

Paris - 7 avril 2021



Sommaire

1. Concept de base

- A - Historique et type de jeux
- B - Solution et équilibre d'un jeu

2. Les jeux non coopératifs avec information complète

- A - Dilemme du prisonnier

3. Les jeux non coopératifs avec information incomplète

- A - Différence entre jeux simultanés et jeux séquentiels

4. Les jeux évolutionnaires

- A - Stratégie du système évolutionnaire

5. L'application de la théorie des jeux en Finance

- A - Théorie des jeux appliqués à la finance
- B - Exemple d'application

Introduction :

La théorie des jeux est avant tout un problème de stratégie dans lequel les choix des participants ont des conséquences sur leurs situations mais aussi sur celle des autres.

Dans la majorité des situations d'affaires, les décideurs ont des intérêts différents.

Chacun cherche soit à maximiser ses gains s'il le peut ou minimiser ses pertes dans le cas contraire.

Enfin, la caractéristique de la théorie des jeux est d'analyser les décisions prises par les acteurs dans un milieu qui est incertain.



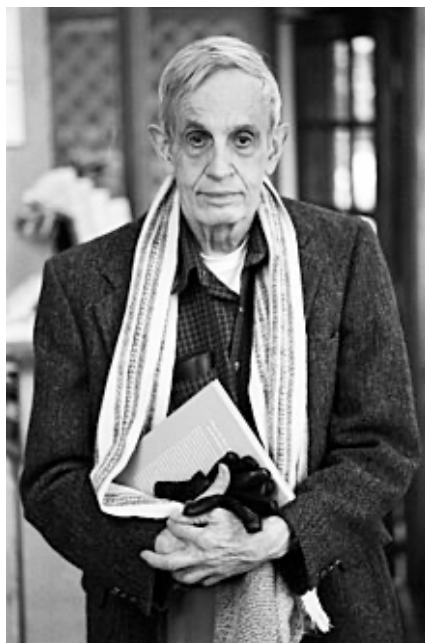
1. Concept de base

A - Historique et type de jeux

La théorie des jeux est un domaine mathématique mettant en lien des agents, appelés joueurs, qui vont interagir entre eux. C'est une notion qui a évolué au fil du temps et qui n'a fait que se préciser et être détaillée.

En 1938, Émile Borel, spécialiste des fonctions et des probabilités, développe l'idée de jeu à somme nulle à deux joueurs. C'est à dire que lorsque deux agents jouent l'un contre l'autre, il y a toujours un gagnant et un perdant. Cette idée sur la théorie des jeux va continuer à se développer encore pendant 6 ans avant de prendre un nouveau principe.

Dès les années 1950, la notion de randomisation apparaît. Le premier à développer cette idée est John Forbes Nash, un mathématicien et économiste américain. Il a travaillé sur la théorie des jeux, la géométrie différentielle et les équations aux dérivés partielles. Lorsqu'il parle pour la première fois d'une notion d'équilibre dans les jeux, il appelle cette idée "l'équilibre de Nash". Quelques années plus tard, il va recevoir le prix Nobel d'économie pour ses travaux réalisés dans ce domaine.



Aujourd'hui, la théorie des jeux est une notion encore floue. Il existe différentes interprétations, notamment sur le fait que celle-ci soit normative ou descriptive. Cette distinction se base sur le comportement des joueurs. Pour une théorie normative, les comportements adoptés doivent permettre au joueur d'atteindre ses objectifs. Quant à la théorie descriptive ou prescriptive, les comportements ne sont pas ceux qui devraient être forcément adoptés dans l'absolu. La théorie des jeux est considérée comme un cadre de pensées permettant d'analyser et de comprendre les différentes situations, sans pour autant prédire et anticiper les choix réels des joueurs.

Maintenant que la notion de cette théorie a pu être affinée, il a été possible de classer les types de jeux en différentes catégories. Ces dernières ont été déterminées en fonction de leur approche de résolution.

Tout d'abord, nous pouvons parler des jeux coopératifs et non coopératifs. La coopération part du principe que les joueurs peuvent ou non décider de s'associer afin d'obtenir de meilleurs résultats.

Il existe aussi les jeux à somme nulle et ceux à somme non nulle. Le principal point à observer dans cette catégorie est le côté compétitif. Les jeux à somme nulle opposent deux joueurs : l'un gagne, l'autre perd. Tandis que dans un jeu à somme non nulle les deux joueurs peuvent perdre.

Une autre catégorie est celle des jeux simultanés. Ils consistent à laisser les joueurs décider de leur stratégie en même temps, comme par exemple le jeu pierre-feuille-ciseaux. Les joueurs font un choix et le dévoilent en même temps. Ce genre de jeux se basent sur des probabilités représentant les résultats.

Les jeux séquentiels, quant à eux, reposent sur le fait que les joueurs vont prendre leur décision en fonction du choix de l'autre agent qui a joué juste avant. Dans un jeu d'échecs, les deux joueurs doivent adapter leur stratégie l'un en fonction de l'autre et ainsi prévoir plusieurs coups en avance.

B - Solution et équilibre d'un jeu

En théorie des jeux, les solutions sont un ensemble de conditions vérifiant les combinaisons de stratégies adoptées par les joueurs. Le but de chaque joueur est de gagner la partie et donc de maximiser son gain. En effet, à l'aide d'un tableau de probabilités, il sera facile de comprendre quelle solution est la meilleure et laquelle fera gagner le joueur.

Pour trouver la meilleure solution en considérant les jeux des différents joueurs, il est possible de passer par une étape d'élimination. Dans ce cas, il existe plusieurs types d'éliminations possibles.

Tout d'abord, nous pouvons passer par une étape d'élimination des stratégies équivalentes. Ce type de stratégie arrive lorsque le joueur a la possibilité de choisir entre 2 stratégies qui donneront au final le même résultat. Pendant l'élimination des ces stratégies, nous allons donc retirer toutes les stratégies qui semblent redondantes. Nous appelons classe d'équivalence l'ensemble des stratégies qui arrivent au même point et qui se ressemblent lors du déroulement du jeu. Une fois cette classe réalisée, il suffit de faire un mixte afin d'en tirer une seule et unique stratégie. Nous appelons cela la forme normale réduite.

L'autre façon d'éliminer les stratégies est d'utiliser celles qui sont dites dominées. Ces dernières sont considérées comme étant globalement plus mauvaises que d'autres. Ce n'est pas forcément les stratégies choisies par les joueurs. Nous pouvons donc les éliminer.

2. Les jeux non coopératifs avec information complète

Dans cette partie nous allons développer les jeux non coopératifs avec information complète. Tout d'abord, dans ce type de jeu les individus sont interrogés séparément et ne peuvent pas communiquer entre eux, c'est la définition même de jeux non coopératifs. Ensuite, on remarque qu'il faut seulement un petit nombre de participants qui interagissent entre eux pour éviter des confusions importantes. La deuxième caractéristique de cette partie est donnée par une information complète. Cela signifie que l'on connaît la structure du jeu, l'identité et le nombre de joueurs mais aussi les décisions et l'ordre dans lesquelles celles-ci sont prises. Il est donc relativement facile dans ce type de jeu d'émettre des hypothèses de stratégie relatives à des probabilités de gains ou de pertes.

A - Dilemme du prisonnier

Le problème de Nash ou plus souvent appelé le dilemme du prisonnier représente un des cas les plus courants pour expliquer la théorie des jeux non coopératifs avec information complète.

Dans cet exemple le plus courant qu'est le dilemme du prisonnier on retrouve deux individus supposés coupables. En effet, cette théorie est dite non coopérative car les deux suspects sont enfermés séparément et ne peuvent communiquer ensemble. Chacun a la possibilité soit de dénoncer l'autre, soit de se taire.

Individu A/Individu B	Se taire	Dénoncer l'autre
Se taire	$(-1; -1)$	$(-3; 0)$
Dénoncer l'autre	$(0; -3)$	$(-2; -2)$

Assez rapidement on comprend qu'il existe 4 cas de figures :

- Si les deux se dénoncent en même temps alors ils écopent d'une peine réduite de deux ans de prison.
- Si aucun des deux ne se dénoncent, le responsable n'étant pas trouvé, ils écopent chacun d'un an de prison.
- Si l'un dénonce l'autre et que l'autre se tait alors la balance est libérée et le coupable écope de trois ans de prison.

De façon naturelle on peut imaginer que les deux individus vont utiliser la même stratégie, à savoir (Se Taire; Se Taire). En effet, se taire revient à écopier de la peine la plus faible d'un point de vue global. Cela constitue un optimum de Pareto, c'est le meilleur couple de gains pour les deux individus. Dans la réalité, la situation peut être différente, c'est d'ailleurs le cœur du dilemme. Les individus étant en absence totale de communication entre eux, aucun des deux ne peut savoir si l'autre va parler.

Le concept d'équilibre de Nash intervient à ce moment, il prédit un résultat suivant la stratégie interpersonnelle des joueurs qui dépend conjointement de la stratégie adoptée par le joueur adverse.

Si le joueur B dénonce le joueur A, A a aussi intérêt à dénoncer (car il écope de deux ans au lieu de trois). Si le joueur B ne dénonce pas le joueur A, A a encore intérêt à dénoncer car il est ainsi libéré au lieu de purger un an de prison.

3. Les jeux non coopératifs avec information incomplète

À présent, nous allons analyser les jeux non coopératifs avec information incomplète. Nous nous situons dans le cas où au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement les règles et la structure du jeu. Les informations incomplètes font partie des informations imparfaites qui regroupent aussi les données qui sont connues partiellement par l'ensemble des joueurs. Il faut savoir faire la distinction entre les deux types d'informations imparfaites. Nous connaissons aujourd'hui deux types de jeux non coopératifs avec information incomplète : les jeux simultanés et les jeux séquentiels.

A - Différence entre jeux simultanés et jeux séquentiels

La principale différence entre les jeux simultanés et les jeux séquentiels réside dans la prise des décisions. En effet, dans les jeux simultanés soit le joueur prend la décision sans connaître celle de l'autre joueur, soit les deux décisions sont prises simultanément.

Dans les jeux asynchrones (séquentiels), les joueurs jouent les uns après les autres, mais connaissent à chaque fois le dernier coup de l'adversaire. C'est le cas par exemple pour le jeu d'échecs car les joueurs jouent l'un après l'autre.

À l'inverse, dans les jeux synchrones (simultanés) les joueurs jouent en même temps. Ainsi, par définition le joueur ne connaît pas ce que son adversaire va jouer avant que lui-même ne joue. C'est le cas par exemple pour le jeu de carte de la bataille, chaque joueur retourne sa carte au même moment et laisse le hasard faire les choses. On peut aussi retrouver le dilemme du prisonnier car les décisions sont prises sans connaître le choix de l'autre.

Un jeu simultané est représenté le plus souvent sous forme normale et un jeu séquentiel est représenté sous forme extensive.

Décisions simultanées → matrice de jeu (jeux en forme normale)
Décisions séquentielles → arbre de jeu (jeux en forme extensive).

4. Les jeux évolutionnaires

A - Stratégies du système évolutionnaire

Dans cette partie, nous allons expliquer la stratégie des jeux évolutionnaires. Ces derniers sont des jeux permettant de reproduire l'évolution biologique. Dans ce cas, un biologiste a besoin de déterminer à l'avance les comportements et les relations : dominance, stagnation, mutation...

La stratégie de ce genre de jeu reprend le modèle darwinien de base, c'est-à-dire la compétition (le jeu), la sélection naturelle et l'hérédité. Cette stratégie adoptée permet à la population de ne pas se faire envahir par un mutant. En fonction de la stratégie mise en place, les individus peuvent changer pour ne pas être envahis, peuvent rester mais dans ce cas il y a stagnation ou alors changer complètement de stratégie, ce qui peut être considéré comme suicidaire.

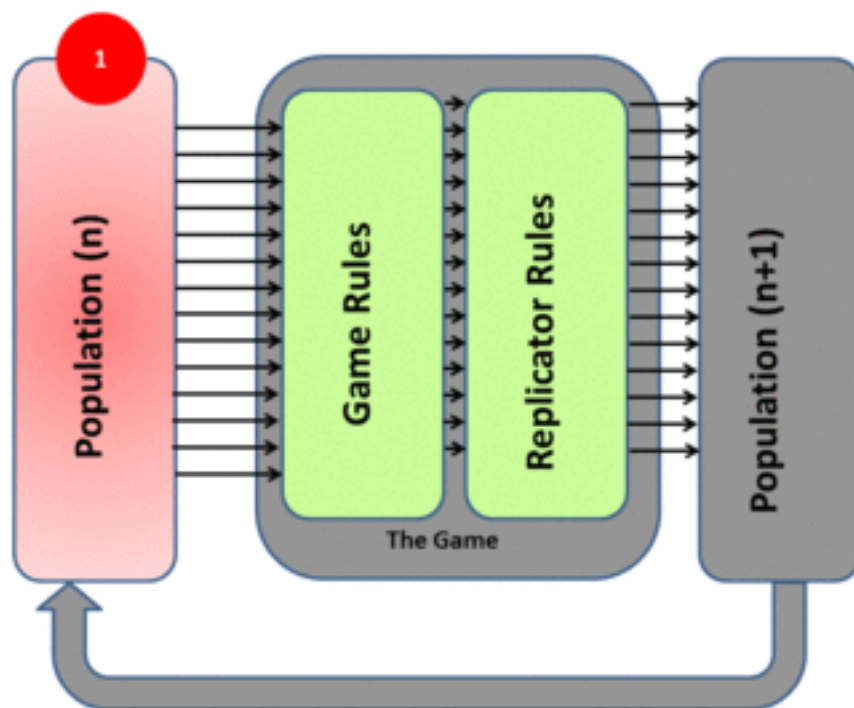
Le processus des jeux évolutionnaires comporte 4 phases :

- Un modèle de compétition est mis en place au sein d'une population : cette compétition est représentée comme étant le jeu.
- Le jeu teste les stratégies possibles (règles du jeu) : chaque stratégie engendre des gains différents indiquant le taux de reproduction de la

population. Les individus se rencontrent par paire et il est alors possible d'étudier les comportements lorsque les rencontres sont mixtes et que chaque individu n'a plus beaucoup de choix. À la fin, les individus repartent toujours par paire et une matrice des gains est configurée.

- Une fois le jeu passé, les individus sont répliqués ou éliminés en fonction des résultats produits. Suite à cela, nous obtenons une nouvelle population.

- La nouvelle génération s'apprête à reproduire ce cycle afin d'engendrer une nouvelle population.



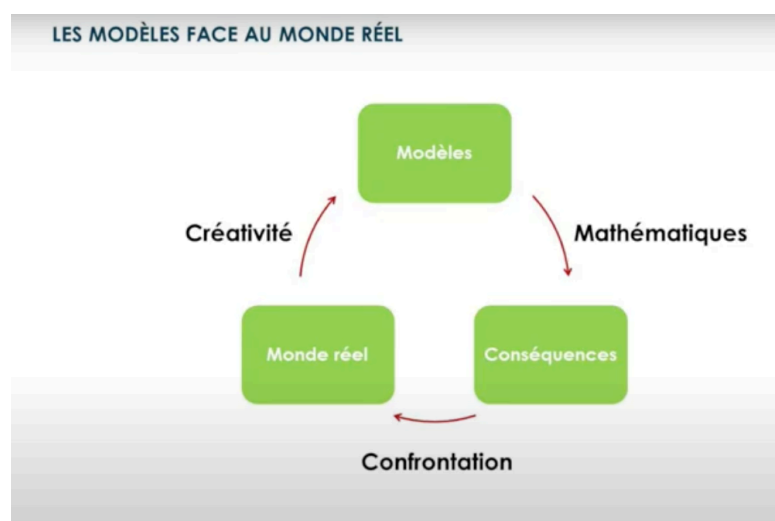
Chaque “jeu” est unique et les populations ont des obstacles différents à surmonter afin de survivre et se reproduire. Les joueurs adoptant les moins bonnes stratégies “meurent” (sélection naturelle) permettant aux joueurs avec les meilleures performances de se reproduire. Nous sommes, dans ce cas, dans la phase 3 du processus avec la réplication et l'élimination d'individus.

5. L'application de la théorie des jeux en Finance

A - Théorie des jeux appliqués à la finance

La théorie des jeux est de plus en plus applicable à des problèmes économiques. Cependant, la modélisation de ces problèmes est faite d'une manière différente. Tout au long de ce rapport, nous avons pu remarquer que les comportements de chaque joueur/agent causent un impact sur l'environnement (le jeu) qui l'entoure. Lorsqu'il s'agit d'une relation économique entre différentes personnes/banques/entités, les conséquences ont lieu sur le contexte économique actuel. La théorie des jeux a des impacts sur tous types d'économies : industrielle, macroéconomie, internationale...

Dans le cas de la théorie des jeux appliquée à la finance, chaque agent peut avoir un objectif différent (argent, voiture, bijoux...). Les relations entre ces joueurs sont appelées situations d'interaction. C'est-à-dire que chacun ne va pas pouvoir jouer de manière indépendante mais seulement s'intéresser aux comportements des autres. Pour mieux comprendre cette application au monde économique, des modèles vont être créés : modèles qui vont se confronter à la réalité grâce aux mathématiques et à des confrontations. Les différentes hypothèses seront simplifiées et analysées afin d'en tirer les conséquences qu'elles peuvent avoir. Une fois les conclusions données, elles sont comparées à des modèles du monde réel pour que le sujet proposé soit accepté ou refusé.



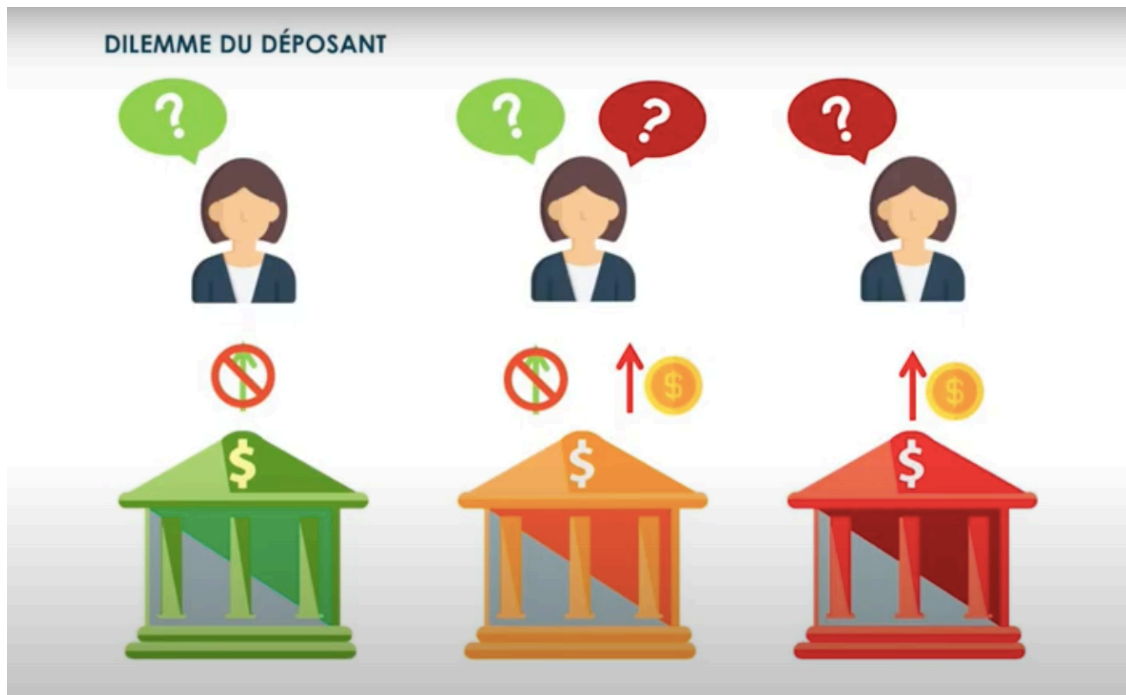
B - Exemple d'application

La théorie des jeux appliquée à la finance touche de plus près au monde réel. Nous pouvons donc considérer plusieurs exemples, mais dans cette partie, nous allons développer celui du dilemme des déposants.

Au début de ce dilemme, nous avons une personne disposant d'une certaine somme d'argent. Elle se questionne sur la stabilité des marchés financiers et des banques. Mettre l'argent en banque est-elle la meilleure solution ? Cela peut l'être lorsque la banque est stable et que le taux d'intérêt rapporté est intéressant. Mais il y a toujours un risque de faillite.

Nous pouvons faire face à 3 situations :

- 1ère situation : la banque est stable et a assez de liquidités pour tous ses déposants. Dans ce cas, il n'y a pas de risque de faillite et chacun va laisser son argent reposer dans cette banque.
- 2ème situation : la banque est en faillite. L'instabilité de cette dernière va avoir comme conséquence que chaque déposant va vouloir retirer son argent. Mais comme l'explique le principe de la théorie des jeux, chaque agent doit agir en fonction des autres. Si dans cette situation tout le monde retire son argent, cela causera la perte de la banque. Mais s'ils comparent les actions des autres, chaque déposant va se faire la réflexion que si les autres ne retirent pas leur argent, alors la banque peut toujours fonctionner. Dans ce cas, les liquidités restent en banque.
- 3ème situation : la banque est en faillite et chaque agent commence à retirer son argent. Nous sommes dans une situation d'équilibres multiples : si tout le monde retire son argent alors je retire le mien, si tout le monde laisse son argent alors je laisse le mien.



Nous avons pu voir à travers cet exemple que les comportements de chaque joueur ont bien une conséquence sur le monde qui nous entoure. Ici, la stabilité des banques est maintenue ou non en fonction des choix des déposants. Si l'information est dispersée chacun va agir en fonction de ses intérêts propres et ne va pas anticiper le choix des autres. Si les informations sont bien analysées, il est possible de pouvoir agir dans l'intérêt de tout le monde et de ne pas mener une banque à la faillite.

Sources :

<https://www.ensae.fr/courses/theorie-des-jeux/>

<https://www.youtube.com/watch?v=nkvacyCk1II>

https://perso.liris.cnrs.fr/marc.plantevit/ENS/GameTheory/CM/2_Representation.pdf

https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_jeux

https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_évolutive_des_jeux

<http://gestion.coursgratuits.net/theorie-des-jeux/jeux-evolutionnaires.php>

<https://www.pimido.com/business-comptabilite-gestion-management/finance/dissertation/theorie-jeux-application-finance-509463.html>

<https://www.lafinancepourtous.com/2012/10/22/prix-nobel-deconomie-la-theorie-des-jeux-recompensee/>