Harmonies dévoilées

Analyse Harmonique par Évolution Artificielle

Sines peeling

Mini-projet : Systèmes complexes et optimisation stochastique massivement parallèles

Zoé Marquis & Charlotte Kruzic

Master 1 - Sciences des données et systèmes complexes
UFR de mathématique et d'informatique
Université de Strasbourg

Résumé

Dans cet article, nous cherchons une méthode visant à déterminer les paramètres des sinusoïdes qui composent un signal. Nous travaillerons sur un signal qui est la somme de 100 sinusoïdes. Bien que l'analyse harmonique à l'aide de la transformée de Fourier puisse révéler certaines informations inhérentes à ce signal, elle ne permet pas de récupérer la phase spécifique de chacune des sinusoïdes. Pour surmonter cette limitation, nous suggérons l'utilisation d'un algorithme d'évolution artificielle.

1 Introduction

L'analyse de signaux complexes est importante dans de nombreux domaines scientifiques. L'analyse harmonique basée sur la transformée de Fourier a pendant longtemps été la méthode prédominante pour la décomposition de signaux périodiques. Elle présente cependant des limitations face à des signaux composés de multiples sinusoïdes.

Cet article explore une approche alternative à l'analyse harmonique fondée sur la transformée de Fourier en utilisant une méthodologie basée sur l'évolution artificielle. L'objectif est de déterminer itérativement les paramètres d'un nombre maximal de sinusoïdes, en se basant sur la somme de 100 d'entre elles qui constituent le signal étudié.

La suite de l'article commence par des préliminaires expliquant ce qu'est un signal (section 2) suivie d'un petite bibliographie sur l'analyse harmonique (section 3). La section 4 présente notre méthode. La section 5 présente et discute les résultats obtenus. Nous terminons par quelques éléments de conclusion.

2 Préliminaires

Signal

Un signal est une représentation mathématique ou physique d'une quantité qui varie en fonction du temps, de l'espace ou d'une autre variable indépendante. Les signaux sont omniprésents dans la vie quotidienne. On les retrouve dans divers domaines tels que les télécommunications, le traitement du signal, l'électronique, l'acoustique, ...

Un signal périodique, en particulier, est caractérisé par le fait qu'il se répète à intervalles réguliers dans le temps. On peut citer comme exemples de signaux périodiques les ondes sinusoïdales. Une onde sinusoïdale se caractérise par son amplitude, sa fréquence et sa phase, comme illustré en figure 1 et expliqué ci-dessous.

Amplitude : la mesure de l'intensité ou de la force du signal.

Fréquence : le nombre de cycles par unité de temps (la fréquence est l'inverse de la période).

Phase : le décalage temporel d'une composante par rapport à une référence.

L'analyse des signaux permet de comprendre leur structure, leurs propriétés et leurs caractéristiques, facilitant ainsi leur traitement, leur transmission et leur utilisation dans divers domaines.

3 Analyse harmonique fondée sur la transformée de Fourier

Analyse harmonique

L'analyse harmonique étudie la représentation des signaux complexes comme superposition d'ondes de base, principalement à l'aide de la trans-

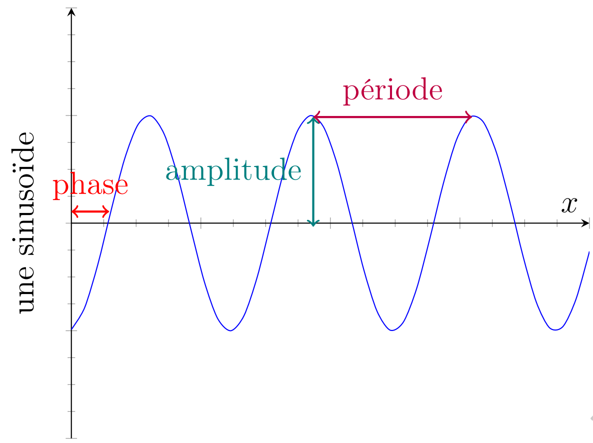

Figure 1 – Représentation d'une sinusoïde

formée de Fourier et de série de Fourier. Elle a pour but de décomposer un signal périodique en ses composantes harmoniques. Cette discipline a de nombreuses applications en physique (analyse spectrale) depuis 2 siècles, et plus récemment en traitement du signal, mécanique quantique, neurosciences, stratigraphie ...[2] Elle facilite la compréhension et la manipulation de ces signaux dans différents domaines. L'objectif est de comprendre la structure fréquentielle des signaux et d'analyser comment ils sont construits à partir de composantes harmoniques. L'analyse harmonique permet donc de décomposer des signaux périodiques (ou quasi-périodiques) en une somme de sinusoïdes.

Une harmonique est une composante dont la fréquence est un multiple entier de la fréquence fondamentale. Les harmoniques sont donc des fréquences qui s'ajoutent à la fréquence principale ; l'ensemble forme une série harmonique. Si on prend l'exemple de la musique, lorsqu'un instrument de musique produit un son, la fréquence fondamentale est la fréquence de base de ce son et les harmoniques sont des fréquences multiples de cette fréquence fondamentale. La présence et l'intensité des harmoniques contribuent au timbre et à la qualité de son.

La transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un puissant outil mathématique qui permet de décomposer un signal en termes de fréquence, amplitude et phase [3].

La transformation de Fourier décompose un signal (en général une fonction du temps) en une somme de sinus et de cosinus de différentes fréquences. Elle permet d'analyser le contenu fréquentiel du signal.

Lorsqu'on applique la transformée de Fourier à une somme de signaux sinusoïdaux, chaque composante harmonique contribue à une raie spectrale distincte dans le spectre fréquentiel. La transformée de Fourier donne une image de toutes les fréquences présentes dans le signal, avec leurs amplitudes respectives.

Ainsi, pour un signal périodique, la transformée de Fourier permet de retrouver :

Amplitude L'amplitude des composantes harmoniques est liée à l'amplitude des oscillations dans le signal d'origine. Elle indique la grandeur de la contribution de chaque fréquence au signal d'origine. Plus l'amplitude est grande, plus la composante harmonique a d'influence sur la forme d'onde.

Fréquence En identifiant les pics dans le spectre de fréquence de la transformée de Fourier, on peut déterminer les fréquences présentes dans le signal. La fréquence est représentée par la variable ω, ou ω est la fréquence angulaire (2π fois la fréquence en Hertz).

Phase La phase des composantes harmoniques indique le décalage temporel de chaque composante par rapport à une référence. Elle spécifie à quel moment le pic de la sinusoïde se produit. La phase est exprimée en radians ou degrés. Dans la représentation complexe de la transformée de Fourier, la phase est souvent incluse sous la forme $e^{i\phi}$, où ϕ est la phase.

Limites

Bien que la transformée de Fourier soit une technique puissante pour l'analyse harmonique, elle présente certaines limites [1] :

Hypothèse de stationnarité La transformée de Fourier suppose que le signal est stationnaire (ses propriétés statistique telles que la moyenne, la variance et la fonction de corrélation, restent constantes) sur toute sa durée. Il existe d'autres techniques adaptées aux autres cas, telles que la transformée en ondelettes.

Calcul intensif Pour certains signaux complexes, le calcul de la transformée de Fourier peut être gourmand en ressources de calcul. Des algorithmes plus rapides, tels que la transformée de Fourier rapide (FFT) peuvent alors être utilisés.

Localisation temporelle La transformée de Fourier ne peut pas isoler parfaitement une seule onde sinusoïdale à partir d'une somme de multiples ondes. Cependant, elle fournit une représentation fréquentielle globale du signal, qui permet de visualiser et d'identifier les différentes composantes harmoniques d'un signal, mais elle ne fournit pas d'informations sur la localisation temporelle spécifique des composantes. Pour cela, on peut utiliser des variantes de la transformée de Fourier, comme la transformée de Fourier à court terme (STFT) ou la transformée en ondelettes.

4 Protocole

Algorithme évolutif

Les algorithmes évolutifs modifient et sélectionnent de manière itérative une population de solutions à un problème. Ils sont appelés ainsi car ils imitent des processus tels que la mutation, le croisement et la sélection présents dans l'évolution naturelle. Ces algorithmes partagent tous des caractéristiques communes, mais certains détails varient en fonction du problème spécifique qu'ils cherchent à résoudre.

Nous donnons ci-dessous quelques unes de ces caractéristiques :

Fonction d'évaluation C'est la fonction que l'algorithme tente de maximiser ou minimiser. Elle mesure la qualité des solutions candidates.

Génération de population initiale L'algorithme crée une population initiale de solutions candidates de manière aléatoire ou selon une heuristique spécifique.

Sélection Les individus de la population sont choisis pour la reproduction en fonction de leur aptitude (évaluée par la fonction d'évaluation). Les individus les plus performants ont plus de chances d'être sélectionnés.

Reproduction Les individus sélectionnés sont combinés pour créer de nouvelles solutions candidates. Les opérateurs de reproduction incluent la recombinaison et la mutation.

Paramètres de contrôle Les algorithmes évolutifs ont souvent des paramètres qui influent sur leur comportement, tels que la taille de la population, les taux de mutation, etc. Ces paramètres peuvent être ajustés pour optimiser les performances de l'algorithme.

Fonction d'évaluation

Nous commençons par créer artificiellement un signal, composé de la somme de 100 sinus. Cette fonction sera utilisée pour l'évaluation des individus.

$$y = amplitude * \sin(fréquence * x + phase)$$

Pour obtenir des amplitudes, fréquences et phases qui ne sont pas multiples les unes des autres (harmoniques), nous allons utiliser des nombres premiers.

Amplitude Dans l'ordre décroissant, les 100 nombres premiers à partir de 31 (donc de 601 à 31).

Fréquence Dans l'ordre croissant, les 100 nombres premiers au delà de 1000 (de 1009 à 1721).

Phase 2 π divisé par, dans l'ordre croissant, les 100 premiers nombres premiers (de 2 à 541).

Ainsi, le « premier » sinus de la somme des sinus est celui contenant l'amplitude et la phase les plus importantes et la fréquence la plus faible.

Théorème de Shannon-Nyquist

Également connu sous le nom de théorème d'échantillonnage, le théorème de Shannon-Nyquist est un principe fondamental en théorie de l'information et en traitement du signal.

Ce théorème énonce que pour reconstruire de manière parfaite un signal continu à partir de ses échantillons, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois la fréquence maximale du signal. En d'autres termes, la fréquence d'échantillonnage minimale nécessaire pour éviter la perte d'information est le double de la fréquence maximale présente dans le signal.

L'importance de ce théorème réside dans sa capacité à définir les conditions requises pour éviter le phénomène de repliement spectral, également appelé aliasing. Si la fréquence d'échantillonnage n'est pas suffisamment élevée, des composantes spectrales du signal peuvent se chevaucher et entraîner une distorsion du signal lors de la reconstruction.

Application du théorème

Dans notre cas d'un signal formé par la somme de 100 sinusoïdes, les fréquences sont réparties sur une large plage et la somme des sinus peut avoir un contenu fréquentiel étendu, ce qui rend difficile la détermination d'une fréquence maximale unique pour le signal global. Dans ce cas, la règle du doublement de la fréquence maximale individuelle ne suffit pas. Ce phénomène est connu sous le nom de problème de la modulation en fréquence, ou en anglais Frequency Modulation Aliasing. Les harmoniques et les intermodulations entre ces composantes peuvent générer des fréquences apparentes qui dépassent la fréquence maximale individuelle des sinusoïdes.

Considérons seulement les 4 premières sinusoïdes :

$$\begin{aligned} f(x) = & 601 * \sin(1009 * x + \frac{6.28}{2}) + 599 * \sin(1013 * x + \frac{6.28}{3}) + \\ & 593 * \sin(1019 * x + \frac{6.28}{5}) + 587 * \sin(1021 * x + \frac{6.28}{7}) \end{aligned}$$

Nous observons en figure 2 qu'entre 0 et 7 il y a au moins deux périodes (rappel : la période est l'inverse de la fréquence). D'après le théorème de Shannon-Nyquist, il est suffisant de chercher des points dans l'intervalle [0,7]. Cela ne nous permettra pas d'obtenir les 100 sinus, mais d'en obtenir le plus possible.

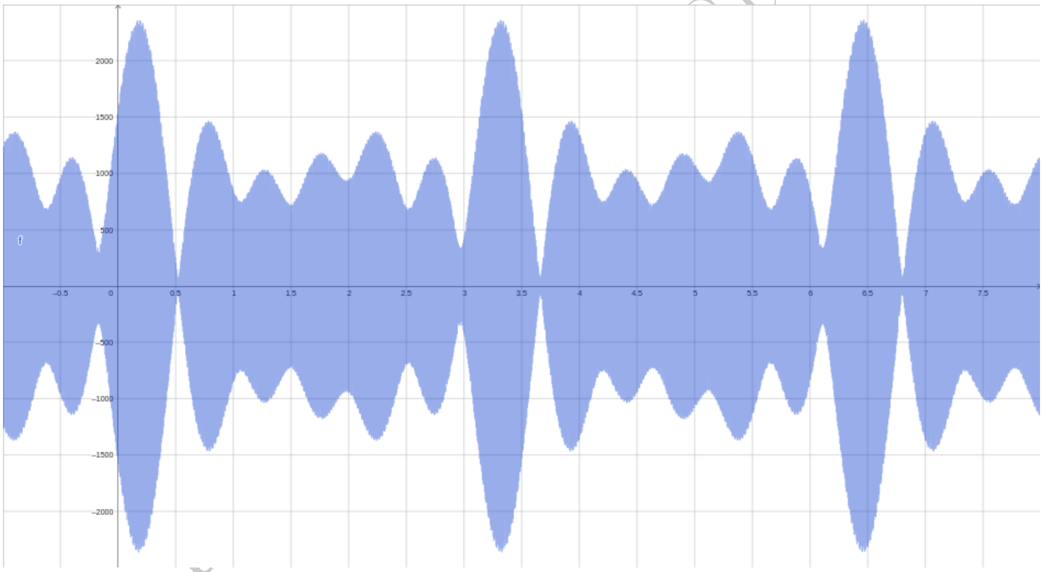

FIGURE 2 – Tracé de la somme des 4 premières sinusoïdes

Nous allons donc prendre 8192 points de la fonction d'évaluation, la somme des 100 sinusoïdes, dans l'intervalle [0,7].

Génération de la population initiale

Pour engendrer la population initiale, pour chacun des individus composant la population initiale, nous allons créer artificiellement les 3 paramètres (amplitude, fréquence et phase) en prenant des valeurs aléatoirement dans leurs plages respectives.

Algorithme

Maintenant que nous avons notre signal, composé de la somme des 100 sinusoïdes, nous allons chercher par évolution artificielle la sinusoïde ayant la plus grande amplitude ainsi que la plus grande phase et donc la plus petite fréquence. Nous lançons pour cela l'algorithme d'évolution artificielle à la recherche de la première sinusoïde : $601 * \sin(1009 * x + \frac{6.28}{2})$.

Une fois cette sinusoïde trouvée, en tout cas approchée, nous allons soustraire à notre fonction objective ce résultat. Ceci contribue à ajouter du bruit dans la somme des 100 sinusoïdes. Nous pouvons maintenant relancer cet algorithme en ayant changer la fonction objectif, composée de la somme des 100 sinus moins le premier sinus trouvé par évolution artificielle.

Nous itérons ensuite avec cette méthode.

L'objectif n'est pas de trouver toutes les sinusoïdes avec grande précision, mais de trouver un maximum de sinusoïdes s'approchant de la vérité.

Reproduction

Fonction de croisement Dans le domaine de l'évolution artificielle, le crossover, également appelé croisement, est une opération génétique essentielle qui simule la recombinaison génétique naturelle observée dans l'évolution biologique. Cette opération joue un rôle crucial dans les algorithmes génétiques et d'autres techniques d'optimisation évolutionnaires.

Recombinaison génétique Le croisement simule la reproduction sexuée en combinant les informations génétiques de deux parents pour créer une descendance. En évolution artificielle, les « gènes » représentent les solutions candidates ou les individus dans l'espace de recherche.

Diversification Le croisement favorise la diversification génétique au sein de la population. En combinant des traits favorables de deux parents, la descendance peut potentiellement hériter de caractéristiques qui conduisent à une meilleure adaptation ou une solution plus optimale.

Exploration de l'espace de recherche Le croisement aide à explorer différentes combinaisons de solutions en créant de nouvelles solutions qui n'existent pas dans la population parentale. Cela contribue à élargir l'espace de recherche et à découvrir des régions potentiellement prometteuses.

Exploitation des solutions En plus de la diversification, le croisement facilite l'exploitation en combinant des caractéristiques bien adaptées de deux solutions parentales. Cela permet de conserver les traits avantageux et de les combiner pour améliorer encore la performance.

Dans notre projet, le processus de croisement de nos individus combine les caractéristiques des deux parents. Nous avons implémenté un croisement par locus [1]. Le locus est choisi de manière à ce que l'enfant soit composé d'au moins un paramètre de chacun de ses parents.

Dans les cas de reproduction sans croisement, l'enfant est le clone du parent 1.

Mutation Dans le domaine de l'évolution artificielle, la mutation est une opération génétique qui simule les changements aléatoires et spontanés dans les gènes observés dans l'évolution biologique. La mutation joue un rôle-clé dans les algorithmes génétiques.

Diversification de la population La mutation introduit des variations aléatoires dans les individus d'une population, favorisant ainsi la diversité génétique. Cela empêche la convergence prématurée vers une solution spécifique et contribue à explorer davantage l'espace de recherche.

Exploration de nouvelles solutions Les changements aléatoires introduits par la mutation peuvent conduire à la création de nouvelles solutions qui n'étaient pas présentes dans la population parentale. Cela permet d'explorer des régions inexplorées de l'espace de recherche et d'éviter de rester piégé dans des optimums locaux.

Adaptation continue La mutation offre une source constante de variabilité génétique au sein de la population. Cela permet à l'algorithme évolutionnaire de continuer à évoluer et à s'adapter même après plusieurs générations.

Réponse à l'environnement changeant Les mutations aléatoires peuvent introduire des adaptations qui deviennent avantageuses en réponse à des changements dans l'environnement du problème. Cela rend l'algorithme plus robuste face à des conditions changeantes.

Éviter la stagnation En introduisant des perturbations aléatoires, la mutation aide à éviter la stagnation de la population autour de solutions sous-optimales. Elle encourage la population à continuer à évoluer et à s'adapter aux exigences du problème.

Dans notre projet, une mutation correspond à l'incrémentation (ou la décrémentation) de chaque paramètres afin d'explorer de nouvelles solutions voisines.

1. Le locus est l'ensemble des points qui partagent une propriété spécifique.

Outils

Pour formaliser notre algorithme, nous avons opté pour l'utilisation d'EASEA[4], acronyme d'EAsy Specification of Evolutionary Algorithms, un environnement de développement dédié à la mise en œuvre d'algorithmes évolutifs.

Dans le cadre de ce projet, l'adoption d'EASEA se révèle particulièrement judicieuse du fait de sa capacité à exploiter le parallélisme des architectures multi-cœurs. Cette fonctionnalité permet d'accélérer significativement le processus de décomposition du signal en sinusoïdes.

Par ailleurs, cette plateforme facilite grandement l'expérimentation et l'ajustement des paramètres de l'algorithme génétique, étape cruciale durant la phase de recherche de ce projet. En outre, elle met à disposition un ensemble complet de fonctions et d'opérateurs, offrant ainsi une base solide pour le développement et l'optimisation de notre approche.

Paramètres de contrôle

Nous expliquons ci-dessous les différents paramètres[4] sur lesquels nous pouvons jouer.

Nombre de générations : donne le nombre maximum de générations pendant lesquelles l'algorithme évolutif s'exécutera.

Taille de la population : définit la taille de la population qui sera soumise à l'évolution.

Descendants : définit le nombre d'individus qui seront produits par croisement évolutif et/ou mutation.

Probabilité de mutation : détermine la probabilité qu'un individu soit muté pendant son processus de création.

Probabilité de croisement : détermine la probabilité qu'un individu soit le résultat d'un croisement pendant son processus de création.

Objectif de l'évaluateur : définit l'objectif de l'algorithme évolutif (minimiser ou maximiser la différence entre les individus et la fonction objectif).

Opérateur de sélection : décide de la manière dont les individus de la population parente seront sélectionnés pour créer les nouveaux individus.

5 Résultats

Réglages des différents paramètres

Nous précisons ici les choix effectués pour les différents paramètres de contrôle.

Nombre de générations : 190

Taille de la population : 2000 [2]

Taille de la population des descendants : 2000

Probabilité de mutation : 20%

Probabilité de croisement : 100%

Objectif de l'évaluateur : minimiser

Opérateur de sélection : tournoi [3] de sélection 2

Nous avons réalisé de nombreux essais, en jouant avec les différents paramètres, avant de trouver le premier sinus ($601 * \sin(1009 * x + \frac{6.28}{2})$) de la manière approchée la plus précise.

Pour reproduire notre expérience, il faut initialiser la graine (seed) à 4.

Valeurs trouvées

Nous trouvons avec tous ces réglages une valeur approchée assez qualitative de la première sinusoïde. Nous avons alors effectué l'itération expliquée au-dessus, et nous trouvons une valeur approchée des deuxième et troisième sinusoïde proches de la réalité. Au-delà, notre algorithme n'est pas performant.

Nous décrivons ci-dessous les quatre premières sinusoïdes trouvées.

Première sinusoïde

Valeurs observées : $602.213013 * \sin(1009.061279 * x + \frac{6.28}{2.136420})$

Valeurs attendues : $601 * \sin(1009 * x + \frac{6.28}{2})$

Deuxième sinusoïde

Valeurs observées : $596.213013 * \sin(1013.017273 * x + \frac{6.28}{2.658169})$

Valeurs attendues : $599 * \sin(1013 * x + \frac{6.28}{3})$

---

2. Pour trouver la taille de la population initiale, il est nécessaire de faire un compromis entre la diversité des individus et le temps d'exécution du programme.

3. La taille du tournoi influence la pression sélective exercée sur la population. Un tournoi de petite taille peut favoriser l'exploration de la diversité génétique, tandis qu'un tournoi de grande taille peut conduire à une convergence plus rapide vers des solutions optimales.

Troisième sinusoïde

Valeurs observées : $585.213013 * \sin(1018.856140 * x + \frac{6.28}{3.156052})$

Valeurs attendues : $593 * \sin(1019 * x + \frac{6.28}{5})$

Quatrième sinusoïde

Valeurs observées : $408.179382 * \sin(1030.941040 * x + \frac{6.28}{6.230703})$

Valeurs attendues : $587 * \sin(1021 * x + \frac{6.28}{7})$

Interprétation

À chaque génération nous avons affiché les 3 paramètres du meilleur individu de cette génération et nous avons remarqué que la fréquence et la phase se stabilisent rapidement, même si la phase n'est pas correcte, alors que l'amplitude ne fait souvent qu'augmenter.

Il est possible que le bruit introduit dans la fonction d'évaluation à chaque itération détériore les valeurs trouvées à l'itération suivante. Ce bruit est introduit par la soustraction de l'approximation de la sinusoïde trouvée à l'itération précédente.

Afin de déterminer si le bruit était responsable de toutes nos difficultés, nous avons essayé de trouver jusqu'à 5 sinusoïdes en enlevant exactement les sinusoïdes, et non plus leur valeur approchée trouvée. Pour tous les essais réalisés, avec les valeurs des paramètres choisis donnés dans la sous-section « Paramètres de contrôle » et toutes les méthodes alternatives listées ci-dessous, les paramètres trouvés sur les premières sinusoïdes sont de moins en moins bons à chaque itération. Plus l'amplitude est faible, plus le nombre de générations nécessaires pour approximer cette amplitude est grand. Notons que la fréquence a souvent, au bout de 10 générations, une bonne valeur approximée. De même, nous observons comme une corrélation entre l'amplitude et la phase. En effet, lorsqu'un des deux est loin de la réalité (trop petit), l'autre l'est aussi.

Compte-tenu de ces observations, on pourrait imaginer un autre protocole initialisant différemment la fonction objectif, i.e. la somme des 100 sinusoïdes ou alors étudier l'importance du choix des nombres premiers ainsi que l'ordre choisi dans la définition du signal.

Axes d'amélioration essayés

Dans notre expérimentation, l'amplitude, la fréquence et la phase sont des nombres à virgule flottante. L'amplitude et la fréquence de la population initiale sont choisies aléatoirement, en nombre à virgule flottante, dans leurs bornes respectives. La phase, quant à elle, est tirée aléatoirement en nombre à virgule flottant entre 0 et 3.14 (π). En effet, la phase étant composée de $\frac{6.28}{n}$ (avec n un nombre premier choisi dans l'ordre croissant), elle prend donc ses valeurs entre $\frac{6.28}{2}$ et un nombre qui tend vers 0.

Nous avons essayé d'implémenter une solution où nous manipulions le dénominateur de la phase. Nous avons initialisé alors la population de phases avec des valeurs dans $[2, 541]$ et nous avons alors adapté les calculs en conséquence. Les résultats trouvés avec cette méthode étaient moins performants.

Nous avons également essayé d'utiliser d'autres représentations, en cherchant des entiers à la place de nombres flottants, pour les 2 premiers ainsi que pour les 3 paramètres, mais les résultats obtenus étaient de nouveau moins bons.

Avec ce changement de représentation, nous avons ensuite essayé de modifier la fonction de croisement. En effet, la fonction implémentée sous-entend une certaine **épistasie**[4]. Notre fonction de croisement sélectionne soit amplitude et fréquence chez un parent et phase chez un autre, soit amplitude chez un parent, et fréquence et phase chez l'autre. Nous avons donc essayé d'implémenter une solution permettant de réaliser un croisement sans prendre en compte de lien entre les 3 paramètres : il existe en tout 8 possibilités d'hériter de gènes. On nomme a1, f1 et p1 respectivement l'amplitude, la fréquence et la phase du parent 1 et a2, f2 et p2 celles du parent 2. Alors, l'enfant peut avoir un génome composé de :

- a1, f1, p1 (pas de croisement)
- a1, f1, p2
- a1, f2, p1
- a2, f1, p1
- a1, f2, p2
- a2, f2, p1
- a2, f1, p2
- a2, f2, p2 (résultat de la fonction de croisement qui n'entraîne pas de croisement)

Cette expérience s'est révélée également moins concluante que celle gardée et expliquée dans la sous-section « Fonction de croisement ».

Enfin, nous avons essayé de faire varier différemment les paramètres lors d'une mutation : incrémenter ou décrémenter l'amplitude et la fréquence mais faire muter par un nombre choisi aléatoirement dans $[-0.1, 0.1]$ la phase. De nouveau, les résultats étaient moins performants.

4. L'épistasie est la dominance d'un gène sur d'autres gènes non allèles i.e. les gènes de même fonction mais d'effet différent. L'expression d'un gène modifie ou inhibe les effets d'un autre gène situé à un locus différent.

6 Conclusion

En résumé, bien que notre étude ait cherché à approfondir l'analyse harmonique par évolution artificielle, les résultats obtenus, malgré des efforts consciencieux, n'ont pas permis d'aboutir à des solutions satisfaisantes au delà de la troisième sinusoïde. Cela souligne la nécessité d'explorer des approches alternatives et d'entreprendre des recherches supplémentaires pour résoudre le problème soumis. Bien que notre recherche n'ait pas produit des solutions attendues, elle a contribué à élargir notre compréhension du domaine. Nous pouvons en tirer des enseignements pour orienter des recherches futures, incitant ainsi à une réflexion continue et à l'évolution des approches méthodologiques dans l'analyse harmonique par évolution artificielle.

Références

[1] Emmanuel Montseny. Introduction à l'analyse harmonique. `http://emmanuel.montseny.pro/cours/aharm_cours.pdf`, 2011. Accédé le 9 janvier 2024.

[2] Françoise Bastin. Introduction à l'analyse harmonique. `http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/AnHarm/20-23/Main3BM(140923).pdf`, 2023. Accédé le 9 janvier 2024.

[3] Patrick Flandrin. Fourier + 200. `https://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/Fourier_Rennes081211.pdf`, 2011. Accédé le 10 janvier 2024.

[4] Pierre Collet. Easea. `https://easea.unistra.fr/index.php/EASEA_platform`, 2019. Accédé le 11 janvier 2024.