Chapitre 5
Suites de fonctions

Yann DIJOUX, Marthe GARDAN

Université de Technologie de Troyes

Printemps 2020

Motivation, définition

Introduction

Il est parfois utile d'approcher une fonction f par d'autres fonctions plus simples ou bien de reconstruire f (si on n'en connaît que certaines valeurs).
La méthode d'interpolation de Lagrange fournit un polynôme de degré d coïncidant avec la fonction en $d+1$ points.

Notation

Dans tout le chapitre, I désigne un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Définition

Définition

Une suite de fonctions est une application $n \in \mathbb{N} \mapsto f_n \in \mathcal{F}$, on la note aussi simplement, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Les applications f_n pourraient éventuellement n'être définies qu'à partir d'un certain entier n_0.

Exemples

- $f_n(x) = \cos^n(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
- $f_n(x) = z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$

Questions :

- Comment définir la limite d'une suite de fonctions ?
- Quelles propriétés sont conservées par passage à la limite, et sous quelles hypothèses ? Par exemple,
  - si chaque f_n est continue, f est-elle continue ?
  - si les f_n sont dérivables, de dérivée f_n', f est-elle dérivable ? sa dérivée est-elle la limite des f_n' ?
  - si les f_n sont intégrables sur $[a, b]$, f l'est-elle ?

  a-t-on : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$?

Ces questions se ramènent souvent à
"Peut-on échanger les limites ?"

Convergence simple

1. Motivation, définition
2. Convergence simple
   - Définition
   - Exemples
   - Propriétés conservées ou non
3. Convergence uniforme

Définition

Pour x fixé appartenant à I, $(f_n(x))$ est une suite numérique, dont on peut étudier la convergence...

Définition

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite **simplement convergente sur** I si, pour tout $x \in I$, la suite (numérique) $(f_n(x))_n$ est convergente.
En notant, $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, on construit une fonction f définie sur I appelée la **limite simple** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

- On peut écrire :
  $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} : (n \geq N_{x,\varepsilon}) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- Si f existe, elle est unique preuve

Exemples

Étudier la convergence simple des suites de fonctions ci-dessous :

- sur $[0;1]$ par : $f_n(x) = x^n$,
- sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$,
- sur $[0;1]$ par $(n \geq 2)$: $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } x \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right], \\ 2n - n^2 x \text{ si } x \in \left]\dfrac{1}{n}; \dfrac{2}{n}\right[, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Remarques

- La continuité n'est pas conservée par passage à la limite simple (ex1.).
- Une suite de fonctions bornées sur un intervalle fermé borné peut ne pas converger vers une fonction bornée(exemple ...).
- On peut montrer que si chaque f_n est croissante sur I et que (f_n) converge simplement vers f, alors f est croissante sur I.

  preuve

  Est-ce valable pour la stricte croissance ?

Remarque

La notion de convergence simple n'est pas suffisante, on introduit donc une notion plus restrictive, celle de la **convergence uniforme**.

Convergence uniforme

Définition

Définition

Une suite (f_n) d'applications de I dans $\mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I s'il existe $f : I \mapsto \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall x \in I, \forall n \geq N_\varepsilon) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

L'application f est appelée la limite uniforme de la suite (f_n).

Remarques

- Ici, le même N_ε est valable pour tous les x.
- Interprétation graphique : toutes les courbes représentatives de f_n, à partir d'un certain rang, sont comprises entre la courbe de $f - \varepsilon$ et celle de $f + \varepsilon$.

Lien entre les deux types de convergences

Remarque

On peut reformuler la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) < \varepsilon$$

ce qui équivaut à : $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

Propriété

Si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f. ▸ preuve

Exemples

Exemples

- $f_n(x) = x^n(1-x), x \in [0;1]$
  - Détermination de la limite simple : f.
  - Étude de $\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)|$
  - Conclusion quant à la convergence uniforme.
- $f_n(x) = nx^n(1-x), x \in [0;1]$

Propriété : continuité

Propriété

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

preuve

Remarques

- Cela revient à dire que l'on peut échanger les limites en x et en n : $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$
- La contraposée permet de montrer que la convergence n'est pas uniforme.

Exemple

Montrer que la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \dfrac{n(x+x^3)e^{-x}}{nx+1}$ sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas uniformément convergente.

Propriété : intégration

Propriété

Si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur $[a;b]$, alors

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

preuve

Remarque

La suite de fonction $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$ converge uniformément vers $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

Application

Exemple

- En utilisant les sommes géométriques, écrire $\dfrac{1}{1-t^2}$ comme limite d'une suite de fonction.
  Montrer que la convergence est uniforme sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.
- Déduire une écriture de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}dt$ comme somme d'une série numérique.
- En calculant directement(...) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}dt$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$.

Propriété : dérivation

Propriété

Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

- la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur $[a;b]$
- il existe un réel x_0 appartenant à $[a;b]$ tel que la suite (numérique) $(f_n(x_0))$ converge vers ℓ

alors, (f_n) converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f telle que $f' = g$. preuve

Remarque

On peut voir ceci comme une intervertion limite et dérivée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{df_n}{dx} = \frac{d(\lim_{n\to+\infty} f_n)}{dx}$$

Mise en garde et contre-exemples

Remarque

Attention à toutes les hypothèses : on peut avoir

- une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément vers une fonction non dérivable.
  (voir : $f_n : x \in [-1;1] \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$)
- une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément sans que la suite des dérivées ne converge.
  (voir : $f_n : x \in [0;2\pi] \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$)
- une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément pour laquelle la suite des dérivées converge mais pas vers la limite espérée.
  (voir : $f_n : x \in [-1;1] \mapsto \frac{x}{1 + n^2x^2}$)

Preuves et compléments

Unicité de la limite simple

Supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui soient limites simples de la suite. Soit $x \in I$, soit $\varepsilon > 0$, il existe N_1 et N_2, deux entiers (dépendant de x et de ε) tels que :

- $n \geq N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
- $n \geq N_2 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on a :
$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \leq$
$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$
$|f(x) - g(x)|$ est donc un réel positif inférieur ou égal à tout nombre réel strictement positif, donc $f(x) = g(x)$.

retour

Limite simple d'une suite de fonctions croissantes

Soit (f_n) une suite de fonctions -réelles- croissantes sur un intervalle I.
Soient x et y deux réels appartenant à I tels que $x < y$.
Pour tout n, on a : $f_n(x) \leq f_n(y)$ car f_n est croissante.
Par passage à la limite, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(y)$ càd $f(x) \leq f(y)$.
On en déduit que f est croissante sur I.
Attention, cette propriété n'est pas valable pour la stricte croissance.

retour

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Soit (f_n) une suite convergeant uniformément vers une fonction f sur I.
Soit $x_0 \in I$, soit $\varepsilon > 0$.
$\exists N_\varepsilon : (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow (\sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|) < \varepsilon$.
Pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a:
$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ donc $(f_n(x_0))$ converge vers $f(x_0)$.
Ceci étant valable pour tout x_0 appartenant à I, on en déduit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I.

retour

La convergence uniforme conserve la continuité.

Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, soit a un réel appartenant à I.
Montrons que f est continue en a.
(f_n) cvu donc vérifie le critère de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que $(m > N_\varepsilon, n > N_\varepsilon, x \in I) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$
En faisant tendre x vers a (par continuité des f_n), on obtient :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que $(m > N_\varepsilon, n > N_\varepsilon) \Rightarrow |f_m(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$.
La suite $(f_n(a))$ est donc de Cauchy, et par suite, elle converge.
Sa limite est nécessairement $f(a)$.

retour

On peut intervertir limite et intégrale.

Soit $\varepsilon > 0$.

(f_n) cvu vers f sur $[a;b]$:

$$\exists N_\varepsilon : (n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

On a alors, pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t))dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \leq \varepsilon$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

retour

On peut intervertir limite et dérivée.

Tout d'abord, g est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc g est continue sur $[a;b]$ et donc intégrable.
Pour tout x de $[a;b]$, on a : -propriété précédente- :

$$\int_{x_0}^{x} g(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n' \right)(t)dt$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) - f_n(x_0)$$

D'où: $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

En notant $f : x \mapsto \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$, on a la convergence-simple- de (f_n) vers f sur $[a;b]$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

retour