaternmodell

Effekt	Tiermodell	Vaternmodell
M	4.36	4.34
F	3.40	3.38

- ▶ Schätzungen der Effekte verschieden
- ▶ Differenzen zwischen Schätzungen gleich

# Zuchtwerte

Tier	Tiermodell	Vatermodell
1	0.098	0.022
2	-0.019	NA
3	-0.041	0.014
4	-0.009	-0.043
5	-0.186	NA
6	0.177	NA
7	-0.249	NA
8	0.183	NA

- ▶ Im Vatermodell bekommen nur Väter Zuchtwerte
- ▶ Rangierung verschieden zwischen Tier- und Vatermodell
- ▶ Im Tiermodell werden Paarungspartner und alle Nachkommen berücksichtigt

# Zerlegung von geschätzten Zuchtwerten mit Tiermodell

## ► einfaches Modell

$$y_i = \mu + a_i + e_i \quad (1)$$

mit  $y_i$  Beobachtung für Tier  $i$   
 $a_i$  Zuchtwert von Tier  $i$  mit Varianz  $(1 + F_i)\sigma_a^2$   
 $e_i$  zufälliger Rest mit Varianz  $\sigma_e^2$   
 $\mu$  übrige fixe Effekte im Modell

- jedes Tier nur eine Beobachtung
- Tier  $i$  hat Eltern  $s$  und  $d$
- Tier  $i$  hat  $n$  Nachkommen  $k_j$  (wobei  $j = 1, \dots, n$ )
- Tier  $i$  hat  $n$  Paarungspartner  $l_j$  (wobei  $j = 1, \dots, n$ )

## Zerlegung

$$\begin{aligned} y_i = \hat{\mu} + & \left[ 1 + \alpha d^{(i)} + \frac{\alpha}{4} \sum_{j=1}^n d^{(k_j)} \right] \hat{a}_i - \frac{\alpha}{2} d^{(i)} \hat{a}_s - \frac{\alpha}{2} d^{(i)} \hat{a}_d \\ & - \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^n d^{(k_j)} \hat{a}_{k_j} + \frac{\alpha}{4} \sum_{j=1}^n d^{(k_j)} \hat{a}_{l_j} \end{aligned} \quad (2)$$

Lösen wir die Gleichung (2) nach  $\hat{a}_i$  auf so folgt

$$\begin{aligned} \hat{a}_i = & \frac{1}{1 + \alpha d^{(i)} + \frac{\alpha}{4} \sum_{j=1}^n d^{(k_j)}} [y_i - \hat{\mu} \\ & + \frac{\alpha}{2} \left\{ d^{(i)} (\hat{a}_s + \hat{a}_d) + \sum_{j=1}^n d^{(k_j)} (\hat{a}_{k_j} - \frac{1}{2} \hat{a}_{l_j}) \right\}] \end{aligned} \quad (3)$$

# Regeln für $A^{-1}$

- ▶ Für Tier  $i$  mit Eltern  $s$  und  $d$ ,
  - ▶ addiere  $\alpha_i$  zum Element  $(i, i)$ ,
  - ▶ addiere  $-\alpha_i/2$  zu den Elementen  $(s, i)$ ,  $(i, s)$ ,  $(d, i)$  und  $(i, d)$  und
  - ▶ addiere  $\alpha_i/4$  zu den Elementen  $(s, s)$ ,  $(s, d)$ ,  $(d, s)$  und  $(d, d)$
- ▶ Für Tier  $i$  mit bekanntem Elternteil  $d$ ,
  - ▶ addiere  $\alpha_i$  zum Element  $(i, i)$ ,
  - ▶ addiere  $-\alpha_i/2$  zu den Elementen  $(d, i)$  und  $(i, d)$  und
  - ▶ addiere  $\alpha_i/4$  zu den Elementen  $(d, d)$
- ▶ Für Tier  $i$  mit unbekannten Eltern
  - ▶ addiere  $\alpha_i$  zum Element  $(i, i)$



## Ein Beispiel

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$X^T Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z^T Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Rechte Handseite

$$X^T y = \left[ \sum_{j=1}^n y_i \right]$$

$$Z^T y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

# Pedigree

```
##   sire  dam
## 1 <NA> <NA>
## 2 <NA> <NA>
## 3 <NA> <NA>
## 4    1    2
## 5    4    3
```

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.50 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.50 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.50 & 0.50 & -1.00 \\ -1.00 & -1.00 & 0.50 & 2.50 & -1.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & -1.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

# Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} 5.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 4.00 & 1.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 4.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 & 1.00 & -2.00 \\ 1.00 & -2.00 & -2.00 & 1.00 & 6.00 & -2.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & -2.00 & -2.00 & 5.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.8 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

- Zerlegung für Tier 4