

Control Estadístico de Procesos

Parte 1

María Guadalupe Russell Noriega.
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Autónoma de Sinaloa.

V Verano de Probabilidad y Estadística, CIMAT.
Del 2 al 6 de julio del 2012.

Contenido

- Introducción al Control Estadístico de Procesos
- ¿Por qué varían los procesos?
- Fundamentos Estadísticos
- Causas Comunes y Causas Especiales
- Capacidad de Procesos
- Monitoreo de Procesos
 - Cartas de Control Tipo Shewhart
 - Cartas de Control de Sumas Acumuladas

Introducción

El “Control Estadístico de Procesos” nació a finales de los años 20 en los Bell Laboratories, como parte del Manejo de Calidad Total (TQM) o Control de la Calidad Total (TQC).

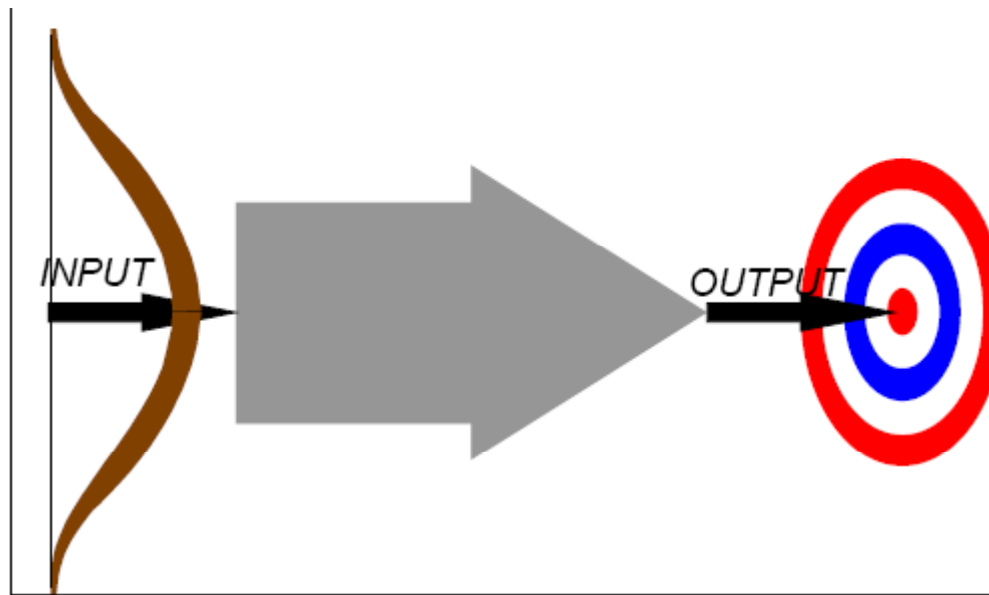
Shewhart, en su libro “Economic Control of Quality of Manufactured Products” (1931) marcó la pauta que seguirían otros discípulos distinguidos (Juran, Deming, etc.).

En 1924 Shewhart desarrolló el concepto de carta de control estadístico, el cual suele considerarse como el inicio formal del control estadístico de calidad.

La popularidad del uso de las cartas de control en la industria se debe a la facilidad de construcción e interpretación. Sin embargo su uso ha venido creciendo en áreas como salud y servicios.

Introducción

Para entender los alcances del SPC (CEP), se entiende que un proceso es una red de componentes independientes que trabajan juntas, con el propósito de lograr los objetivos propuestos por el sistema.



¿Por qué varían los procesos?

Un proceso industrial está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen **imposible fabricar dos productos exactamente iguales**.

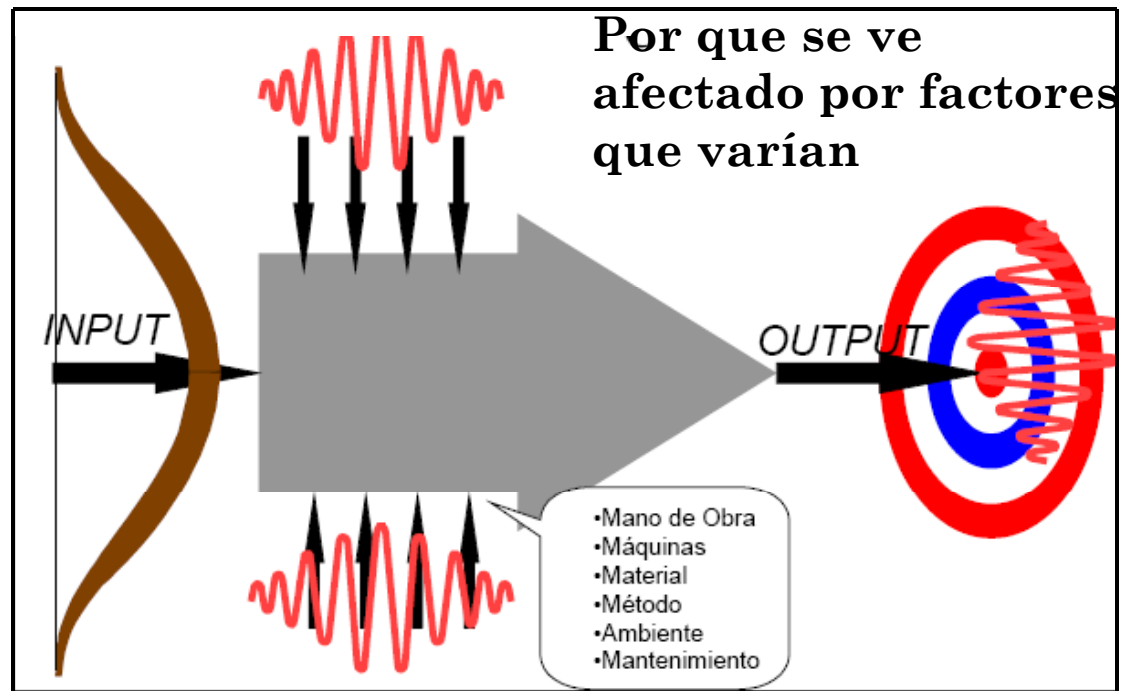
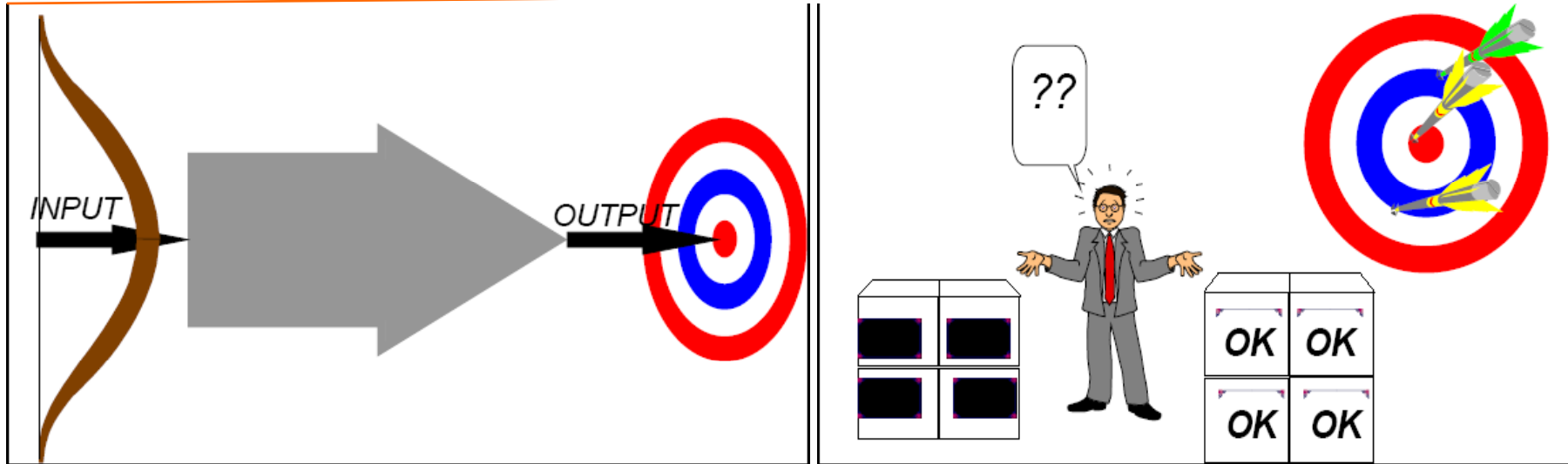
Las características del producto fabricado no son uniformes y presentan **variabilidad**.

Esta **variabilidad** es no deseable y el objetivo es reducirla lo más posible o al menos mantenerla dentro de ciertos límites.

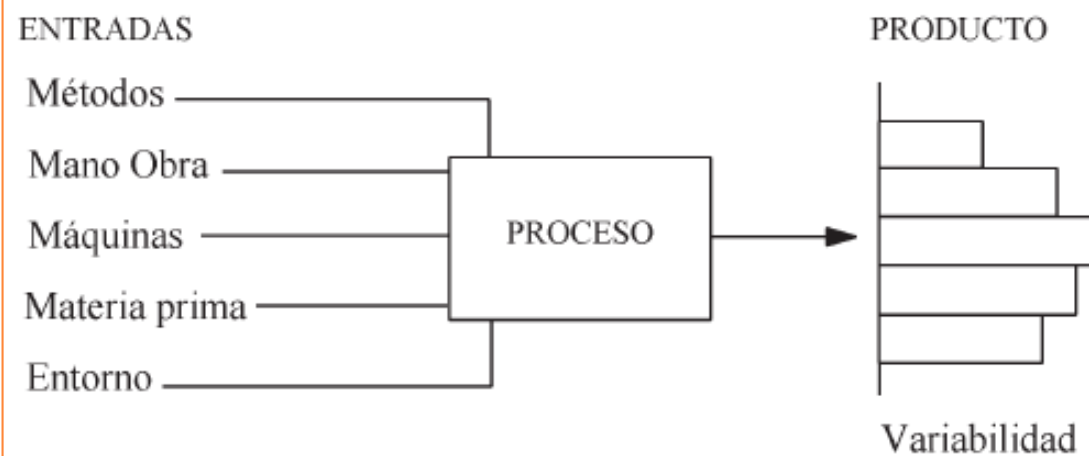
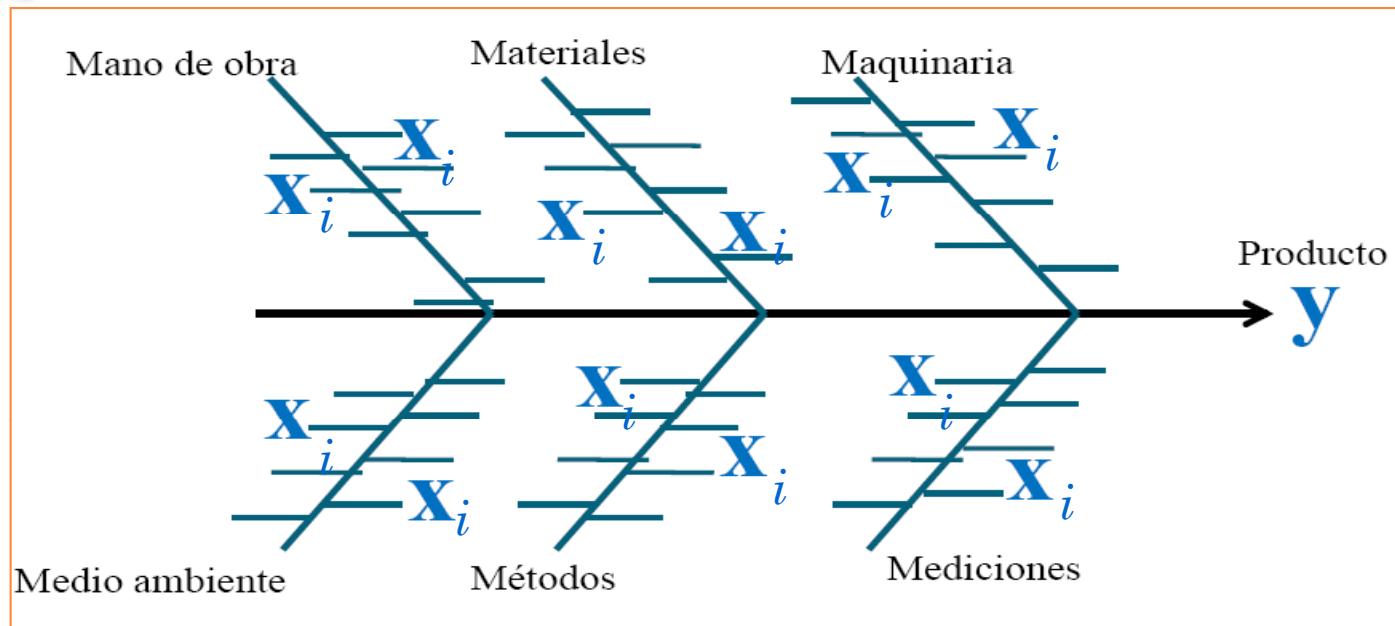
El **Control Estadístico de Procesos es una** herramienta útil para alcanzar dicho objetivo. Dado que su aplicación es en el momento de la fabricación, puede decirse que esta herramienta contribuye a la **mejora de la calidad de la fabricación**.

Permite también aumentar el conocimiento del proceso dando lugar a la mejora del mismo.

¿Por qué varían los procesos?



Causas de variabilidad



Causas de variabilidad

La estrategia básica para la mejora de la calidad pasa por la identificación de las causas que producen variabilidad, las cuales según Shewhart (1931) se clasifican en:

a) Causas comunes o aleatorias: Son las que provocan la llamada variabilidad natural del proceso, y obedecen a un comportamiento aleatorio.

b) Causas especiales o atribuibles: Son aquellas que cuando están presentes tienen un efecto significativo en el desempeño del proceso. Este efecto se refleja eventualmente en el patrón que presentan los puntos graficados en la carta de control.

Causas de variabilidad

La variabilidad de las causas comunes o aleatorias es el reflejo de cientos de causas pequeñas que actúan de manera conjunta, y que no es posible identificar alguna en especial.

La variación excesiva debida a causas comunes se resuelve cambiando la tecnología, de modo que la eliminación de las causas comunes es responsabilidad de la empresa.

La variabilidad de las causas especiales o atribuibles se deben típicamente a aspectos tales como: materiales, operadores, instrumentos de medición, máquinas, métodos.

La eliminación de las causas especiales es más sencilla ya que básicamente son responsabilidad del operario.



Causas de variabilidad

Por definición, se dice que un proceso está bajo control estadístico cuando no hay causas especiales presentes. O equivalentemente cuando únicamente actúa un sistema de causas de variabilidad común.

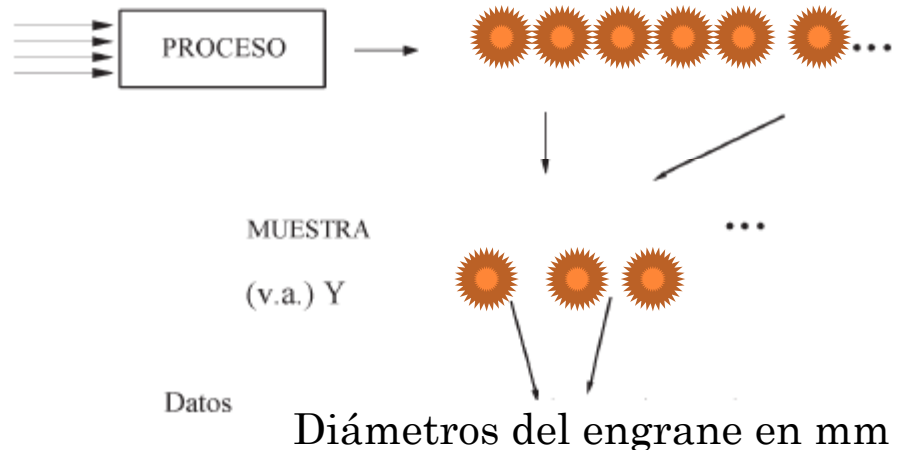
El Control Estadístico de Procesos se basa en analizar la información que aporta el proceso para detectar la presencia de causas especiales y habitualmente se realiza mediante una construcción gráfica denominada Gráfico o Carta de Control.

Si el proceso se encuentra bajo control estadístico es posible realizar una predicción del intervalo en el que se encontrarán las características de la pieza fabricada.

Medidas de variabilidad

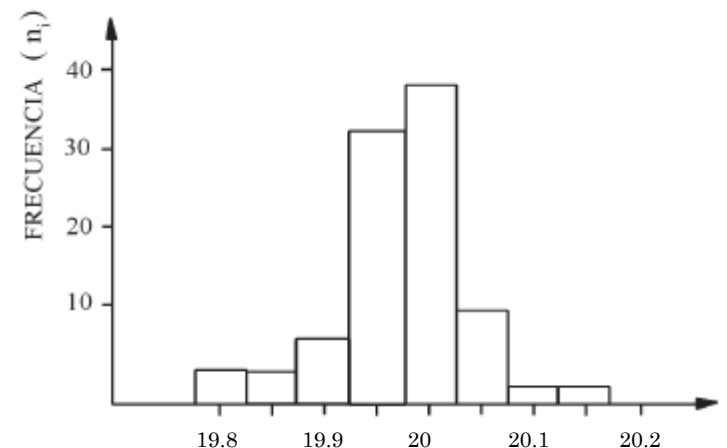
Considere un proceso de producción de engranes en estado de control, para el cual la característica de calidad es el diámetro de los engranes en mm.

Se selecciona aleatoriamente una muestra de tamaño n de entre los engranes fabricados por el proceso, en un día de producción.



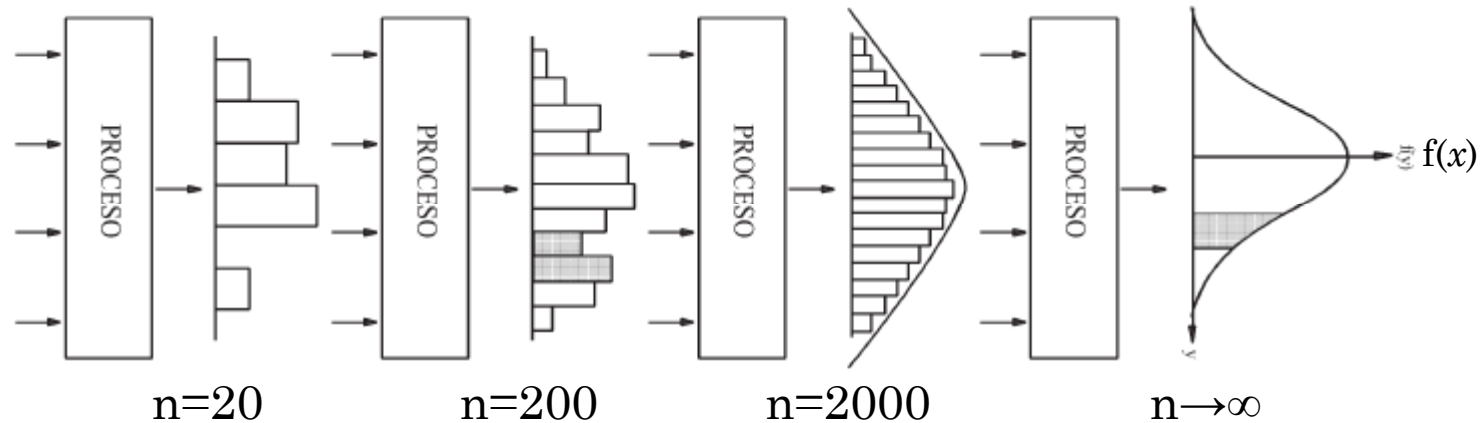
Medida de variabilidad en una muestra.

¿Proporción de engranes en la muestra que tienen un diámetro menor a 19.8 mm?
¿Qué proporción de engranes en la muestra cumple con la especificación de 20 ± 0.2 mm?



Histograma de los Diámetros de engranes en mm, para una muestra de tamaño $n=100$

Variabilidad en la Población



Función de densidad de Probabilidad (fdp)

De la definición frecuentista de probabilidad,

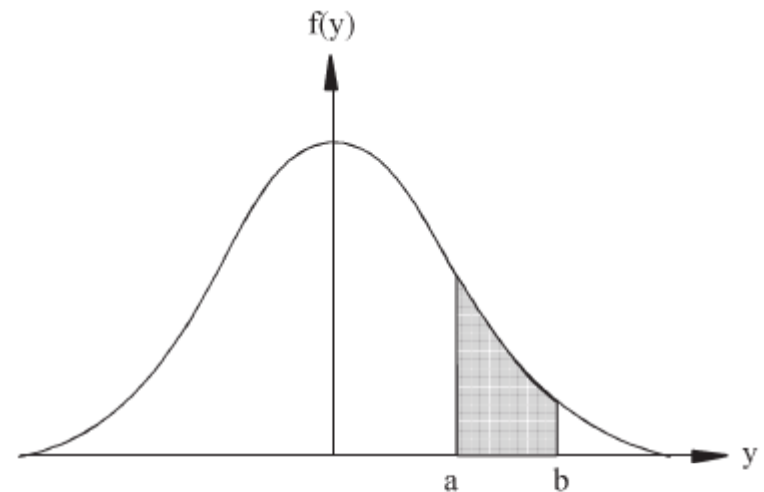
$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ de veces que } A \text{ ocurre}}{n}$$

Además de la relación entre histograma y fdp, se deduce que:

$$\int_a^b f(y) dy = \Pr(a \leq Y \leq b)$$

En resumen una función f es fdp si cumple que:

$$a) f(y) \geq 0 \quad \forall y \in R, \quad b) \int_R f(y) dy = 1$$



Función de Distribución

La fdp $f(y)$ contiene toda la información sobre la variabilidad del proceso, es decir, si $f(y)$ es conocida podemos contestar preguntas como:

1. ¿Qué proporción de los diámetros de engranes producidos por el proceso estarán entre a y b mm?

$$\int_a^b f(y)dy$$

2. ¿Qué proporción de los engranes tendrán diámetros inferiores a a mm?

$$\int_{-\infty}^a f(y)dy$$

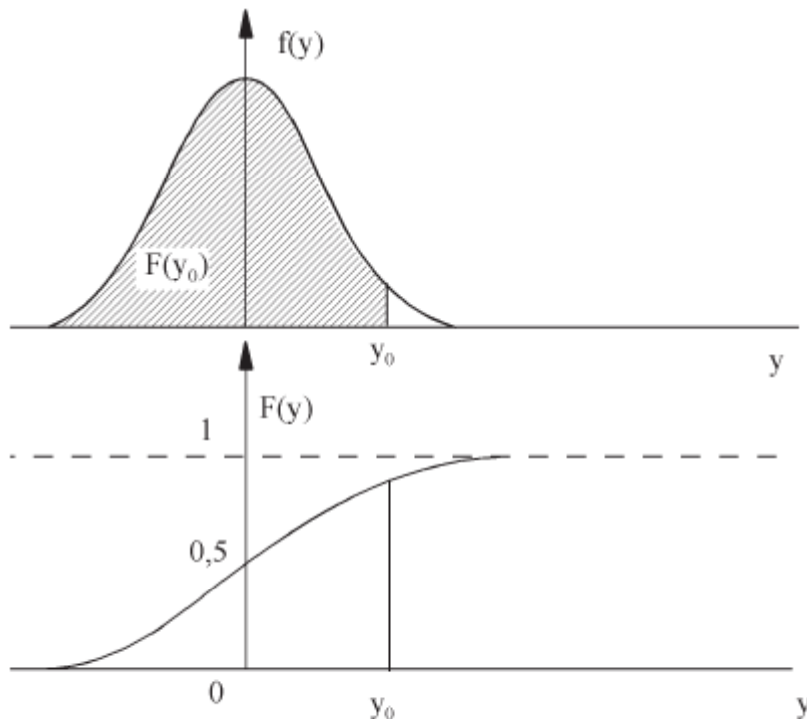
3. ¿Qué proporción de engranes tendrán diámetros superiores a b mm?

$$\int_b^{\infty} f(y)dy$$

Función de distribución

Dada una variable aleatoria Y , se llama **función de distribución de la v.a. Y** a la función **F** , de recta real R en el intervalo $[0, 1]$, definida por:

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt = \Pr(Y \leq y)$$



Una función de distribución F es monótona no decreciente, continua por la derecha y cumple que:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$$

Primeros Momentos

La variabilidad representada exhaustivamente por la fdp, puede caracterizarse *parcialmente* por los primeros dos momentos poblacionales, definidos por:

$$\mu = E(Y) = \int_R yf(y)dy \quad y \quad \sigma^2 = Var(Y) = E(Y - \mu)^2 = \int_R (y - \mu)^2 f(y)dy$$

μ y σ son la media y varianza poblacional, respectivamente.

El parámetro μ se conoce como parámetro de localización y σ el parámetro de dispersión.

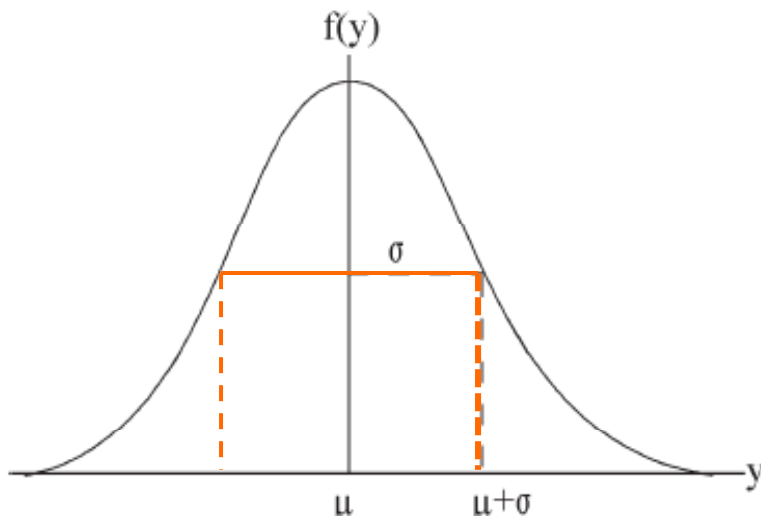
Parte de la variabilidad en una muestra puede caracterizarse a través de los primeros dos momentos muestrales, identificados y definidos como:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad y \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

Distribución Normal

- Se dice que una v.a. Y distribuye normal con parámetros μ y σ ($Y \sim N(\mu, \sigma)$) si su fdp es:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < y < \infty, \quad \sigma > 0.$$



La fdp normal cumple las propiedades siguientes:

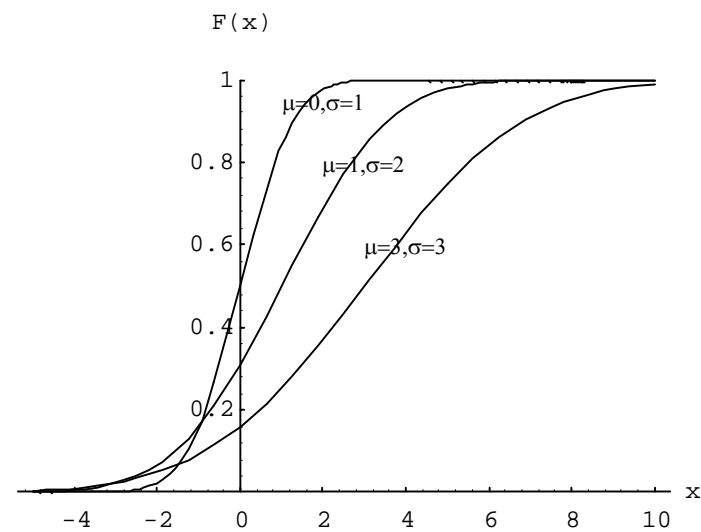
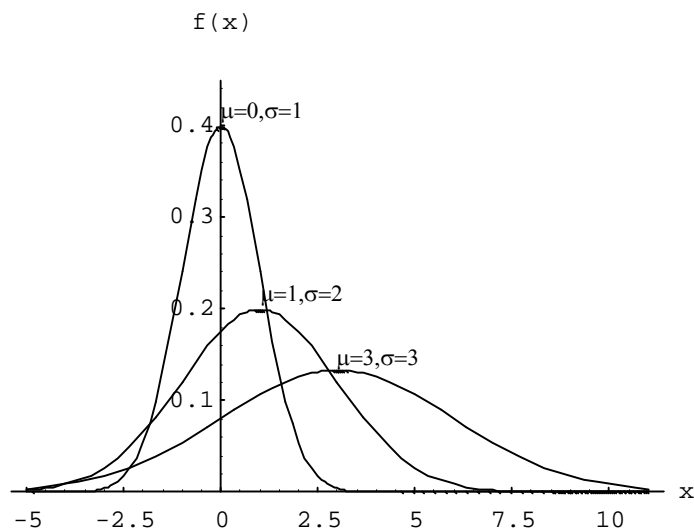
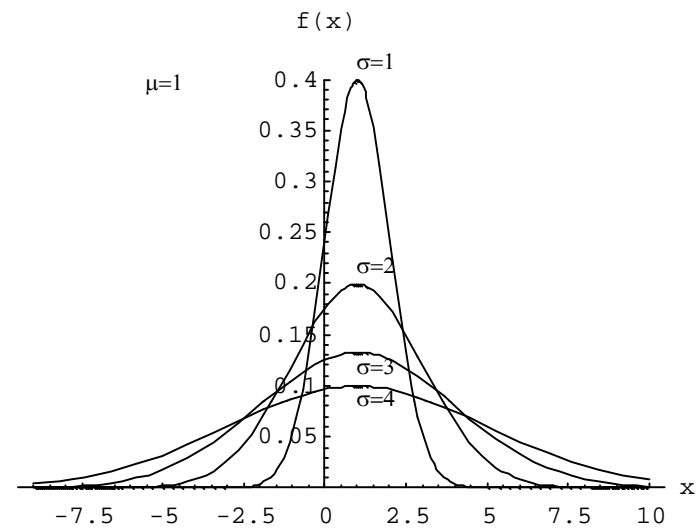
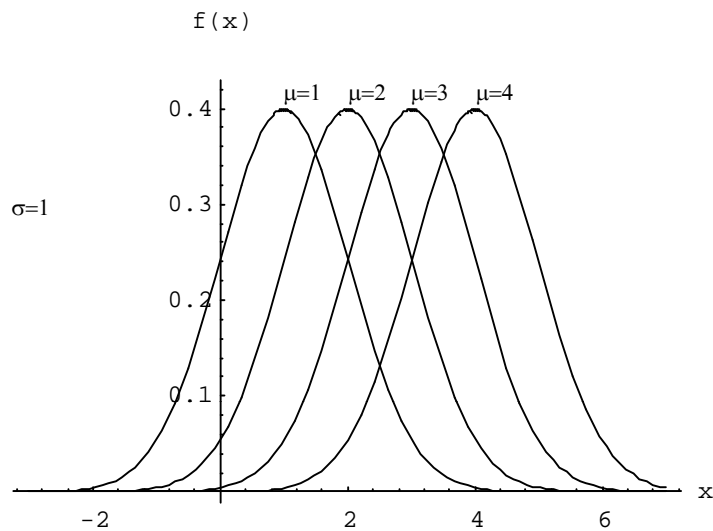
a) $f(y)$ es simétrica respecto del eje $y=\mu$

b) La gráfica de $f(y)$ presenta un máximo relativo en el punto

$$\left[\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right]$$

c) La gráfica de $f(y)$ presenta puntos de inflexión en $y=\mu \pm \sigma$.

Comportamiento de la fdp $N(\mu, \sigma)$



Teorema de Límite Central

El teorema del límite central (TLC) establece que si una variable aleatoria se obtiene como una suma de muchas causas independientes, siendo cada una de ellas de poca importancia respecto al conjunto, entonces su distribución es asintóticamente normal.

Si $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, donde las $\{X_i\}_{i \geq 1}$ son una sucesión de de v.a. independientes con media μ_i y varianza σ_i^2 , para $i = 1, 2, \dots$ entonces bajo ciertas condiciones generales,

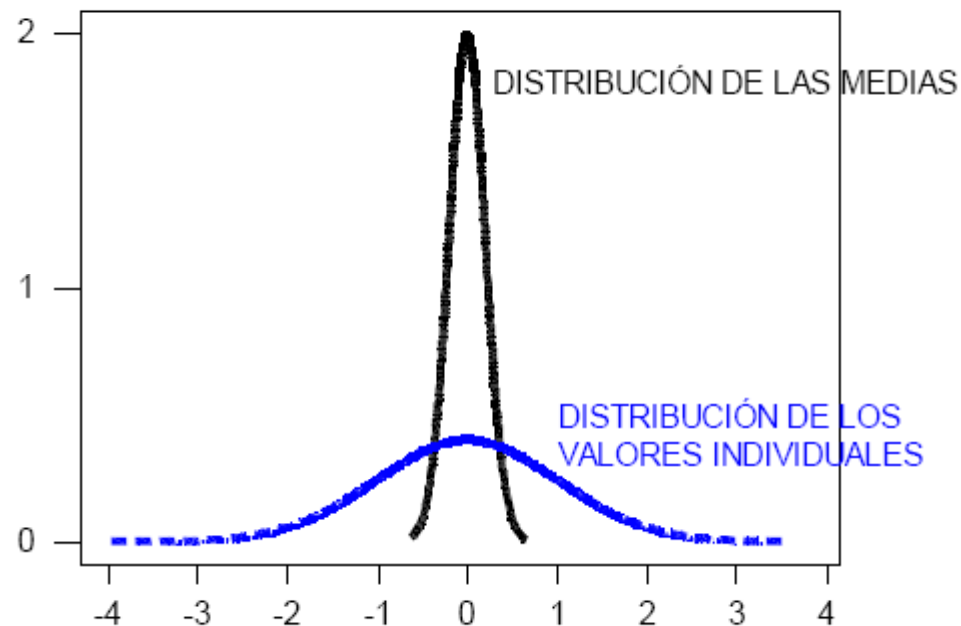
$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Teorema de Límite Central (TLC)

Distribución de las medias muestrales

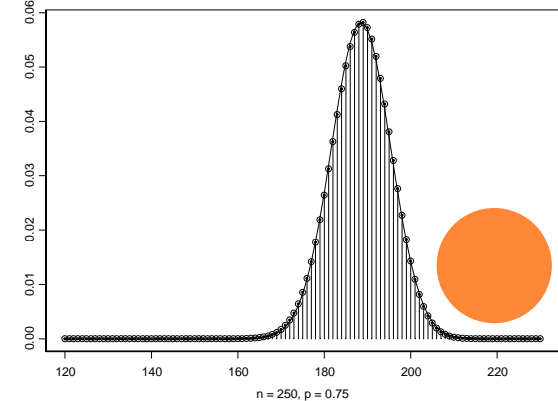
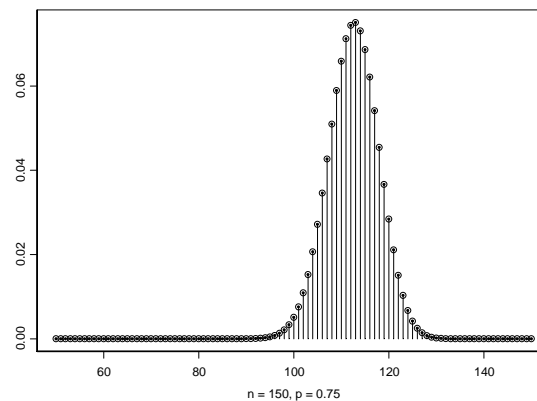
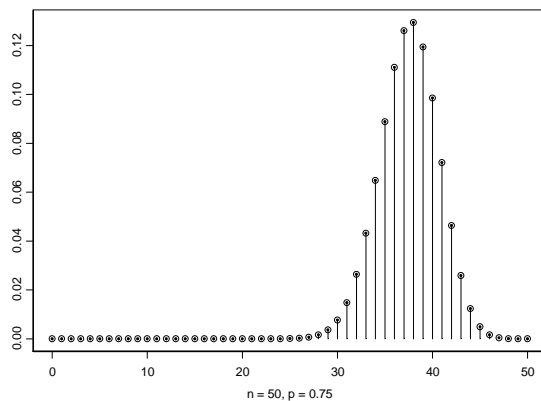
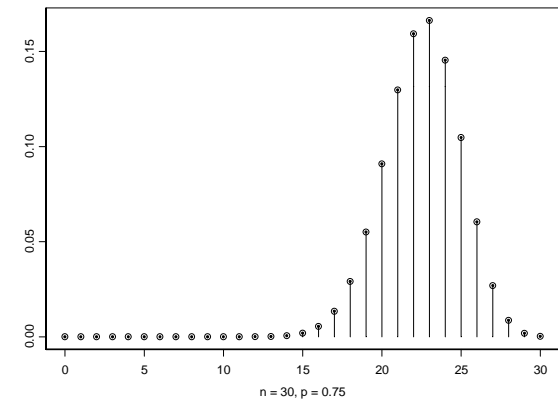
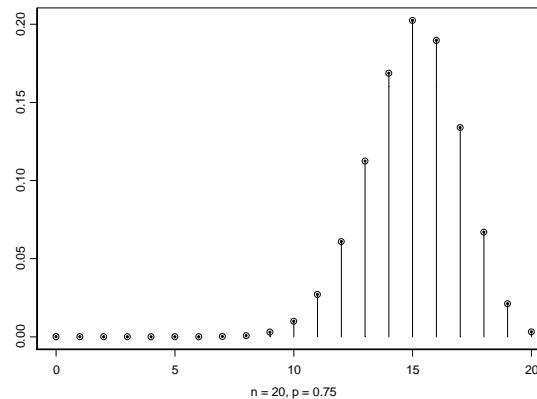
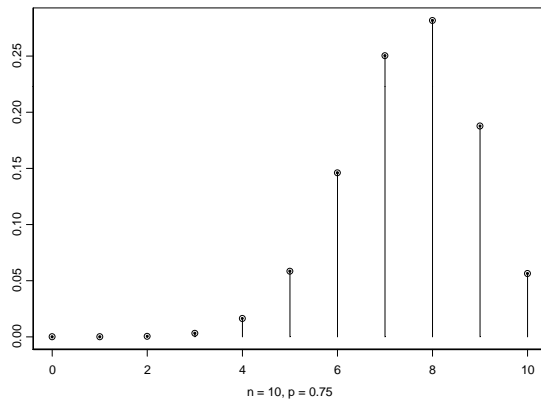
Si X es una v.a. con distribución $N(\mu, \sigma)$ a partir de la cual se extraen muestras aleatorias de tamaño n , entonces la distribución de las medias muestrales, \bar{x}_m ,

se distribuye; $\bar{x}_m \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ó $\frac{\bar{x}_m - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$.



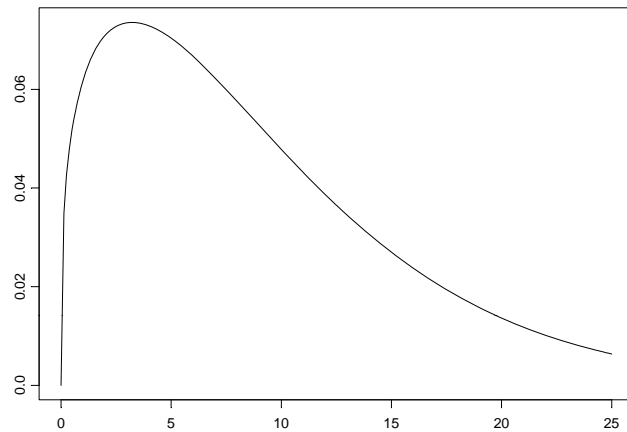
Teorema de Límite Central (TLC)

Como consecuencia del TLC la distribución de las medias muestrales es asintóticamente normal, aún en el caso de que la distribución poblacional no lo sea; siempre que el tamaño de la muestra sea suficientemente grande.

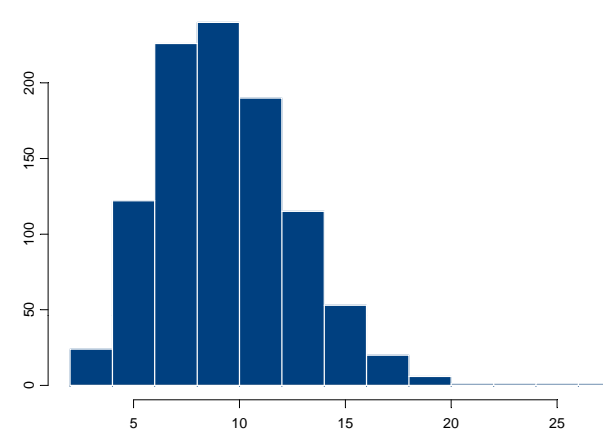


Teorema de Límite Central (TLC)

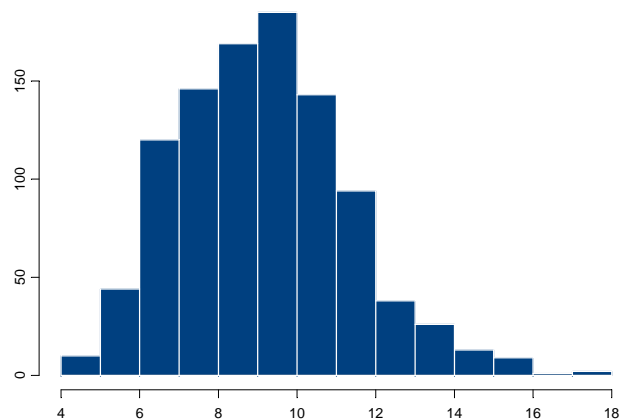
Weibull(beta = 1.3, eta = 10)



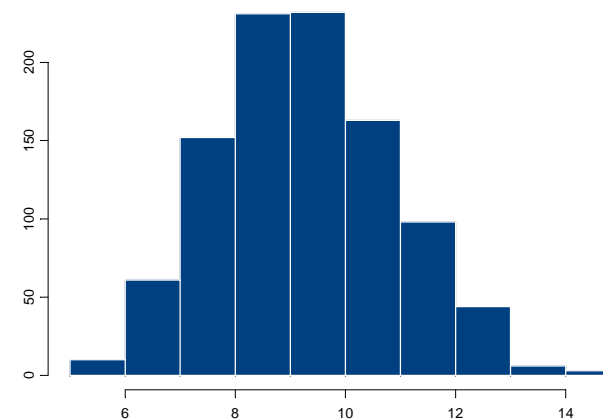
n = 5



n = 10



n = 20



Teorema de Límite Central (TLC)

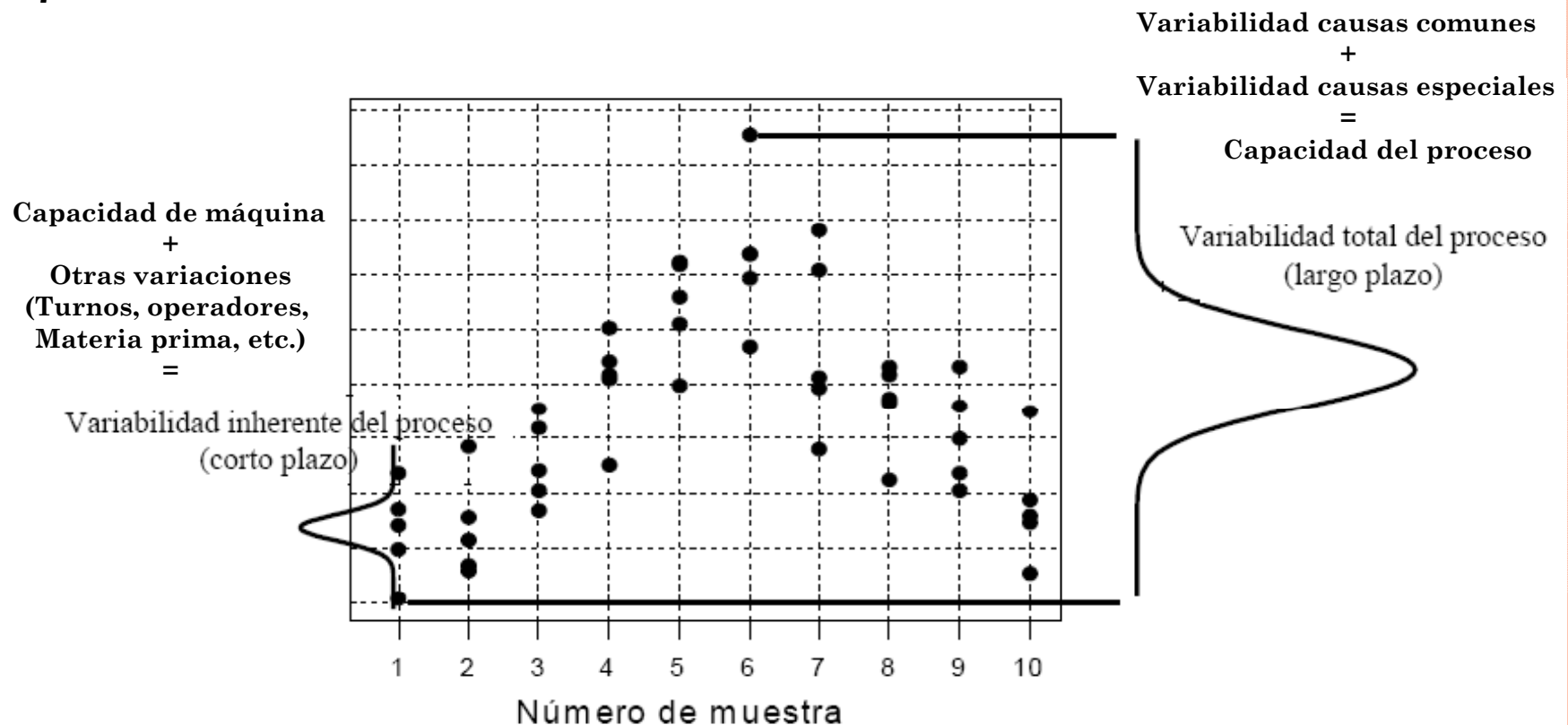
Recapitulando, un proceso está afectado por un gran número de factores (por ejemplo oscilaciones de las características del material utilizado, variaciones de temperatura y humedad ambiental, variabilidad introducida por el operario, entre otras), que inciden en él y que inducen una variabilidad de las características del producto fabricado.

Si el proceso está operando de manera que existen pequeñas oscilaciones de todos estos factores (causas comunes), pero de modo que ninguno de ellos tienen un efecto preponderante frente a los demás, entonces por el TLC esperamos que la característica de calidad del producto fabricado se distribuya normal.

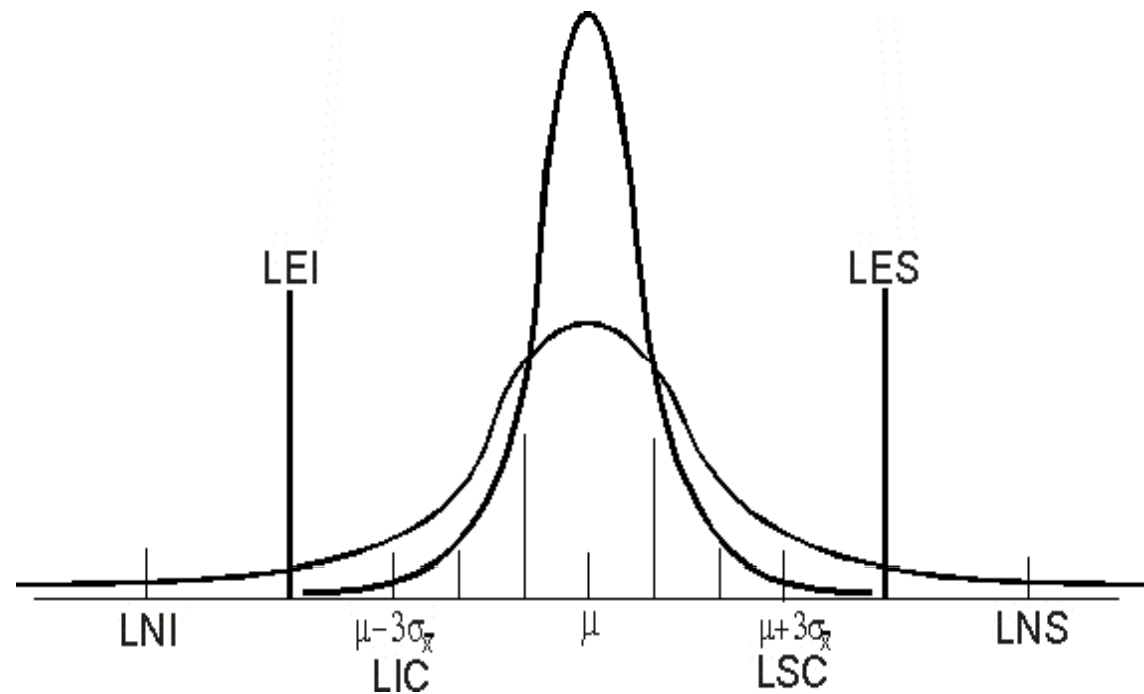
Si el proceso se encuentra bajo control estadístico es posible realizar una predicción del intervalo en el que se encontrarán las características de la pieza fabricada y monitorear el proceso mediante un gráfico de control.

Capacidad de un Proceso

Un análisis de capacidad evalúa la habilidad que tiene un proceso para producir artículos que se ajusten a especificaciones preestablecidas, y que por tanto satisfagan los requerimientos de los consumidores. Es decir, cuando un proceso está en estado de control, a la amplitud del intervalo de variabilidad de las observaciones individuales, se le denomina **capacidad**.



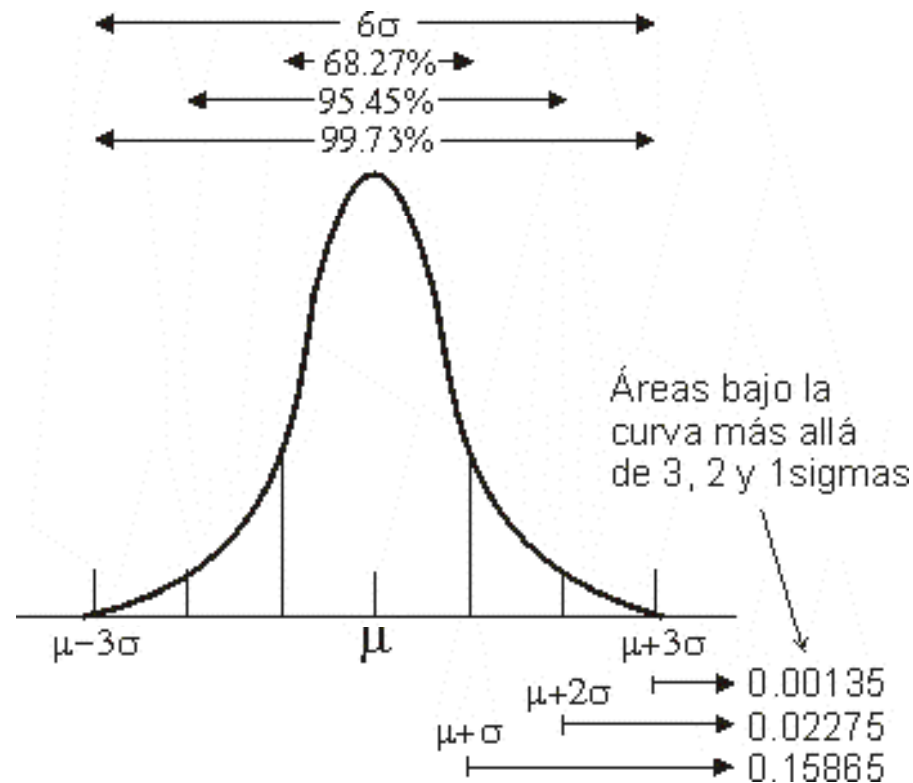
Tres tipos de Límites



Los límites LE definen los requerimientos de aceptabilidad para una unidad individual de un proceso de manufactura o de servicio.

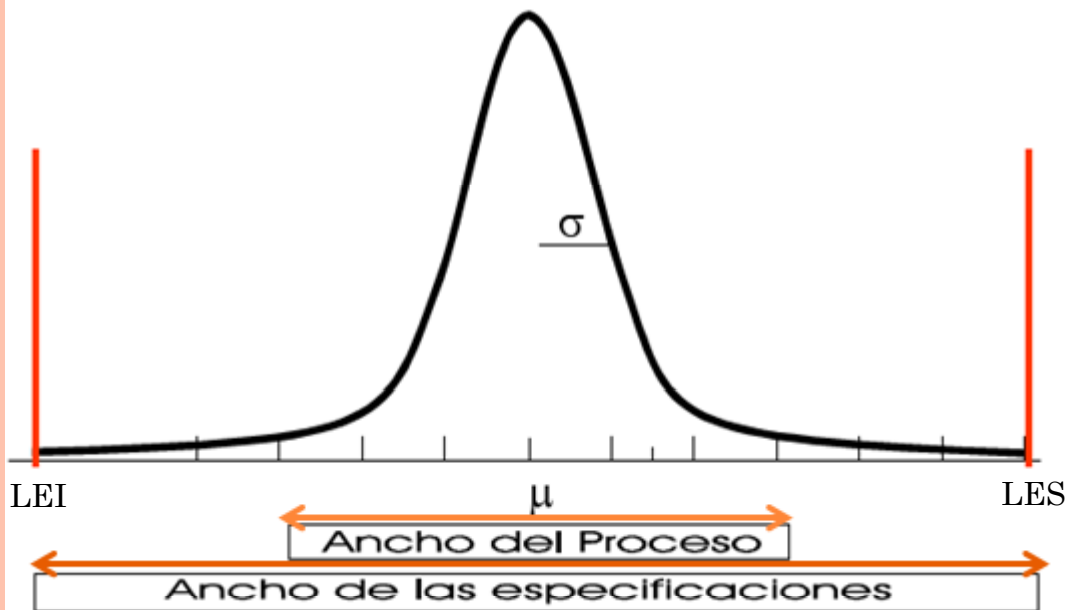
Los límites LN indican los puntos en donde varía la salida de un proceso.

Áreas bajo la Distribución Normal



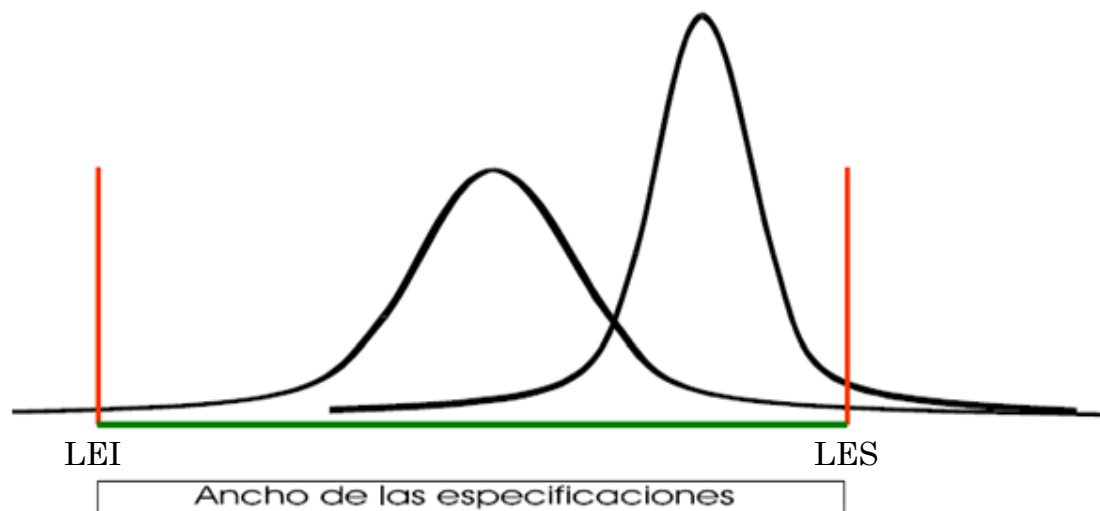
Si un proceso normal está en control estadístico, la característica de calidad del 99.73% de los elementos fabricados estarán comprendidos en $\mu \pm 3\sigma$.

Especificaciones y Ancho del Proceso



Bajo normalidad el ancho del proceso se define como 6σ .

El ancho de especificaciones puede medir "cualquier cantidad" de sigmas.



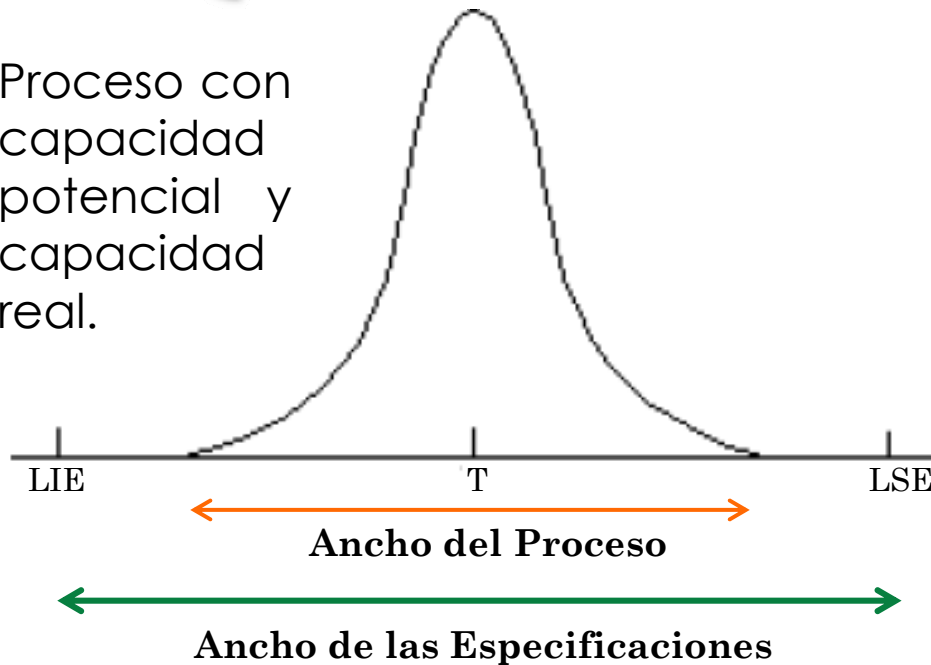
Las curvas representan lo observado.

Las especificaciones lo deseado.



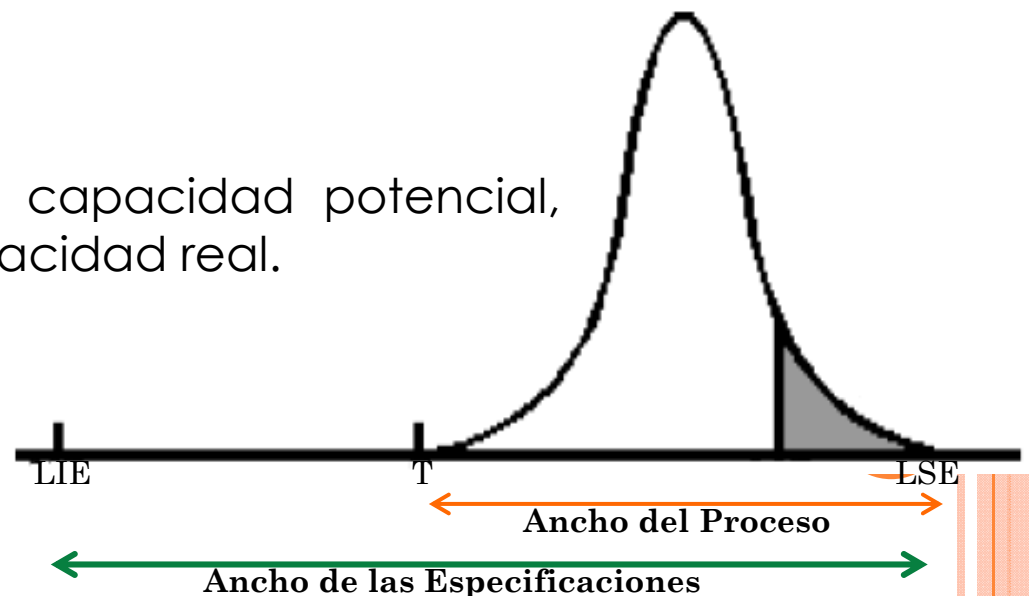
Capacidad de Procesos

Proceso con capacidad potencial y capacidad real.

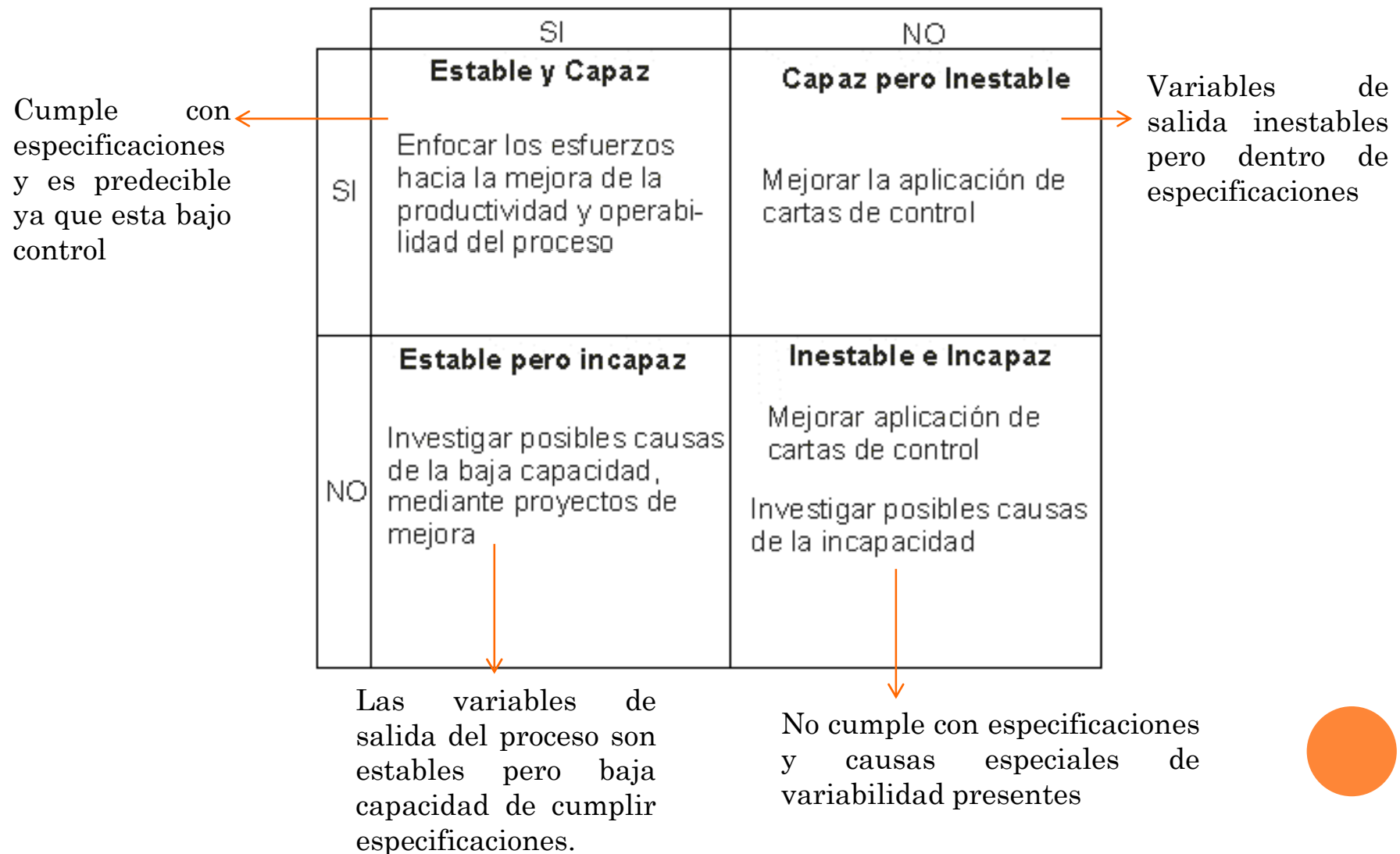


Dado un proceso y dadas unas especificaciones diremos que un proceso es capaz si puede producir dentro de la especificaciones exigidas, es decir, si su capacidad es menor que las tolerancias.

Proceso con capacidad potencial, pero SIN capacidad real.



Capacidad de Procesos y Estabilidad



Índices de Capacidad de Procesos

$$C_p = \frac{\text{Ancho de Especificaciones}}{\text{Ancho del Proceso}} = \frac{LES - LEI}{6\sigma}$$

$C_p < 1$ es inaceptable

$1 < C_p < 1.33$ marginal y

$C_p > 1.33$ es capacidad potencial adecuada

$$C_r = \frac{1}{C_p} = \frac{6\sigma}{LES - LEI}$$

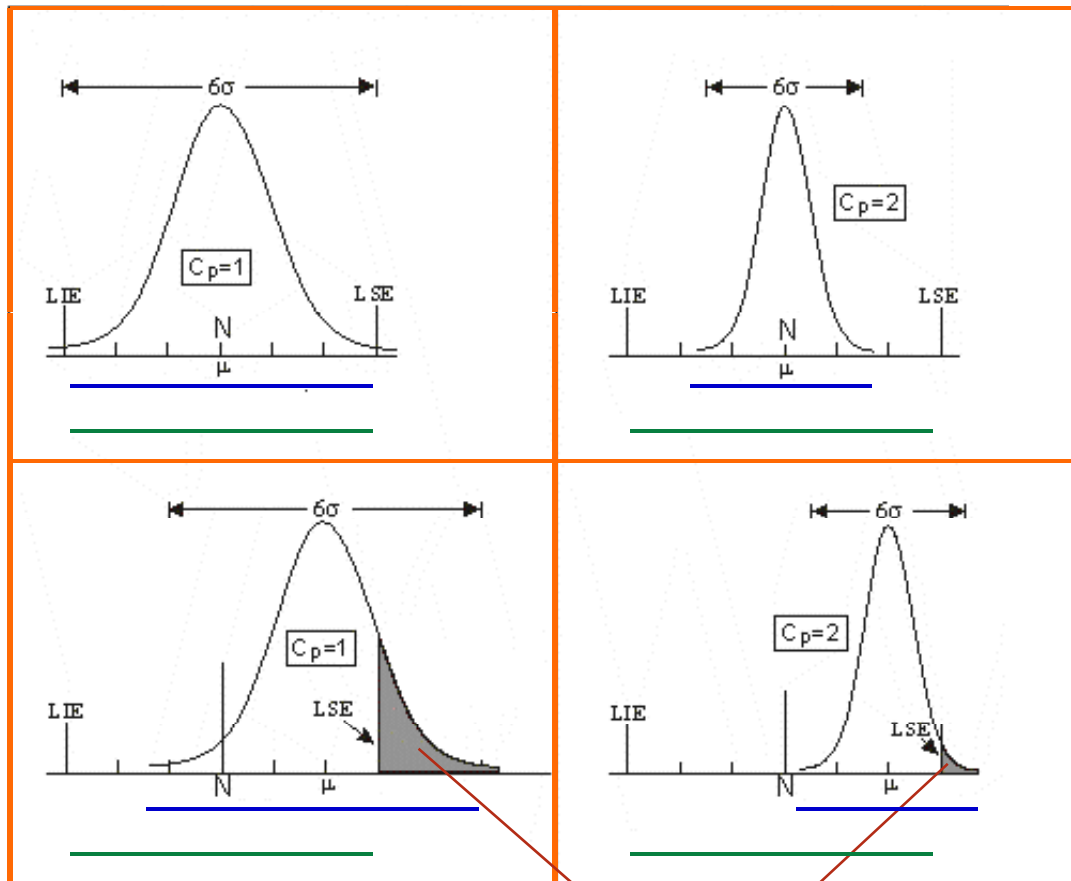
“Proporción de la tolerancia que ocuparía el proceso”



Índice Cp

Procesos con $C_p=1$

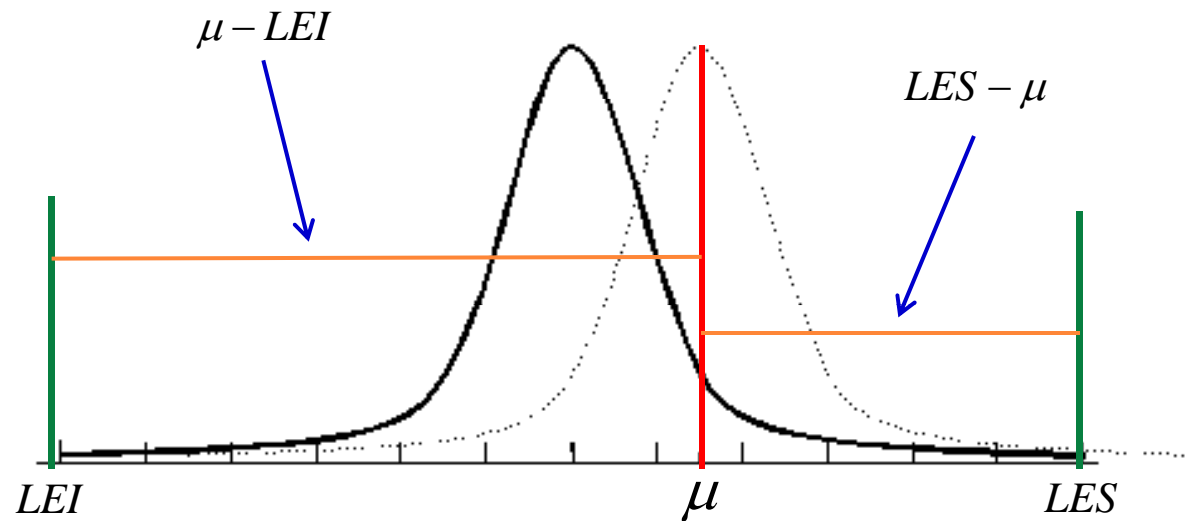
Procesos con $C_p=2$



El índice C_p no toma en cuenta el centrado del proceso.

% de artículos defectuosos

Índices Z_U , Z_L , C_{PU} , C_{PL} y C_{PK}



$$Z_U = \frac{LES - \mu}{\sigma}$$

$$C_{PU} = \frac{LES - \mu}{3\sigma} = \frac{Z_U}{3}$$

$$Z_L = \frac{\mu - LEI}{\sigma}$$

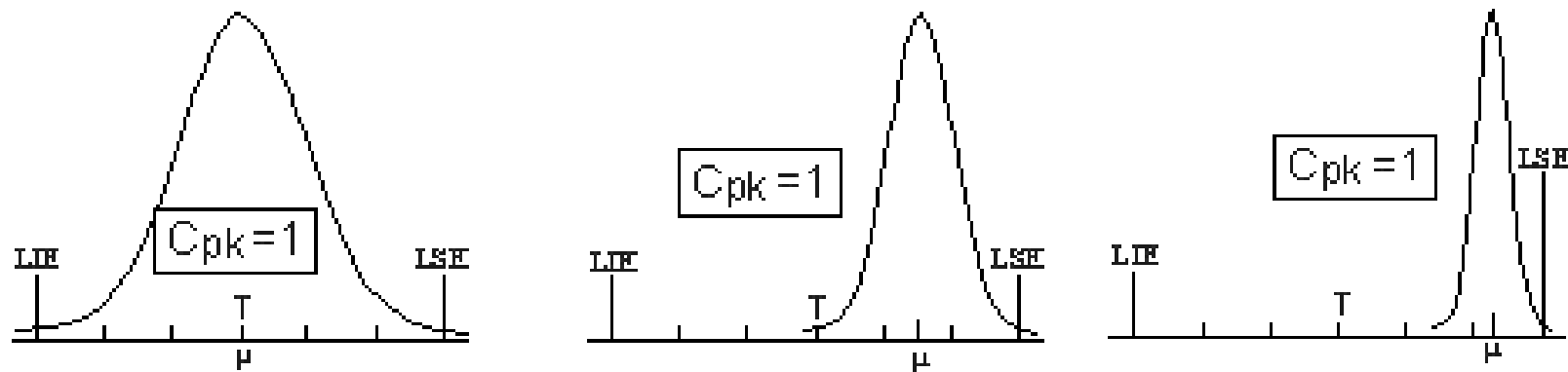
$$C_{PL} = \frac{\mu - LEI}{3\sigma} = \frac{Z_L}{3}$$

Toma en cuenta el centrado del proceso

$$C_{PK} = \min \left\{ \frac{\mu - LEI}{3\sigma}, \frac{LES - \mu}{3\sigma} \right\} = \min \{ C_{PL}, C_{PU} \}$$

Índice C_{PK}

El C_{pk} no puede distinguir entre los tres procesos representados en la figura.



$$C_{PK} = \frac{\text{Distancia de la media al límite de tolerancia más ajustado}}{\text{Semicapacidad del proceso}}$$

$C_{PK} = C_P$ si el proceso está centrado



Relación entre los Índices C_P y C_{PK}

El factor que mide el grado en que el proceso se desvía del valor nominal (T) expresado en unidades de $\frac{1}{2}$ de la tolerancia, digamos k , se expresa como:

$$k = \frac{2|T - \mu|}{LSE - LIE}$$

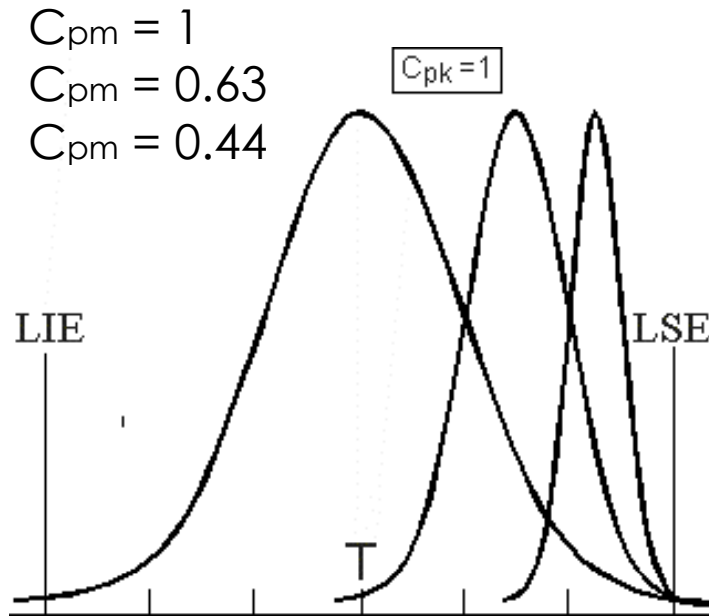
Si $LIE \leq \mu \leq LSE$ se cumple que $0 \leq k \leq 1$

La relación entre los índices C_P y C_{PK} es:

$$C_{PK} = (1 - k)C_P$$

Esta relación implica que el C_{PK} es menor o igual al C_P , y la igualdad se da cuando la media del proceso coincide con el valor nominal ($\mu = T$).

Índice C_{pm}



$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}}$$

El índice C_{pm} sí distingue entre los tres procesos de la figura. Se cumple que:

$$C_{pm} < \frac{LES - LEI}{6|\mu - T|}$$

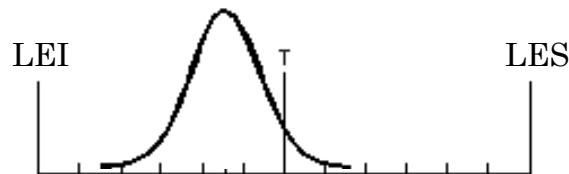
Esta relación implica que para que $C_{pm} = 1$, se debe cumplir

$$|\mu - T| < \frac{LES - LEI}{6}$$

Es decir, la media del proceso no se puede alejar del valor objetivo más allá de un sexto de la tolerancia.

C_{pm} coincide con el C_p y el C_{pk} cuando el proceso está centrado en el valor nominal (T).

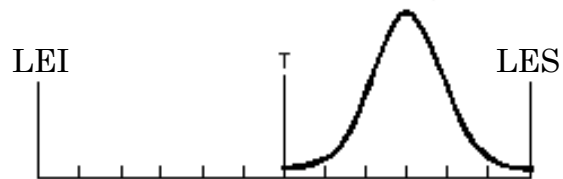
Comparación de Índices



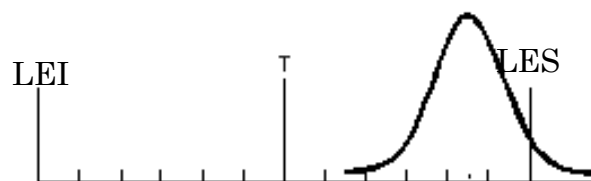
C_p	C_{PL}	C_{PU}	C_{pk}	C_{pm}
2	1.5	2.5	1.5	1.11



C_p	C_{PL}	C_{PU}	C_{pk}	C_{pm}
2	2	2	2	2



C_p	C_{PL}	C_{PU}	C_{pk}	C_{pm}
2	3	1	1	0.63



C_p	C_{PL}	C_{PU}	C_{pk}	C_{pm}
2	3.5	0.5	0.5	0.43

Índices del Desempeño del Proceso

$$P_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma_{global}} \quad P_{pk} = \min\left(\frac{LSE - T}{3\sigma_{global}}, \frac{T - LIE}{3\sigma_{global}}\right)$$

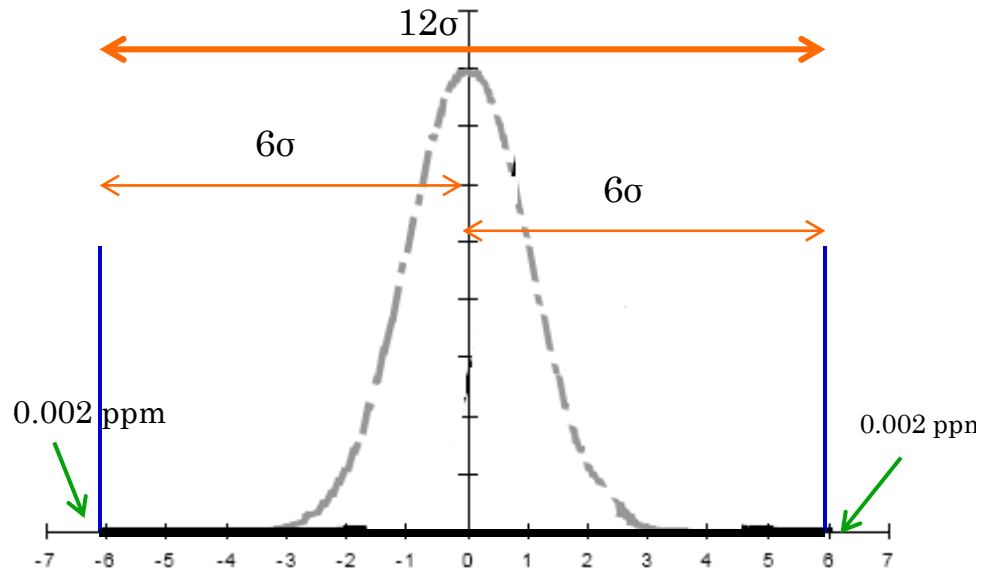
σ_{global} Desviación estándar Global

Toma en cuenta la variación dentro y entre subgrupos

$$CP > P_p \quad \text{y} \quad CPK > P_{pk}$$

Ya que los P_p toman en cuenta la variabilidad a largo plazo.

Métrica 6 sigma



Ancho de las Especificaciones

6σ

⇓

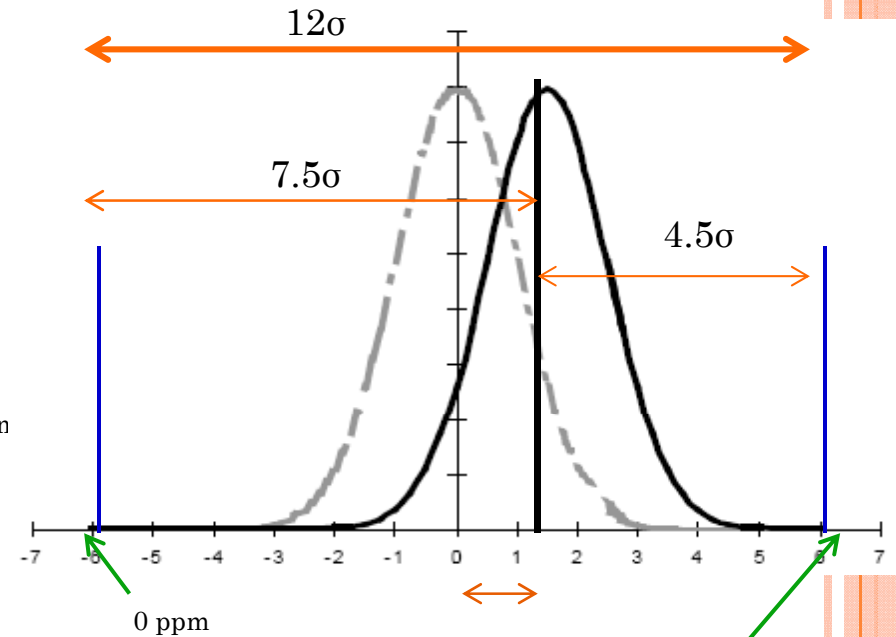
$$C_p = C_{pk} = 2$$

⇓

$$Z_{\text{corto plazo}} = 6 \quad ; \quad Z_{\text{largo plazo}} = 6$$

⇓

0.002 ppm



Ancho de las Especificaciones

6σ

⇓

$$C_p = 2; \quad C_{pk} = 1.5$$

⇓

$$Z_{\text{corto plazo}} = 6 \quad ; \quad Z_{\text{largo plazo}} = 4.5$$

⇓

3.4 ppm



Procesos en Estado de Control

¿Qué es la calidad?

Definición tradicional: Calidad significa adecuación para uso.

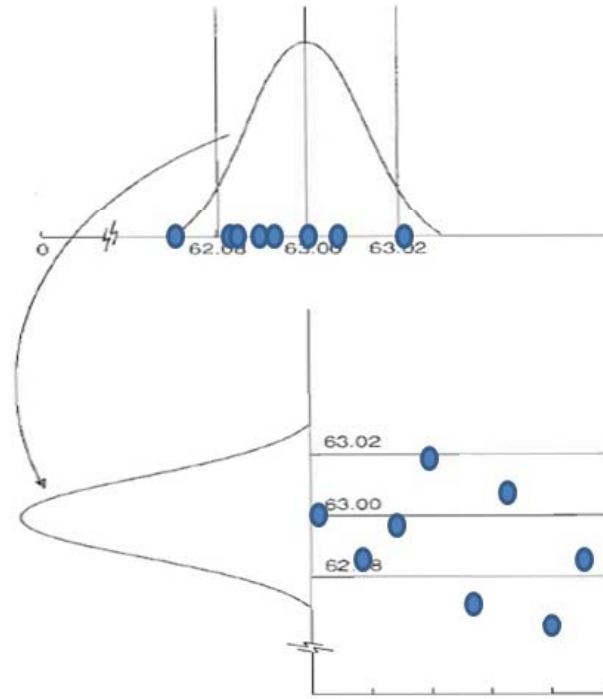
Definición moderna: La calidad es inversamente proporcional a la variabilidad.

Definición. El mejoramiento de calidad es la reducción de la variabilidad en procesos y productos.

- Un proceso en estado de control es aquel que sólo está afectado por causas comunes de variación.
- Es posible modelar matemáticamente la variabilidad de las causas comunes, considerando la función de distribución de la característica de interés (Normal, Binomial, Poisson).

Cartas de Control

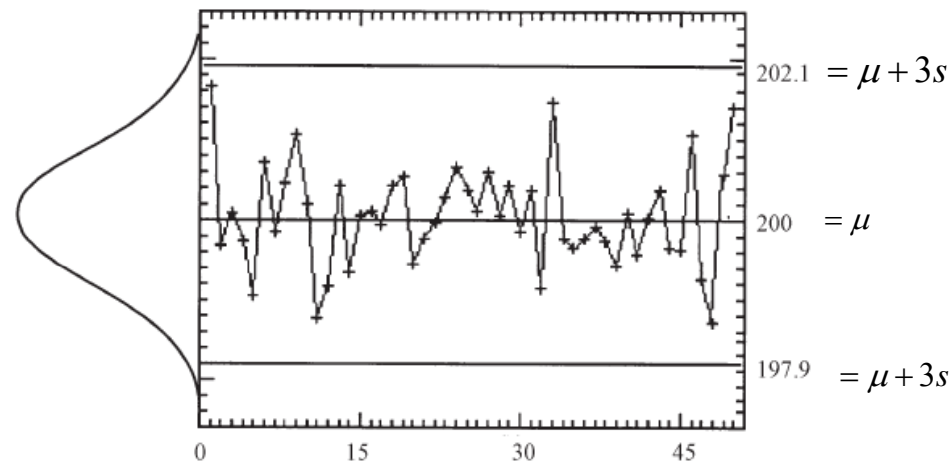
Las cartas de control son una herramienta estadística que permite conocer si un proceso dado se encuentra en estado de estabilidad o control.



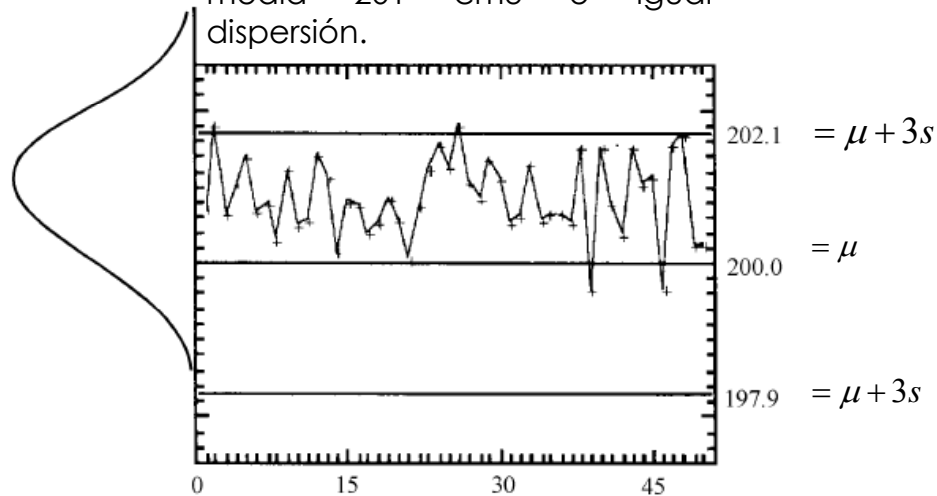
Son gráficas cronológicas de los datos del proceso de interés, que nos ayudan a entender, controlar y mejorar los procesos.

Comportamiento esperado de las observaciones individuales en un proceso en estado de control

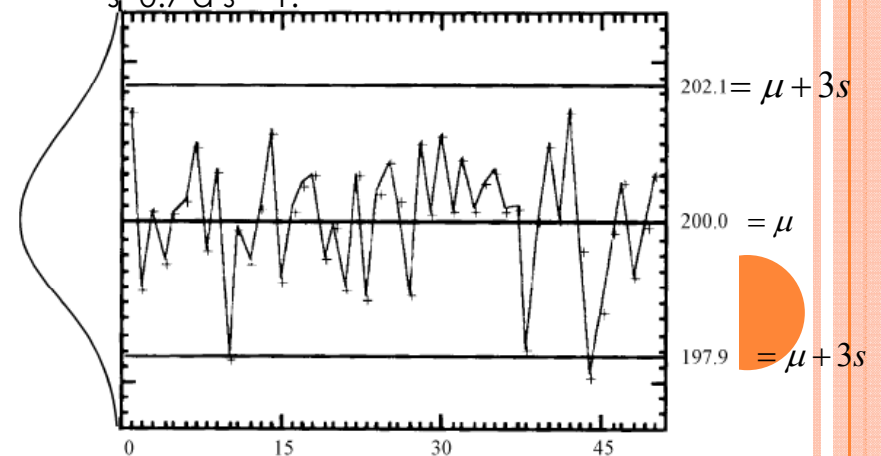
Considere un proceso de llenado de botellas de agua que, en estado de control, sigue una distribución normal con media $\mu=200$ cm³ y desviación $s=0.7$ cm³.



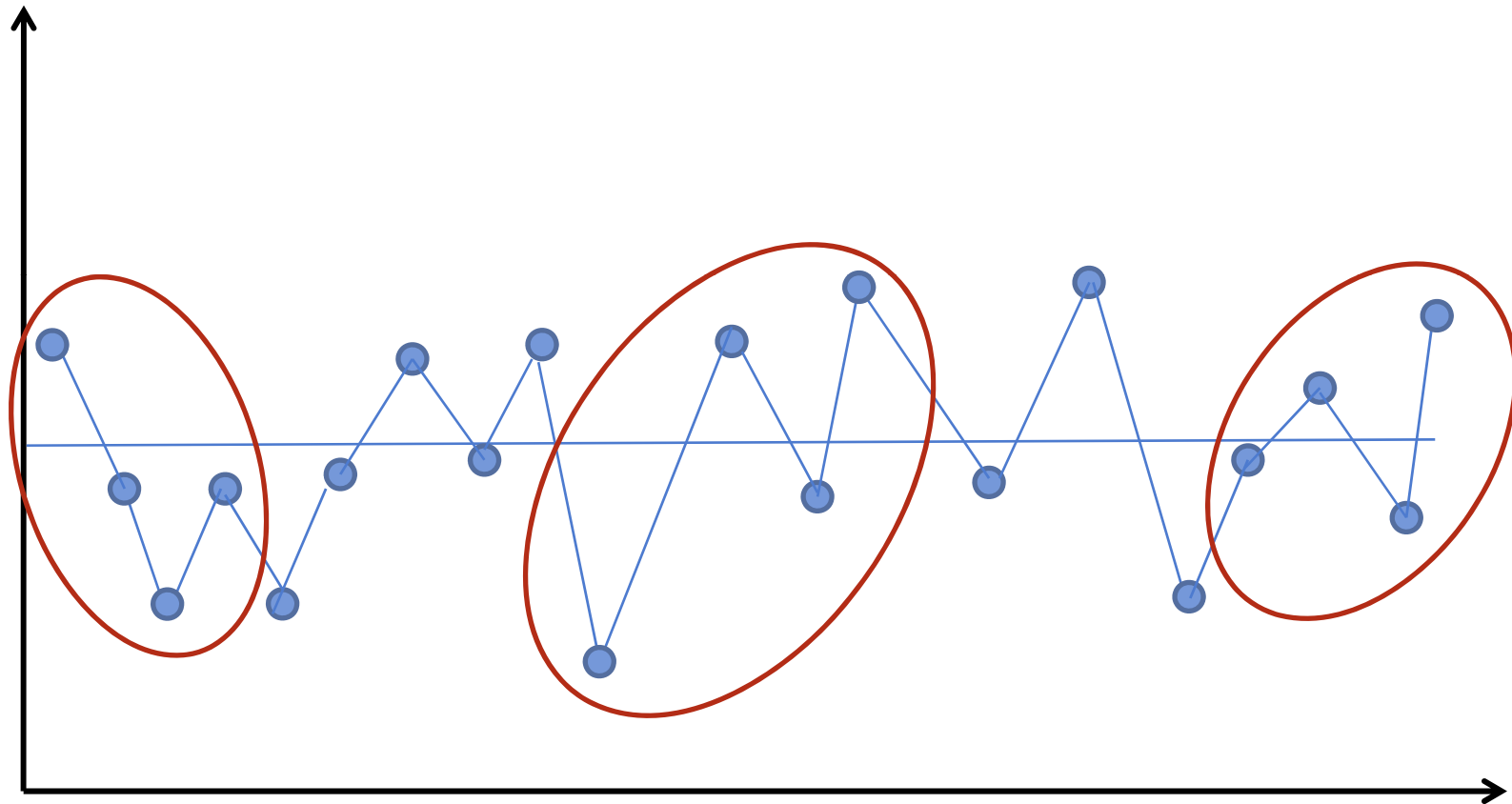
El proceso se desajusta en 1 cm³ pasando a rellenar con media 201 cm³ e igual dispersión.



El proceso se desajusta provoca un aumento en la variabilidad del proceso de llenado, pasando de $s=0.7$ a $s=1$.



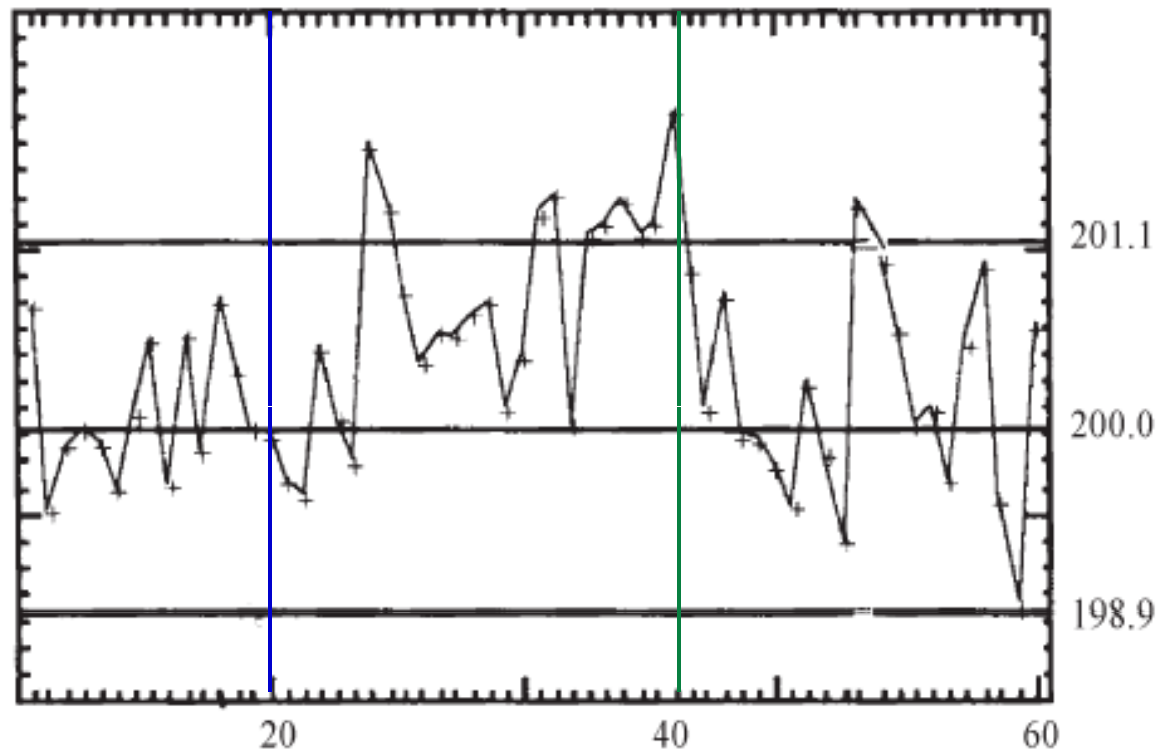
Cartas de Control



Proceso



Comportamiento de la media de un proceso en estado de control

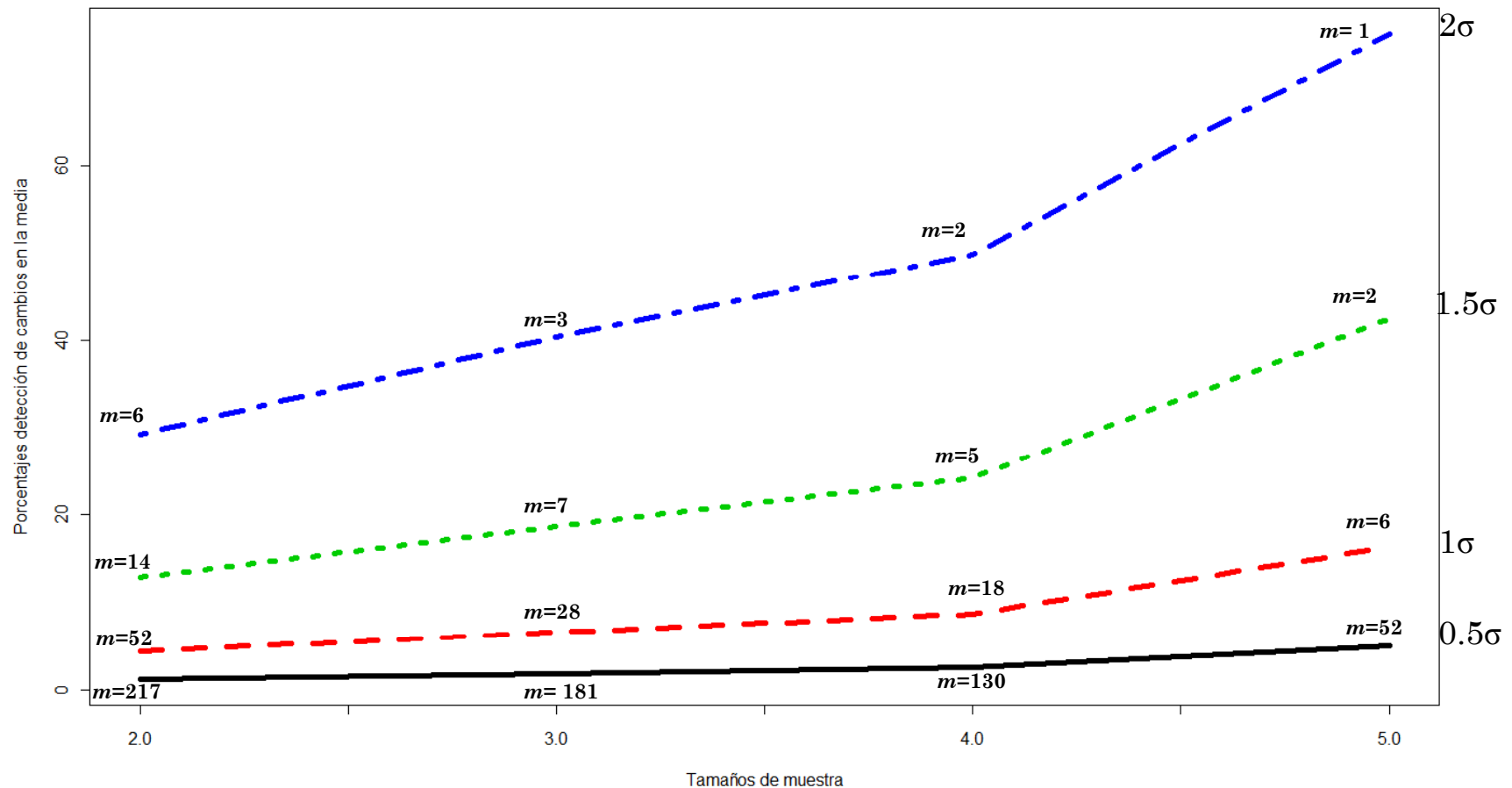


La figura contiene el contenido medio de 4 botellas

- Observaciones de la 1 a la 20 con $\mu=200$ y $s=0.7$
- Observaciones de la 21 a la 40 con $\mu=201$ y $s=0.7$
- Observaciones 41 a la 60 con $\mu=200$ y $s=1$.

Cambios en la media

Cambios de la media, 0.5, 1, 1.5 y 2 sigmas



m es el número de muestras de tamaño n que se han de tomar para que exista una probabilidad de al menos 95% de detectar el cambio en el proceso.

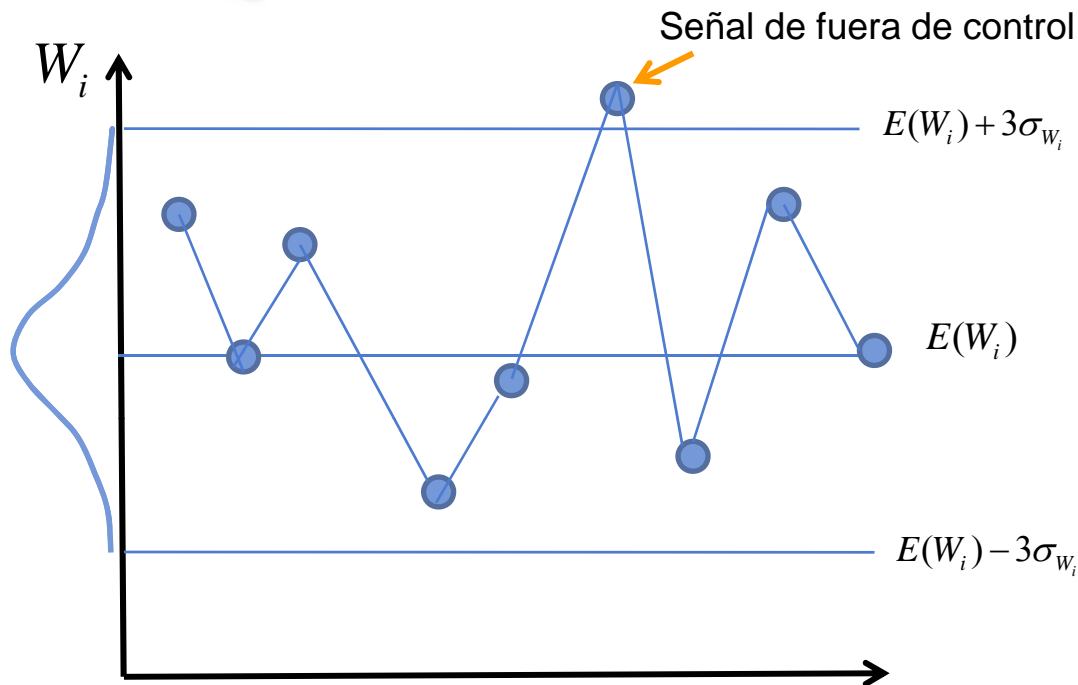
Gráfico o diagrama de control

Gráfico de control: Representa el comportamiento de los datos ordenados en el tiempo de un proceso.

Objetivo principal: Detectar lo antes posible cambios en el proceso. Se busca minimizar el tiempo que transcurre desde que se produce un desajuste hasta que se detecta.

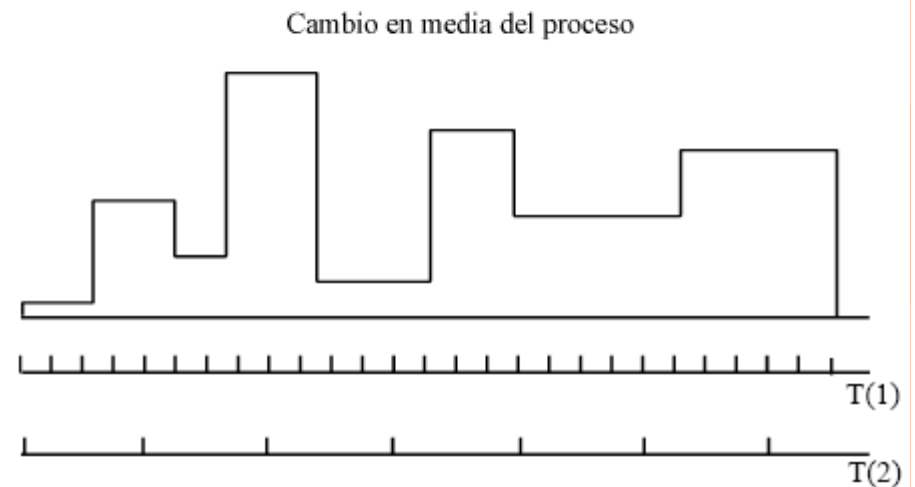
Falsas alarmas: Observaciones de un proceso en estado de control interpretadas erróneamente como señales de que en el proceso actúan causas especiales.

Cartas de Control tipo Shewhart



Probabilidad de falsas alarmas del orden del 3%.

Costos de producir fuera de control.
 $T(1)$ y $T(2)$ frecuencias de muestreo para un proceso en el que se monitorea la media



Cartas de control para variables

Construcción de los Límites de Control

Considere una muestra aleatoria de tamaño n , X_1, X_2, \dots, X_n .
Sean las estadísticas de orden: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

Funciones lineales de las estadísticas de orden, denominadas usualmente L-estimadores, son de la forma

$$T = \sum_{j=1}^n a_j X_{(j)}$$

Los límites de control se calculan a partir de los valores esperados y varianzas de las funciones usadas:

$$E(T) = \sum_{j=1}^n a_j E(X_{(j)}) \quad \sigma_T^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \text{Cov}(X_{(i)}, X_{(j)}) a_j$$

Construcción de los Límites de Control

Por ejemplo, si $T = \bar{X}$ es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n , donde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces,

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si $\bar{T} = \bar{\bar{X}}$ representa la línea central de una carta de control para la medida de localización $T = \bar{X}$, los límites 3σ son:

$$\bar{T} \pm 3\sigma_T$$

Carta \bar{X}

La carta \bar{X} muestra las variaciones en los promedios de las muestras. Si las $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ, σ conocidos, los límites de control son;

$$\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

α probabilidad de una falsa alarma.

n tamaño de subgrupo que se toma en cada tiempo.

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ cuantil de la normal e igual a 3, si tenemos una carta de límites tres sigmas..

En la práctica μ, σ desconocidos y deben estimarse de un conjunto de datos históricos, Fase I (construcción de la carta de control), hasta que el proceso se considere estable.

En la Fase II el proceso se monitorea en línea.

Carta \bar{X} , si μ y σ desconocidos

Se estima μ y σ a partir de la media de las medias $\bar{\bar{x}}$, y σ a partir de rango, R , o bien a partir de la desviación estándar muestral, S , de k muestras iniciales.

El estadístico $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ da una estimación de la dispersión de la población de la que procede.

Se calcula muy fácilmente y para valores muestrales pequeños, $n \leq 8$, se comporta bien. Para valores mayores da una estimación sobrevalorada de la dispersión de la población.

Para el estadístico S , se tiene dos definiciones:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Estimador
sesgado

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$E(S^{*2}) = \sigma^2$$

Estimador
insesgado



Carta \bar{X} , si μ y σ desconocidos

Las varianzas de ambos estadísticos son, para procesos normales:

$$\sigma_{S^2}^2 = \text{Var}(S^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 \leq \sigma_{S^{*2}}^2 = \text{Var}(S^{*2}) = \frac{2}{(n-1)} \sigma^4$$

$$E(S) = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma = c_2 \sigma \quad E(S^*) = \sqrt{\frac{2}{(n-1)}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma = c_4 \sigma$$

En este caso ambos estadísticos son estimadores segados de σ .

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \text{Var}(S) = E(S^2) - (E(S))^2 \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 - c_2^2 \sigma^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n} - c_2^2\right) \end{aligned}$$

$$\sigma_S = \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{n} - c_2^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{S^*}^2 &= \text{Var}(S^*) = E(S^{*2}) - (E(S^*))^2 \\ &= \sigma^2 - c_4^2 \sigma^2 = \sigma^2 (1 - c_4^2) \end{aligned}$$

$$\sigma_{S^*} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

Carta $\bar{X} - R$

La carta \bar{X} monitorea las variaciones en los promedios de las muestras. La carta R monitorea la variabilidad de un proceso. Es decir, muestra las variaciones de los rangos de las muestras.

Lo más conveniente es empezar con la construcción de la carta R.

Si la carta R muestra que la variabilidad del proceso esta fuera de control, lo mejor es controlar la variabilidad antes que construir la carta \bar{X} .

A partir de $\bar{\bar{X}}$ y \bar{R} se trazan los límites provisionales de la manera siguiente.

En el gráfico de Medias:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{\bar{X}} - 3A_2 \bar{R}$$

En el gráfico de Rangos:

$$LCS = \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right) \bar{R} = D_4 \bar{R}$$

$$LC = \bar{R}$$

$$LCI = \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \right) \bar{R} = D_3 \bar{R}$$



Carta $\bar{X} - R$

Estimación de las constantes d_2 y d_3 , por simulación, utilizadas en la construcción de la carta $\bar{X} - R$

Programa en R

#Estimación de d_2 y d_3 . El estadístico $W = \text{Rango}/\sigma$, denominado # “recorrido relativo”, con $E(W) = d_2$ y $\text{raiz}(\text{varianza}) = d_3$.

```
W <-0; W2<-0; nn<-100000; n <- as.matrix(seq(1,25,1)); nl<-length(n);
d2<-matrix(0,nl,1);d3<-matrix(0,nl,1)
for (j in 1:nl)
{ W<-0; W2<-0;
  for(i in 1:nn)
  { rdatos <-rnorm(n[j],0,1); #Se simulan datos de una normal estándar
    rango <-range(rdatos)#función que obtiene el rango de los datos
    W <-W + (rango[2]-rango[1])/1
    W2 <-W2 + ( (rango[2]-rango[1])/1)^2
  }
  d2[j] <-W/nn # E(W)=d2
  d3[j]<-sqrt((W2/(nn-1))-2*(d2[j])*(W/(nn-1))+ (nn/(nn-1))* (d2[j])^2))#
  sigmaW=d3; j<-j+1;
}
cbind(d2,d3)
```

d2	d3
1.118145	0.8495161
1.693288	0.884309
2.059194	0.8825737
2.323239	0.8602215
2.533122	0.8498462
2.70243	0.8322734
2.84786	0.8188604
2.973336	0.8085068
3.078241	0.7991577
3.17815	0.78777
3.261795	0.77942
3.336109	0.7690239
3.402547	0.7607124
3.466029	0.7531938
3.532219	0.7473171
3.585279	0.7449061
3.638498	0.7374566
3.68987	0.733514
3.736589	0.7312419
3.781558	0.7259207
3.818268	0.7200756
3.860174	0.7163147
3.894794	0.7132323
3.93311	0.7110048

Carta $\bar{X} - S$

La carta S monitorea la variabilidad de un proceso, es similar a la carta R, solo que ahora se calculan y grafican las desviaciones estándar para cada grupo.

Carta $\bar{X} - S$

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S} = \bar{\bar{X}} + A_1 \bar{S}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{c_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S} = \bar{\bar{X}} - A_1 \bar{S}$$

$$LSC = \left(c_2 + 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \frac{\bar{S}}{c_2} = B_4 \bar{S}$$

$$LC = \bar{S}$$

$$LSI = \left(c_2 - 3 \sqrt{1 - c_2^2 - \frac{1}{n}} \right) \frac{\bar{S}}{c_2} = B_3 \bar{S}$$

Carta $\bar{X} - S^*$

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_4} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S}^* = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}^*$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{c_4} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{S}^* = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}^*$$

$$LCS = \left(1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S}^* = B_4 \bar{S}^*$$

$$LC = \bar{S}^*$$

$$LCI = \left(1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S}^* = B_3 \bar{S}^*$$

Carta $\bar{X} - S$

Estimación de las constantes c_2 y c_4 involucradas en la obtención de los límites de control de las cartas $\bar{X} - S$, por medio de simulación.

Programa en R

```
#Estimación de c2 y c4
C <- 0; W2 <- 0; nn <- 100000;
n <- as.matrix(seq(1,25,1))
nl <- length(n); c2 <- matrix(0,nl,1); c4 <- matrix(0,nl,1)

for (j in 1:nl)
{
  C <- 0; CC <- 0;
  for(i in 1:nn)
  {
    rdatos <- rnorm(n[j],0,1); #Se simulan datos de una normal estándar
    C <- C + sd(rdatos)
    CC <- CC + ( sd(rdatos) * sqrt((n[j]-1)/n[j]) )
  }
  c4[j] <- C/nn; c2[j] <- CC/nn;
  j <- j+1
}
cbind(c2[-1],c4[-1])
```

c2	c4
0.5634149	0.796789
0.7235947	0.8862189
0.7983276	0.9218293
0.8402237	0.9393986
0.867655	0.9504685
0.8880728	0.9592283
0.9022891	0.9645876
0.9147785	0.9702691
0.9223831	0.9722771
0.9308393	0.9762725
0.9366463	0.9782952
0.9412656	0.9797003
0.9449452	0.980616
0.9489709	0.9822782
0.9526069	0.9838482
0.9541755	0.9835416
0.957595	0.9853571
0.9594323	0.985723
0.96143	0.9864064
0.9641059	0.9879146
0.9653752	0.9880931

Carta $\bar{X} - S$ para n grande

En muestras pequeñas, el rango y la desviación estándar tienen un comportamiento similar. Sin embargo, en muestras grandes la ocurrencia de un valor extremo produce un rango grande, pero tiene un efecto menor sobre la desviación estándar.

Como la distribución de S es no simétrica, se puede construir una carta S , con límites de probabilidad en lugar de los límites 3σ .

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$P\left(\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}}{n-1}} < S < \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}}{n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Entonces,

$$LCI = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}}{n-1}}$$

$$LCS = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}}{n-1}}$$



Carta $\bar{X} - S$ para n grande

Como antes tomamos como estimación de σ a \bar{S}/c_4 .

Finalmente, la carta S con límites de probabilidad queda definida como

$$LCI = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}}{n-1}}$$

$$LC = \bar{S}$$

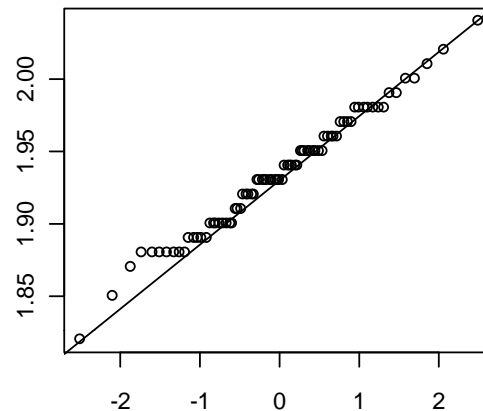
$$LCS = \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}}{n-1}}$$

Ejemplos

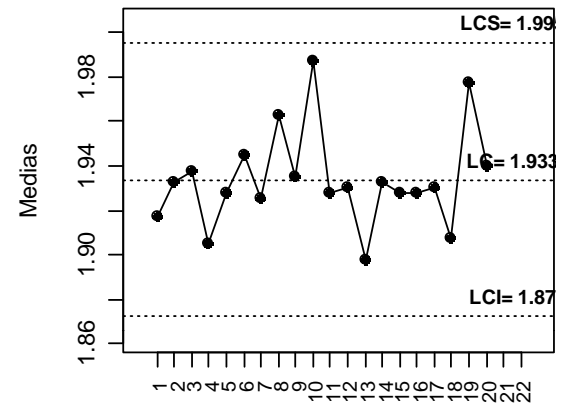
```
n=4      #tamaño de subgrupo
subgrupos=20 #cantidad de subgrupos
datos<-matrix(nrow=subgrupos,ncol=n)
```

```
datos[1,]<-c(1.88, 1.93, 1.98, 1.88)
datos[2,]<-c(1.93, 1.97, 1.89, 1.94)
datos[3,]<-c(1.92, 1.95, 1.90, 1.98)
datos[4,]<-c(1.89, 1.89, 1.90, 1.94)
datos[5,]<-c(1.95, 1.93, 1.90, 1.93)
datos[6,]<-c(2.00, 1.95, 1.94, 1.89)
datos[7,]<-c(1.95, 1.93, 1.97, 1.85)
datos[8,]<-c(1.87, 1.98, 1.96, 2.04)
datos[9,]<-c(1.96, 1.92, 1.98, 1.88)
datos[10,]<-c(1.99, 1.93, 2.01, 2.02)
datos[11,]<-c(1.93, 1.95, 1.90, 1.93)
datos[12,]<-c(1.95, 1.98, 1.89, 1.90)
datos[13,]<-c(1.88, 1.93, 1.88, 1.90)
datos[14,]<-c(1.97, 1.88, 1.92, 1.96)
datos[15,]<-c(1.91, 1.91, 1.96, 1.93)
datos[16,]<-c(1.98, 1.90, 1.92, 1.91)
datos[17,]<-c(1.93, 1.94, 1.95, 1.90)
datos[18,]<-c(1.82, 1.92, 1.95, 1.94)
datos[19,]<-c(2.00, 1.97, 1.99, 1.95)
datos[20,]<-c(1.98, 1.94, 1.96, 1.88)
```

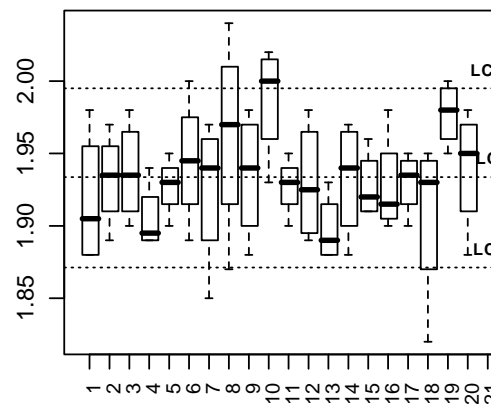
Normal Q-Q Plot



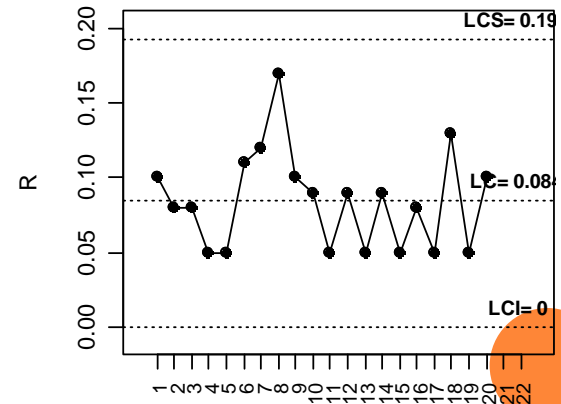
Carta de Medias



Carta de Medias



Carta de Rangos



Ejemplos

En el departamento de ensamble de motores de una planta automotriz, se tiene que una de las partes del motor, el árbol de levas, debe tener una longitud de $600\text{mm}(+/-)2\text{mm}$ para cumplir con las especificaciones de ingeniería.

Un árbol de levas es un mecanismo formado por un eje en el que se colocan distintas levas, que pueden tener distintas formas y tamaños y estar orientadas de diferente manera, para activar diferentes mecanismos a intervalos repetitivos, como por ejemplo unas válvulas, es decir constituye un temporizador mecánico cíclico.

Hay un problema crónico con la longitud del árbol de levas, ya que se sale de especificaciones, y crea un problema de reducción del rendimiento de la línea de producción y altas tasas de re trabajo y desperdicio.

El supervisor del departamento quiere correr cartas de medias y rangos para monitorear esta característica, durante un mes. Para esto recibe 20 muestras de tamaño 5 del proveedor.



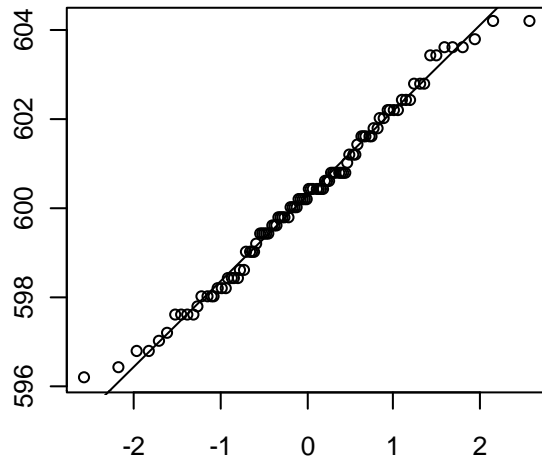
Ejemplos (Árbol de levas)

Muestras de longitudes (en mm) de árboles de levas.

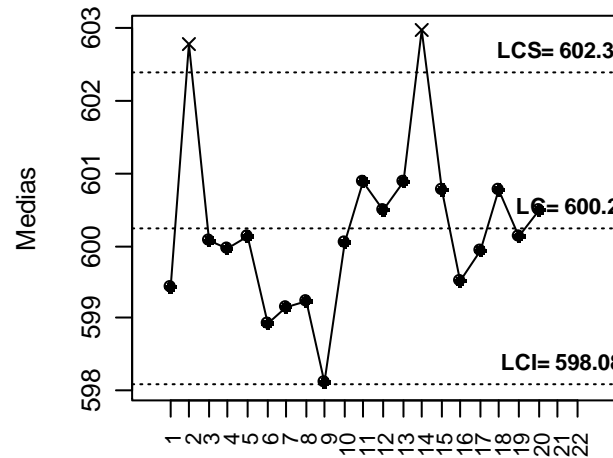
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
601.6	602.8	598.4	598.2	600.8	600.8	600.4	598.2	599.4	601.2
600.4	600.8	599.6	602.0	598.6	597.2	598.2	599.4	598.0	599.0
598.4	603.6	603.4	599.4	600.0	600.4	598.6	599.4	597.6	600.4
600.0	604.2	600.6	599.4	600.4	599.8	599.6	600.2	598.0	600.6
596.8	602.4	598.4	600.8	600.8	596.4	599.0	599.0	597.6	599.0
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
602.2	601.6	599.8	603.8	600.8	598.0	601.6	602.4	601.4	601.2
599.8	600.2	602.8	603.6	600.2	598.4	603.4	602.2	599.2	604.2
599.8	601.8	600.0	601.8	600.4	600.8	597.0	600.6	601.6	600.2
601.0	601.2	599.6	602.0	600.2	602.8	599.8	596.2	600.4	600.0
601.6	597.6	602.2	603.6	602.2	597.6	597.8	602.4	598.0	596.8

Ejemplos (Árbol de levas)

Normal Q-Q Plot



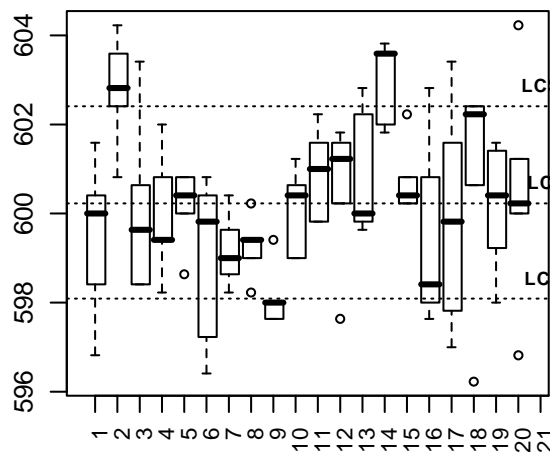
Carta de Medias



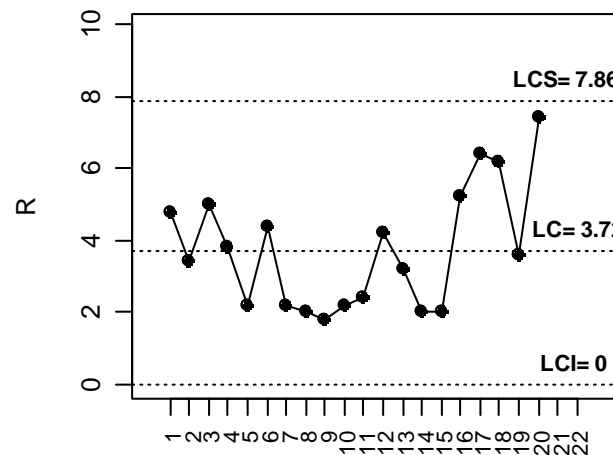
Los promedios de las medias y los rangos son 600.23 y 3.72 resp.

El promedio de las medias se encuentra dentro de las especificaciones, lo mismo ocurre con las medias excepto para las muestras 2 y 14, que están por arriba del LCS y la muestra 9, que está en el LCI.

Carta de Medias



Carta de Rangos

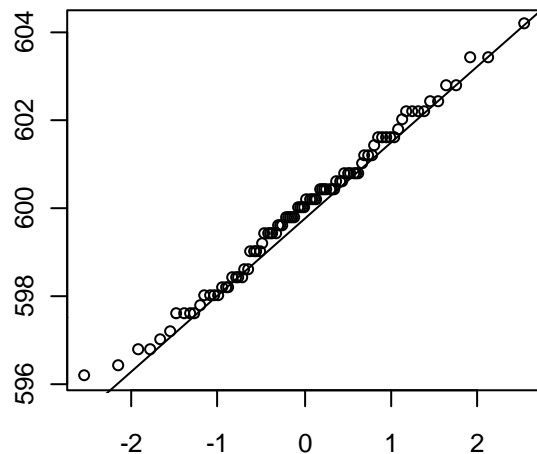


El promedio de los rangos es algo grande, considerando que la máxima variación permitida es de ± 2 mm., hay un exceso de variación en el proceso.

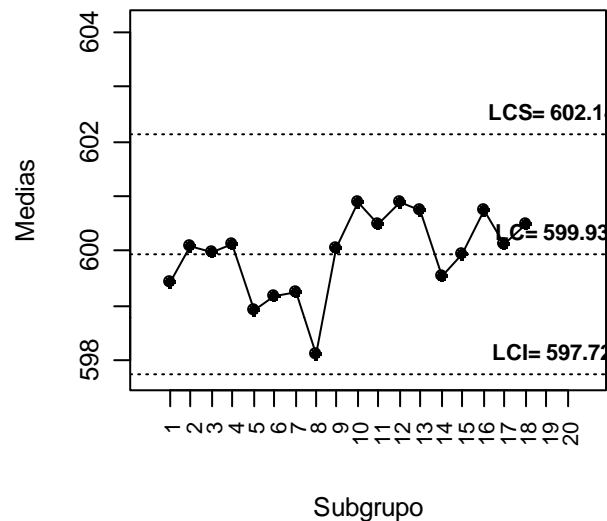
Ejemplos (Árbol de levas)

Sin subgrupos 2 y 14

Normal Q-Q Plot

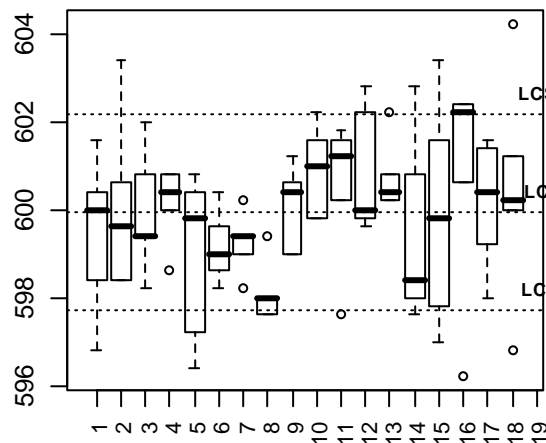


Carta de Medias

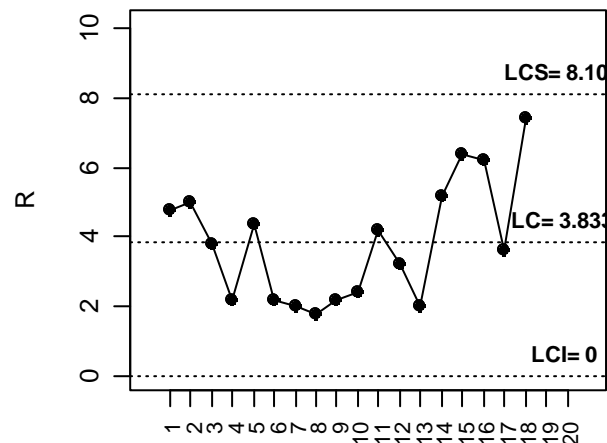


Después de una investigación con el responsable del proceso, se llegó a la identificación de causas asignables para las muestras 2 (falla de maquina) y 14 (error del operador), más no para la nueve.

Carta de Medias



Carta de Rangos



Luego se eliminaron las muestras 2 y 14, obteniendo nuevamente las cartas de medias y rangos.



Ejemplos (Árbol de levas)

Al eliminar los subgrupos 2 y 14, ya no tenemos señales de fuera de control, en ambas cartas.

Observamos ahora que el promedio de las medias ha disminuido, pero el promedio de los rangos ha aumentado. Esto se debe a las magnitudes de las observaciones eliminadas, los subgrupos tenían poca variabilidad pero valores grandes.

Como ya no hay señales de fuera de control, el proceso es estable y podemos ahora iniciar el monitoreo del proceso (Fase II), tomando periódicamente muestras de 5 arboles de levas.

Ejemplo diametros de cilindros

Chenet al. (2001) presentan un conjunto de medidas de los diámetros interiores de cilindros de un tipo de motor.

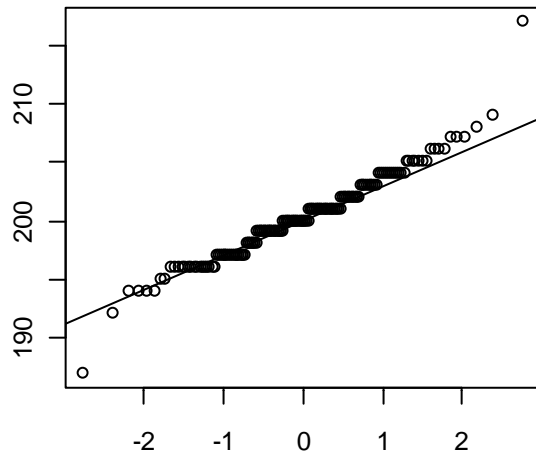
El conjunto de datos esta formado por 35 muestras de tamaño $n=5$ recolectadas cada media hora. Los datos corresponden a los tres últimos dígitos de los valores reales medidos de la forma 3.5205, 3.5202, 3.5204, y así sucesivamente.

El interés es establecer un control estadístico de este proceso mediante cartas de control.

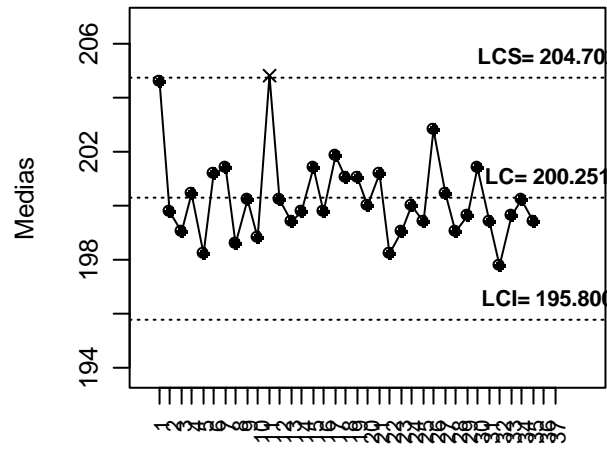
1	205	202	204	207	205	19	207	206	194	197	201
2	202	196	201	198	202	20	200	204	198	199	199
3	201	202	199	197	196	21	203	200	204	199	200
4	205	203	196	201	197	22	196	203	197	201	194
5	199	196	201	200	195	23	197	199	203	200	196
6	203	198	192	217	196	24	201	197	196	199	207
7	202	202	198	203	202	25	204	196	201	199	197
8	197	196	196	200	204	26	206	206	199	200	203
9	199	200	204	196	202	27	204	203	199	199	197
10	202	196	204	195	197	28	199	201	201	194	200
11	205	204	202	208	205	29	201	196	197	204	200
12	200	201	199	200	201	30	203	206	201	196	201
13	205	196	201	197	198	31	203	197	199	197	201
14	202	199	200	198	200	32	197	194	199	200	199
15	200	200	201	205	201	33	200	201	200	197	200
16	201	187	209	202	200	34	199	199	201	201	201
17	202	202	204	198	203	35	200	204	197	197	199
18	201	198	204	201	201						

Ejemplo diámetros de cilindros

Normal Q-Q Plot

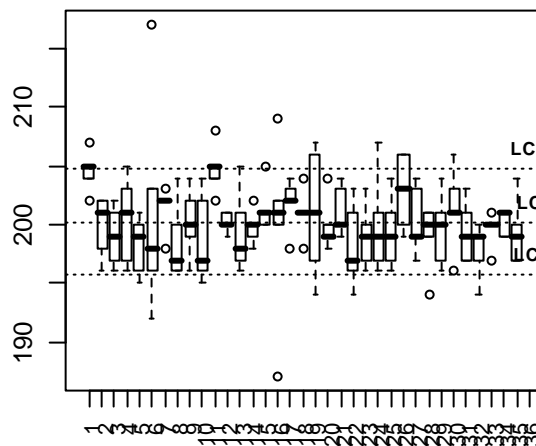


Carta de Medias

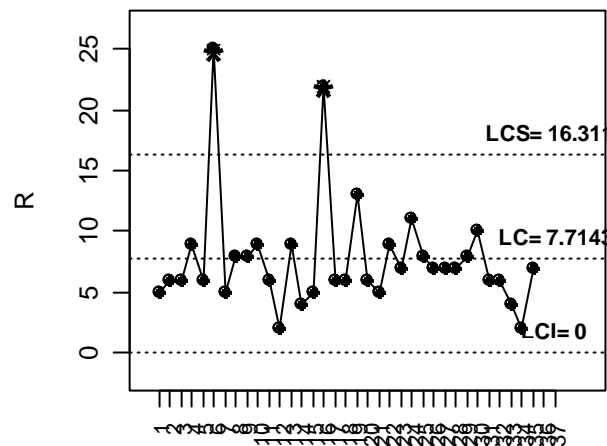


La carta de medias muestra que los subgrupos 1 y 11 exceden el límite de control superior.

Carta de Medias



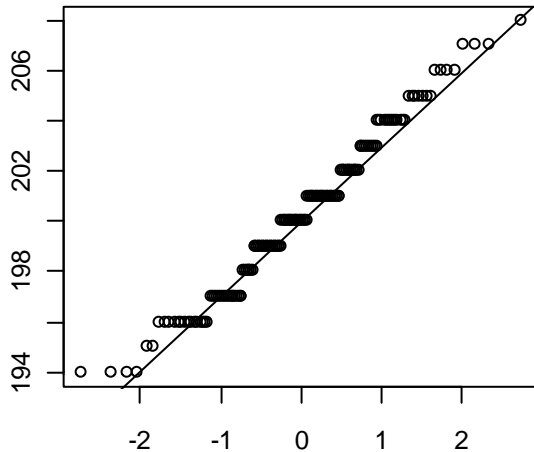
Carta de Rangos



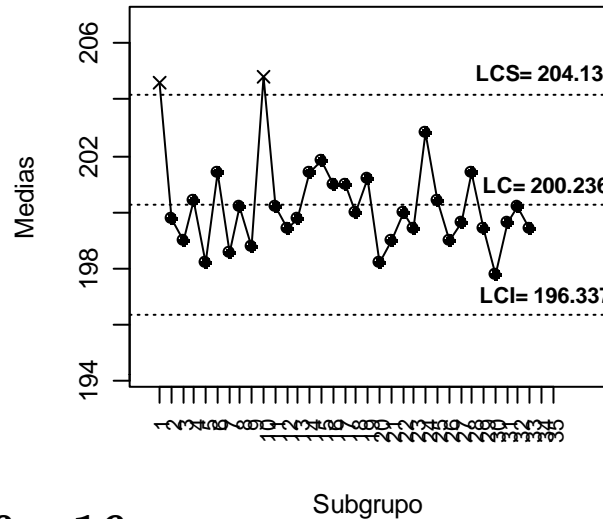
La carta de Rangos muestra que los subgrupos 6 y 16 exceden el límite de control superior.

Ejemplo diámetros de cilindros

Normal Q-Q Plot

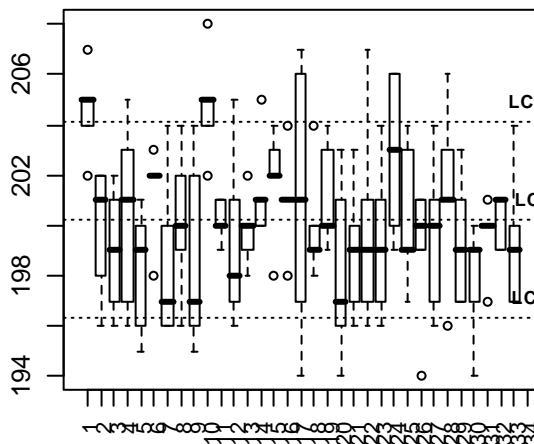


Carta de Medias

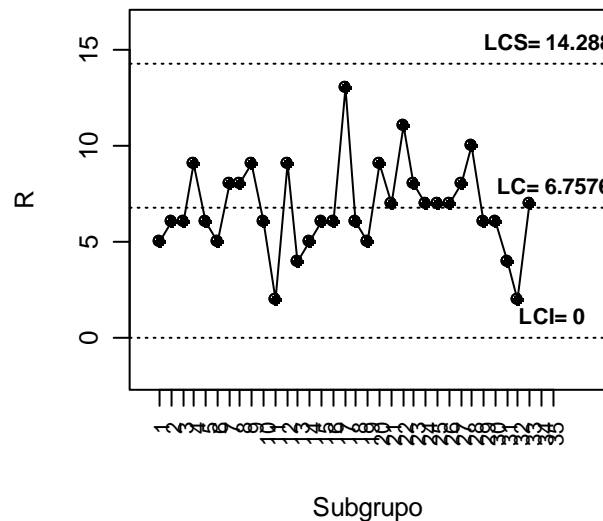


Sin 6 y 16

Carta de Medias



Carta de Rangos

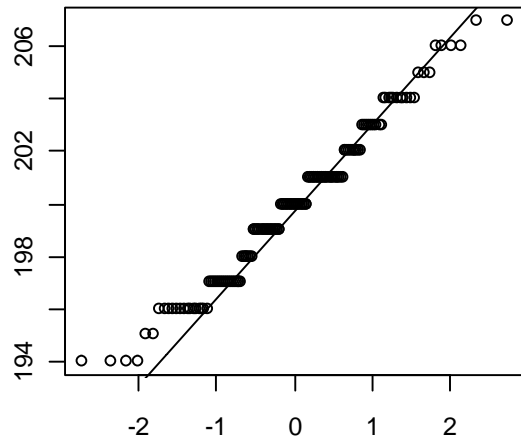


Una investigación mostró que los dos valores de rangos de los subgrupos 6 y 16 correspondían a tiempos en que el operador regular se ausentaba y dejaba un reemplazo con menos experiencia, a cargo de la producción.

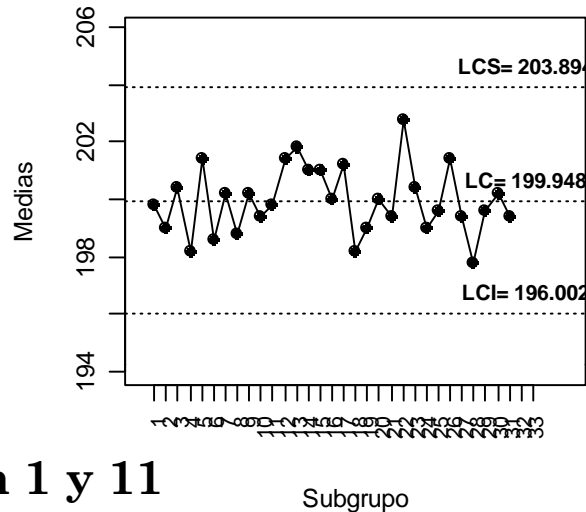
Se observa que la variabilidad ha sido controlada, así que se pasa ahora a controlar la media del proceso.

Ejemplo diámetros de cilindros

Normal Q-Q Plot

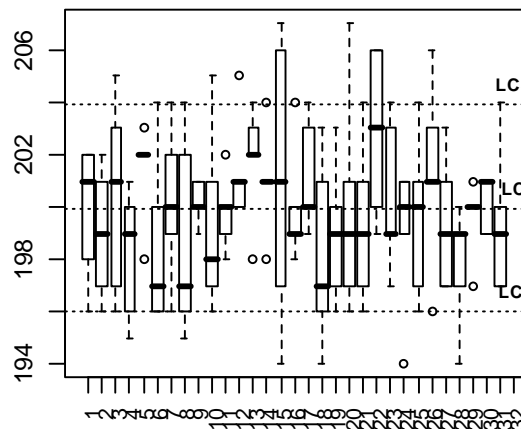


Carta de Medias

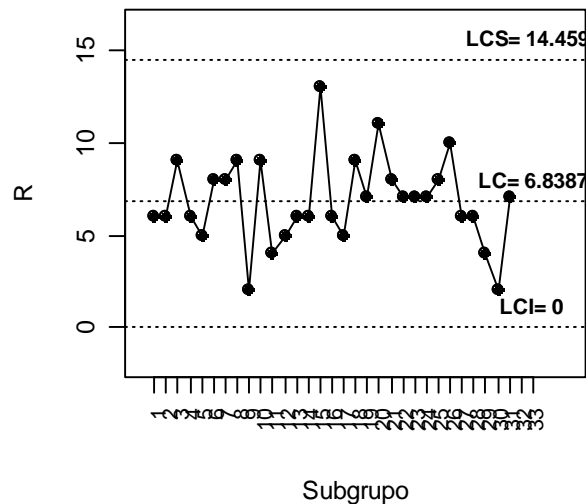


Sin 1 y 11

Carta de Medias



Carta de Rangos



El subgrupo 1 ocurre a las 8:00 a.m. y corresponde al arranque de la producción, cuando las maquinas están frías.

El subgrupo 11 ocurre a la 1:00 p.m. y corresponde al arranque de la línea de producción inmediatamente después del descanso del lunch y cuando las maquinas han sido apagadas por cambio de herramienta.

Como se encontraron causas asignables, estos puntos se eliminan y las cartas se vuelven a calcular.

Ejemplo diámetros de cilindros

Se observa en estas últimas gráficas que tanto las cartas de medias como de rangos están en control estadístico.

Se puede concluir que el proceso está bajo control respecto de su variabilidad y valor medio, finalizando el análisis de la Fase I.

Se retienen estos últimos límites de control para utilizarlos en el control del proceso en línea, es decir durante la Fase II

Subgrupos racionales

El primer paso en el establecimiento de cartas de medias y rangos, es la selección de las muestras.

Es importante que todas las muestras sean muestras racionales (o subgrupos racionales). Esto es, grupos de observaciones cuya variación, solo es atribuible a las causas comunes.

Cuando tomamos las muestras, minimizando la ocurrencia de causas especiales dentro de ellas, maximizamos la oportunidad de detectar causas especiales cuando estas ocurren entre las muestras.

Muestrear de:

- Diferentes máquinas
- Durante períodos extendidos de tiempo
- Productos combinados de diferentes fuentes

No son métodos racionales de muestreo y deben evitarse.

Subgrupos racionales

El tamaño de los subgrupos se rige por los siguientes principios:

- Los subgrupos deben de reflejar solo las causas comunes
- Los subgrupos deben asegurar la presencia de la distribución normal para las medias muestrales.
- Los subgrupos deben garantizar una alta capacidad de detección de causas especiales o asignables.
- Los subgrupos deben ser suficientemente pequeños para facilitar su medición y reducir el costo de operación.

Cuando estas consideraciones se toman en cuenta, frecuentemente, el tamaño de los subgrupo, resulta ser entre 3 y 6.

Aunque usualmente se toman 5 observaciones en cada muestra.

Subgrupos racionales

La frecuencia de muestreo, debe considerarse cuidadosamente, ya que cuando un proceso se muestrea con una frecuencia muy baja, las cartas de medias y rangos resultan ser de poca utilidad para identificar y resolver problemas.

Algunos puntos que vale la pena tomar en cuenta para determinar la frecuencia de muestreo son:

- Naturaleza general de la estabilidad del proceso.
- La frecuencia con que se presentan eventos en el proceso (cambios de turno, de materia prima, de condiciones ambientales).
- Costo del muestreo

Reglas para detección de señales de alarma

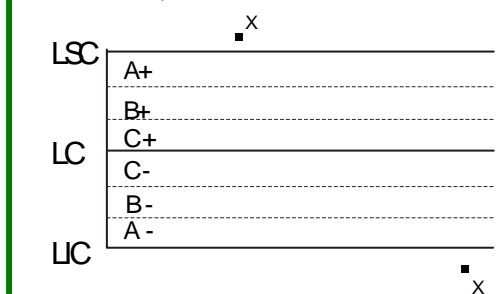
En cierto momento se propuso agregar a las cartas de control mecanismos de detección de señales fuera de control más rápidamente.

El manual de Western Electric (1956) sugirió un conjunto de reglas de decisión para detectar patrones no aleatorios en las cartas de control.

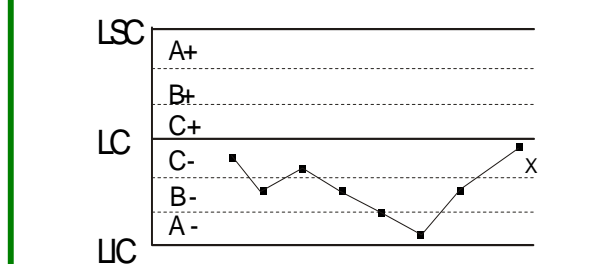
El problema con la adición de estas reglas de detección de señales fuera de control, es que aumenta bastante el número de falsas alarmas y puede ser muy complicado estar revisando frecuentemente el proceso para encontrar las causas de las señales.

Patrones de Inestabilidad de CC

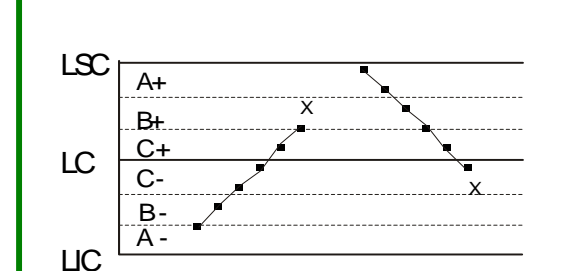
PRUEBA 1. Un punto fuera de los límites de control



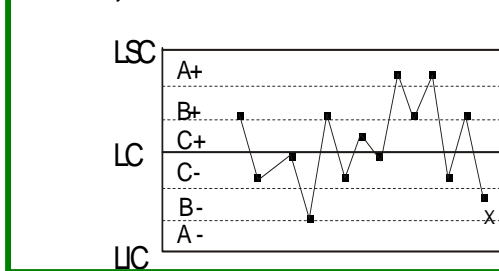
PRUEBA 2. Nueve puntos consecutivos todos por arriba o por abajo de la línea central.



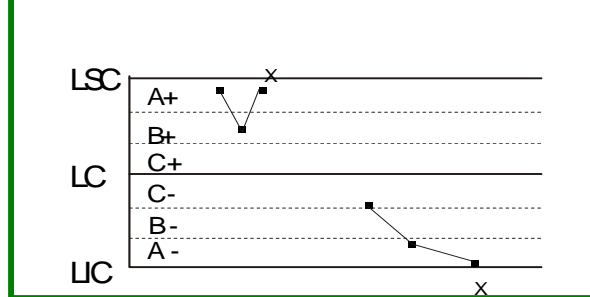
PRUEBA 3. Seis puntos consecutivos con un ascenso o descenso constante.



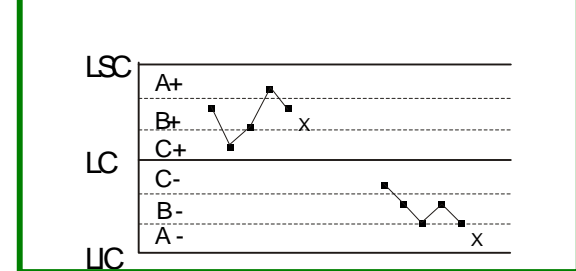
PRUEBA 4. Catorce puntos alternandose hacia abajo y arriba



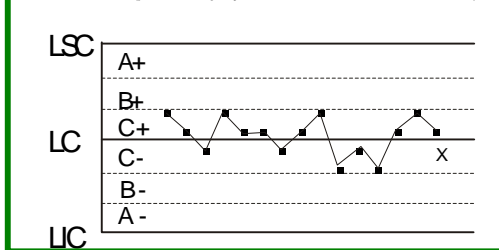
PRUEBA 5. Dos de tres puntos consecutivos en la zona A



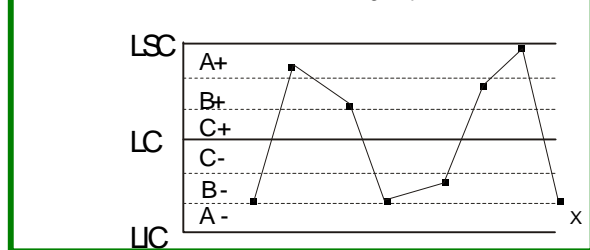
PRUEBA 6. Cuatro de cinco puntos consecutivos en la zona B o más allá de ella.



PRUEBA 7. Quince puntos consecutivos en la zona C (por abajo y arriba de la línea central)

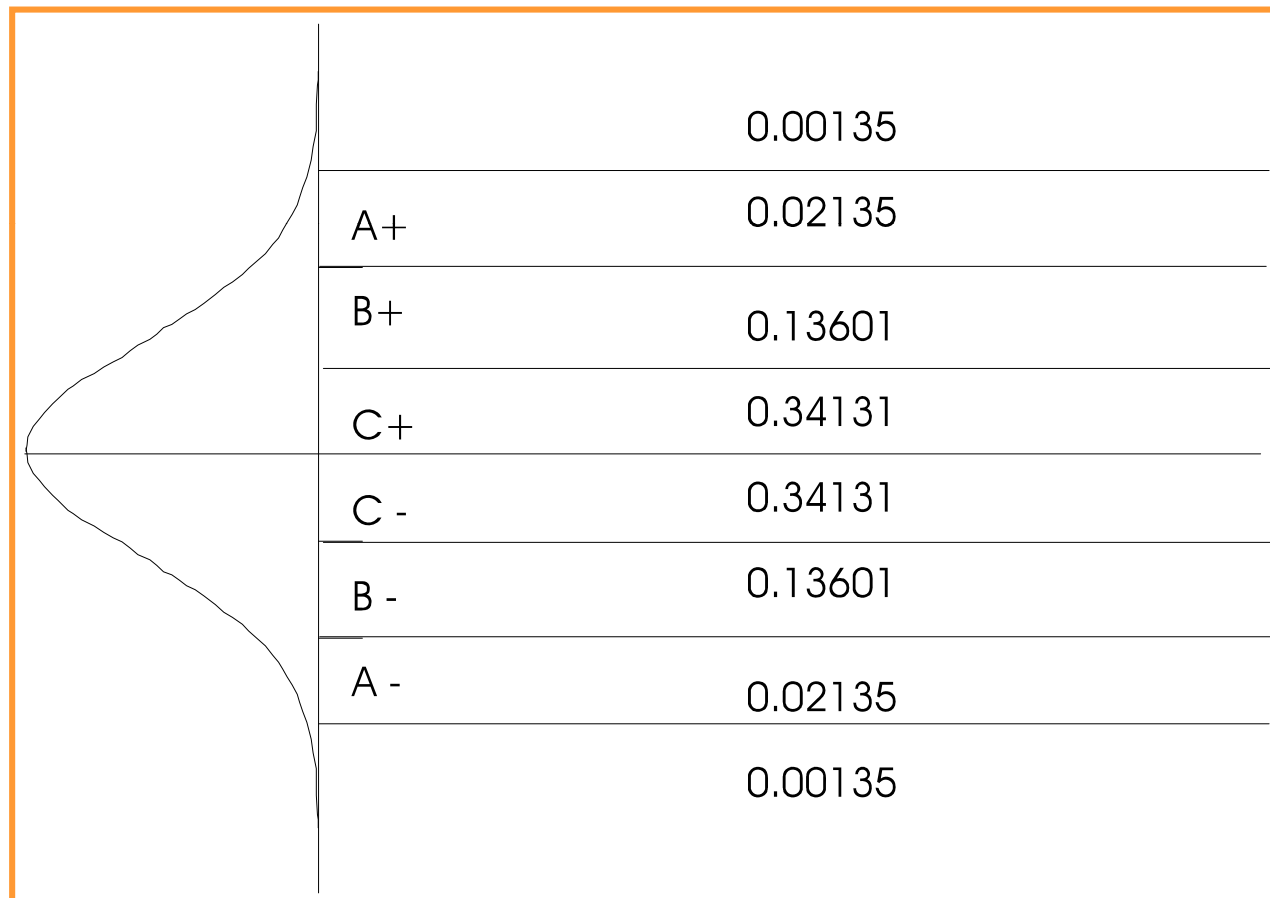


PRUEBA 8. Ocho puntos consecutivos en ambos lados de la línea central con ningún punto en la zona C.



Patrones de Inestabilidad de CC

Se muestran las zonas y sus probabilidades normales de que un punto caiga en cada una de ellas.



Patrones de Inestabilidad de CC

Las probabilidades de que estas pruebas nos den una falsa alarma cuando los puntos son variables aleatorias normales se dan a continuación.

Las probabilidades correspondientes a estos Gráficos que son los siguientes .

Prueba 1:	Probabilidad = 0.0027
Prueba 2:	Probabilidad = $2(1/2)^9 = 0.00391$
Prueba 3:	Probabilidad = $2/6! = 0.00277$
Prueba 4:	Probabilidad = 0.0046
Prueba 5:	Probabilidad = 0.00304
Prueba 6:	Probabilidad = 0.00553
Prueba 7:	Probabilidad = $(0.68268)^{15} = 0.00326$
Prueba 8:	Probabilidad = $(0.31732)^8 = 0.000103$

ARL combinado

La consideración de un número grande de reglas de detección de fuera de control, aumenta notablemente el número esperado de falsas alarmas.

Suponiendo que las reglas actúan de forma independiente, y considerando

$1 - \alpha$ = Probabilidad de no salir de control

$1 - \alpha_i$ = Probabilidad de no salir de control , por la regla $i=1,2,\dots,n$.

Tenemos que,

$$1 - \alpha = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i)$$

$$\alpha = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i)$$

ARL combinado

Sustituyendo las probabilidades de salir de control para las diferentes reglas tenemos que la probabilidad de salir, de acuerdo a una o mas de las reglas es,

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - (1 - .0027)(1 - .00391)(1 - .00277)(1 - .00461) \\ &\quad (1 - .00304)(1 - .00553)(1 - .00326)(1 - .0001) \\ &= .02564\end{aligned}$$

Por lo que la longitud promedio de corrida es,

$$ARL = 1 / \alpha = 1 / .02564 = 39 .01$$

Este es un valor muy pequeño, por lo tanto si se consideran reglas de fuera de control adicionales a la de Shewhart, habría que seleccionar un número reducido, que tenga sentido.

Cartas de control para observaciones individuales

Se usan cuando los datos no se pueden agrupar de una manera natural. Esto ocurre cuando la inspección o medición de las unidades es muy costosa o demanda mucho tiempo. También utilizamos estas cartas cuando los procesos son de tipo continuo.

Ejemplos:

- Procesos químicos
- Industria de bebidas alcohólicas, en las que debe pasar desde 1 hasta más de 100 horas para tener resultados de los procesos de fermentación y destilación.
- Mediciones de rendimiento, desperdicio, de consumo de agua, energía eléctrica, etc.

Cartas de control tipo Shewhart para observaciones individuales

En la carta de observaciones individuales, se grafica directamente la observación, que suponemos tiene distribución normal, con media μ y desviación típica σ . Los límites de control de esta carta son de la forma:

$$\mu \pm 3\sigma$$

En este caso estimamos la desviación utilizando los rangos móviles de orden 2, que se forman tomando parejas de observaciones sucesivas y calculando su rango, como se muestra a continuación,

X_i	Rango
22	
25	3
19	6
21	2

Cartas de control tipo Shewhart para observaciones individuales y de Promedios Móviles

La desviación típica se estima como,

$$\sigma_x = \bar{R} / d_2 = \bar{R} / 1.128$$

La constante d_2 ya es conocida, solo que aquí consideramos que es función del tamaño muestral $n=2$.

Además de la carta de observaciones individuales, podemos construir también la carta de medias móviles para monitorear la variación del proceso. Los límites de ambas cartas son los siguientes:

Límites de la carta de observaciones individuales

$$LC = \bar{X}$$

$$LCI = \bar{X} - 3\bar{R} / 1.128$$

$$LCS = \bar{X} + 3\bar{R} / 1.128$$

Límites de la carta de medias móviles

$$LC = \bar{R}$$

$$LCI = 0$$

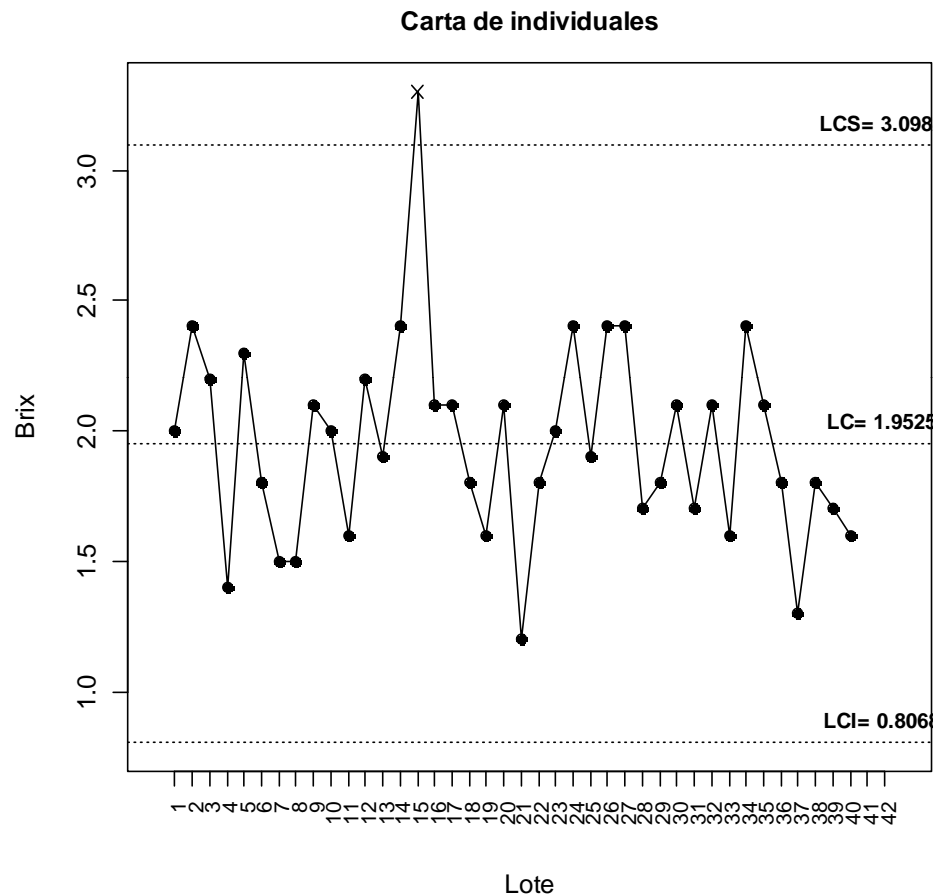
$$LCS = 3.267 \bar{R}$$

Cartas para observaciones individuales

Ejemplo. En la producción de tequila se miden varias características de calidad a lo largo del proceso, ya sea por regulaciones oficiales o por criterios propios de cada empresa. Una de las características es el grado brix residual después de la molienda (cantidad de azúcar que queda en el gabazo del agave), que mide . Esta es una variable del tipo entre más pequeña mejor, y el valor máximo tolerado que se tiene en una empresa en particular es $ES=3.5\%$. Después de mole cada lote se determina el grado brix residual, por lo que se considera un proceso lento, que será más apropiado analizar con una carta de individuales. A continuación se dan los últimos 40 lotes molidos consecutivos más recientes

2	2.4	2.2	1.4	2.3	1.8	1.5	1.5
2.1	2	1.6	2.2	1.9	2.4	3.3	2.1
2.1	1.8	1.6	2.1	1.2	1.8	2	2.4
1.9	2.4	2.4	1.7	1.8	2.1	1.7	2.1
1.6	2.4	2.1	1.8	1.3	1.8	1.7	1.6

Cartas para observaciones individuales



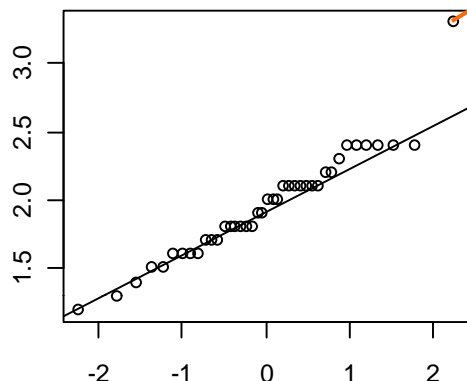
En la carta observamos que no hay tendencias, ni ningún patrón especial, salvo un punto fuera del LCS, que corresponde al lote 15. Al investigar, se encontró que durante la molienda de ese lote ocurrió algo especial, se desajusto el molino.

Note que el LCS esta dentro de $ES=3.5$ por lo que si este proceso se contrala (erróneamente) con la especificación superior como LCS, el lote 15 no caería fuera y por lo tanto no se detectaría el desajuste del molino.

Lo anterior y otros cambios y desajuste podrían llevar a un deterioro importante de la eficacia del proceso y la reacción sería demasiado tarde.

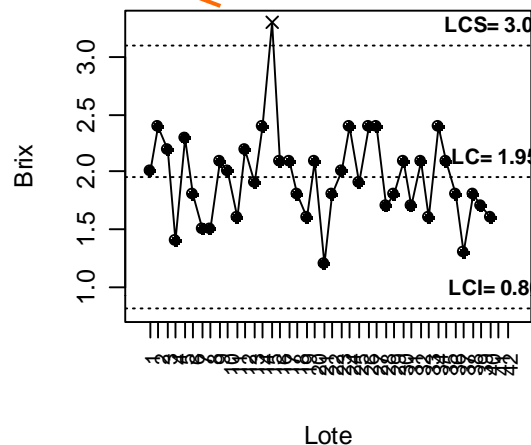
Cartas para observaciones individuales y promedios móviles

Normal Q-Q Plot

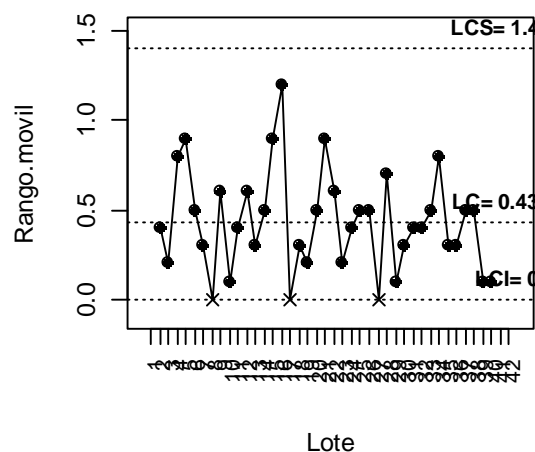


Lote 15

Carta de individuales



Carta de Rangos móviles

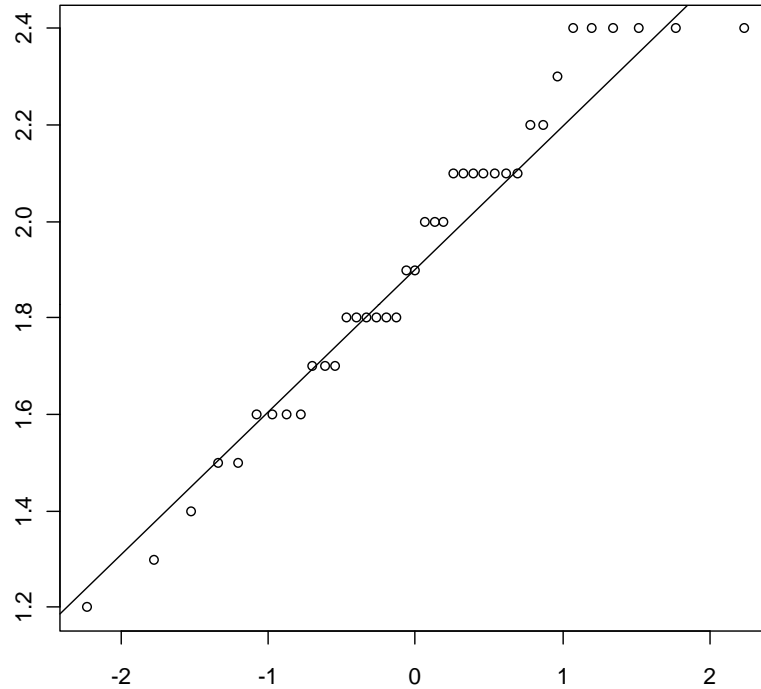


Lote	Rango móvil	Lote	Rango Móvil
1	NA	21	0.9
2	0.4	22	0.6
3	0.2	23	0.2
4	0.8	24	0.4
5	0.9	25	0.5
6	0.5	26	0.5
7	0.3	27	0.0
8	0.0	28	0.7
9	0.6	29	0.1
10	0.1	30	0.3
11	0.4	31	0.4
12	0.6	32	0.4
13	0.3	33	0.5
14	0.5	34	0.8
15	0.9	35	0.3
16	1.2	36	0.3
17	0.0	37	0.5
18	0.3	3	0.5
19	0.2	19	0.1
20	0.5	40	0.1

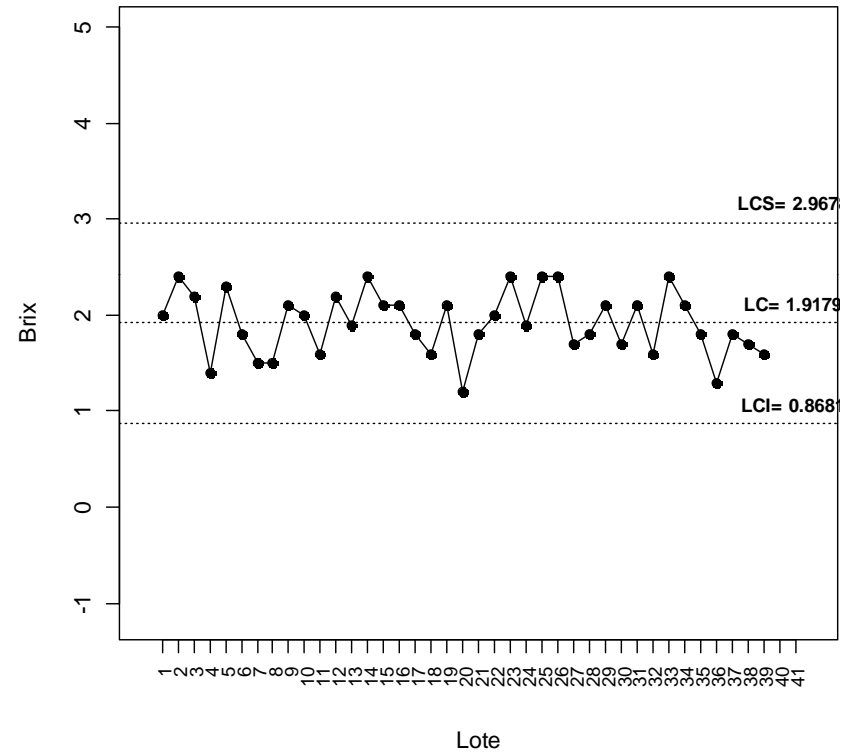
0.1

Cartas para observaciones individuales

Normal Q-Q Plot



Carta de individuales



Cartas de control para atributos

Existen muchas características de calidad que no son medidas con instrumento de medición en una escala continua, o al menos en una escala numérica.

Por ejemplo puede ser más conveniente contar el número de no conformes en una muestra dada. En este caso la unidad de referencia puede ser la unidad producto, como el número de impurezas en un vaso de vidrio, o una unidad o cantidad física, como el número de impurezas por dm cuadrado.

Cuando se monitorean procesos que producen este tipo de datos, se utilizan cartas de control para atributos.

Carta p (Proporción de no conformes)

Una carta p muestra las variaciones en la proyección de unidades no conformes de una producción. Este caso surge cuando en cada tiempo se selecciona una muestra de n artículos y se cuenta el número de ellos no conformes (defectuosos). Se supone independencia de estos artículos, con el objeto de usar la distribución binomial, o como ocurre frecuentemente, su aproximación a la distribución normal.

Si p conocido los límites de control 3σ son:
$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Como p no se conoce usualmente, se estima de un conjunto de datos históricos, por ejemplo, sean m muestras, cada una de tamaño n , es decir, en cada tiempo se seleccionan n artículos para inspección.

Sea $X_i, i=1,2,\dots,m$, el número de artículos defectuosos en cada muestra. El estimador usual de p es:

$$\bar{p} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^m X_i$$

Carta p (Proporción de no conformes)

Los límites de control de la carta p son:

$$LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$LC = \bar{p}$$

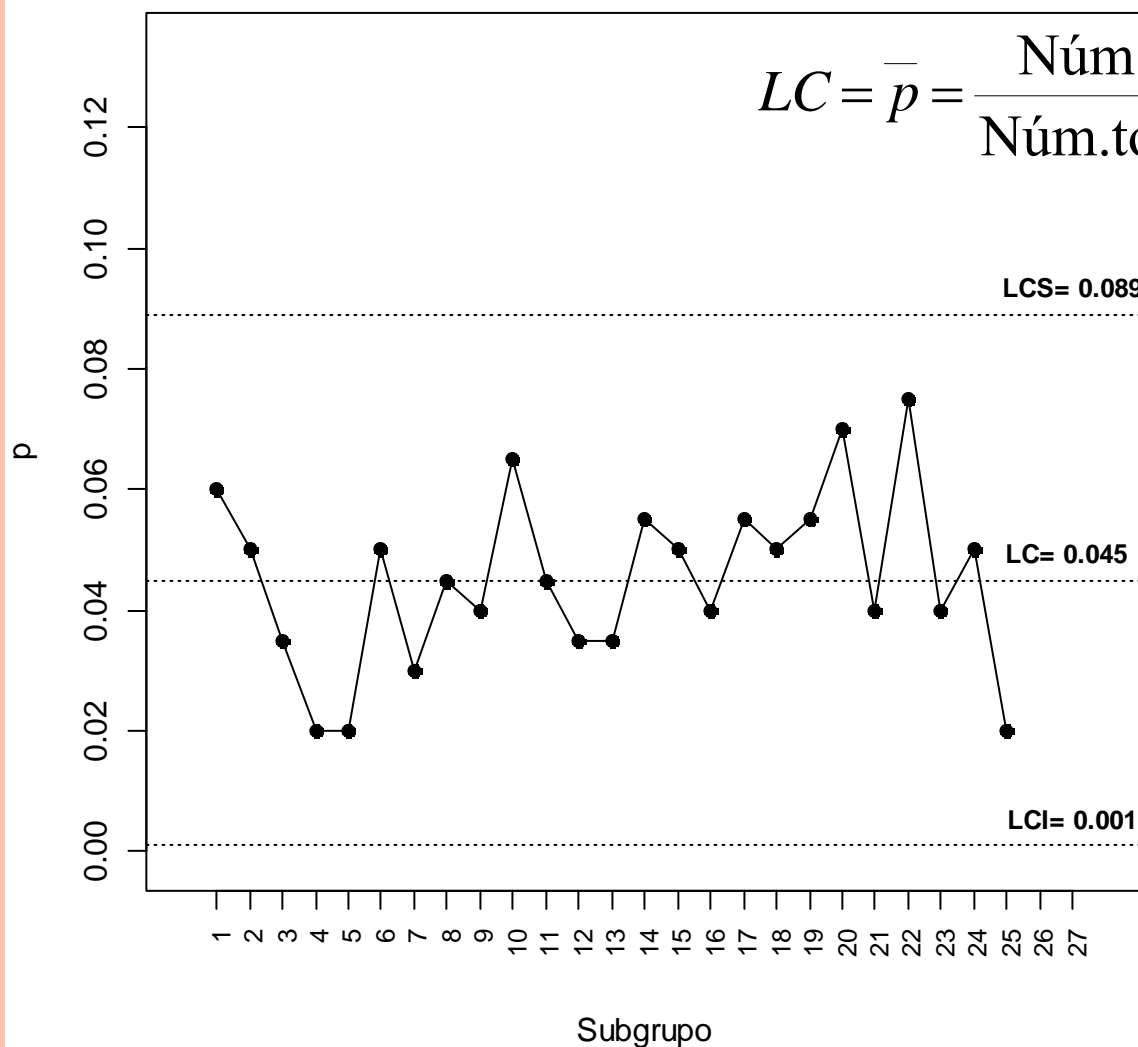
$$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Los valores de X_i/n , $i=1,2,\dots,m$, se grafican en la carta. Si uno o varios puntos quedan fuera de los LC se inicia la búsqueda de las causas especiales, los puntos son eliminados y los límites de control recalculados. Una vez que el proceso esta controlado los límites de control se aplican prospectivamente a muestras futuras.

En muchas situaciones no se puede garantizar el mismo valor de n en cada tiempo, por ejemplo, una muestra a seleccionar podría ser la producción diaria de una fábrica, la cual puede variar día a día.

Ejemplo Carta p con n constante

Carta p



$$LC = \bar{p} = \frac{\text{Núm. total de artículos defectuosos}}{\text{Núm. total de artículos inspeccionados}}$$

Durante 25 días se inspeccionaron 200 artículos y se contaron el número de defectuosos por día.

La gráfica muestra que todos los puntos están bajo control. Por lo tanto los límites se usarán en el futuro inmediato para controlar la fracción de artículos defectuosos, siempre que se mantengan las mismas condiciones bajo las cuales se tomaron las 25 muestras.

Carta p con n variable

Si n no es constante, los límites de control pueden calcularse como:

$$LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

$$LC = \bar{p}$$

$$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

Donde n_i es el tamaño de la i -ésima muestra. Esto significa que la carta mostrará límites de control variables.

Por cuestiones de simplicidad se sugiere tomar el valor de n como:

$$\bar{n} = \frac{\text{Total de Inspecciones}}{\text{Total de subgrupos}}$$

Ejemplo Carta p con n variable

En una empresa del ramo alimenticio, mediante ciertas máquinas se empaquetan salchichas en sobres o paquetes. La forma de evaluar si el subproceso de empaquetado se hizo de manera adecuada es haciendo una inspección visual de los paquetes para determinar que se satisfagan diferentes atributos de calidad, por ejemplo,

- Que la cantidad de salchichas dentro del sobre sea la correcta
- Que dentro del sobre no quede aire (empaquete al vacío)

Se han tenido problemas en este último atributo , por lo que hay un operador que a la vez que está al pendiente de la máquina de empacadora, hace la inspección para separar los paquetes con aire.

El atributo de falta de vacío es importante porque reduce la vida de anaquel del producto.

Ejemplo Carta p con n variable

Subgrupo	n_i	d_i	Subgrupo	n_i	d_i
[1,]	595	15	[21,]	594	7
[2,]	593	5	[22,]	606	5
[3,]	607	8	[23,]	601	7
[4,]	596	10	[24,]	598	4
[5,]	602	6	[25,]	599	2
[6,]	599	5	[26,]	590	3
[7,]	600	5	[27,]	588	5
[8,]	590	7	[28,]	597	3
[9,]	599	2	[29,]	604	6
[10,]	601	4	[30,]	605	5
[11,]	598	9	[31,]	597	7
[12,]	600	17	[32,]	603	9
[13,]	597	4	[33,]	96	5
[14,]	594	5	[34,]	597	3
[15,]	595	3	[35,]	607	8
[16,]	597	10	[36,]	596	15
[17,]	599	7	[37,]	598	4
[18,]	596	5	[38,]	600	6
[19,]	607	4	[39,]	608	8
[20,]	601	9	[40,]	592	5

d_i =paquetes con aire

$$\bar{p} = \frac{\text{Total de defectuosos}}{\text{Total de inspeccionados}}$$

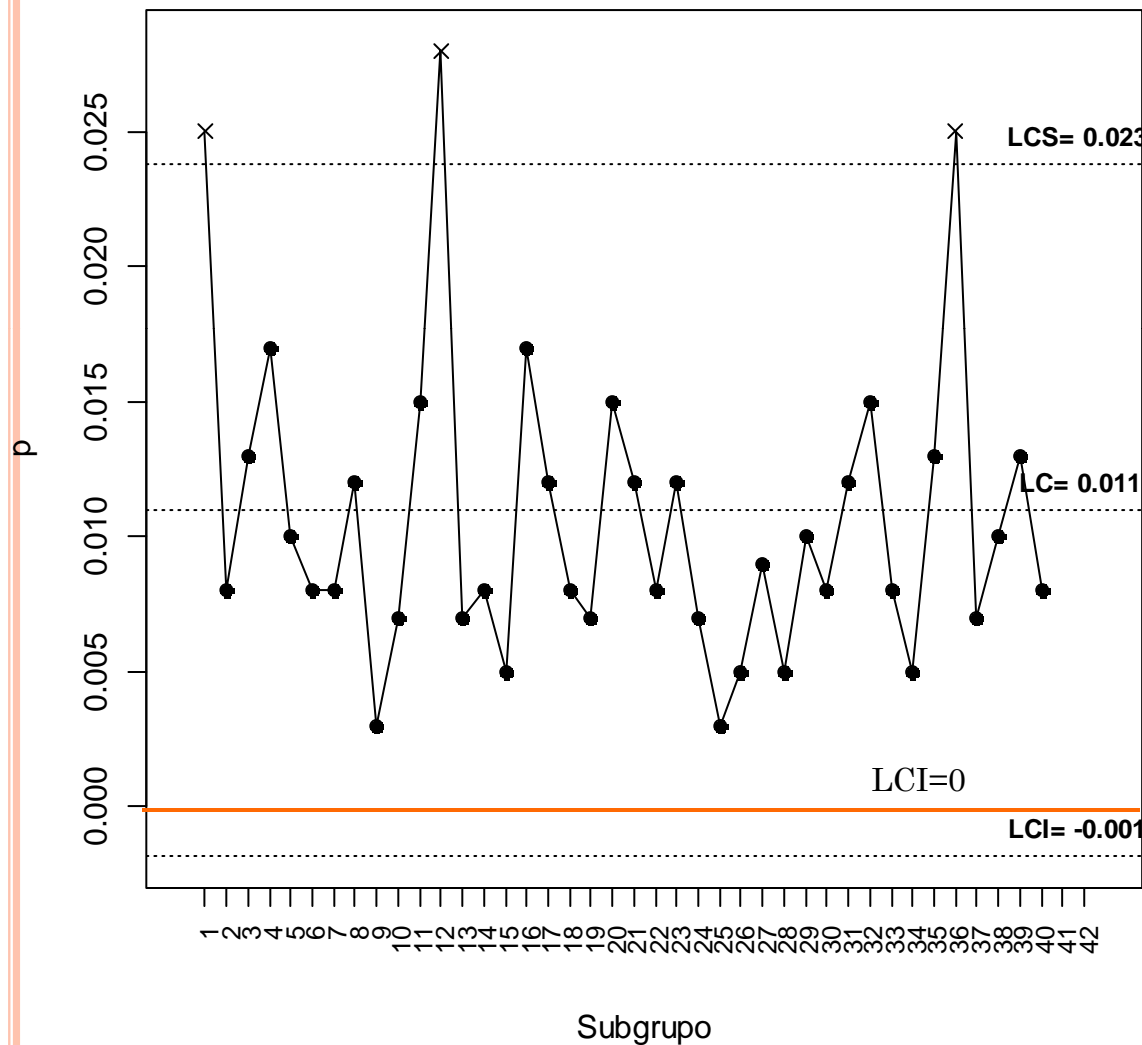
$$= \frac{257}{23942} = 0.011$$

$$\bar{n} = \frac{\text{Total de inspeccionados}}{\text{Total de subgrupos}}$$

$$= \frac{23942}{40} = 598.6$$

Ejemplo Carta p con n variable

Carta p

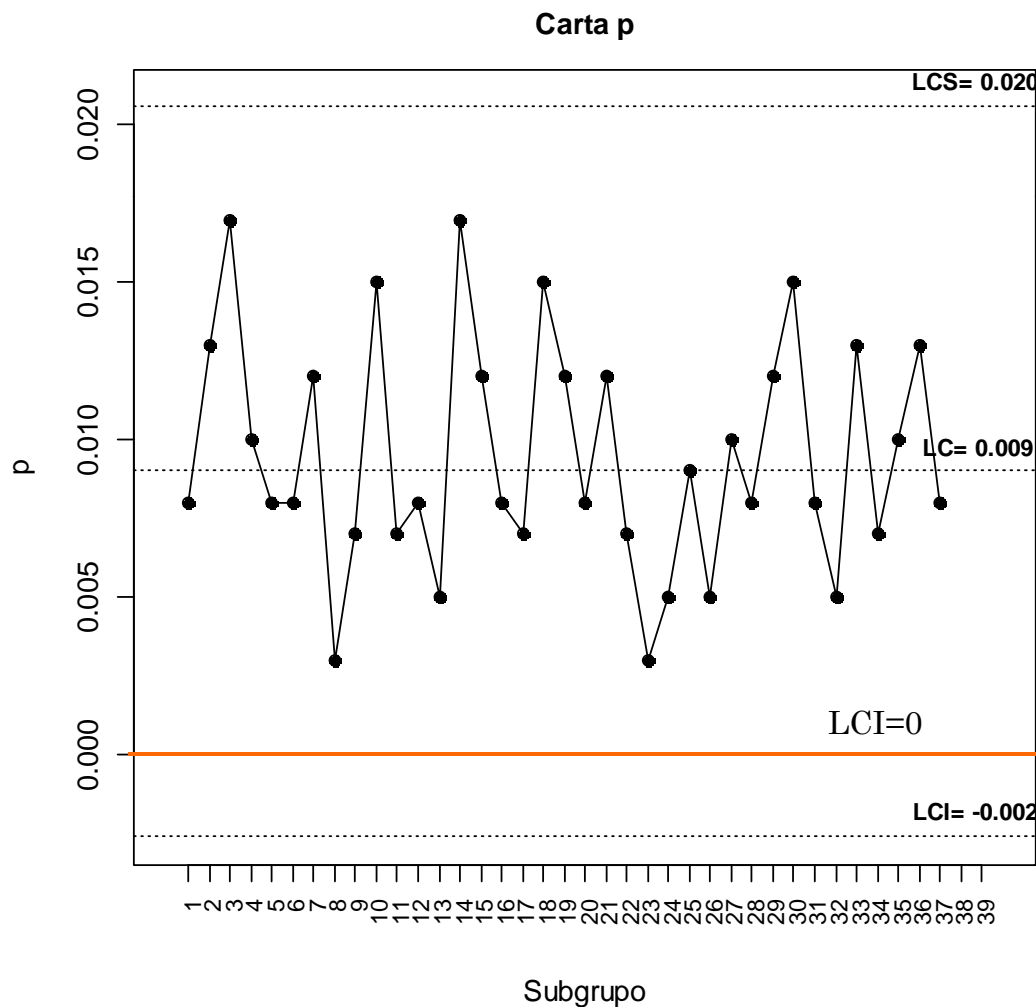


La carta muestra que el proceso de empaquetado no fue estable, ya que las proporciones de los subgrupos 1, 12 y 36 están por arriba del LCS.

Se desprende que durante el empaquetado de estos subgrupos el proceso funcionó en presencia de causas especiales, lo que ocasionó que las proporciones de defectuosos sean muy grandes.

Ejemplo Carta p con n variable

Al investigar lo ocurrido en los subgrupos 1, 12 y 36 se encontró que durante esas horas se había cambiado el rollos de la película plástica de empaque, ya sea porque se terminó o porque se empezó a empaquetar otra presentación.



$$\bar{p} = 0.0094$$

$$\bar{n} = 598.68$$

Interpretación: se espera que de cada 598 paquetes aproximadamente la proporción de paquetes con problemas de vacío varíe entre 0 y 0.021.

Carta np (número de defectuosos)

En ocasiones cuando el tamaño del subgrupo o muestra es constante, es más conveniente usar la carta np , en la que se grafican el número de defectuosos por subgrupo d_i , en lugar de las proporciones.

Los límites de control para la carta np , son:

$$LCS = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

$$LC = n\bar{p}$$

$$LCI = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

Ejercicio: Realice la carta np para los datos del ejemplo en que durante 25 días se inspeccionaron 200 artículos y se contaron el número de defectuosos por día. Modifique el programa correspondiente.

Carta c (Número de defectos)

En muchos casos es más conveniente trabajar con el número de defectos por unidad, en lugar del porcentaje de unidades defectuosas. La carta c analiza la variabilidad del número de defectos por subgrupo.

Los límites de control se obtienen suponiendo que el estadístico c_i , sigue una distribución de Poisson, donde c_i es el número de defectos o eventos en el i -ésimo subgrupo o muestra.

Los estimadores de la media y la varianza de este estadísticos son:

$$\mu_{c_i} = \bar{c} = \frac{\text{Total de defectuosos}}{\text{Total de subgrupos}}$$

$$\sigma_{c_i}^2 = \bar{c}$$

Y los límites de control:

$$LCS = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$

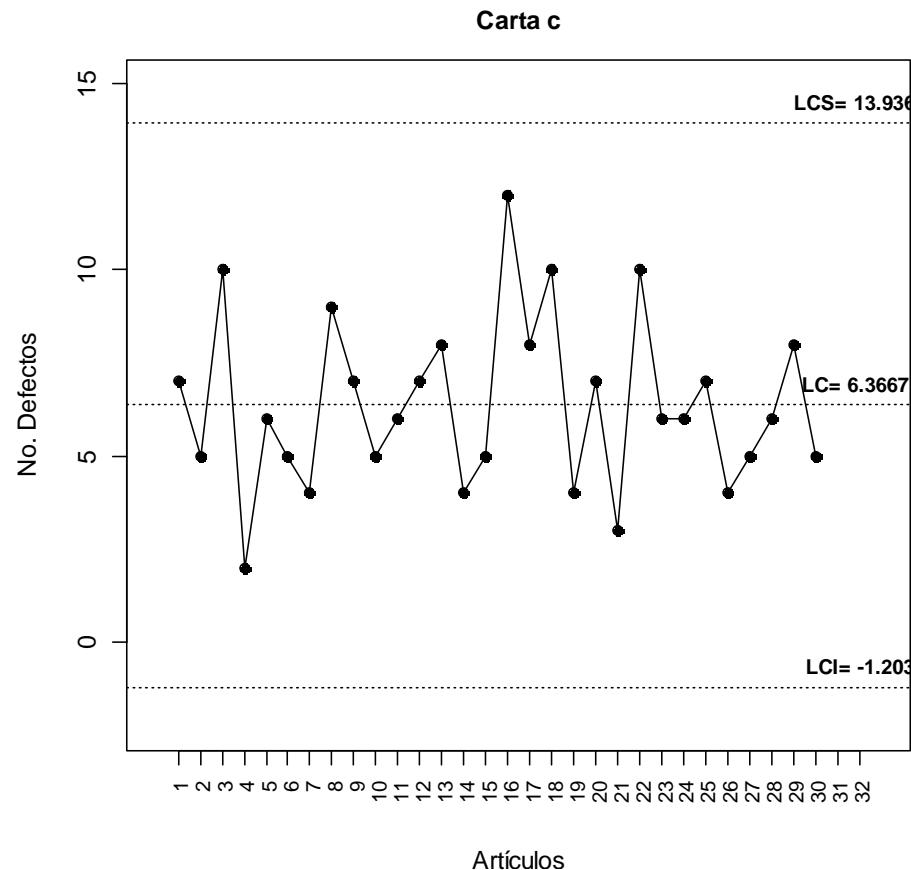
$$LC = \bar{c}$$

$$LCI = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

Ejemplo Carta c

En una fabrica de muebles se inspecciona con detalle el acabado de las mesas cuando salen del departamento de laca. La cantidad de defectos que son encontrados en cada mesa son registrados con el fin de conocer y mejorar el proceso.

Se muestran los defectos en las últimas 30 mesas, es claro que estamos ante una variable a ser analizada por carta c, ya que una misma mesa puede tener varios defectos y de diferentes tipos.



Art.	ci
1	7
2	5
3	10
4	2
5	6
6	5
7	4
8	9
9	7
10	5
11	6
12	7
13	8
14	4
15	5
16	12
17	8
18	10
19	4
20	7
21	3
22	10
23	6
24	6
25	7
26	4
27	5
28	6
29	8
30	5

Carta u

Cuando el número de artículos inspeccionados en una unidad muestral n varía de unidad a unidad, es mejor graficar la estadística

$$u = \frac{c}{n}$$

Que representa el número de artículos defectuosos por unidad o artículo.

Para esta carta el LC es \bar{u} , el número promedio de defectos por artículo. Y como,

$$Var(u) = Var\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(c)$$

La varianza de u se estima por: $\frac{1}{n^2} Var(c) = \frac{\bar{c}/n}{n} = \frac{\bar{u}}{n}$

Los límites de control quedan como: $LCS = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$

$$LC = \bar{u}$$

$$LCI = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

Ejemplo Carta u

En una fábrica se ensamblan artículos electrónicos y al final del proceso se hace una inspección por muestreo para detectar defectos relativamente menores, y así retroalimentar el proceso para enfocar bien las acciones de mejora. En particular en la tabla siguiente se presentan el número de defectos observados en muestreos realizados sobre 24 lotes consecutivos de piezas electrónicas. El número de piezas inspeccionadas en cada lote es variable, por lo que no es apropiado analizar el número de defectos por muestra, c_i , mediante una carta c , es mejor analizar el número promedio de defecto por pieza, u_i , mediante la carta u .

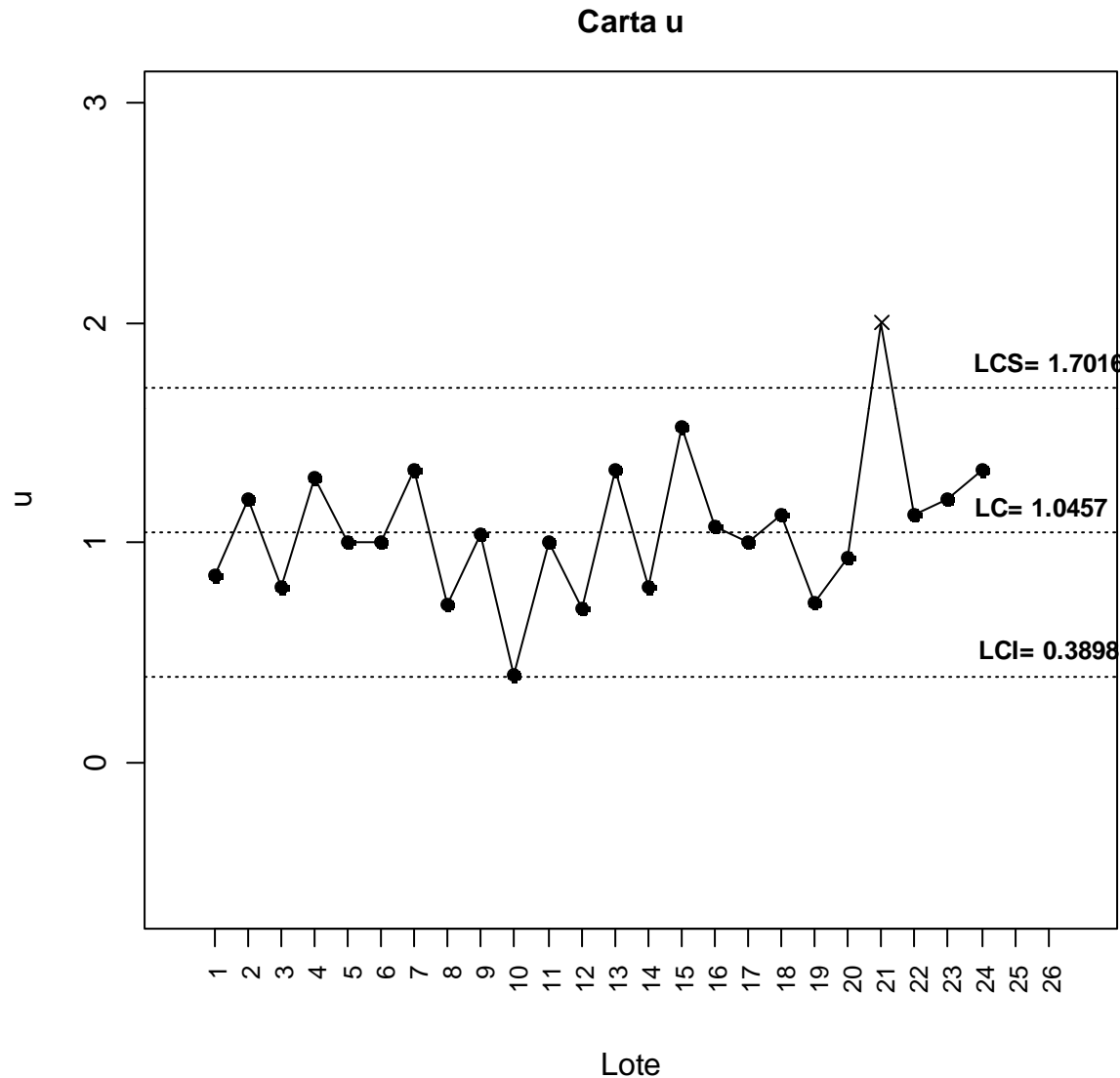
Para calcular los límites de control de la carta tenemos que:

$$\bar{u} = \frac{549}{525} = 1.04$$

$$\bar{n} = 21.875$$

	n	c
[1,]	20	17
[2,]	20	24
[3,]	20	16
[4,]	20	26
[5,]	15	15
[6,]	15	15
[7,]	15	20
[8,]	25	18
[9,]	25	26
[10,]	25	10
[11,]	25	25
[12,]	30	21
[13,]	30	40
[14,]	30	24
[15,]	30	46
[16,]	30	32
[17,]	30	30
[18,]	30	34
[19,]	15	11
[20,]	15	14
[21,]	15	30
[22,]	15	17
[23,]	15	18
[24,]	15	20

Ejemplo Carta u

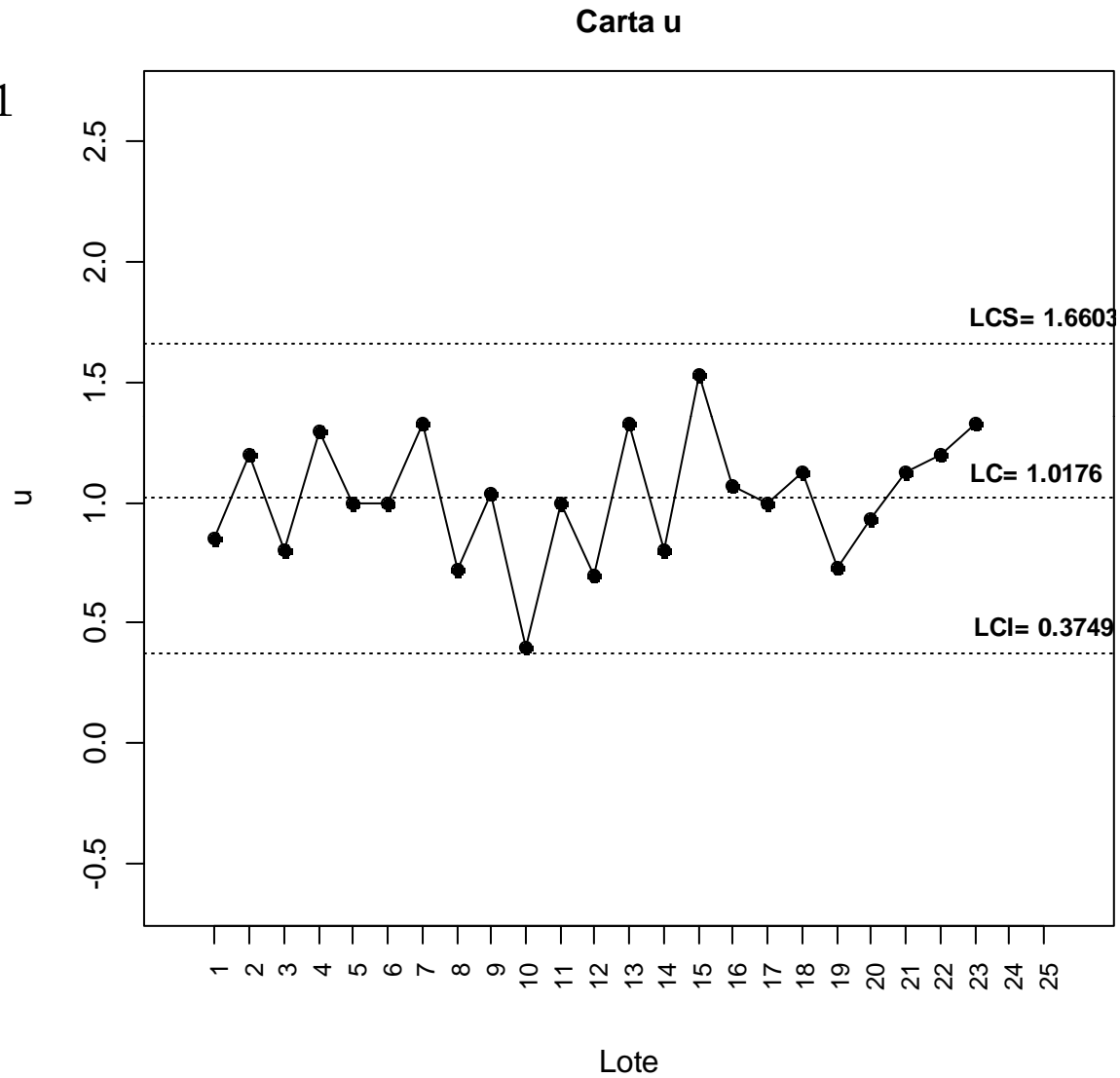


Se observa que el proceso no funciona de manera estable, ya que en la muestra del lote 21 el número promedio de defectos por pieza se sale del límite de control superior.

En la fabricación de tal lote ocurrió un evento especial.

Ejemplo Carta u

Sin lote 21



FIN

GRACIAS.

