



# Den perfekte kopp kaffe

## 1. Introduksjon

Kaffe er en essensiell del av hverdagen for mange nordmenn. Faktisk er Norge blant de landene i verden som drikker mest kaffe per innbygger, kun slått av Finland. I følge tall fra SSB så drikker en gjennomsnittlig voksen nordmenn nesten 10 kg kaffe per år, noe som plasserer oss solid på andreplass i verdensstatistikken. Men til tross for vår kjærlighet til kaffe, står vi ofte overfor et hverdagslig utfordring: Når er kaffen egentlig perfekt å drikke?

Denne oppgaven har som mål å svare på dette spørsmålet ved å bruke Newtons avkjølingslov til å modellere hvordan kaffens temperatur endres over tid. Gjennom eksperimentelle målinger skal vi finne tidspunktet hvor kaffen oppnår den ideelle temperaturen.

## Problemstilling

Hvordan kan vi modellere og forutsi når kaffen når en temperatur som regnes som ideell for drikking?

## 2. Teoretisk bakgrunn

For å kunne modellere kaffens temperatur over tid tar vi i bruk Newtons avkjølingslov. Loven beskriver hvordan temperaturen til et objekt endres over tid i forhold til omgivelsestemperaturene:

$$\dot{T} = -\alpha(T(t) - T_k)$$

hvor:

- $T(t)$  : Objektets temperatur ved tid  $t$ .
- $T_k$  : Omgivelsestemperaturen.

- $\alpha$ : Proporsjonalitetskonstanten som avhenger av varmeoverføringsforholdene.

For å løse ligningen, separerer vi først variablene:

$$\frac{1}{T(t) - T_k} dT(t) = -\alpha dt$$

Så integrerer vi på begge sider:

$$\int \frac{1}{T(t) - T_k} dT(t) = \int -\alpha dt$$

Dette gir:

$$\ln |T(t) - T_k| = -\alpha t + C$$

Der C er integrasjonskonstanten.

Deretter eksponentier vi begge sidene for å løse for  $T(t)$ :

$$T(t) - T_k = e^{-\alpha t + C}$$

Noe som kan omskrives til:

$$T(t) = T_k + Ce^{-\alpha t}$$

Vi finner C ved å bruke initialbetingelsen

$T(0) = T_0$  (starttemperaturen til kaffen):

$$T_0 = T_k + C$$

Dermed får vi:

$$C = T_0 - T_k$$

Vi setter så dette tilbake i løsningen og får:

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k)e^{-\alpha t}$$

### 3. Metode

#### Eksperimentoppsett

- **Romtemperatur:**  $T_k = 23^\circ C$ .
- **Starttemperatur:**  $T(0) = 85^\circ C$ .
- **Målinger:** Temperatur registrert med intervall på tredve sekunder med termometer.

#### Utstyr

- En kaffekopp
- Termometer
- Python for dataanalyse og modellering

#### Definisjon av den ideelle drikketemperaturen

Den perfekte drikketemperaturen anses å være et sted mellom  $55^\circ C$  og  $65^\circ C$ , men varierer selvsagt fra person til person. For enkelhetskyld bruker vi gjennomsnittet av anslaget og setter den ideelle temperaturen til  $60^\circ C$ .

### 4. Resultater

#### Temperaturmålinger

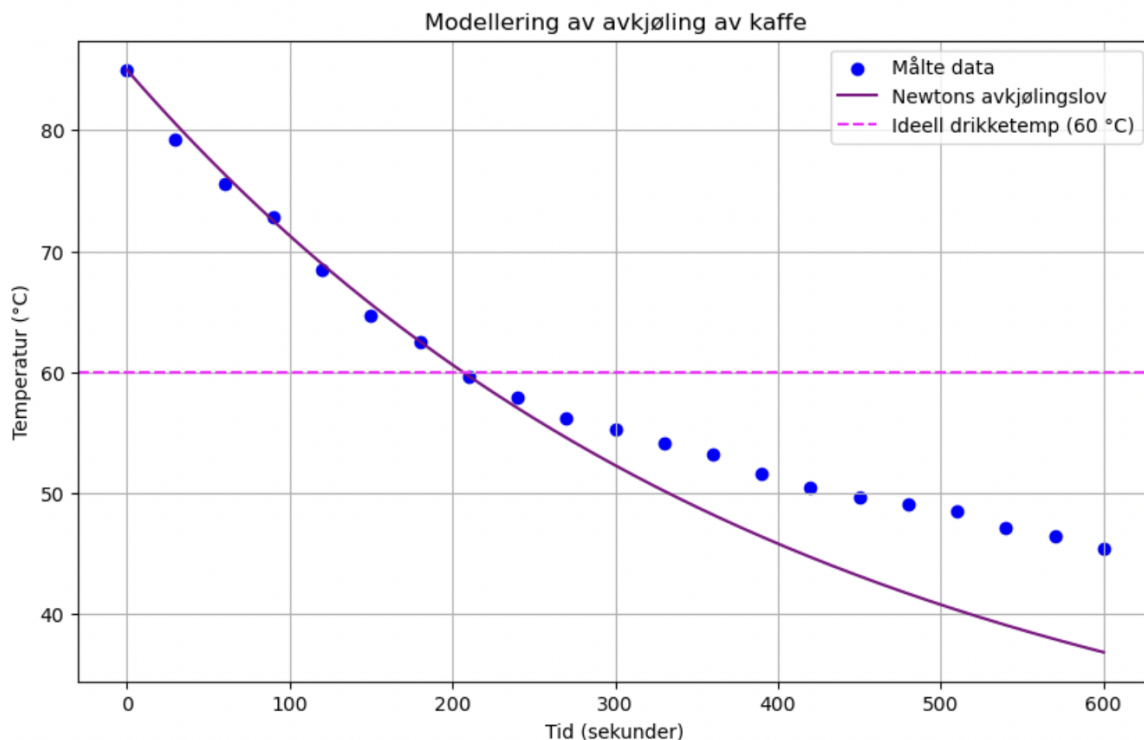
Målt temperatur med et intervall på tredve sekunder:

Tiden t (sekunder)	Temperaturen T ( °C )
0	85.0
30	79.2
60	75.6
90	72.8

Tiden t (sekunder)	Temperaturen T ( °C )
120	68.5
150	64.7
180	62.5
210	59.6
240	57.9
270	56.2
300	55.3
330	54.1
360	53.2
390	51.6
420	50.4
450	49.7
480	49.1
510	48.5
540	47.1
570	46.4
600	45.4

## Grafisk fremstilling

Deretter plotter vi punktene fra tabellen ovenfor i samme figur som den matematiske modellen. (se bilde 2 for koden). De blå punktene viser dataene fra ekperimentet, den lilla linjen den forventede oppførselen og den rosa stiplede linjen er ønsket temperatur.



Bilde 1: grafisk fremstilling av nedkjølingen av kaffe

## Analyse

Ved å teste ulike verdier for  $\alpha$  fant vi fram til at en passende verdi er: 0.0025

Vi ser fra grafen at kaffen nådde ideell drikketemperatur:  $t \approx 210$  sekunder dvs. etter tre minutter etter tilberedning.

## 5. Diskusjon

### Analyse av avvik

Eksperimentet viser at Newtons avkjølingslov gir en god tilnærming til kaffens temperaturendring i starten av avkjølingsprosessen. Målingene følger modellen spesielt godt ned til rundt 60 °C. Etter dette punktet ser vi at temperaturen synker betraktelig saktere enn det modellen forutsier.

En mulig forklaring på dette avviket er at varmeoverføringen mellom kaffen og omgivelsene avtar når temperaturforskjellen blir mindre. Newtons avkjølingslov baserer seg på en lineær sammenheng mellom varmetap og temperaturforskjell, men andre fenomener, som endringer i fordampningshastighet kan spille inn. En

annen mulig forklaring er målefeil. Termometeret som ble brukt i eksperimentet er på ingen måte laget for å utføre slike forsøk.

En annen mulig faktor kan være at den faktiske omgivelsestemperaturen nær kaffekoppens overflate er litt høyere enn romtemperaturen, ettersom kaffen varmer opp luftlaget rundt seg. Dette kan redusere den effektive temperaturforskjellen og dermed bremse varmetapet.

## Relevans for hverdagen

Ut i fra forsøket kan vi konkludere med at etter tilberedning burde man vente i ca 3 minutter før man kan nyte kaffen sin dersom man har liknende omstendigheter slik som i eksperimentet. Siden kaffe avkjøles litt saktere enn det modellen forutser vil man også ha litt lenger tid til å nyte kaffen sin mens den fortsatt er varm.

## 6. Konklusjon

Prosjektet viser at kaffens temperatur kan modelleres relativt presist ved hjelp av Newtons avkjølingslov, spesielt i intervallet  $t = 0$  til  $t = 210$ . Den ideelle drikketemperaturen nås etter ca. tre minutter, men dette vil selvsagt avhengig av omgivelser, koppens egenskaper og egne preferanser. Dette er ikke nødvendigvis revolusjonerende kunnskap innenfor vitenskapen men det kan likevel komme godt med i en kaffeelskere hektiske hverdag, eller i en students eksamensperiode.

## 7. Vedlegg

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Målingene mine
time_data = np.array([0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300,
                      330, 360, 390, 420, 450, 480, 510, 540, 570, 600])
temp_data = np.array([85.0, 79.2, 75.6, 72.8, 68.5, 64.7, 62.5, 59.6, 57.9,
                      56.2, 55.3, 54.1, 53.2, 51.6, 50.4, 49.7, 49.1, 48.5, 47.1, 46.4, 45.4])

# Parametere
T_room = 23
alpha = 0.0025
T_0 = temp_data[0]

# Newtons avkjølingslov:  $T(t) = T_k + (T_0 - T_k) * \exp(-\alpha * t)$ 
def cooling_model(t):
    return T_room + (T_0 - T_room) * np.exp(-alpha * t)

# Generer modellverdier
time_model = np.linspace(0, 600, 1000)
temp_model = cooling_model(time_model)

# Plot data og modell
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(time_data, temp_data, label="Målte data", color="blue")
plt.plot(time_model, temp_model, label="Newtons avkjølingslov", color="purple")
plt.axhline(y=60, color="magenta", linestyle="--", label="Ideell drikketemp (60 °C)")
plt.title("Modellering av avkjøling av kaffe")
plt.xlabel("Tid (sekunder)")
plt.ylabel("Temperatur (°C)")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

Bilde 2: Python code

## 8. Referanser

Kildeliste:

Caffeine Dude. (n.d.). Who drinks the most coffee per capita? Hentet 19. November, 2024, fra <https://www.caffeinedude.com/who-drinks-the-most-coffee-per-capita/>

Statistisk sentralbyrå. (n.d.). Kaffeavhengige nordmenn. Hentet 20. November, 2024, fra <https://www.ssb.no/utenriksokonomi/artikler-og-publikasjoner/kaffeavhengige-nordmenn>