

Skriptum zur Vorlesungsveranstaltung

Theoretische Elektrotechnik II

(Wintersemester 2017/2018)

Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik
Prof. Dr. Markus Clemens
Bergische Universität Wuppertal

Wuppertal 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Zeitlich veränderliche Felder	3
1.1	Ebene Wellen	3
1.1.1	Allgemeine ebene Welle	4
1.1.2	Energietransport bei ebenen Wellen	7
1.1.3	Ebene Welle - Harmonische ebene Welle	9
1.1.4	Ebene harmonische Welle in leitendem Medium	10
1.1.4.1	Ebene Welle im freien Raum	15
1.2	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	18
1.2.1	Ebene Wellen an Trennflächen	18
1.2.1.1	Paralleler Fall - p -Fall	22
1.2.1.2	Zusätzliche Randbedingungen	24
1.2.2	Reflexion am Halbraum	24
1.2.3	Totalreflexion	27
1.3	Rechteckhohlleiter	31
1.3.1	Wellenimpedanz	36
1.3.2	Ausbreitung von Moden in Rechteckhohlleitern	36
1.3.3	Ausbreitung von Wellen in Hohlleitern	39
1.3.4	Lösen der Maxwell-Gleichungen in Hohlräumen	41
1.3.5	Rechteckresonatoren	41
2	Das Finite Differenzenverfahren (FD)	43
2.1	Die Differenzenoperatoren	45
2.2	Beispiel: Eindimensionale Poisson-Gleichung	47
2.3	Lineare Randwertaufgabe	49
2.4	Beispiel: Zweidimensionale Poissongleichung	52
3	Die Finite Integrationstechnik (FIT)	54
3.1	Einführung des Rechengitters	54
3.2	Diskretisierung des Induktionsgesetzes	57
3.3	Diskretisierung von $\text{div } \mathbf{B} = 0$	60
3.4	Die Operatormatrizen \mathbf{C} und \mathbf{S}	61

3.4.1	Aufbau der Matrizen	61
3.4.2	Beziehung zwischen C und S	62
3.5	Einführung des dualen Rechengitters	64
3.6	Diskretisierung des Durchflutungsgesetzes	66
3.7	Diskretisierung des Gaußschen Gesetzes	68
3.8	Ladungserhaltung zeitkontinuierlicher Felder	69
3.9	Energieerhaltung zeitkontinuierlicher Felder	70
3.10	Dualitätsbeziehungen der Matrizen C und \tilde{C}	71
3.11	Der Gradientenoperator	72
3.12	Topologie-Eigenschaften der FIT	74
3.13	Materialbeziehungen	75
3.13.1	Magnetische Materialmatrix	76
3.13.2	Elektrische Materialmatrix	77
3.13.3	Konstitutive Materialgleichungen der FIT	79
3.13.4	Konstruktion der FIT-Materialmatrizen	80
3.13.5	Erweiterung zu den Materialfüllungen	82
3.14	Diskrete elektromagnetische Feldtheorie	85
3.14.1	Elektrostatik	86
3.14.2	Stationäre Strömungsfelder	89
3.14.3	Elektro-Quasistatische Felder	90
3.14.4	Magneto-Quasistatische Felder	91
3.14.5	Transiente langsam-veränderliche Felder	92
3.14.6	Zeitintegration transienter Feldprobleme	92
3.14.7	Zeitharmonische Felder	95
4	Die Methode der Finiten Elemente (FEM)	102
4.1	Elektrostatik - Die FEM Diskretisierung am Beispiel der Poisson-Gleichung	103
4.1.1	Nedéléc-Kantenelemente	109
4.2	Der Gradientenoperator der FEM	111
4.3	Magnetostatik	113
4.3.0.1	Nedéléc-Kantenelemente	116
4.3.1	Raviart-Thomas Elemente	117
4.4	Whitney-Finite-Elemente Methode: Basisfunktionen	118
5	Die elektrische Feldintegralgleichung	119
6	Die Momentenmethode (MOM)	123

Einleitung

Die Vorlesung "Theoretische Elektrotechnik II" soll den Studierenden vertiefte Kenntnisse zu elektromagnetischen Wellenausbreitungsproblemen sowie ein grundlegendes Verständnis der diskreten elektromagnetischen Feldtheorie vermitteln. Dies umfasst insbesondere das Verständnis der durch die Maxwellgleichungen und die Materialgleichungen beschriebenen physikalischen Zusammenhänge. Aufbauend auf den Grundlagen der Vorlesungsveranstaltung "Theoretische Elektrotechnik I", in denen mathematische Methoden zur Modellierung elektrostatischer und magnetostatischer, langsam-veränderlicher elektrischer bzw. magnetischer Felder und schnell-veränderlicher elektromagnetischer Felder und Wellen sowie einige zugehörige analytische Lösungsmethoden vorgestellt wurden, beinhaltet die Vorlesung "Theoretische Elektrotechnik II" im Wesentlichen spezielle Kapitel zu elektromagnetischen Wellenausbreitungsprozessen (z.B. Geometrische / physikalische Optik, geführte Wellen, resonante elektromagnetische Felder) und führt darüber hinaus in die mathematischen Grundlagen und Methoden der rechnergestützten Feldberechnung ein. In diesem Zusammenhang werden ebenfalls die Möglichkeiten und Grenzen der in Betracht kommenden numerischen Verfahren aufgezeigt.

Mein Dank gilt Frau Dipl.-Math. Claudia Zimmermann für die Erstellung einer Vorläuferversion dieses Skriptums auf der Basis der Foliensätze meiner Vorlesung zur Theoretischen Elektrotechnik II an der Helmut-Schmidt-Universität im Wintersemester 2009.

Wuppertal, 14.10.2015

Markus Clemens

Literaturempfehlung

Rechnergestützte Verfahren der elektromagnetischen Feldtheorie

1. A. Bondeson, T. Rylander, P. Ingelstöm. *Computational Electromagnetics, Texts in Applied Mathematics 51*. Springer Verlag, 1. Auflage, 2005.
2. U. van Rienen. *Numerical Methods in Computational Electrodynamics, Linear Systems in Practical Applications, LNCSE 12*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1. Auflage, 2001.
3. A. Tavlove, S. Hagness. *Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time Domain Method*. Artech House, Norwood, MA, 2005.
4. David B. Davidson. *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. Cambridge University Press, 2010.

Kapitel 1

Zeitlich veränderliche Felder

1.1 Ebene Wellen

Im Weiteren werden elektromagnetische Felder in nichtleitenden Materialien betrachtet. Darüber hinaus soll das Medium wiederum ladungsfrei, sowie homogen und isotrop sein. Damit sind einige Größen bereits wieder festgelegt auf

$$\begin{aligned}\rho &= 0, \\ \vec{J} &= 0, \\ \kappa &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Die Maxwellschen Gleichungen lauten in diesem Falle

$$\begin{aligned}\vec{H} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0, \\ \text{rot } \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0, \\ \mu \text{div } \vec{H} &= 0, \\ \epsilon \text{div } \vec{E} &= 0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Das elektrische und das magnetische Feld sind divergenzfrei.

1.1.1 Allgemeine ebene Welle

Die gekoppelten Differentialgleichungen in (1.3) sollen nun in einem Spezialfall gelöst werden. Die Felder, die gesucht werden, heißen *ebene Wellen*. Sie sind definiert als Felder, die bei geeignet gewähltem Koordinatensystem von nur einer kartesischen Koordinate und der Zeit abhängen. Man sucht also Lösungen der Form

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(u, t) \\ \vec{H} &= \vec{H}(u, t)\end{aligned}\quad \text{mit } u = \vec{n} \cdot \vec{r}.$$

Die Wellenfronten solcher ebenen Wellen sind in Abbildung 1.1 angedeutet

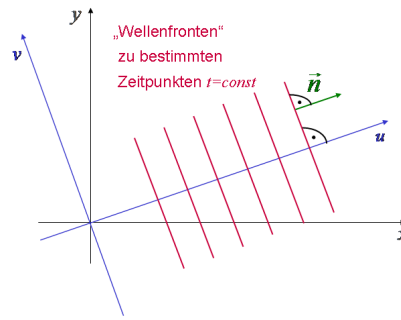


Abb. 1.1: Momentaufnahme ($t = \text{const}$) ebener Wellen mit gewähltem Koordinatensystem (u, v) und Normalenvektor \vec{n}

Das Koordinatensystem (u, v) wurde so gewählt, dass die Achse u senkrecht und die Achse v parallel zu den Wellenfronten ausgerichtet ist. Um die Rechnungen mit ebenen Wellen zu vereinfachen, betrachtet man die Variation der Felder nur in $+x$ -Richtung, d.h. es gelte $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$. Für die Rotation folgt aus den Maxwellgleichungen (1.3) unter der getroffenen Annahme

$$\begin{aligned}\left(\text{rot} \vec{E}(x, t)\right)_y &= \frac{\partial}{\partial x} E_z(x, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y(x, t), \\ \left(\text{rot} \vec{E}(x, t)\right)_z &= \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_z(x, t), \\ \left(\text{rot} \vec{H}(x, t)\right)_y &= -\frac{\partial}{\partial x} H_z(x, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y(x, t), \\ \left(\text{rot} \vec{H}(x, t)\right)_z &= \frac{\partial}{\partial x} H_y(x, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_z(x, t).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Eliminiert man in Gleichung (1.4) die Komponenten H_z , E_y , ergeben sich die homogenen Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] E_y(x, t) &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] H_z(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Dies sind die bereits bekannten *eindimensionalen Wellengleichungen*. Aus der d'Alembertschen Lösung

$$E_y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

lässt sich mit

$$\frac{\partial}{\partial x} H_z(x, t) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y(x, t) = \varepsilon c [F'(x - ct) - G'(x + ct)]$$

ebenfalls

$$\begin{aligned} H_z(x, t) &= \varepsilon c [F(x - ct) - G(x + ct)] \\ &= \frac{1}{Z} [F(x - ct) - G(x + ct)] \end{aligned}$$

angeben. Im Folgenden wird nur die in $+u$ -Richtung laufende Lösung betrachtet. Mit der Bezeichnung $H'(s) = \frac{\partial H(s)}{\partial s}$ schreiben sich die Maxwellschen Gleichungen (1.3) als

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{H}' + cE'_{-} &= 0, \\ \vec{n} \times \vec{E}' - \mu c \vec{H}'_{-} &= 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{H}' &= 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{E}' &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die letzten beiden Gleichungen besagen, dass *keine Komponente des elektrischen oder des magnetischen Feldes in Ausbreitungsrichtung existieren*. Multipliziert man die erste Gleichung mit \vec{n} so erhält man wegen $\vec{n} \cdot \vec{n} \times \dots = 0$ die letzte Gleichung in (1.5). Ebenso erhält man die dritte Gleichung aus der zweiten. Wegen der Beziehung

$$\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{H}' = \underbrace{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{H}')}_{=0 \text{ wg. } \vec{n} \perp \vec{H}'} - \vec{H}' \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{=1} = -\vec{H}'$$

und mittels $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ bekommt man durch Links-Multiplikation des ersten Gleichung in (1.5) mit $(1/\epsilon c)\vec{n} \times$ die zweite Gleichung in (1.5). Es genügt also, jeweils nur die erste oder zweite Gleichung alleine zu betrachten. Mit dem Wellenwiderstand aus (??) ergeben sich die ersten beiden Gleichungen aus (1.5) zu

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{H}' + \frac{1}{Z} \vec{E}' &= 0, \\ \vec{n} \times \vec{E}' - Z \vec{H}' &= 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Durch Integration des Arguments erhält man aus der zweiten Gleichung in (1.6) dann

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}(\vec{n} \times \vec{E}) + \vec{H}_0.$$

Darin ist \vec{H}_0 die Integrationskonstante, welche konstant in Raum und Zeit ist. Sie repräsentiert somit ein homogenes und zeitlich konstantes Magnetfeld, welches die Welle überlagert. Da man hier nur an der Wellenausbreitung interessiert ist, kann man H_0 setzen. Daher ist die allgemeine Form der Felder einer in $+n$ -Richtung laufenden Welle beschrieben durch

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct), \\ \vec{H} &= \frac{1}{Z} \vec{n} \times \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Aus den Gleichungen in (1.7) folgt unmittelbar

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H} \text{ und } |\vec{E}| = Z|\vec{H}|.\tag{1.8}$$

Die erste Gleichung in (1.8) besagt, dass der elektrische und der magnetische Feldvektor senkrecht aufeinander stehen. Außerdem stehen beide Feldvektoren senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, der $+z$ -Richtung, was auch aus den Darstellungen in Abbildung 1.2 hervorgeht. Die zweite Aussage in (1.8) entspricht dem Ohmschen Gesetz $U = IR$.

Betrachtet man nun den zeitlichen Verlauf des elektrischen Feldvektors und nimmt die x -Richtung als Ausbreitungsrichtung, ergibt sich für den elektrischen Feldvektor

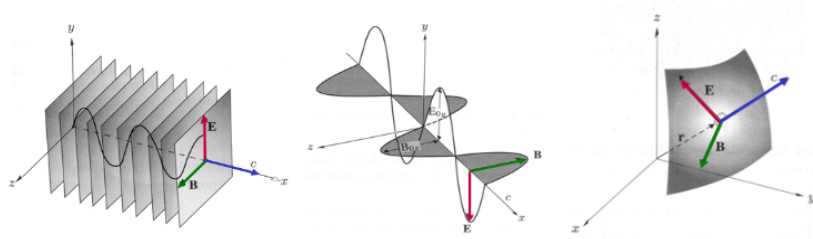


Abb. 1.2: Transversale elektromagnetische Wellen, E. Hecht, Optik, Addison-Wesley, 1989

$$\vec{E}(t, x) = E_{0,y} \cos(2\pi f \cdot (t - \frac{x}{c})) \vec{e}_y = E_{0,y} \cos(\omega \cdot t - x \cdot k) \vec{e}_y.$$

Der elektrische Feldvektor ist somit in der y-Komponente polarisiert. Es existiert keine Schwingungs- beziehungsweise Polarisations-ebene für die z-Komponente. dies verdeutlicht auch die zweite Darstellung in Abbildung 1.2. Für den magnetischen Feldvektor gilt nun Folgendes

$$\vec{B}(t, x) = B_{0,x} \cos(2\pi f \cdot (t - \frac{x}{c})) \vec{e}_z = B_{0,x} \cos(\omega \cdot t - x \cdot k) \vec{e}_z.$$

Dieser ist somit in der z-Komponente polarisiert. Diesmal existiert keine Schwingungs- beziehungsweise Polarisations-ebene für die y-Komponente.

1.1.2 Energietransport bei ebenen Wellen

Um sich im Folgenden den Energietransport bei ebenen Wellen zu verdeutlichen, sind zunächst in Abbildung 1.3 die Verhältnisse zwischen \vec{E} , \vec{H} und der Ausbreitungsrichtung oder *Wellennormalen* \vec{n} dargestellt

Der Poyntingsche Vektor berechnet sich aus (1.7) und kann mit der Energiedichte des Feldes in Verbindung gebracht werden durch

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2}(EH + EH)\vec{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{cZ}E^2 + \frac{Z}{c}H^2\right)\vec{n}c \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)\vec{n}c = (w_e + w_m)\vec{n}c. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Aus der letzten Zeile in (1.9) ersieht man, dass die im Feld gespeicherte elektromagnetische Energie mit Lichtgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung \vec{n} transportiert wird.

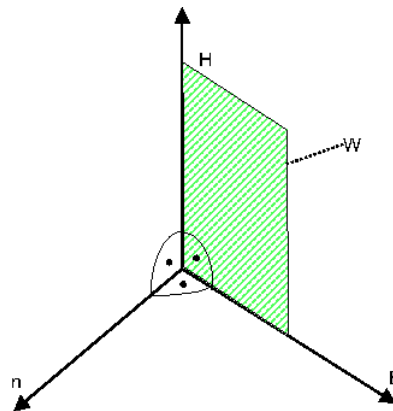


Abb. 1.3: Zum Energietransport in einer ebenen Welle: Felder \vec{E} , \vec{H} , Wellennormale \vec{n} und Poyntingsche Vektor \vec{S} .

Aufgrund der Tatsache, dass sie keine Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung besitzen, nennt man diese Wellen auch *transversale Wellen*. Die Transversalität ist eine Folge der Raumladungsfreiheit. Sind dagegen Raumladungen zugelassen, so sind auch *longitudinale Wellen*, also Wellen mit einer Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung möglich. Man nennt solche Wellen auch *Plasmawellen*.

Bisher wurde keine spezielle Richtung senkrecht zu \vec{n} ausgezeichnet, in der das magnetische beziehungsweise das elektrische Feld verläuft. Legt man dagegen fest, dass das elektrische (und damit auch das magnetische) Feld in einer Ebene schwingt, so spricht man von einer *linear polarisierten Welle*. In Abbildung 1.4 ist so eine Welle skizziert.

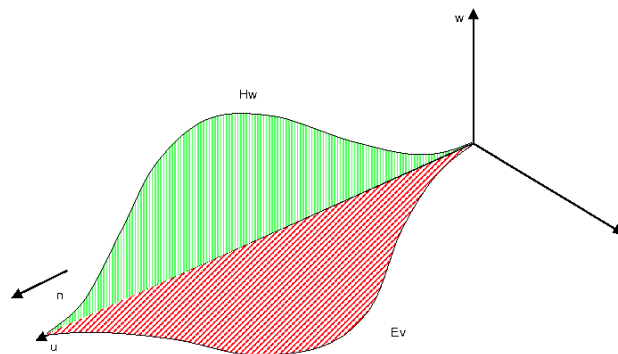


Abb. 1.4: Linear polarisierte Welle

In der Abbildung 1.4 wurde das Koordinatensystem so gewählt, dass das elektrische und das magnetische Feld jeweils parallel zu einer Achse stehen. Eine allgemeine ebene Welle kann man in diesem System ausdrücken als

$$\vec{E} = (0, E_v(u - ct), E_w(u - ct)),$$
$$\vec{H} = \left(0, -\frac{1}{Z}E_w(u - ct), \frac{1}{Z}E_v(u - ct)\right).$$

Dies sind zwei aufeinander senkrecht stehende jeweils linear polarisierte Wellen.

1.1.3 Ebene Welle - Harmonische ebene Welle

Wie gewöhnlich für die Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems, ist auch bei der Wellenausbreitung der Spezialfall einer harmonischen ebenen Welle von besonderer Bedeutung, da sich beliebige Wellen in diesen harmonischen ebenen Wellen ausdrücken lassen. Man wählt also speziell

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) = \operatorname{Re} \left(\vec{E}_0 \exp(-jk(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\vec{E}_0 \exp(j \underbrace{kc}_{\omega} t - \underbrace{k\vec{n}}_{\vec{k}} \cdot \vec{r}) \right) = \operatorname{Re} \left(\vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \right)\end{aligned}$$

Hierbei ist ω die Kreisfrequenz, k die Wellenzahl, \vec{k} der Wellenzahlenvektor, T die Periodendauer, c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle ("Lichtgeschwindigkeit") und \vec{E}_0 wiederum die komplexe Amplitude. Es gilt auch hier die *Transversalitätsbedingung* $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$. Da die Orts- und die Zeitabhängigkeit im Fall der ebenen Welle in ein Produkt separierbar, schreibt man dies auch mit Hilfe der Phasoren als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left(\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \exp(j\omega t) \right) \text{ mit } \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}).$$

Abschließend seien noch einige Bemerkungen zu harmonischen ebenen Wellen aufgeführt:

- Wie eingangs erwähnt, lässt sich jede beliebige ebene Welle durch Fouriertransformation aus harmonischen ebenen Wellen aufbauen.
- Das Rechnen mit ebenen harmonischen Wellen ist einfach, da man nur die Ersetzungen $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ und $\vec{\nabla} \rightarrow -j\vec{k}$ vorzunehmen braucht.
- Als weitere Verallgemeinerung ist es möglich, statt der rein reellen Wellenzahl auch einen Imaginärteil zuzulassen, also $\vec{k} \rightarrow \underline{\vec{k}} = \vec{\alpha} + j\vec{\beta}$. Dies erlaubt zum

Beispiel die Behandlung von Dämpfung und Totalreflexion. Das Vorgehen ist hier ganz analog zu dem Schritt von der Fourier- zur Laplacetransformation in der Schaltungstheorie. Die sich ergebenden Wellen sind im Allgemeinen aber keine ebenen Wellen mehr.

1.1.4 Ebene harmonische Welle in leitendem Medium

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Abschnitten soll nun ein leitfähiges Medium betrachtet werden, in dem sich eine elektromagnetische ebene Welle ausbreitet. Als Ansatz setzt man

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}), \text{ mit } \vec{k} = \underline{k} \cdot \vec{n}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r})\end{aligned}$$

wobei \vec{n} der Normalenvektor der Wellenebene ist. Als Folge der Ladungsfreiheit ist auch hier von einer transversalen Welle (TEM) auszugehen, das heißt es gilt

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 \cdot \vec{n} &= 0, \\ \vec{H}_0 \cdot \vec{n} &= 0.\end{aligned}$$

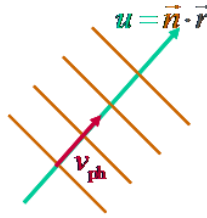
Im Unterschied zu der ebenen Welle im nichtleitenden Medium lässt man hier aber eine komplexe Wellenzahl k zu

$$\underline{k} = \beta - j\alpha.$$

Man bezeichnet $\beta > 0$ als *Phasenkonstante* und $\alpha \geq 0$ als *Dämpfungskonstante*. In diesen Konstanten ausgedrückt bekommt man für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E} \exp(j\omega t) &= \vec{E}_0 \exp(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \underbrace{\exp(j(\omega t - \beta \vec{n} \cdot \vec{r}))}_I \cdot \underbrace{\exp(-\alpha \vec{n} \cdot \vec{r})}_{II}.\end{aligned}$$

Der Term *I* steht für die Ausbreitung in \vec{n} -Richtung ohne Formänderung. Der Term *II* repräsentiert die Dämpfung. Die Wellenebenen nennt man auch *Ebenen konstanter Phase*, wobei als *Phase* φ das Argument der Exponentialfunktion bezeichnet wird. Für eine solche Ebene gilt



$$\varphi := \omega t - \beta \vec{n} \cdot \vec{r} = \text{const} \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{d}{dt}} \omega - \beta \frac{du}{dt} = 0$$

und

$$v_{ph} = \frac{du}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Für eine Welle, welche mit einer am Ursprung gegebenen Feldstärke \vec{E}_0 , einer Wellennormale \vec{n} und einer Kreisfrequenz ω in ein homogenes Medium einstrahlt, ist die Wellenzahl

$$\underline{k} = \beta - j\alpha \vec{H}_0$$

zu bestimmen. Hierbei unterscheidet man zwei Fälle

· Nichtleitendes Medium ($\kappa = 0$) (bekannter Fall):

$$\underline{k} = k \in \mathbb{R}; \alpha = 0; k = \beta; c \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}; Z \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Es gilt

$$c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}.$$

Für die Phasengeschwindigkeit ergibt sich dann

$$v_{ph} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\omega}{\beta} \stackrel{\alpha=0}{=} \frac{\omega}{k} = c.$$

Für das magnetische Feld gilt

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{Z} \vec{n} \times \vec{E}_0 \quad (1.10)$$

- Leitendes Medium ($\kappa \neq 0$) (neu zu betrachtender Fall):

In diesem Fall ist

$$\operatorname{div} \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \cdot \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) = 0 \text{ da } \vec{E}_0 \perp \vec{k} = k\vec{n}.$$

Das elektrische Feld \vec{E} erfüllt dabei die Telegraphengleichung

$$\left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} + \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0.$$

Da es sich um eine harmonische Welle handelt, muss die notwendige Bedingung

$$(-k^2 + \omega^2\mu\epsilon - j\omega\mu\kappa)\vec{E} = 0$$

erfüllt sein. Hieraus ergeben sich die möglichen Wellenzahlen

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}}$$

mit der Dielektrischen Relaxationszeit

$$\tau_r := \frac{\epsilon}{\kappa}.$$

Es lassen sich noch Zusatzüberlegungen treffen

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2}(\underline{k} + \underline{k}^*) = \frac{\omega}{2c} \left(\sqrt{1 - j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} + \sqrt{1 + j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} \right) \\ \Rightarrow \beta^2 &= \left(\frac{\omega}{2c} \right)^2 \cdot \left[2 + 2 \left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot \tau_r)^2} \right) \right], \\ -\alpha &= \frac{1}{2}(\underline{k} - \underline{k}^*) = \frac{\omega}{2jc} \left(\sqrt{1 - j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} - \sqrt{1 + j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} \right) \\ \Rightarrow \alpha^2 &= \left(\frac{\omega}{2c} \right)^2 \cdot \left[2 - 2 \left(1 + \frac{1}{(\omega \cdot \tau_r)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mit $\alpha \geq 0, \beta > 0$

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot \tau_r)^2}} - 1}, \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \cdot \tau_r)^2}} + 1}.$$

Ebene harmonische Welle in leitendem Medium - Verallgemeinerung auf inhomogene Wellen

Bislang galt bei einer homogenen Welle $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$. Bei einer inhomogenen Welle gilt nun $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$.

Außerdem ist die Dämpfungsrichtung $\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}$ verschieden von der Ausbreitungsrichtung $\frac{\vec{\beta}}{\beta}$. Die inhomogene Welle ist keine Welle im Sinne der vorigen Definition. Sind Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung vorhanden, gilt

$$\vec{E} \cdot \vec{\beta} = 0; \vec{H} \cdot \vec{\beta} \neq 0 \Rightarrow \text{Transversal elektrische (TE-)Welle,}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{\beta} = 0; \vec{H} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \text{Transversal magnetische (TM-)Welle.}$$

Ebene harmonische Welle in leitendem Medium - schwache Dämpfung

Im Falle einer schwachen Dämpfung der harmonischen Welle überwiegen die Isolatoreigenschaften, das heißt es gilt

$$\omega\tau_r \gg 1 \Leftrightarrow \omega\epsilon \gg \kappa.$$

Außerdem ist

$$\sqrt{1 - j\frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\omega \cdot \tau_r}} \sqrt{-j} = \frac{1}{\sqrt{2\omega \cdot \tau_r}} \cdot (1 - j)$$

wegen

$$\sqrt{1 + h} \simeq 1 + \frac{h}{2} + O(h^2).$$

Es ergibt sich somit für die Wellenzahl k

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j\frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} \Rightarrow \underline{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - j\frac{1}{2\omega \cdot \tau_r} \right) = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{=\beta} - j \underbrace{\frac{1}{2c \cdot \tau_r}}_{=\alpha} \text{ mit } \tau_r := \frac{\epsilon}{\kappa}.$$

Für den Wellenwiderstand folgt

$$\underline{\zeta} := \frac{\omega\mu}{\underline{k}} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \frac{j}{\omega\tau_r}}} \Rightarrow \underline{\zeta} := Z \left(1 + j\frac{1}{2\omega\tau_r} \right) \simeq Z.$$

Somit ist die Wellenausbreitung ähnlich zu dem ungedämpften Fall

$$v_{ph} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\omega}{\beta} = c.$$

Es tritt allerdings eine zusätzliche Dämpfung auf

$$\alpha = \frac{1}{2c \cdot \tau_r}.$$

Die linear polarisierten Komponenten von $\underline{\vec{E}}_0$ und $\underline{\vec{H}}_0$ sind in Phase wegen $\arg \underline{\zeta} \simeq 0$.

Ebene harmonische Welle in leitendem Medium - starke Dämpfung

Im Falle einer starken Dämpfung der harmonischen Welle überwiegen die Leiteigenschaften, das heißt es gilt

$$\omega \tau_r \ll 1 \Rightarrow \omega \epsilon \ll \kappa.$$

Es ist wiederum

$$\sqrt{1 - j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\omega \cdot \tau_r}} \sqrt{-j} = \frac{1}{\sqrt{2\omega \cdot \tau_r}} \cdot (1 - j).$$

Für die Wellenzahl k ergibt sich in diesem Fall

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{1}{\omega \cdot \tau_r}} \Rightarrow \underline{k} = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2\omega \cdot \tau_r}} (1 - j) = \sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}} (1 - j) = \frac{1}{\delta} (1 - j).$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}.$$

Mit

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\underline{\vec{E}}_0(\vec{r}) \cdot \exp(j(\omega t - \beta \vec{n} \cdot \vec{r})) \cdot \exp(-\alpha \vec{n} \cdot \vec{r})\}$$

folgt für eine Eindringtiefe $r := \delta$

$$\exp(-\alpha r) = \exp\left(-\frac{1}{\delta}r\right) = \exp(-1) \approx 37\%.$$

Auf einer Wellenlänge

$$r := \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

gilt dann

$$\exp(-\alpha r) = \exp(-2\pi) \approx 0.2\%.$$

Für den Wellenwiderstand ist

$$\underline{\zeta} := \frac{\omega\mu}{\underline{k}} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \frac{j}{\omega\tau_r}}} \Rightarrow \underline{\zeta} = Z \sqrt{2\omega \cdot \tau_r} \frac{1}{(1 - j)} = Z \sqrt{\frac{\omega \cdot \tau_r}{2}} (1 + j).$$

und es gilt

$$\arg \underline{\zeta} = \frac{\pi}{4},$$

das heißt die linear polarisierten Komponenten von \vec{E}_0 und \vec{H}_0 weisen einen Phasenwinkel von $\frac{\pi}{4}$ auf.

1.1.4.1 Ebene Welle im freien Raum

Es wird nun eine TEM-Welle in freien Raum (Luft/Vakuum) betrachtet. Die Ebenen breiten sich mit gleicher Phase und gleicher Amplitude in $+z$ -Richtung aus. Dabei ist zunächst

$$\vec{E} = E_x(z)\vec{e}_x.$$

Für das magnetische Feld gilt dann

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\vec{e}_z \times \vec{E} \text{ mit } Z := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi\Omega \approx 376,73\Omega \text{ Freiraumwellenimpedanz.}$$

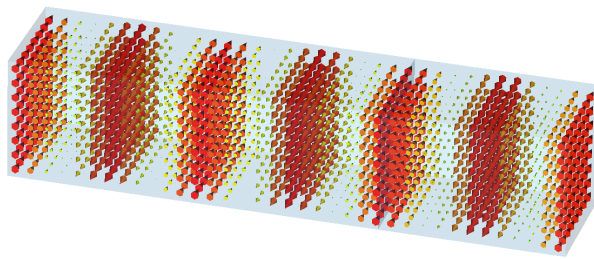


Abb. 1.5: Ebene Welle im freien Raum mit $\vec{E} = E_x(z)\vec{e}_x$, CST Suite 2006

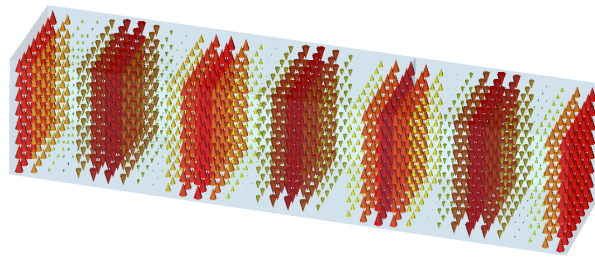


Abb. 1.6: Ebene Welle im freien Raum mit $\vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{e}_z \times \vec{E}$, CST Suite 2006

Trifft eine ebene Welle von einem Halbraum Luft ($\epsilon_r = 1$) auf einen Halbraum mit einem Dielektrikum $\epsilon_r = 4$ reduziert sich die Wellenlänge um einen Faktor 2

$$c_{Luft} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow c_{Dielektrikum} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2} c_{Luft}.$$

1.2 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

1.2.1 Ebene Wellen an Trennflächen

In diesem Abschnitt soll das Problem einer Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen, isolierenden Materialien, auf die eine ebene Welle fällt, untersucht werden. Die Grenzfläche liege in der x, y -Ebene. Dieser Aufbau ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

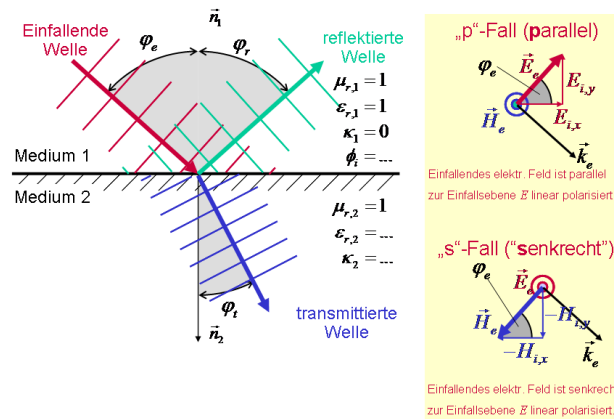


Abb. 1.7: Ebene Welle an einer Trennfläche

Als Ansatz geht man von einer einfallenden ebenen Welle \vec{E}_e , einer reflektierten ebenen Welle \vec{E}_r und einer transmittierten oder gebrochenen ebenen Welle \vec{E}_t aus. Diese Wellen haben also die Form

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= \vec{E}_{e,0} \exp(-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}), \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{r,0} \exp(-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}), \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{t,0} \exp(-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}).\end{aligned}$$

Ausgehend von der einfallenden Welle, die durch $\vec{E}_{e,0}$, ω und den Einfallswinkel φ_e gegeben ist, sowie den Materialeigenschaften (ϵ_1, μ_1) , der Transmissionswinkel φ_t sowie die Amplitude $\vec{E}_{r,0}$ und $\vec{E}_{t,0}$ der reflektierten und der transmittierten Welle berechnet werden.

Für jeden Punkt \vec{r}_M innerhalb der Grenzfläche müssen Randbedingungen erfüllt werden. Dies ist auf der gesamten Fläche nur dann möglich, wenn die Phasen der Exponentialfunktionen für alle \vec{r}_M übereinstimmen, also gilt

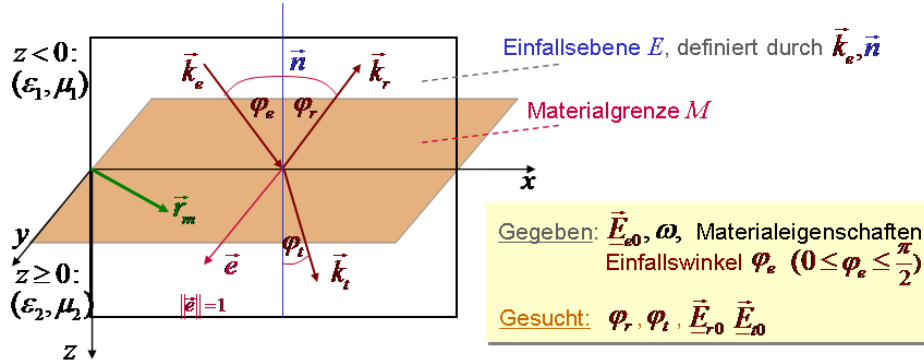
Zwei isolierende Materialien: $\kappa_1=0, \kappa_2=0$


Abb. 1.8: Randwertaufgabe einer ebenen Welle an einer Trennfläche

$$\vec{k}_e \cdot \vec{r}_M = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_M = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_M. \quad (1.11)$$

Daraus folgt die Bedingung für die Wellenzahlvektoren der einfallenden und der reflektierten Welle

$$\begin{aligned} (\vec{k}_e - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_M &= 0 & \Rightarrow \vec{k}_e - \vec{k}_r &\perp M, \\ \Rightarrow (\vec{k}_e - \vec{k}_r) &= c\vec{n} & \Rightarrow \vec{k}_e, \vec{k}_r, \vec{n} &\text{liegen in der Einfallsebene } E, \text{ analog für } \vec{k}_t \\ & \Rightarrow \vec{k}_e, \vec{k}_r, \vec{k}_t, \vec{n}. \end{aligned}$$

Man definiert den *Brechungsindex* n über

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum}}{\text{Lichtgeschwindigkeit im Medium}} = \sqrt{\frac{\mu_\epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \geq 1.$$

Die Wellenzahlvektoren lassen sich in den beiden Medien ausdrücken als

$$\begin{aligned} k_e = k_r = k_1 &= \frac{\omega}{c_1} = \frac{\omega}{c_0} n_1, \\ k_t = k_2 &= \frac{\omega}{c_0} n_2 = \frac{n_2}{n_1} k_1. \end{aligned}$$

Die Richtung der Wellenzahlvektoren innerhalb der Einfallsebene lässt sich mittels der Winkel beschreiben durch

$$\vec{k}_e = k_1(\sin \varphi_e, 0, \cos \varphi_e) = k_1 \vec{n}_e,$$

$$\begin{aligned}\vec{k}_r &= k_1(\sin \varphi_r, 0, -\cos \varphi_r) = k_1 \vec{n}_r, \\ \vec{k}_t &= k_2(\sin \varphi_t, 0, \cos \varphi_t) = \frac{n_2}{n_1} k_1 \vec{n}_t.\end{aligned}$$

Setzt man explizit $\vec{r}_M = (x_M, y_M, 0)$, dann folgt aus (1.11)

$$\begin{aligned}x_M k_1 \sin \varphi_e &= x_M k_1 \sin \varphi_r, \\ x_M k_1 \sin \varphi_e &= x_M \frac{n_2}{n_1} k_1 \sin \varphi_t.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Da dies für alle x_M gilt, folgt aus der ersten Gleichung in (1.12), dass der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel den gleichen Wert haben, es gilt also

$$\varphi_1 := \varphi_e = \varphi_r.\tag{1.13}$$

Die Gleichung (1.13) ist auch als *Reflexionsgesetz* bekannt. Ferner gelte

$$\varphi_2 := \varphi_t.\tag{1.14}$$

Mit der zweiten Gleichung aus (1.12) und Gleichung (1.14) ergibt sich

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2,\tag{1.15}$$

das sogenannte *Snellius'sche Brechungsgesetz*.

Senkrechter Fall - s-Fall

Um die Feldstärken des reflektierten und des transmittierten Feldes angeben zu können, sind die Randbedingungen für die Felder an der Grenzfläche zu betrachten. Zunächst soll angenommen werden, dass das einfallende elektrische Feld senkrecht zur Einfallsebene und parallel zu dem in Abbildung 1.9 eingezeichneten Vektor \vec{e} linear polarisiert ist. Dann erhält man folgenden Ansatz für die elektrischen Felder

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_e &= \underline{E}_e \vec{e} \exp(-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}), \\ \underline{\vec{E}}_r &= \underline{E}_r \vec{e} \exp(-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}), \\ \underline{\vec{E}}_t &= \underline{E}_t \vec{e} \exp(-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}).\end{aligned}$$

Die zugehörigen magnetischen Felder bekommt man aus (1.10) durch

$$\underline{\vec{H}}_e = \frac{1}{Z_1} \vec{n}_e \times \underline{\vec{E}}_e,$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{Z_1} \vec{n}_r \times \vec{E}_r,$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_2} \vec{n}_t \times \vec{E}_t.$$

Zwei isolierende Materialien: $\kappa_1=0, \kappa_2=0$

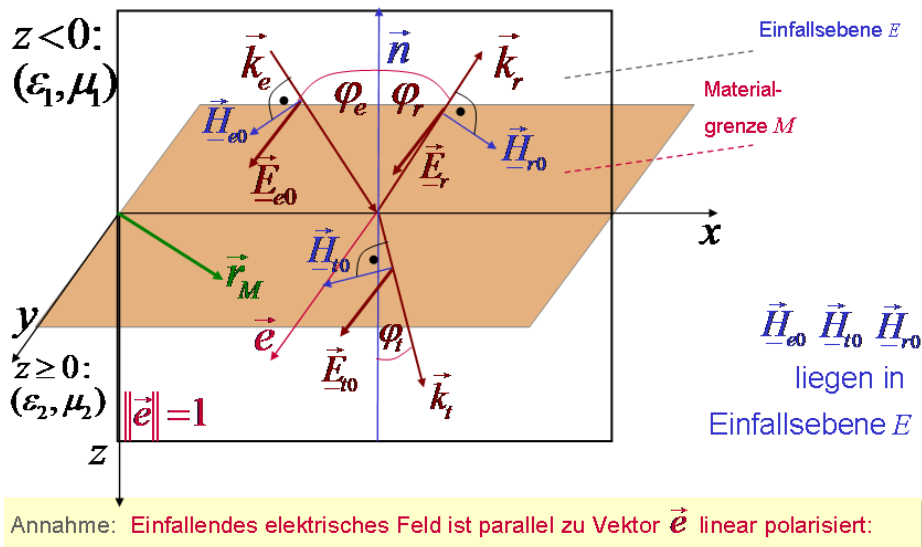


Abb. 1.9: Ebene Welle an einer Trennfläche: Senkrechter Fall (s-Fall)

Die Tangentialkomponente des elektrischen und des magnetischen Feldes müssen an der Grenzfläche stetig sein, das heißt es muss

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \text{ mit } \vec{E}_2 = \vec{E}_t; \vec{E}_1 = \vec{E}_e + \vec{E}_r,$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \text{ mit } \vec{H}_2 = \vec{H}_t; \vec{H}_1 = \vec{H}_e + \vec{H}_r \quad (1.16)$$

gelten. Die Exponentialfaktoren kann man hier herauskürzen, weil $\vec{r}_M = (x_M, y_M, 0)$ auf der ganzen Grenzfläche gilt, also insbesondere für $\vec{r} = 0$. Die erste Zeile ergibt dann explizit

$$(\vec{E}_{t,0} - \vec{E}_{e,0}, \vec{E}_{r,0}) \underbrace{(\vec{n} \times \vec{e})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{e,0} + \vec{E}_{r,0} = \vec{E}_{t,0}.$$

Verwendet man

$$\begin{aligned}\vec{n} \times (\vec{n}_e \times \vec{E}_e) &= \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}_e)}_{=0} \vec{n}_e - \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n}_e)}_{\cos \varphi_e} \vec{E}_e, \\ \vec{n} \times (\vec{n}_r \times \vec{E}_r) &= \cos \varphi_r \vec{E}_r, \\ \vec{n} \times (\vec{n}_t \times \vec{E}_t) &= -\cos \varphi_t \vec{E}_t,\end{aligned}$$

so lässt sich die zweite Zeile von (1.16) umformen zu

$$\left(-\frac{1}{Z_2} \cos \varphi_2 \underline{E}_{t,0} + \frac{1}{Z_1} \cos \varphi_1 \underline{E}_{e,0} - \frac{1}{Z_1} \cos \varphi_1 \underline{E}_{r,0} \right) \vec{e} = 0. \quad (1.17)$$

Man definiert nun den *Reflexionsfaktor* r_E und den *Transmissionsfaktor* t_E für die elektrischen Felder durch

$$r_E = \frac{\underline{E}_{r,0}}{\underline{E}_{e,0}}, \quad t_E = \frac{\underline{E}_{t,0}}{\underline{E}_{e,0}} \quad \text{mit} \quad 1 + r_E = t_E. \quad (1.18)$$

Mit dieser Definition lässt sich (1.17) umformen zu

$$-\frac{\cos \varphi_2}{Z_2} t_E + \frac{\cos \varphi_1}{Z_1} (1 - r_E) = 0. \quad (1.19)$$

Damit hat an mit (1.18) und (1.19) zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten t_E und r_E . Aufgelöst nach den beiden Koeffizienten bekommt man daraus die sogenannte *Fresnelschen Gleichungen* für den *senkrechten Fall* (*s-Fall*)

$$\begin{aligned}r_{E,s} &= \frac{Z_2 \cos \varphi_1 - Z_1 \cos \varphi_2}{Z_2 \cos \varphi_1 + Z_1 \cos \varphi_2}, \\ t_{E,s} &= \frac{2Z_2 \cos \varphi_1}{Z_2 \cos \varphi_1 + Z_1 \cos \varphi_2}.\end{aligned} \quad (1.20)$$

1.2.1.1 Paralleler Fall - *p-Fall*

Nun soll der Fall behandelt werden, dass das elektrische Feld parallel und das magnetische Feld senkrecht zur Einfallsebene E polarisiert ist, das heißt das einfallende Feld hat die Komponenten $E_{e,x}$, $E_{e,z}$ und $H_{e,y}$. Dieser Fall wird als *paralleler Fall* (*p-Fall*) bezeichnet (siehe Abbildung 1.10). Analog zum oben beschriebenen Fall einer elektrischen Feldpolarisation senkrecht zur Einfallsebene (*s-Fall*) werden durch die Trennflächen M keine zusätzlichen Feldkomponenten hervorgerufen, so dass man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{E}_{e,0} \cos \varphi_e + \vec{E}_{r,0} \cos \varphi_r &= \vec{E}_{t,0} \cos \varphi_t, \\ \frac{1}{Z_1} (-\vec{E}_{e,0} + \vec{E}_{r,0}) &= -\frac{1}{Z_2} \vec{E}_{t,0}\end{aligned}$$

mit dem Reflexionsgesetz (1.14) die Beziehungen für den *Reflexionsfaktor* $r_{E,p}$ und den *Transmissionsfaktor* $t_{E,p}$ des elektrischen Feldes im parallelen Fall erhält

$$\begin{aligned}(1 + r_{E,p}) \cos \varphi_1 &= \vec{E}_{t,0} \cos \varphi_t, \\ \frac{1}{Z_1} (-\vec{E}_{e,0} + \vec{E}_{r,0}) &= -\frac{1}{Z_2} \vec{E}_{t,0}.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Zwei isolierende Materialien: $\kappa_1=0, \kappa_2=0$

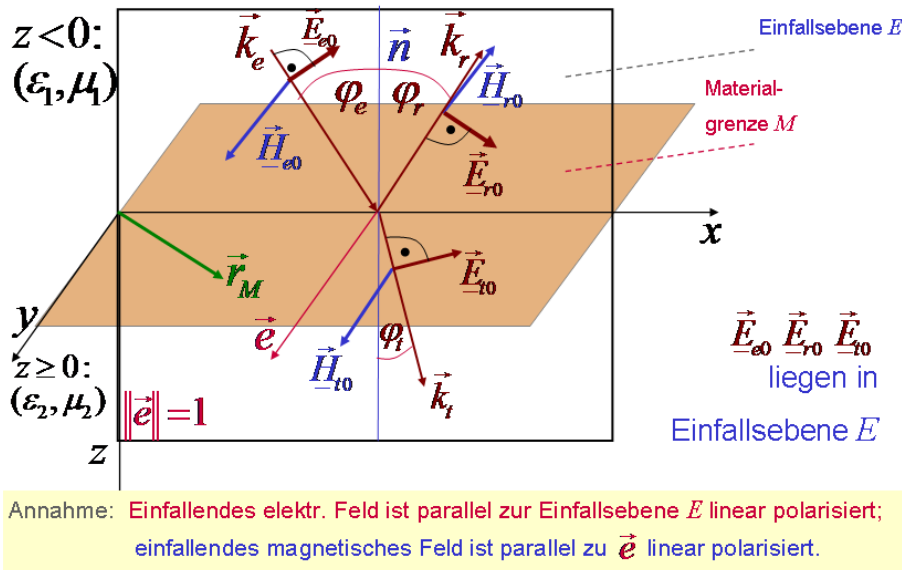


Abb. 1.10: Ebene Welle an einer Trennfläche: Paralleler Fall (p-Fall)

Löst man Gleichung (1.21) nach den beiden Koeffizienten auf, bekommt man daraus die sogenannte *Fresnelschen Gleichungen* für den *parallelen Fall* (p-Fall)

$$\begin{aligned}r_{E,p} &= \frac{Z_2 \cos \varphi_2 - Z_1 \cos \varphi_1}{Z_2 \cos \varphi_2 + Z_1 \cos \varphi_1}, \\ t_{E,p} &= \frac{2Z_2 \cos \varphi_1}{Z_1 \cos \varphi_1 + Z_2 \cos \varphi_2}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Es ist zu bemerken, dass sich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren der Fresnelschen Formeln in den beiden Fällen s und p unterscheiden. Sie gelten sowohl für nichtleitende wie auch leitende Medien mit der Einschränkung, dass die Frequenz der einfallenden Welle nicht mit der Plasmfrequenz eines der Medien übereinstimmt.

1.2.1.2 Zusätzliche Randbedingungen

Außer der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes muss auch die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte $B_n = (\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{n}$ stetig sein. Dies ist aber bereits erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{(\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\vec{n} \times \vec{k})}_{\text{testing)}} &= ((\vec{n} \times \vec{k}) \cdot \vec{E})\vec{n} - \underbrace{((\vec{n} \times \vec{k}) \cdot \vec{n})\vec{E}}_{=0} \\ &= j \underbrace{((-j\vec{k}\vec{E}) \cdot \vec{n})\vec{n}}_{-j\omega\vec{B}} = \omega(\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{n} = \omega\vec{B}_n. \end{aligned}$$

Also ist \vec{B}_n stetig. Analog kann man zeigen, dass auch \vec{D}_n aufgrund der Stetigkeit von \vec{k}_t und \vec{H}_t stetig ist. An metallischen Randflächen erlaubt die Forderung der Stetigkeit von \vec{D}_n darüber hinaus die Berechnung der sich einstellenden Flächenladung.

1.2.2 Reflexion am Halbraum

Als nächstes wird der schiefe Einfall einer Welle an einer Grenzfläche betrachtet.

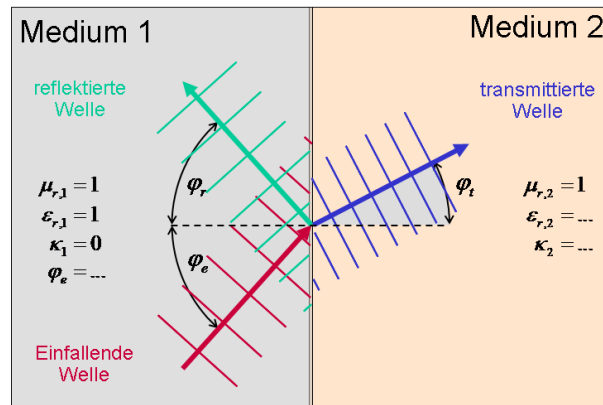


Abb. 1.11: Reflexion am Halbraum: Schiefer Einfall

Aus den Gleichungen (1.20) und (1.22) erkennt man, dass die Reflexionskoeffizienten $r_{E,s}$ und $r_{E,p}$ Nullstellen besitzen. Nullstelle von $r_{E,p}$ tritt auf, falls

$$Z_1 \cos \varphi_1 = Z_2 \cos \varphi_2, \alpha^2 \cos^2 \varphi_1 = \cos^2 \varphi_2 \text{ mit } \alpha = \frac{Z_1}{Z_2}$$

gilt. Aus dem *Snellius'schen Brechungsgesetz* (1.15) folgt

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2, \beta^2 \sin^2 \varphi_1 = \sin^2 \varphi_2 \text{ mit } \beta = \frac{n_1}{n_2}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cos^2 \varphi_1 + \beta^2 \sin^2 \varphi_1 &= \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1, &= \alpha^2 \cos^2 \varphi_1 + \beta^2 (1 - \cos^2 \varphi_1), \\ \Rightarrow \cos^2 \varphi_1 &= \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \\ \sin^2 \varphi_1 &= \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}, \\ \Rightarrow \tan \varphi_1 &= \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Ein analoges Ergebnis bekommt man für den Reflexionskoeffizienten r_E , der bei dem Winkel $\varphi_{B,E,s}$ verschwindet. Die Winkel $\varphi_{B,E,s}$ bzw. $\varphi_{B,E,p}$ nennt man *Brewster-Winkel*.

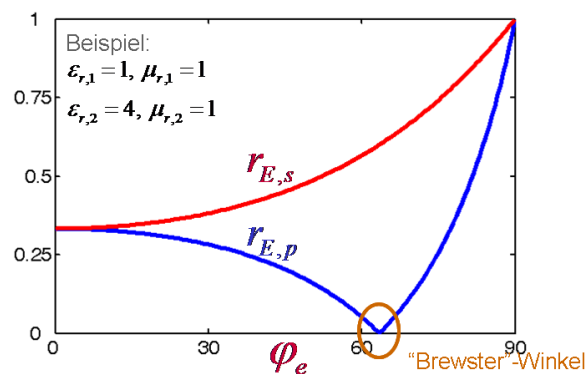


Abb. 1.12: Brewster-Winkel

Ausgedrückt in den Materialeigenschaften (μ, ϵ) erhält man

$$r_{E,s} = 0 \text{ für } \varphi_1 = \varphi_{B,E,s} \text{ mit } \tan \varphi_{B,E,s} = \sqrt{\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}},$$

$$r_{E,p} = 0 \text{ für } \varphi_1 = \varphi_{B,E,p} \text{ mit } \tan \varphi_{B,E,p} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}.$$

Analog kann man aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz das Ausbleiben einer reflektierten Welle im s -Fall mit

$$\frac{\tan \varphi_{1,s}}{\tan \varphi_{2,s}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

und im p -Fall mit

$$\frac{\tan \varphi_{1,p}}{\tan \varphi_{2,p}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

angeben. Für eine Grenzfläche zwischen idealen, das heißt verlustfreien Dielektrika ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) vereinfachen sich die Gleichungen (1.20) und (1.22) zu

$$r_{E,s} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)},$$

$$t_{E,s} = \frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)}$$

und

$$r_{E,p} = \frac{\tan(\varphi_2 - \varphi_1)}{\tan(\varphi_2 + \varphi_1)},$$

$$t_{E,p} = \frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Hier verschwindet der Reflexionsfaktor $r_{E,s}$ bei senkrechter Polarisation nur, wenn $\varphi_2 = \varphi_1$ gilt, das heißt nach dem Snelliusschen Gesetz $n_1 = n_2$ vorliegt. Das ist aber der triviale Fall identischer Medien.

Somit kann ein Verschwinden von $r_{E,s}$ wegen $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ und $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ nie auftreten. Hierbei gibt es folglich nur einen Brewster-Winkel $\varphi_{B,E,p}$ für das parallel polarisierte elektrische Feld mit $\tan \varphi_{B,E,p} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_1}{n_2}$. In diesem technisch

relevanten Sonderfall unmagnetischer Materialien gilt für eine beliebig polarisierte Welle (s -Fall und p -Fall) unter dem Einfallswinkel $\varphi_{B,E,p}$, dass die reflektierte Welle linear polarisiert ist. Sie ist hinsichtlich ihrer elektrischen Feldkomponente senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, da der parallel polarisierte Anteil vollständig durch das Medium 2 transmittiert wird. Damit folgt auch sofort, dass für eine parallel polarisierte einfallende Welle keine reflektierte Welle auftritt. Ein typischer Zahlenwert für zum Beispiel einen Luft-Gas-Übergang ist $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\pi}{2}$, das heißt wegen des Reflexionsgesetzes $\varphi_1 = \varphi_r$ gilt, dass der transmittierte Strahl auf dem reflektierten Strahl steht, der bei beliebiger Polarisation des einfallenden Winkels durch den anteiligen s -Fall gegeben ist.

1.2.3 Totalreflexion

Unter bestimmten Bedingungen kommt es vor, dass die gesamte Welle reflektiert wird und keine Transmission stattfindet. Dieser Fall soll hier untersucht werden. Man nimmt also für die Grenzflächen an, dass $n_1 > n_2$, also das Medium 1 *optisch dichter* ist als das Medium 2.

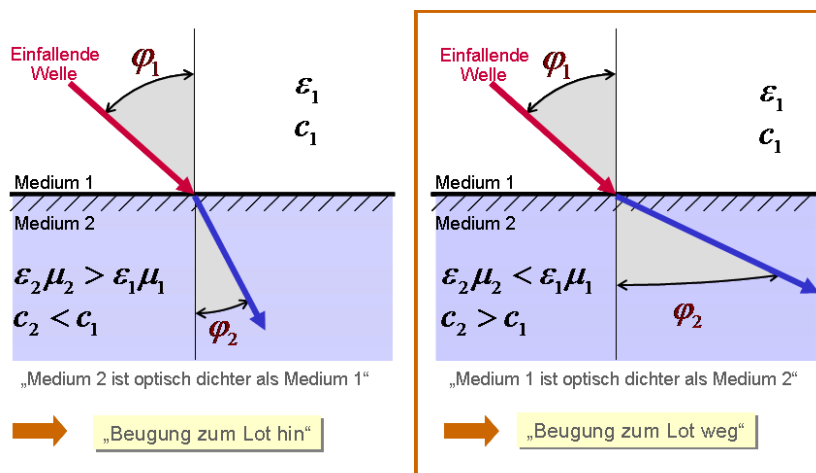


Abb. 1.13: Ebene Welle an einer Trennfläche

Das Snellius'sche Brechungsgesetz (1.15) liefert dann

$$\sin \varphi_1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_2 \leq \frac{n_2}{n_1} < 1,$$

$$\varphi_1 \leq \underbrace{\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}_{\varphi_{1,G}} < \frac{\pi}{2}$$

den Grenzwinkel $\varphi_{1,G}$ der Totalreflexion. Für $\varphi_1 > \varphi_{1,G}$ besitzt obige Gleichung nur eine komplexe Lösung für φ_2 . Die gesamte Energie wird in diesem Fall reflektiert und es gibt keine gebrochene ebene Welle. Die mittlere Dichte der durch die Grenzfläche transmittierten Leistung ist $\vec{n} \cdot \vec{S} = 0$. Dennoch ist das Medium 2 nicht frei von Feldern. Der Wellenzahlvektor \vec{k}_t wird nun komplex, denn es gilt

$$\vec{k}_t = k_t(\cos \varphi_2 \vec{n} + \sin \varphi_2 \vec{e} \times \vec{n})$$

und mit

$$\sin \varphi_2 = A > 1, \cos \varphi_2 = \sqrt{1 - A^2} = \pm j \sqrt{A^2 - 1}$$

folgt

$$\vec{k}_t = \vec{\beta}_1 - j\vec{\alpha}_1$$

wobei

$$\vec{\beta}_1 = k_1 A \vec{e} \times \vec{n}, \vec{\alpha}_1 = k_1 \sqrt{A^2 - 1} \vec{n}.$$

Eine Lösung mit negativem α_1 würde im Medium 2 zu einem exponentiell ansteigenden Feldverlauf führen und ist daher nicht physikalisch. Die Welle in dem Medium 2 ist inhomogen. Ihre Amplituden fallen exponentiell mit der Eindringtiefe ab. Eine Darstellung des Feldverlaufes ist in Abbildung 1.14 dargestellt.

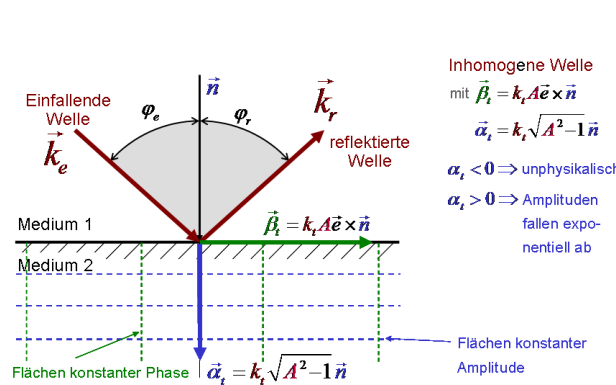


Abb. 1.14: Totalreflexion

Das Feld im Medium 2 trägt eine zeitlich konstante Feldenergie. Diese Energie ist während des Einschaltvorganges in das Medium hineintransportiert worden. Ist die einfallende Welle endlich ausgedehnt, dann tritt Energie an der einen (linken) Grenze der ebenen Welle in das Medium 2 ein, wird parallel zur Grenzfläche transportiert und tritt an der anderen (rechten) Grenze wieder aus. Es ist zu beachten, dass die hier angestellten Betrachtungen nur gültig sind, solange die bestrahlte Fläche deutlich größer als die Wellenlänge λ^2 ist. Kommt die Geometrie dagegen in dieselbe Größenordnung wie die Wellenlänge λ , so muss diese im Detail in der Modellierung mit berücksichtigt werden. Für den Grenzwinkel der Totalreflexion gilt hierbei

$$\varphi_{1,G} := \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

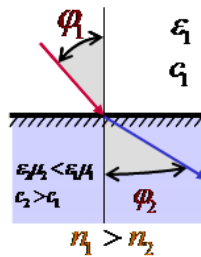


Abb. 1.15: Grenzwinkel der Totalreflexion

Es gibt keine gebrochene ebene Welle. Für unmagnetische Dielektrika ergibt sich als Brewster-Winkel

$$\varphi_{B,E,p} := \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

Die reflektierte Welle ist senkrecht zur Einfallsoberfläche polarisiert, da der parallel polarisierte Anteil vollständig transmittiert wird.

Wie in Abschnitt 1.2.1 für die ebene Welle in einem leitenden Medium gezeigt, lässt sich eine homogene Welle mit Hilfe einer komplexen Wellenzahl beschreiben

$$\underline{k}_t = \vec{\beta}_t - j\vec{\alpha}_t \in \mathbb{C}.$$

Im Fall einer Grenzschicht von einem nichtleitenden zu einem leitenden Medium muss man darüber hinaus noch zulassen, dass die Welle inhomogen ist, dass

also Real- und Imaginärteil von \underline{k}_t unterschiedliche Richtungen haben. Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von \underline{k}

$$k_e \sin \varphi_1 = \underline{k}_t \sin \underline{\varphi}_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\varphi}_2 \in \mathbb{C}$$

folgt, dass der Winkel $\cos \underline{\varphi}_2 = a + jb$ komplex sein muss. Damit ergibt sich für den Winkel der Transmission

$$\begin{aligned} \underline{k}_t &= \underline{k}_t (\cos \underline{\varphi}_2 \vec{n} + \sin \underline{\varphi}_2 \vec{e} \times \vec{n}) \\ &= (\tilde{\beta}_t - j\tilde{\alpha}_t)(a + jb)\vec{n} + k_e \sin \varphi_1 \vec{e} \times \vec{n} \\ &= \underbrace{(\alpha\tilde{\beta}_t)\vec{n} + k_e \sin \varphi_1 \vec{e} \times \vec{n}}_{\vec{\beta}_t} - j \underbrace{(a\tilde{\alpha}_t - b\tilde{\beta}_t)\vec{n}}_{\vec{\alpha}_t}. \end{aligned}$$

Da man hier die Verallgemeinerung einer nichthomogenen Welle erhält, bei der die Richtungen des Real- und des Imaginärteils des Wellenzahlvektors nicht übereinstimmen, gilt auch $\tilde{\beta}_t \neq |\vec{\beta}_t|$ und $\tilde{\alpha}_t \neq |\vec{\alpha}_t|$. Die Welle in dem Medium 2 breitet sich wie in der nachstehenden Abbildung aus. Die Ebenen konstanter Phase verlaufen diagonal zur Grenzfläche.

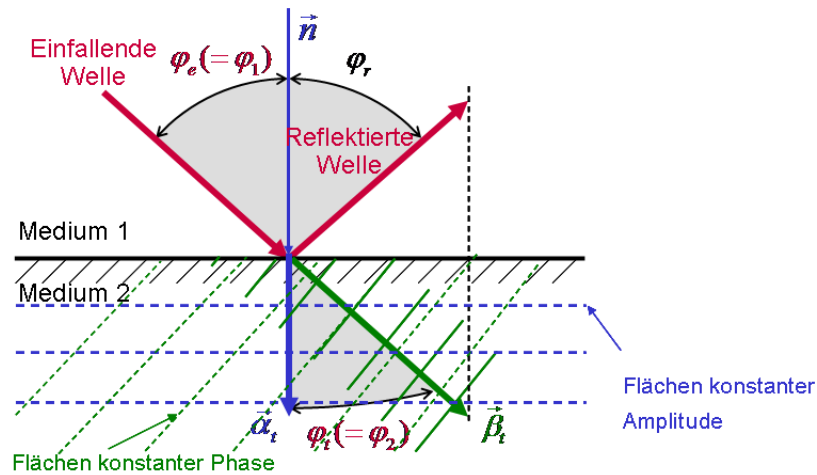


Abb. 1.16: Grenzsicht von einem nichtleitenden zu einem leitenden Medium am Beispiel einer inhomogenen Welle

1.3 Rechteckhohlleiter

Als nächstes soll die technisch wichtige Anwendung der Wellenausbreitung in einem Hohlleiter untersucht werden. Der Hohlleiter ist ein entlang der Zylinderachse unendlich ausgedehnter Hohlraum ($\kappa = 0$) in einem leitfähigen Material ($\kappa \rightarrow \infty$). Es wird nach einer transversalmagnetischen Welle als Lösung gesucht.

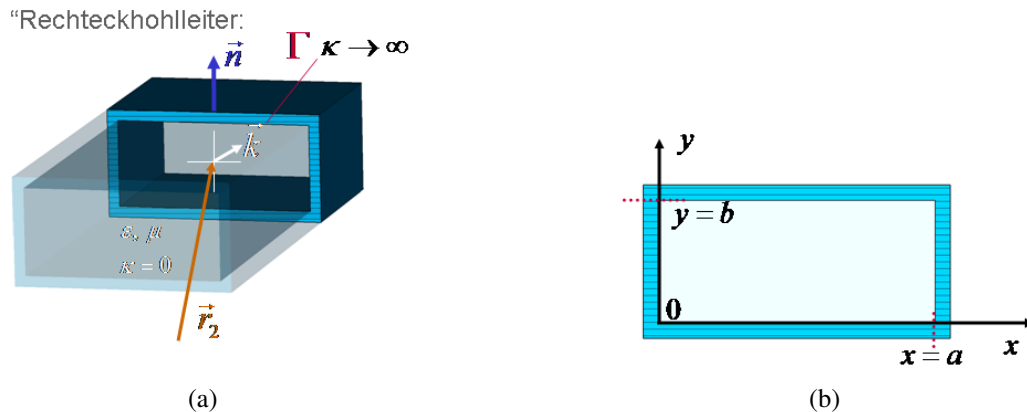


Abb. 1.17: Rechteckhohlleiter

Im Hohlleiter ist ein homogenes isotropes Material vorhanden ($\epsilon, \mu = \mu_0, \kappa = 0$). Es treten zeitharmonische Abhängigkeiten auf. Die bestimmenden Feldgleichungen sind

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \\
 \text{rot } \underline{\vec{H}} &= +j\omega\epsilon\underline{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = \text{rot } \underline{\vec{A}}^H, \\
 \text{div } \underline{\vec{E}} &= 0 \quad \underline{\vec{H}} = \text{rot } \underline{\vec{A}}^E. \\
 \text{div } \underline{\vec{H}} &= 0
 \end{aligned}$$

Für die Ausbreitung der elektromagnetischen Felder in Rechteckhohlleitern gilt

$$\begin{aligned}
 \text{div } \underline{\vec{E}} = 0 &\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \text{rot } \underline{\vec{A}}^H \\
 \text{rot } \underline{\vec{E}} &= \text{rot rot } \underline{\vec{A}}^H \\
 &= \text{grad div } \underline{\vec{A}}^H - \Delta \underline{\vec{A}}^H \\
 &= -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \\
 \text{div } \underline{\vec{H}} = 0 &\Rightarrow \underline{\vec{H}} = \text{rot } \underline{\vec{A}}^E \\
 \text{rot } \underline{\vec{H}} &= \text{rot rot } \underline{\vec{A}}^E \quad (1.23) \\
 &= \text{grad div } \underline{\vec{A}}^E - \Delta \underline{\vec{A}}^E \\
 &= j\omega\epsilon\underline{\vec{E}}.
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich aus (1.23)

$$\begin{aligned}
\text{rot } \underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu \text{rot } \underline{\vec{A}}^E & \text{rot } \underline{\vec{H}} &= +j\omega\varepsilon \underline{\vec{A}}^H \\
\Rightarrow \underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu \underline{\vec{A}}^E - \text{grad } \underline{\Phi}^E & \Rightarrow \underline{\vec{H}} &= +j\omega\varepsilon \underline{\vec{A}}^H + \text{grad } \underline{\Psi}^H \\
\text{grad div } \underline{\vec{A}}^E - \Delta \underline{\vec{A}}^E & & \text{grad div } \underline{\vec{A}}^H - \Delta \underline{\vec{A}}^H & \\
= \omega^2 \varepsilon \mu \underline{\vec{A}}^E - j\omega\varepsilon \text{grad } \underline{\Phi}^E & & = \omega^2 \varepsilon \mu \underline{\vec{A}}^H - j\omega\mu \text{grad } \underline{\Psi}^H.
\end{aligned}$$

Mit der Lorenz-Konvention folgt

$$\begin{aligned}
\text{div } \underline{\vec{A}}^H &= -j\omega\mu \underline{\Psi}^H & \text{div } \underline{\vec{A}}^E &= -j\omega\varepsilon \underline{\Phi}^E, \\
k^2 &= \omega^2 \varepsilon \mu = \frac{\omega^2}{c^2} & \Rightarrow & \Delta \underline{\vec{A}} + k^2 \underline{\vec{A}} = 0.
\end{aligned}$$

Für die Beschreibung des Vektorpotentials reicht die z-Komponente aus

$$\underline{\vec{A}}(x, y, z) = \underline{A}_z(x, y, z) \underline{\vec{e}}_z$$

Es ergibt sich die skalare Helmholtzgleichung

$$\Delta \underline{A}_z + k^2 \underline{A}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \underline{A}_z = 0. \quad (1.24)$$

Um Gleichung (1.24) zu lösen, verwendet man die Methode der Separation und wählt den Bernoulli-Ansatz

$$\underline{A}_z(x, y, z) = \underline{f}(x) \cdot \underline{g}(y) \cdot \underline{h}(z) \quad (1.25)$$

mit welchem die gesuchte Funktion dargestellt werden soll. Es ergibt sich hieraus für Gleichung (1.24)

$$\underbrace{\frac{1}{\underline{f}} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2}}_{=-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{\underline{g}} \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial y^2}}_{=-k_y^2} + \underbrace{\frac{1}{\underline{h}} \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial z^2}}_{=-k_z^2} + k^2 = 0 \quad \text{mit der Dispersionsbeziehung } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

Für den in z-Richtung ausgerichteten Wellenleiter gilt dann

$$\begin{aligned}
\underline{f}(x) &= \underline{A}_1 \cos(k_x x) + \underline{A}_2 \sin(k_x x), \\
\underline{g}(y) &= \underline{B}_1 \cos(k_y y) + \underline{B}_2 \sin(k_y y), \\
\underline{h}(z) &= \underline{C}_1 \exp(+jk_z z) + \underline{C}_2 \exp(-jk_z z).
\end{aligned}$$

Für die weiteren Berechnungen wird eine neue Notation eingeführt

$$\begin{Bmatrix} \cos(k_x x) \\ \sin(k_x x) \end{Bmatrix} = \underline{A}_1 \cos(k_x x) + \underline{A}_2 \sin(k_x x),$$

womit sich Gleichung (1.25) ergibt zu

$$\underline{A}_z(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \cos(k_x x) \\ \sin(k_x x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(k_y y) \\ \sin(k_y y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \exp(+jk_z z) \\ \exp(-jk_z z) \end{Bmatrix}.$$

Im Weiteren wird jeweils ein Ansatz für das elektrische und einer für das magnetische Feld gemacht. Für die TE-Wellen (H-Wellen) gilt

$$\underline{\vec{A}} = \underline{\vec{A}}^H \Rightarrow \underline{\vec{E}} = \text{rot } \underline{\vec{A}}^H \Rightarrow \underline{H}_z \neq 0$$

Somit besitzt das magnetische Feld nur transversale Komponenten

$$\Rightarrow \underline{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } \underline{\vec{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot rot } \underline{\vec{A}}.$$

Für die TM-Wellen ergibt sich (E-Wellen) gilt

$$\underline{\vec{A}} = \underline{\vec{A}}^E \Rightarrow \underline{\vec{H}} = \text{rot } \underline{\vec{A}}^E \Rightarrow \underline{E}_z \neq 0$$

Somit besitzt das elektrische Feld nur transversale Komponenten

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \underline{\vec{H}} = +\frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot rot } \underline{\vec{A}}.$$

Insgesamt ergibt sich für die gesuchten Wellenlösungen

H-Wellen (TE-Wellen)		E-Wellen (TM-Wellen)	
$\underline{E}_x = \frac{\partial}{\partial y} \underline{A}_z$	$\underline{H}_x = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \underline{A}_z$	$\underline{E}_x = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \underline{A}_z$	$\underline{H}_x = \frac{\partial}{\partial y} \underline{A}_z$
$\underline{E}_y = -\frac{\partial}{\partial x} \underline{A}_z$	$\underline{H}_y = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \underline{A}_z$	$\underline{E}_y = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \underline{A}_z$	$\underline{H}_y = -\frac{\partial}{\partial x} \underline{A}_z$
$\underline{E}_z = 0$	$\underline{H}_z = j \frac{k^2 - k_z^2}{\omega\mu} \underline{A}_z$	$\underline{E}_z = j \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\epsilon} \underline{A}_z$	$\underline{H}_z = 0$

Um die Ausbreitung elektromagnetischer Felder in dem Hohlleiter vollständig zu beschreiben, müssen noch die Randbedingungen berücksichtigt werden

$$\begin{aligned} 1) \underline{E}_x(y=0) &= \underline{E}_x(y=b) = 0 \quad \forall x \in [0, a], \\ 2) \underline{E}_y(x=0) &= \underline{E}_y(x=a) = 0 \quad \forall y \in [0, b], \\ 3) \underline{E}_z(y=0) &= \underline{E}_z(y=b) = 0 \quad \forall x \in [0, a], \\ \underline{E}_z(x=0) &= \underline{E}_z(x=a) = 0 \quad \forall y \in [0, b]. \end{aligned}$$

Man betrachtet zunächst die Terme

$$\underline{E}_x = \frac{\partial}{\partial y} \underline{A}_z, \quad \underline{E}_y = -\frac{\partial}{\partial x} \underline{A}_z.$$

Diese erfüllen die Randbedingung 1), 2) nur, wenn die Sinus-Terme verschwinden, also wenn gilt

$$\underline{A}_z^H \sim \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &\sim \cos(k_x x) \sin(k_y y), \\ \underline{E}_y &\sim \sin(k_x x) \cos(k_y y). \end{aligned}$$

Für die Randbedingung bei $x = a$, $y = b$ ergeben sich dann folgende Eigenwerte

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{und} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n, m = 0, 1, 2 \dots (\text{außer } n = m = 0).$$

Die Randbedingung 3) erfordert das Verschwinden der Kosinus-Terme wegen $\underline{E}_z \sim \underline{A}_z^E$, also muss gelten

$$\underline{A}_z^H \sim \sin(k_x x) \sin(k_y y).$$

Für die Randbedingung bei $x = a$, $y = b$ gilt dann

$$\sin(k_y b) = 0, \quad \sin(k_x a) = 0,$$

und es ergeben sich die folgenden Eigenwerte

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{und} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Zusammenfassend existieren also die generellen Lösungen

$$\underline{A}_z(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \cos(k_x x) \\ \sin(k_x x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(k_y y) \\ \sin(k_y y) \end{Bmatrix} \exp(\pm jk_z z),$$

die sich aus der Überlagerung vieler diskreter Eigenlösungen, den sogenannten Eigenmoden, TM_{znm} , TE_{znm} -Moden ($n, m \in \mathbb{N}$ Parameter), zusammensetzen. Bei den TE_{znm} -Moden existieren die Folgenden

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &= -\underline{C}^H \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(\pm jk_z z), \\ \underline{E}_y &= +\underline{C}^H \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(\pm jk_z z), \\ \underline{E}_z &= 0, \\ \underline{H}_x &= \pm \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_y, \\ \underline{H}_y &= \pm \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_x, \\ \underline{H}_z &= -\underline{C}^H \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(\pm jk_z z). \end{aligned}$$

Bei den TM_{znm} -Moden existieren

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= \underline{C}^E \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(\pm jk_z z), \\ \underline{H}_y &= -\underline{C}^E \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(\pm jk_z z), \\ \underline{H}_z &= 0, \\ \underline{E}_x &= \mp \frac{k_z}{\omega\epsilon} \underline{H}_y, \\ \underline{E}_y &= \pm \frac{k_z}{\omega\epsilon} \underline{H}_x, \\ \underline{E}_z &= \underline{C}^E \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\epsilon} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(\pm jk_z z). \end{aligned}$$

1.3.1 Wellenimpedanz

Im diesem Abschnitt wird die Wellenimpedanz, oder auch der Wellenwiderstand, eines Rechteckhohlleiters betrachtet. Die Wellenimpedanz ist gleich dem Verhältnis der Transversalkomponente, das heißt es ist

$$\underline{Z}_W := \frac{\underline{E}_T}{\underline{H}_T}.$$

Für die TE bzw. TM-Wellen gilt somit

$$\underline{Z}_W := \begin{cases} \underline{Z}_{mn}^H = \frac{\omega\mu}{k_z} & \text{TE-Moden,} \\ \underline{Z}_{mn}^E = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} & \text{TM-Moden.} \end{cases}$$

1.3.2 Ausbreitung von Moden in Rechteckhohlleitern

Die Propagations-Charakteristik der einzelnen Moden ist bestimmt durch die longitudinale Wellenzahl k_z . Über die Dispersionsbeziehung kann zu den transversalen Wellenzahlen k_x, k_y ein Zusammenhang dargestellt werden durch

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \Rightarrow k_z^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (k_x^2 + k_y^2) = \frac{\omega^2}{c^2} - (k_x^2 + k_y^2).$$

Wellen breiten sich in Hohlleitern erst ab einer bestimmten Kreisfrequenz ω aus. Diese muss größer sein als die sogenannte Grenzfrequenz. Die Grenzfrequenz ist von den Abmessungen des Hohlleiters abhängig. Es soll nun untersucht werden, für welche Kreisfrequenzen eine Ausbreitungsfähigkeit der Moden gegeben ist:

- Für $\frac{\omega^2}{c^2} > (k_x^2 + k_y^2) \Rightarrow k_z^2$ positiv $\Rightarrow \text{Re}\{\exp(jk_z z)\} = \cos(k_z z)$. Es entstehen *propagierende* Moden. Weiterhin gilt

$$\left. \begin{array}{l} Z_{mn}^H = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} \\ Z_{mn}^E = \frac{\alpha_{mn}}{\omega\varepsilon} \end{array} \right\} = \text{reiner Wirkwiderstand.}$$

- Für $\frac{\omega^2}{c^2} < (k_x^2 + k_y^2) \Rightarrow k_z = j\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Re}\{\exp(jk_z z)\} = \cos(-\alpha z)$. Die Moden erfahren somit eine exponentielle Dämpfung in z-Richtung. Weiterhin gilt

$$\left. \begin{array}{l} Z_{mn}^H = \frac{j\omega\mu}{\alpha_{mn}} \\ Z_{mn}^E = \frac{\alpha_{mn}}{j\omega\varepsilon} \end{array} \right\} = \text{reiner Blindwiderstand.}$$

Für die Grenzfrequenz, oder auch *Cut-Off-Frequenz*, ergibt sich

$$f_{c\ mn} := \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (1.26)$$

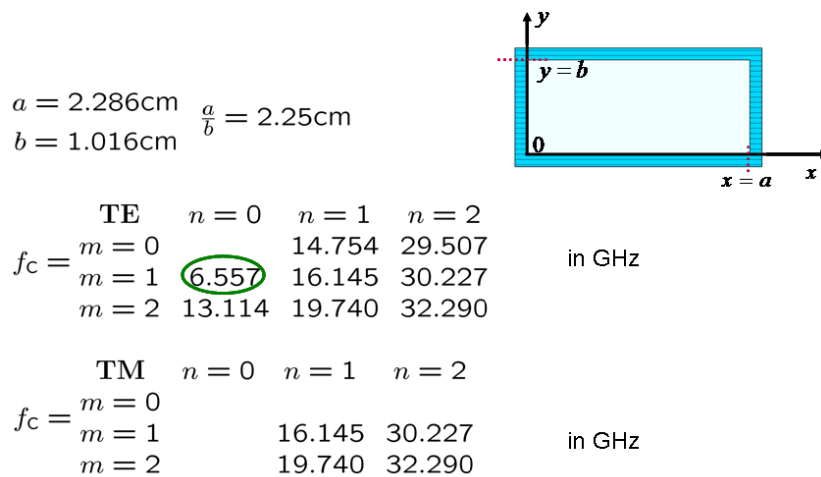
Mit

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{und} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

ergeben sich die Cut-Off-Frequenzen des Wellenleitermodes (m,n)

$$f_{c\ mn} := \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}$$

Die Parameter a, b stehen wiederum für die Abmessungen des Rechteckhohlleiters. Somit lässt sich ein Hohlleiter als Hochpass-Filter verwenden. Es folgt ein Rechenbeispiel.



Für $a > b$: Mode mit **kleinster Cut-Off-Frequenz** (Hier: $m=1, n=0$)

= **TE₁₀-Mode** = **H₁₀-Mode** (= "Grundmode")

Abb. 1.18: Rechenbeispiel: Rechteckhohlleiter

Die zu einer Frequenz f im Wellenleiter zugehörigen Wellenlänge λ_G berechnet sich aus

$$\lambda_G := \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\Lambda}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda & \text{ Freiraum Wellenlänge,} \\ \lambda_c & \text{ Cut-Off Wellenlänge,} \\ \Lambda & < 1. \end{aligned}$$

Für die *Dispersionsrelation* im freien Raum, also die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k , ergibt sich

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Für die *Dispersionsrelation* im Wellenleiter gilt unter Berücksichtigung der Cut-Off-Frequenzen der verschiedenen Moden

$$k_z = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_c^2}$$

Wenn die Frequenz unterhalb der Cut-Off-Frequenz liegt wird k_z^2 negativ und k_z wird imaginärwertig. "Degenerierte Moden" haben dieselbe Cut-Off-Frequenz und dieselbe Dispersionskurve. Die nachstehenden Abbildungen geben die Zusammenhänge der beiden Dispersionsgrößen für einen Hohlleiter (bzw. Wellenleiter) wieder.

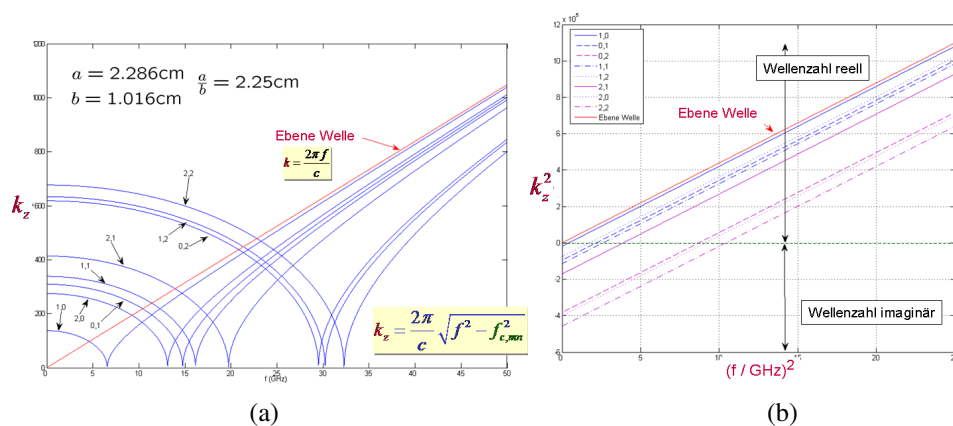


Abb. 1.19: Dispersion im Hohlleiter (bzw. Wellenleiter)

1.3.3 Ausbreitung von Wellen in Hohlleitern

In Hohlleitern existiert aufgrund der Dispersion ein Unterschied zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Es gilt

$$\text{Dispersionsbeziehung: } \omega = \omega(k_z),$$

$$\text{Phasengeschwindigkeit: } v_{ph} := \frac{\omega(k_z)}{k_z},$$

$$\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_{gr} := \frac{d\omega(k_z)}{dk_z}.$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist dabei wesentlich für den Energie- und Informationstransport. Im dispersionsfreien Fall ist $v_{ph} = \text{const.}$ für alle Wellenlängen. Daraus folgt, dass auch $v_{ph} = v_{gr}$ gelten muss. Die Energie des Feldes wird im Hohlleiter im räumlichen und zeitlichen Mittel mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

in z-Richtung transportiert. Allgemein ist $v_{ph}v_{gr} = c^2$. Im Hohlleiter hingegen erfolgt der Energietransport (= Informationstransport) mit einer Geschwindigkeit, die kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit, d.h.

$$[0 \leq \underbrace{\frac{c^2}{v_{ph}}}_{\text{Gruppengeschw.}} < c]$$

Diese geschilderten Zusammenhänge verdeutlicht die nachstehende Abbildung noch einmal graphisch

Für die Phasengeschwindigkeit im Rechteckhohlleiter gilt allgemein mit

$$k_z^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (k_x^2 + k_y^2) = \frac{\omega^2}{c^2} - (k_x^2 + k_y^2),$$

dass

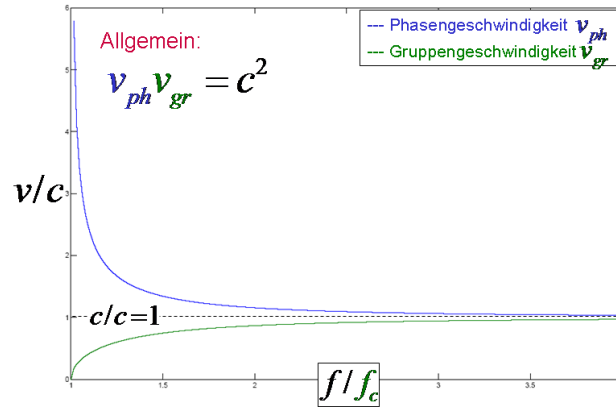


Abb. 1.20: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in einem Hohlleiter

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \lambda_z f = \frac{c}{\Lambda} > c. \quad (1.27)$$

Aus (1.27) folgt dann

$$c \leq v_{ph} < \infty.$$

Die Ausbreitung der Phasenfront (bzw. eines Wellenknotens) im Hohlleiter erfolgt also mit Überlichtgeschwindigkeit.

Für den Energietransport im Hohlleiter betrachtet man wiederum den Poynting-schen Vektor

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \}. \quad (1.28)$$

Für den H_{10} -Mode ergibt sich aus (1.28)

$$\underline{\vec{S}}_{10}^H = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{\vec{E}}_{10}^H \times \underline{\vec{H}}_{10}^{*H} \} \Rightarrow \underline{\vec{S}}_{10}^H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\underline{\vec{E}}_y \underline{\vec{H}}_x^* \end{pmatrix}.$$

Die im Hohlleiter in Axialrichtung transportierte Leistung pro Periode lässt sich ermitteln aus

$$P = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint \underline{\vec{E}}_y \underline{\vec{e}}_z \cdot \underline{\vec{H}}_x^* \underline{\vec{e}}_z \, dA \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_A \underline{\vec{E}}_y \underline{\vec{e}}_z \cdot \frac{\underline{\vec{E}}_y^*}{\underline{Z}_{10}^H} \underline{\vec{e}}_z \, dA \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{|\vec{E}_y|^2}{Z_{10}^H} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\hat{E}_y^2}{Z_{10}^H} \int_0^b \int_0^a \sin^2(k_x x) dx dy. \quad (1.29)$$

Für PEC-berandete Hohlleiter vereinfacht sich Gleichung (1.29) zu

$$P = \frac{\hat{E}_y^2}{Z_{10}^H} \frac{ab}{4}.$$

Die Abweichungen zu den normalleitenden Hohlleitern entstehen durch die Wandverluste.

1.3.4 Lösen der Maxwell-Gleichungen in Hohlräumen

Elektromagnetische HF-Felder lassen sich in geschlossenen Hohlräumen durch die folgenden Gleichungen beschreiben

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} & \vec{E} &= \text{rot } \vec{A}^H \\ \text{rot } \vec{H} &= +j\omega\varepsilon\vec{E} & \Rightarrow & \vec{H} = \text{rot } \vec{A}^E & \Rightarrow & \Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = 0 \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Für die Gleichungen in (1.30) lassen sich nur bei einfachen Geometrien (Rechteckgenreatoren, Zylinder- und Koaxialresonatoren) analytische Lösungen finden. Hierfür interpretiert man den Hohlleiter mit geschlossenen Enden. Es gelte folgende Klassifikation

- TM-Moden (E-Moden): longitudinale Komponenten des elektrischen Feldes, nur transversale Magnetfeldkomponenten
- TE-Moden (H-Moden): longitudinale Komponenten des magnetischen Feldes, nur transversale Komponenten des elektrischen Feldes

1.3.5 Rechteckresonatoren

Es werden zwei Wellen im verlustfreien Wellenleiter mit identischen Modenmuster $\vec{E}(x, y)$, aber einer in unterschiedliche Richtungen ($\pm z$) gehende Propagation betrachtet. In dem Rechteckre-sonator sind im Abstand

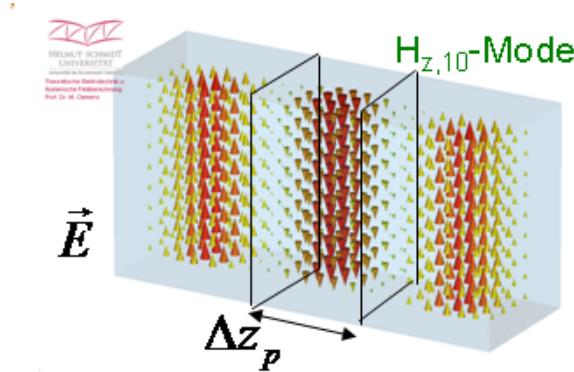


Abb. 1.21: Rechteckresonatoren mit PES-Wänden, CST MWS 5.2

$$\Delta z_p = L = \frac{p\pi}{k_z} \quad (p \in \mathbb{N})$$

PEC- Wände eingebracht, wie auch die folgende Abbildung zeigt
Für die stehende Welle gilt

$$\vec{E}(x, y) \cdot (e^{-jk_z z} + e^{+jk_z z}) = \vec{E}(x, y) \cdot 2 \cos(k_z z).$$

Als Nullstellen des elektrischen Feldes in z-Richtung der TE-Welle (E-Feld hat nur transversale Komponenten) ergeben sich

$$k_z z = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \cos(k_z z) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (1.31)$$

Die Nullstellen für TM-Wellen ergeben sich analog zu (1.31). Es ist zu beachten, dass k_z nur von der Frequenz abhängt und die PEC-Wände hierdurch nur für bestimmte Frequenzen durchlässig sind.

Statt einer stetigen Beziehung zwischen der Wellenzahl k_z und der Kreisfrequenz ω gilt

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{\Delta z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Es existieren somit unendlich viele diskrete Lösungen. Die Eigenfrequenzen/Resonanzfrequenzen des Rechteckgenerators sind

$$f_{mnp} := \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{\Delta z}\right)^2}.$$

Kapitel 2

Das Finite Differenzenverfahren (FD)

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen und Felder im Raum und der Zeit kann in der klassischen Elektrodynamik mit den, um die Materialbeziehungen ergänzten, Maxwell'schen Gleichungen beschrieben werden. Analytische Lösungen dieser Gleichungen sind nur bei sehr einfachen Problemstellungen möglich. Um dennoch elektromagnetische Felder in komplexen Problemstellung berechnen zu können bedient man sich Methoden die das Problem auf, für Computer lösbare, Gleichungssysteme reduzieren können. In diesem Kapitel soll die numerische Methode der Finiten Differenzen behandelt werden. Das Differenzenverfahren wird bei der Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, z.B. der Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form, eingesetzt. Zur Erinnerung an die "Theoretische Elektrotechnik I":

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}, t) &= \rho(\vec{x}, t) \\ \forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Bei der Anwendung der FD wird zunächst das Lösungsgebiet in ein Gitter unterteilt. Dabei stellen die Schnittpunkte der Gitterlinien Knoten dar, auf denen die Lösung angenähert wird. Die in den zur Beschreibung der Lösung benötigten räumlichen sowie zeitlichen Ableitungen in den Differentialgleichungen werden durch Differenzenquotienten (vgl. Abschnitt 2.1) ersetzt und nur an den endlich

Knoten berechnet. Die Lösung an einem Knoten des Gitters wird somit durch Beziehung der Lösungen zu benachbarten Knoten errechnet. Gegeben sind diese Beziehungen durch die in den Differentialgleichungen verwendeten Ableitungen.

2.1 Die Differenzenoperatoren

In der Abbildung 2.1 ist die gesuchte Lösung, die skalare Funktion $u(x)$, in blau eingezeichnet. $u(x)$ sei eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $\forall x \in \Omega$. Das Gebiet wurde durch ein Gitter der Schrittweite h zerlegt.

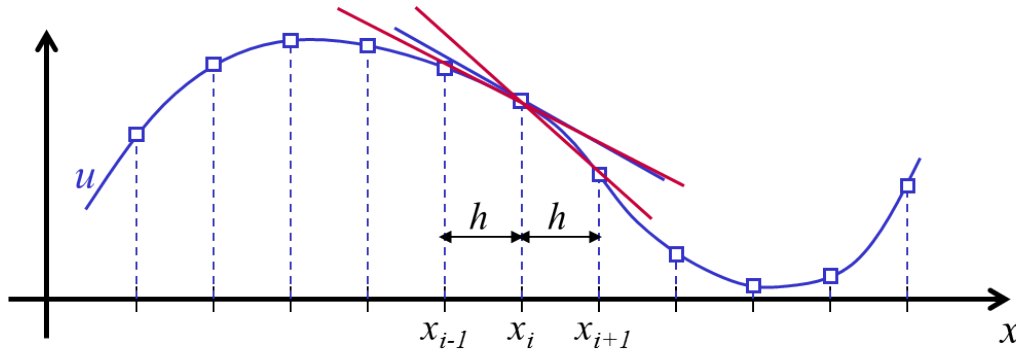


Abb. 2.1: Eindimensionales Gitter über der Lösungsfunktion $u(x)$.

An der Stelle $x_i + h$ lässt sich die Funktion mittels der Taylorreihenentwicklung beschreiben als:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = \sum_{n=0}^2 u^{(n)}(x_i) \cdot \frac{h^n}{n!} \\ &= u(x_i) + u^{(1)}(x_i)h + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Stellt man diese Gleichung nach der ersten Ableitung um, so erhält man die "Vorwärtsdifferenz" $(D^+u)(x_i)$ mit einem Fehler O der ersten Ordnung:

$$(D^+u)(x_i) \triangleq \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}. \quad (2.3)$$

Analog lässt sich die "Rückwärtsdifferenz" als

$$(D^-u)(x_i) \triangleq \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \quad (2.4)$$

bilden. Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz sind in der Abbildung 2.1 als rote Geraden eingezeichnet. Dabei gilt für $\lim h \rightarrow 0$:

$$u^{(1)}(x_i) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}. \quad (2.5)$$

Die Differenz der Taylorreihenentwicklung aus Gleichung (2.2) bis zur zweiten Ableitung für $u(x_i + h)$ und $u(x_i - h)$ ergibt:

$$\begin{aligned} u(x_i + h) - u(x_i - h) &= u(x_i) + u^{(1)}(x_i)h + u^{(2)}(x_i)\frac{h^2}{2} - \left[u(x_i) - u^{(1)}(x_i)h + u^{(2)}(x_i)\frac{h^2}{2} \right] + O(h^3). \\ &= 2u^{(1)}(x_i)h + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für die Näherung der ersten Ableitung an x_i ergibt dies die "Symmetrische Differenz" mit einem Fehler der Ordnung 2:

$$(D^0 u)(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}. \quad (2.7)$$

Um die Näherung der zweiten Ableitung, der sogenannten "zweiten Differenz", zu bestimmen wird analog zu Gleichung (2.6) die Summe der Taylorreihenentwicklungen an $u(x_i + h)$ und $u(x_i - h)$ betrachtet:

$$\begin{aligned} u(x_i + h) + u(x_i - h) &= u(x_i) + u^{(1)}(x_i)h + u^{(2)}(x_i)\frac{h^2}{2} + \left[u(x_i) - u^{(1)}(x_i)h + u^{(2)}(x_i)\frac{h^2}{2} \right] + O(h^3) \\ &= 2u(x_i) + u^{(2)}(x_i)h^2 + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hieraus folgt:

$$(D^+ D^- u)(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2}. \quad (2.9)$$

2.2 Beispiel: Eindimensionale Poisson-Gleichung

Gegeben sei die Poisson-Gleichung mit

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = (0, 1), \quad (2.10)$$

weiter sind die Dirichlet-Randbedingungen für $u(0) = g_l$ und $u(1) = g_r$ bekannt. Der Operator Δ ist der sogenannte Laplaceoperator. Für ein eindimensionales Problem in einem kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.11)$$

Aus Gleichung (2.8) bzw. (2.9) ist bekannt das gilt:

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) = -(D^+D^-u)(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2} + O(h^2). \quad (2.12)$$

Zunächst wird das Gebiet $\Omega = (0, 1)$ mit einem Gitter der Schrittweite h , wie in Abbildung 2.2 gezeigt, diskretisiert.

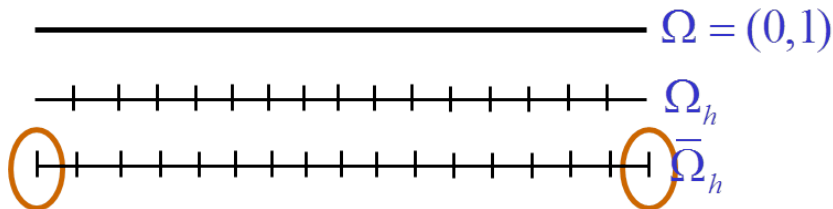


Abb. 2.2: Diskretes Gebiet Ω

Damit gilt auf dem betrachtetem Gitter

$$\Omega_h = \{h, 2h, \dots, (N-1)h = 1-h\}, h = 1/N \quad (2.13)$$

$$\bar{\Omega}_h = \{0, h, \dots, (N-1)h, Nh\}, \quad (2.14)$$

$$-(D^+D^-u)(x) = f(x) + O(h^2) \quad \forall x \in \Omega_h. \quad (2.15)$$

Streiche den $O(h^2)$ -Term (= "Diskretisierung")

$$u(x) \Rightarrow u_h(x) \quad \forall x \in \Omega_h, \quad (2.16)$$

$$-(D^+ D^- u_h)(x) = -\frac{u_h(x+h) - 2u_h(x) + u_h(x-h)}{h^2} = f(x) \quad \forall x \in \Omega_h. \quad (2.17)$$

Daraus folgen (N-1) Gleichungen für (N+1) Unbekannte für $\{u_h(x)|x \in \bar{\Omega}_h\}$. Die Randbedingungen an $u_h(0) = g_l$ und $u_h(1) = g_r$ sind bekannt. Da die Gitterfunktion u_h auf Ω_h beschränkt ist lässt sich u_h als Vektor aufschreiben:

$$\begin{aligned} u_h &= (u_h(h), u_h(2h), \dots, u_h(1-h))^T \\ &= (u_h(x_1), u_h(x_2), \dots, u_h(x_{N-1}))^T. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Gleichung (2.17) lässt sich als lineares Gleichungssystem zu

$$L_h u_h = f_h \quad (2.19)$$

auffassen, dabei ist L_h der Differenzoperator.

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_h = \begin{pmatrix} f(h) + \frac{1}{h^2} g_l \\ f(2h) \\ f(3h) \\ \vdots \\ f(1-2h) \\ f(1-h) + \frac{1}{h^2} g_r \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Das tridiagonale Gleichungssystem lässt sich beispielsweise mit dem Gauß-Algorithmus lösen, dabei ist der lineare Aufwand = $O(N)$.

2.3 Lineare Randwertaufgabe

Die betrachtete lineare Randwertaufgabe ist gegeben durch:

$$Lu := -u'' - b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (2.21)$$

Als Gebiet der inneren Gitterpunkte gilt für Ω_h :

$$\Omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1(1)N - 1\}. \quad (2.22)$$

Die Gitterfunktion u_h sei

$$u_h = (u_h(x_1), u_h(x_2), \dots, u_h(x_{N-1}))^T. \quad (2.23)$$

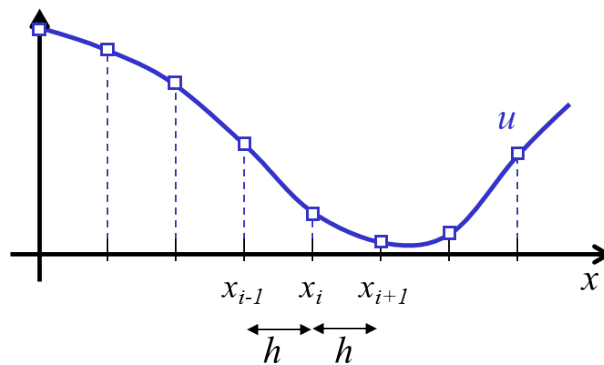


Abb. 2.3: Lineare Randwertaufgabe

Die Terme der Differentialgleichung aus Gleichung (2.21) können in dem klassischen Differenzenverfahren wie folgt diskretisiert werden.

$$\begin{aligned} u''(x_i) &\approx D^+(D^- u_i) \\ b(x_i)u'(x_i) &\approx b_i D^0 u_i \\ c(x_i)u(x_i) &\approx c_i u_i \\ f(x_i) &\approx f_i. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Damit ergibt sich die Gleichung (2.21) zu:

$$-D^+(D^-u_i) - b_i D^0 u_i + c_i u_i = f_i, \quad i = 1(1)N-1. \quad (2.25)$$

Dies lässt sich ebenfalls als tridiagonales Gleichungssystem als:

$$r_k u_{k-1} - s_k u_k + t_k u_{k+1} = f_k, \quad k = 1(1)N-1, \quad u_0 = u_N = 0. \quad (2.26)$$

Die Koeffizienten von u_k sind dabei:

$$s_k = c_k + \frac{2}{h^2}; \quad r_k = -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} b_k; \quad t_k = -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} b_k. \quad (2.27)$$

Der Differenzoperator L_h

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h|_{\gamma_h} = 0. \quad (2.28)$$

Definition "Konvergenz":

Das Differenzenverfahren heißt konvergent von der Ordnung k , wenn gilt:

$$\max_i |u(x_i) - u_i| \leq Ch^k \quad (2.29)$$

Die Abbildung 2.4 zeigt die auf das Gitter eingeschränkte Funktion u .

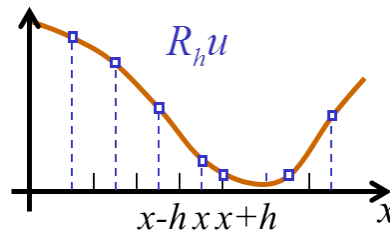


Abb. 2.4: Einschränkung der Funktion u auf das Gitter

Mit der Gitterfunktion aus Gleichung 2.23 kann man das Gleichungssystem wie folgt schreiben:

$$L_h \underbrace{(R_h u - u_h)}_{\text{"Fehler"}} = L_h R_h u - L_h u_h = L_h R_h u - f_h = L_h R_h u - R_h L u \quad (2.30)$$

Definition "Konsistenz": Das Differenzenverfahren heißt konsistent von Ordnung k (in der diskreten Maximumsnorm), wenn gilt:

$$\|L_h R_h u - R_h L u\|_{\infty, \Omega_h} \leq C h^k \quad (2.31)$$

Definition "Stabilität" Folgt aus $L_h v_h = f_h$, $v_h|_{\{x_0, x_N\}} = 0$ die Ungleichung $\|v_h\|_{\infty, \Omega_h} \leq C \|f_h\|_{\infty, \Omega_h}$, so heißt das Verfahren stabil.

Für das Differenzenverfahren gilt:

Konsistenz + Stabilität \rightarrow Konvergenz

Satz Es sei

$$u \in C^4[0, 1], h > 0$$

hinreichend klein. Dann ist das klassische Differenzenverfahren stabil und von der Konvergenzordnung 2, das heißt:

$$\max_i |u(x_i) - u_i| \leq C \cdot h^2 \quad (2.32)$$

C ist dabei eine Konstante unabhängig von h .

$$u \in C^4[0, 1]$$

ist eine hinreichend glatte Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$. Der Beweis hierzu ist zu finden in Grossmann/Roos, Numerik partieller Differentialgleichungen, Teubner, 1994, 2.Aufl., S.16.

2.4 Beispiel: Zweidimensionale Poisson-Gleichung

Gegeben sei die Poisson-Gleichung mit

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ für } (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (2.33)$$

weiter sind die Dirichlet-Randbedingungen

$$u = g \text{ für } (x, y) \in \Gamma := \bar{\Omega} \setminus \Omega \quad (2.34)$$

Das durch ein zweidimensionales Gitter diskretisierte Gebiet $\bar{\Omega}_h$ wird in der Abbildung 2.5 gezeigt.

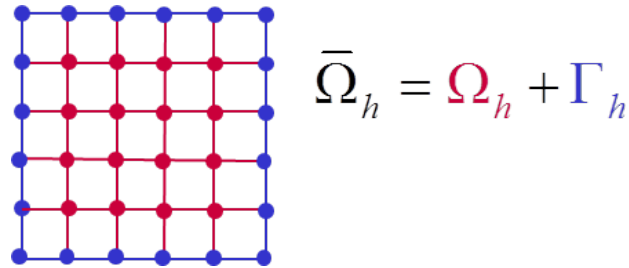


Abb. 2.5: Zweidimensionales Gitter mit Dirichlet-Randbedingungen

Für die zweite Differenz in zwei Dimensionen lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} (\Delta_h u)(x, y) &:= -(D_x^+ D_x^- + D_y^+ D_y^-)u(x, y) \\ &= - \left[\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} \right] \\ &= - \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Zur Verdeutlichung der Gleichung (2.35) ist in Abbildung ?? der "Fünf Punkte Finite-Differenzen-Stern" gezeigt.

Damit führt das klassische Differenzenverfahren zu

$$\begin{aligned} \Delta_h u_h(x, y) &= f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega_h \\ u_h(x, y) &= g(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Gamma_h. \end{aligned} \quad (2.36)$$

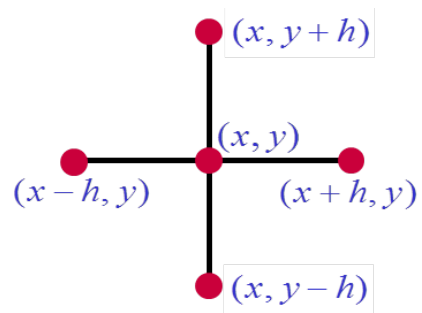


Abb. 2.6: Fünf Punkte Finite-Differenzen-Stern

Kapitel 3

Die Finite Integrationstechnik (FIT)

3.1 Einführung des Rechengitters

Mittels der in diesem Kapitel betrachteten Finiten Integrationstechnik sollen die integralen Maxwellgleichungen im Inneren eines beliebigen Volumens numerisch berechnet werden. Die differentielle und integrale Form der Maxwellgleichungen lautet wie folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, & \oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}, \\ \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}, & \oint_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} &= \int_A \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A}, \\ \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, & \oint_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t), & \oint_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} &= \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \\ \forall \vec{r} \in \Omega \subseteq R^3, & & \forall A \subset \Omega \subseteq R^3. & \end{aligned} \tag{3.1}$$

Zur Berechnung der Maxwellgleichungen führt man eine Diskretisierung der Integralgleichungen auf dem betrachteten Volumen ein. Hierzu belegt man das Volumen mit einem zunächst beliebigen Gitter G , an dessen Stützstellen die zu jeweiligen Felder berechnet werden. Jedes Gitter besteht dabei aus elementaren geometrischen Bausteinen.

Das Gitter G entspricht somit einer Zerlegung des Raumes in geometrische Elementarfiguren, die sich wie folgt definieren lassen

- Gitterzellen V_n ($n = 1, \dots, N_V$) (Elementarvolumina, cells) werden begrenzt durch mehrere

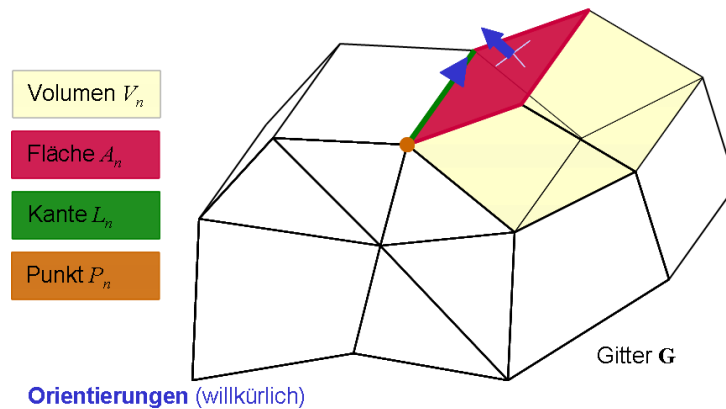


Abb. 3.1: Elementare Bausteine der Diskretisierungs-Gitters

- Gitterflächen A_n ($n = 1, \dots, N_p$) (Elementarflächen, facets) werden begrenzt durch mehrere
- Gitterkanten A_n ($n = 1, \dots, N_p$) werden begrenzt durch zwei
- Gitterpunkte P_n ($n = 1, \dots, N_p$) (Knoten, vertices)

Dabei besitzen die geometrischen Objekte eine innere Orientierung, die grundsätzlich beliebig gewählt werden kann. Allerdings müssen die Kanten und Flächen klar definiert sein. Im Weiteren wird für das Gitter ein orthogonales Koordinatensystem (u, v, w) angenommen.

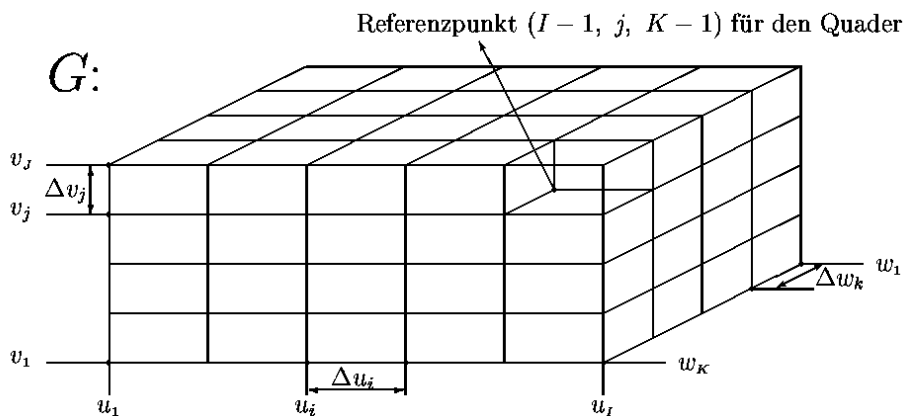


Abb. 3.2: Der Gitter-Raum

Für den in Abbildung 3.2 wird nun eine lexikographische Indizierung durchgeführt. Die Elementarfiguren des Gitters G sind von allen drei Raumrichtungen

abhängig. Das Rechenvolumen lässt sich somit über die einzelnen Gitterpunkte definieren zu

$$G = \left\{ (u(i), v(j), w(k)) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{aligned} &u(1) < u(i) < u(I), \\ &v(1) < v(j) < v(J), \\ &w(1) < w(k) < w(K) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Durch die lexikographische Indizierung werden die Elementarfiguren "aufsteigend" nummeriert. Es ließe sich allerdings auch jede andere beliebige Nummerierung durchführen. Es besteht eine gleiche Anzahl von Punkten, Kanten, Flächen und Zellen. Allerdings ist zu beachten, dass einige Figuren außerhalb des Gitters liegen und somit in diesem gar nicht existieren. Die Kanten, Flächen und die später einzuführenden Zustandsgrößen sind in u,v,w-Richtung orientiert. Zur Vereinfachung der Nummerierung der Punkte lässt sich noch ein 1D-Indizierungsschema einführen mit einem neuen Nummerierungsparameter n

$$\begin{aligned} n &= (k-1) \cdot I \cdot J + (j-1) \cdot I + i \\ &= (k-1) \cdot M_w + (j-1) \cdot M_v + (i-1) \cdot M_u + 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Durch Gleichung (3.3) wird jeder Gitterpunkt nur noch durch einen und nicht mehr durch drei Nummerierungsparameter beschrieben. Es gilt dabei $M_u = 1$, $M_v = I$, $M_w = I \times J$. Man schreitet somit zunächst in u-, dann in v- und dann in w-Richtung durch das Gitter.

3.2 Diskretisierung des Induktionsgesetzes

Das Induktionsgesetz aus der ersten Gleichung in (3.1) wird nun auf dem eingeführten Rechengitter betrachtet. Hierzu wird zunächst die linke Seite der Gleichung für eine einzelne Gitterfläche untersucht.

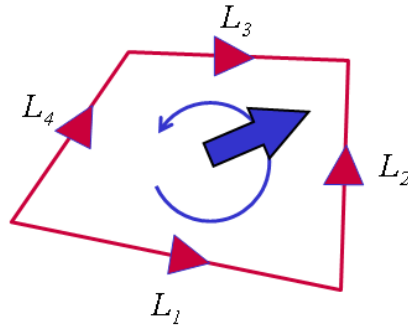


Abb. 3.3: Induktionsgesetz für eine Gitterfläche, linke Seite

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} &= + \int_{L_1} + \int_{L_2} - \int_{L_3} - \int_{L_4} \\ &= +\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3 - \hat{e}_4. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die linke Seite der ersten Gleichung in (3.1) wird ersetzt durch die Summe der Teilintegrale über die einzelnen Kanten

$$L_1, L_2, L_3, L_4$$

des betrachteten Flächenelements. Die Vorzeichen richten sich dabei nach der Orientierung der jeweiligen Kante. Die in Gleichung (3.4) neu eingeführten **skalaren** Größen bezeichnet man als **elektrische Gitter- bzw. Kantenspannungen** und es gilt

$$\begin{aligned} \hat{e}_n &:= \int_{L_n} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \text{elektrische Gitterspannung (Kantenspannung)} \\ &= \text{Zustandsgröße der FI-Methode.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für die rechte Seite des Induktionsgesetzes aus Gleichung (3.1) geht man nun analog vor.

$$-\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \hat{b}_n. \quad (3.6)$$

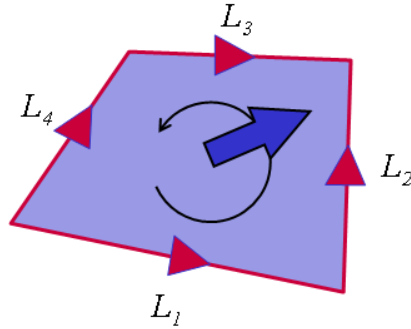


Abb. 3.4: Induktionsgesetz für eine Gitterfläche, rechte Seite

Die rechte Seite des Induktionsgesetzes wird durch die neu eingeführte **skalare** Größe des **magnetischen Gitterflusses bzw. Flächenflusses** ersetzt und es ist

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_n &:= \int_{A_n} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} && = \text{magnetischer Gitterfluss(Flächenfluss)} \\ &= \text{Zustandsgröße der FI-Methode.} && (3.7) \end{aligned}$$

Das Vorzeichen des Flächenintegrals in (3.6) ist dabei wiederum der Orientierung angepasst. Das gesamte Induktionsgesetz für eine Gitterfläche lautet damit

$$\oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \Rightarrow +\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3 - \hat{\mathbf{e}}_4 = -\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{b}}_n \quad (3.8)$$

Der Vorteil dieser diskreten Darstellung des Induktionsgesetzes in (3.8) liegt darin begründet, dass es sich um eine näherungsfreie Darstellung handelt. Dieses Vorgehen führt man nun für jede auftretende Gitterfläche des Rechnengitters G durch. Die sich ergebenden Gitterspannungen und -flüsse lassen sich in einem jeweiligen Spaltenvektor zusammenfassen

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{e}}_{N_L} \end{pmatrix} \quad \text{Dimension Anzahl } N_L \text{ der Kanten} \quad (3.9)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_{N_A} \end{pmatrix} \quad \text{Dimension Anzahl } N_A \text{ der Flächen} \quad (3.10)$$

Durch die Vektoren in (3.9), (3.10) lässt sich die vektoranalytische Gleichung des Induktionsgesetzes auf der linken Seite in (3.8) in eine lineare Matrizen-Gleichung überführen

$$C\hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt}\hat{\hat{\mathbf{b}}}. \quad (3.11)$$

Dies ist die **1. Gitter-Maxwell-Gleichung**. Die in Gleichung (3.11) auftretende **quadratische** Matrix C nennt man **Umlaufmatrix** oder **curl-Matrix** (*curl: enl. Rotation*). Die Matrix C besteht aus N_A Zeilen und N_L Spalten und ist ein **topologischer** Matrixoperator, der die Topologie des rot-Operators beschreibt. Es handelt sich um eine **dünnbesetzte (sprase)** Matrix. Allerdings ist zu beachten, dass die Rechenzeit und der Speicherplatz (operation count) linear mit der Größe des Gitters anwachsen.

Der genaue Aufbau der Matrix C ist von dem Aufbau des Indizierungsschemas abhängig. Die Matrix enthält dabei keine Informationen über Länge der Kanten, Winkel oder Flächeninhalt des Rechengitters, Die Matrix ist somit "metrikfrei". In jeder Zeile tritt nur eine begrenzte Anzahl von Einträgen auf. Dabei handelt es sich genau um die Anzahl der Kanten, die eine Fläche begrenzen. Typisch sind drei bis sechs Einträge. Die Einträge der Matrix bestehen nur aus $+1$, -1 , 0 . Je nachdem, ob zwei Elementarflächen über eine Kante in Beziehung stehen (Inzidenzbeziehung) oder nicht und die dazugehörige Orientierung der Kante.

3.3 Diskretisierung von $\text{div } \mathbf{B}=0$

Die dritte Maxwellsche Gleichung aus (3.1), das Gesetz der Nichtexistenz magnetischer Ladungen, wird nun analog zum Abschnitt 3.2 auf dem eingeführten Rechengitter G diskretisiert.

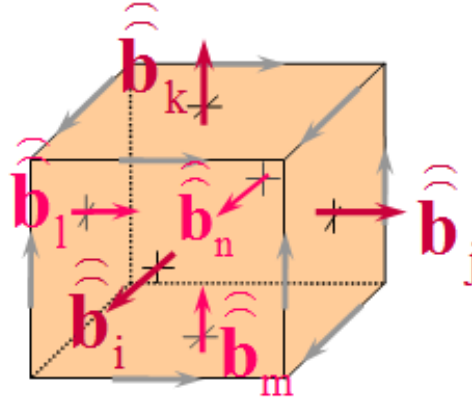


Abb. 3.5: $\text{div} = 0$ für eine Volumenzelle

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} &= + \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_3} - \int_{A_4} - \int_{A_5} - \int_{A_6} \\ &= \hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_j + \hat{\mathbf{b}}_k - \hat{\mathbf{b}}_l - \hat{\mathbf{b}}_m - \hat{\mathbf{b}}_n \end{aligned} \quad (3.12)$$

Man betrachtet zunächst eine beliebige Volumenzelle V des Rechengitters G . Die linke Seite der Gleichung wird ersetzt durch die Summe der Teilintegrale über die einzelnen Flächen $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ des betrachteten Volumenelements. Die Vorzeichen richten sich dabei nach der Orientierung der jeweiligen Fläche. Diskretisiert man die Gleichung analog auf allen Volumenzellen ergibt sich mit dem Spaltenvektor aus (3.10)

$$S \hat{\mathbf{b}} = 0. \quad (3.13)$$

Dies ist die **3. Gitter-Maxwell-Gleichung**. Die in Gleichung (3.13) auftretende quadratische Matrix S nennt man **Quellenmatrix** oder **source-Matrix**. Die Matrix S besteht aus N_S Zeilen und N_A Spalten und ist ebenfalls ein topologischer Matrixoperator.

3.4 Die Operatormatrizen C und S

3.4.1 Aufbau der Matrizen

Für die quadratischen Matrizen C und S aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden nun deren Aufbau und einige ausschlaggebende Eigenschaften charakterisiert. Hierzu betrachtet man weiterhin ein kartesisches Gitter. Die Matrix C besitzt die folgende Darstellung

$$C = \begin{pmatrix} & \text{---} P_w \text{---} & \text{---} P_v \text{---} \\ \text{---} P_w \text{---} & & \text{---} P_u \text{---} \\ \text{---} P_v \text{---} & \text{---} P_u \text{---} & \end{pmatrix}$$

Abb. 3.6

Für die Quellen- bzw. source-Matrix S aus Abschnitt 3.3 gilt

$$S = (P_u \ P_v \ P_w) \quad (3.14)$$

bzw.

$$S = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix}$$

Abb. 3.7

Die $N_p \times N_p$ Untermatrizen P_u , P_v , P_w in 3.7 und 3.7 entsprechen den Diskriminierungen der Operatoren $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$, $\partial/\partial w$

$$\begin{aligned} [P_u]_{p,q} &= \begin{cases} -1 & q = p \\ 1 & q = p + M_u \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ [P_v]_{p,q} &= \begin{cases} -1 & q = p \\ 1 & q = p + M_v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$[P_w]_{p,q} = \begin{cases} -1 & q = p \\ 1 & q = p + M_w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei gilt $p = 1 + (i - 1)M_u + (j - 1)M_v + (k - 1)M_w$ und $i = 1, \dots, I - 1$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, K$. Die Teilmatrizen P_u , P_v , P_w besitzen nach (3.11) den folgenden Aufbau:

$$\mathbf{P}_{u/v/w} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{+1} \\ \text{-1} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{+1} \\ \text{-1} \end{array} \\ \hline} \right\} M_{u/v/w}$$

Diese Wahl der Indizes hat zur Folge, dass diejenigen Zeilen von P_u , P_v , P_w zu Null werden, welche auf Komponenten zugreifen, die außerhalb des Gitters liegen. Dies verdeutlicht die nachstehende Abbildung 3.8

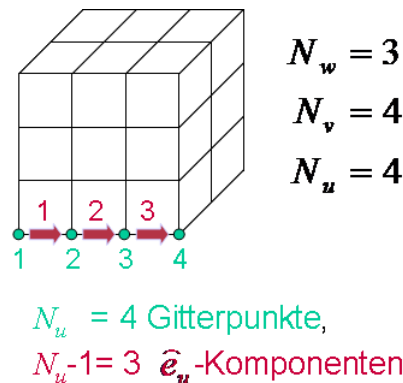


Abb. 3.8: Indizierung des Gitters G Anhand einer Volumenzelle

3.4.2 Beziehung zwischen C und S

Zunächst wird die Beziehung der beiden Matrizen zu einander lokal auf einer Zelle verdeutlicht

Betrachtet man für die dargestellte Volumenzelle die einzelnen Teilintegrale der jeweiligen Gitterspannungen \hat{e} , ist zu beachten, dass sich die Anteile direkt benachbarter Flächen gegenseitig aufheben. Dies liegt daran, dass jede Gitterspannung zweimal mit unterschiedlichem Vorzeichen auftritt, wie Abbildung 3.9 zeigt.

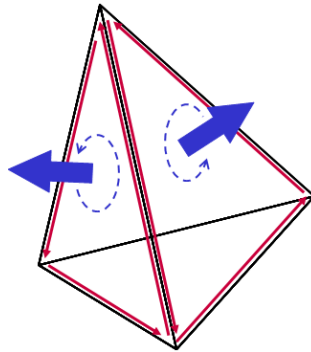


Abb. 3.9: Lokale Betrachtung einer Volumenzelle

Daher gilt das Induktionsgesetz für das gesamte Volumen, wenn es für eine Zelle erfüllt ist. Die nächste Abbildung 3.10 stellt diesen Zusammenhang noch einmal verdeutlicht dar.

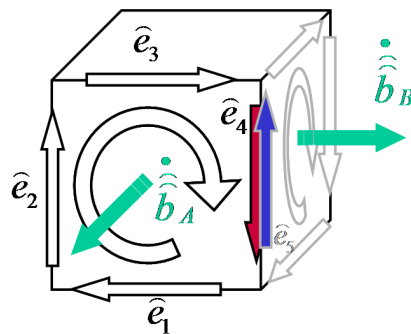


Abb. 3.10: Lokale Betrachtung der Gitterspannung und Gitterflüsse auf einer Volumenzelle

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{b}}}_A + \dot{\hat{\mathbf{b}}}_B \dots &= \dots + \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_4 + \hat{\mathbf{e}}_5 + \dots}_0 \\ &\Rightarrow S C = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Berechnet man den Ausdruck $S C \hat{\mathbf{e}}$ für ein beliebiges $\hat{\mathbf{e}}$ lokal für die Zelle gilt exakt $S C = 0$. Dies ist zunächst ein rein topologisches Ergebnis. Im Zusammenhang mit der Finiten-Integration entspricht dies der vektoranalytischen Beziehung $\text{div rot} \equiv 0$.

3.5 Einführung des dualen Rechengitters

In den Abschnitten 3.2 und 3.3 wurden nur zwei der vier Maxwellgleichungen aus (3.1) auf dem eingeführten Rechengitter G diskretisiert. Um die beiden fehlenden Gleichungen berechnen zu können, muss zunächst eine Vorüberlegung getroffen werden. Für die Auswertung der dritten und vierten Gleichung in (3.1) auf dem Rechengitter G würde man den Komponenten des magnetischen Feldes \vec{H} wieder die Gitterkanten und den Komponenten des elektrischen Flusses \vec{D} die Gitterflächen zuordnen. Dies ist aber nicht möglich, da diese bereits für die elektrischen Größen vergeben wurden. Es ist somit nötig, ein zweites Gitter, das sogenannte **duale Gitter** \tilde{G} , einzuführen.

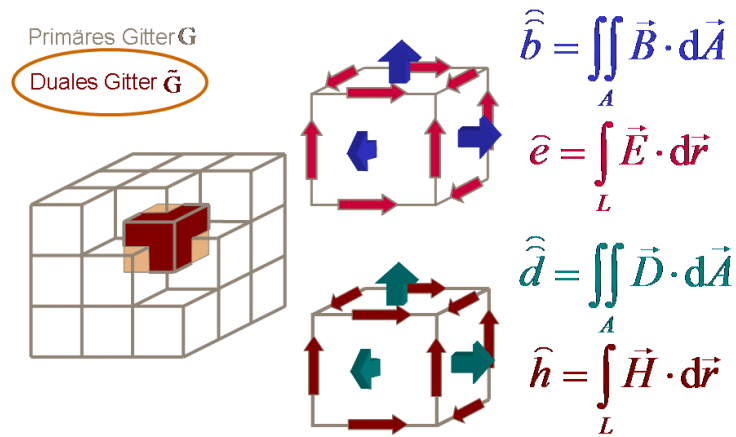


Abb. 3.11: Zusammenhang zwischen primärem und dualem, Darstellung 1

Das duale Gitter \tilde{G} ist zu dem primären Gitter G jeweils um eine halbe Gitterzelle, also um $\Delta u(i)/2$, $\Delta v(j)/2$, $\Delta w(k)/2$, verschoben. Es gilt somit

$$\tilde{G} = \left\{ (\tilde{u}(i), \tilde{v}(j), \tilde{w}(k)) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{aligned} \tilde{u}(i) &= \frac{1}{2}(u(i) + u(i+1)), \\ \tilde{v}(j) &= \frac{1}{2}(v(j) + v(j+1)), \\ \tilde{w}(k) &= \frac{1}{2}(w(k) + w(k+1)) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

für $1 \leq i \leq I-1$, $1 \leq j \leq J-1$, $1 \leq k \leq K-1$. Das Konzept des dualen Gitters ist dabei

- jede **duale** Kante schneidet eine *primäre* Fläche in genau einem Punkt
- jede *primäre* Kante schneidet eine **duale** Fläche in genau einem Punkt

- jede **duale** Zelle enthält genau einen *primären* Punkt
- jede *primäre* Zelle enthält genau einen **dualen** Punkt
- einander zugeordnete Figuren haben den gleichen Index

Es existiert somit folgende Dualitätsbeziehung zwischen dem primären G und dem dualen Gitter G

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n &\leftrightarrow A_n & P_n &\leftrightarrow \tilde{V}_n \\ L_n &\leftrightarrow \tilde{A}_n & P_n &\leftrightarrow V_n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

Diese Zusammenhänge verdeutlichen ebenfalls auch Abbildung 3.12.

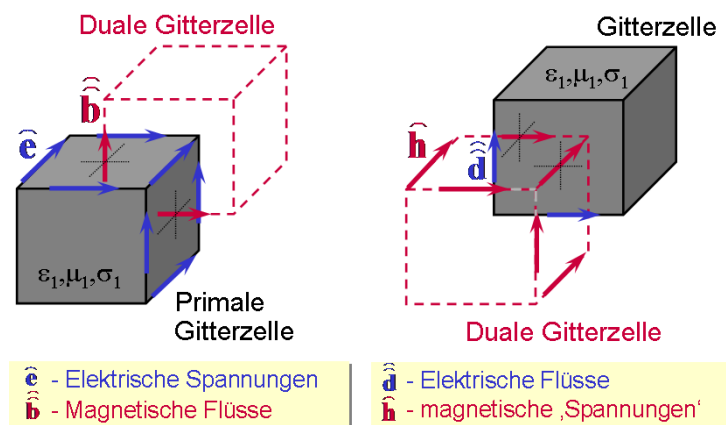


Abb. 3.12: Zusammenhang zwischen primärem und dualen Gitter, Darstellung 2

3.6 Diskretisierung des Durchflutungsgesetzes

Um das Durchflutungsgesetz in (3.1) zu diskretisieren, wird nun das eingeführte zweite Rechengitter, das duale Gitter \tilde{G} benötigt. Das Vorgehen hierbei ist analog zu dem des Induktionsgesetzes auf dem primären Gitter aus Abschnitt 3.2. Es wird zunächst wiederum die linke Seite der Gleichung für eine einzelne Gitterfläche untersucht.

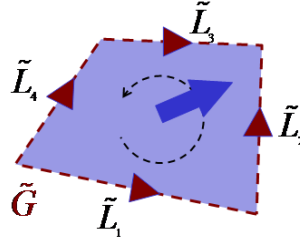


Abb. 3.13: Durchflutungsgesetz für eine Gitterfläche, linke Seite

$$\oint_{\partial \tilde{A}} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \iint_{\tilde{A}} \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A} + \hat{h}_1 + \hat{h}_2 - \hat{h}_3 - \hat{h}_4 = \frac{d}{dt} \hat{d}_n + \hat{j}_n \quad (3.20)$$

Die linke Seite des Durchflutungsgesetzes wird ersetzt durch die Summe der Teilintegrale über die einzelnen Kanten $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{L}_3, \tilde{L}_4$ des betrachteten Flächenelements. Die Vorzeichen richten sich dabei nach der Orientierung der jeweiligen Kante. Für die in Gleichung (3.20) neu eingeführten **skalaren** Größen gilt:

$$\begin{aligned} \hat{h}_n &:= \int_{\tilde{L}_n} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \text{magnetische Gitterspannung (duale Größe)} \\ \hat{d}_n &:= \iint_{\tilde{A}_n} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \text{elektrischer Gitterfluss (duale Fläche)} \\ \hat{j}_n &:= \iint_{\tilde{A}_n} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \text{(elektrischer) Gitterstrom (duale Fläche)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Diskretisiert man das Durchflutungsgesetz auf allen Flächenelementen des Volumens ergibt sich analog zu den Abschnitten 3.3 und 3.4:

$$\tilde{C}\hat{h} = \frac{d}{dt} \hat{d} + \hat{j}. \quad (3.22)$$

Dies ist die **2. Gitter-Maxwell-Gleichung**. Die in Gleichung (3.22) auftretende Matrix ist die **duale Umlauf-** oder **curl-Matrix**. Diese ist analog zu der primären Umlaufmatrix C in (3.14) aufgebaut:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{P}}_w & \tilde{\mathbf{P}}_v \\ \tilde{\mathbf{P}}_w & \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{P}}_u \\ -\tilde{\mathbf{P}}_v & \tilde{\mathbf{P}}_u & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Abb. 3.14

3.7 Diskretisierung des Gaußschen Gesetzes

Die letzte noch verbleibende Maxwellgleichung aus (3.1), das Gaußsche Gesetz, wird ebenfalls auf dem dualen Gitter diskretisiert. Hierzu betrachtet man erneut eine einzelne Volumenzelle

$$\sum \pm \hat{\mathbf{d}}_n = \hat{\hat{q}}_n = q_n. \quad (3.23)$$

Diskretisiert man das Gaußsche Gesetz auf allen Volumenzellen, ergibt sich analog zu den vorherigen Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.6 für das Durchflutungsgesetz die folgende Form

$$\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}. \quad (3.24)$$

Dies ist die **4. Gitter-Maxwell-Gleichung**. Die in Gleichung (3.24) auftretende Matrix $\tilde{\mathbf{S}}$ ist die **duale Quellenmatrix** oder **source-Matrix**. Diese ist analog zu der primären Quellenmatrix (3.14) aufgebaut. Zusammenfassend gilt:


Maxwell-Gleichungen		Gitter-Maxwell-Gleichungen
$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ $\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \cdot d\vec{A}$ $\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$ $\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$		$\mathbf{C} \hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{b}}$ $\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{j}}$ $\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}$ $\mathbf{S} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$

Abb. 3.15

3.8 Ladungserhaltung zeitkontinuierlicher Felder

Aus dem Durchflutungsgesetz wird nun die diskrete Kontinuitätsgleichung hergeleitet. Man betrachtet zunächst

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{j}} \quad \parallel \quad \tilde{\mathbf{S}} \cdot \dots \quad (3.25)$$

Multipliziert man das Durchflutungsgesetz aus (3.25) mit der dualen source-Matrix erhält man

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{C}}}_{=0} \hat{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{d}}}_{=\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{j}} \quad (3.26)$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Dies ist die **diskrete Kontinuitätsgleichung**.

3.9 Energieerhaltung zeitkontinuierlicher Felder

Um die Energieerhaltung zeitkontinuierlicher Felder zu untersuchen, wird die totale elektrische Energie auf dem gewählten kartesischen Gitter diskretisiert und dessen Zeitableitung betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{dW_e}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{d}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{\mathbf{e}}^T}{dt} \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{d}}^T \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} + \hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}_\epsilon^T \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} + \hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} + \hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} \right) = \hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} \quad (3.28) \\ \Rightarrow \frac{dW_m}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{h}}^T \hat{\mathbf{b}} \right) = \dots = \hat{\mathbf{h}}^T \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{dt}.\end{aligned}$$

Aus Gleichung (3.28) folgt dann

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_e}{dt} + \frac{dW_m}{dt} = \hat{\mathbf{e}}^T \frac{d\hat{\mathbf{d}}}{dt} + \hat{\mathbf{h}}^T \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{dt} = \hat{\mathbf{e}}^T (\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{h}}^T (-\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}}) = -\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{j}}. \quad (3.29)$$

Der Ausdruck in Gleichung (3.29) entspricht somit dem Poyntingschen Satz ohne Abstrahlungsterm, da geschlossene Ränder vorliegen.

3.10 Dualitätsbeziehungen der Matrizen \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$

Im Folgenden werden die Beziehungen zwischen den beiden curl-Matrizen \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ untersucht. Zunächst stehen dabei die lokale Betrachtung und das Verhältnis der Orientierungen im Vordergrund

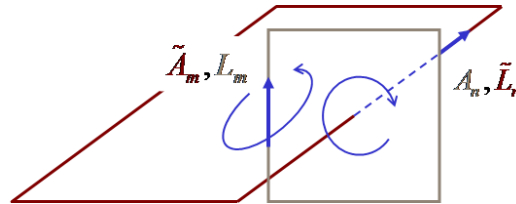


Abb. 3.16: Beziehung der curl-Matrizen \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ zu einander

Hierbei gilt

- primäre Kante L_m und Fläche A_n
- duale Kante \tilde{L}_m und Fläche \tilde{A}_n

Aus der Abbildung 3.16 ist ersichtlich, dass gelten muss

$$\mathbf{C}_{nm} = \tilde{\mathbf{C}}_{mn} = +1. \quad (3.30)$$

Außerdem ist ebenfalls aus (Abb. 3.6) und (Abb. 3.14) folgende Relation abzuleiten

$$\tilde{\mathbf{P}}_u = -\mathbf{P}_u^T \quad (\text{analog : } v, w) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^T. \quad (3.31)$$

3.11 Der Gradientenoperator

In diesem Abschnitt wird noch der Vollständigkeit halber der Gradientenoperator der FIT-Notation betrachtet. Mittels des Operators lässt sich ein statisches, elektrisches Feld durch ein Potential darstellen

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi_e. \quad (3.32)$$

Die zu (3.32) äquivalente integrale Formulierung lautet

$$-\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_{e,2} - \varphi_{e,1} \quad (3.33)$$

Man betrachtet nun diese Zusammenhänge auf dem Diskretisierungsgitter. Es lässt sich aus Abbildung 3.17 erkennen, dass das diskrete Potential den Gitterpunkten des primären Gitters zugeordnet ist.

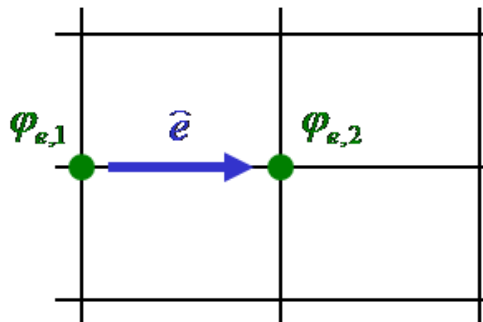


Abb. 3.17: Diskretes Potential auf dem primären Gitter

Für die Matrixschreibweise gilt somit:

$$\begin{array}{c} \vec{e} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{G}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \varphi \\ \hline \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Anzahl der Zeilen: } N_L = \bar{N}_A \\ \text{Anzahl der Spalten: } N_P = \bar{N}_V \end{array} \right\} \text{Beziehung zu } \bar{\mathbf{S}} ?$$

Abb. 3.18: Matrixschreibweise des Gradientenoperators in der FIT

Der Gradientenoperator kann durch die bereits eingeführte Matrix $\tilde{\mathbf{S}}$ dargestellt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= -\tilde{\mathbf{S}}^T \\ \tilde{\mathbf{G}} &= -\mathbf{S}^T\end{aligned}\tag{3.34}$$

und damit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_u \\ \tilde{P}_v \\ \tilde{P}_w \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{grad} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}.\tag{3.35}$$

Für den "rot grad" Ausdruck ergibt sich dann

$$\mathbf{C} \mathbf{G} = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}^T)^T = (-\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{C}})^T = \mathbf{0}.\tag{3.36}$$

Für die einzelnen Operationen auf dem Diskretisierungsgitter existieren somit insgesamt drei Inzidenzmatrizen. Die "**divergence**"(3.14), die "**curl**-"(Abb. 3.14) und die "**Gradient**-"Matrix (3.34).

3.12 Topologie-Eigenschaften der FIT

Im Folgenden werden die Beziehungen zwischen den einzelnen in den Gitter-Maxwell-Gleichungen (3.15) auftretenden Größen betrachtet.

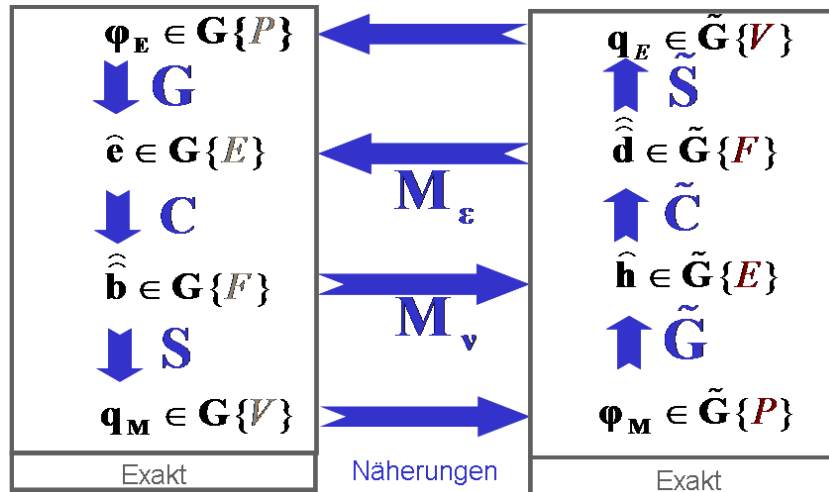


Abb. 3.19: Grundlegende Eigenschaften der in den Gitter-Maxwell-Gleichungen auftretenden Größen

Zwischen den Operationsmatrizen $\mathbf{S}\mathbf{C}$ und $\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{C}}$ existieren folgende topologische Beziehungen, auch "Komplex-Eigenschaften" genannt:

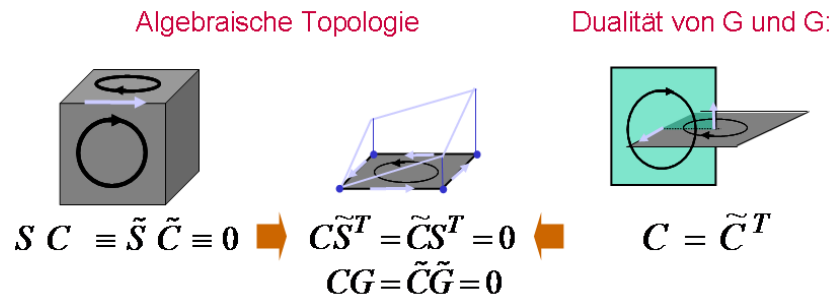


Abb. 3.20: Topologie-Eigenschaften der FI-Operatormatrizen

Für einfache Gebietstopologien gilt außerdem

$$\begin{aligned} \text{Kern}(S) &= \text{Bild}(C), & \text{Kern}(C) &= \text{Bild}(G), \\ \text{Kern}(\tilde{S}) &= \text{Bild}(\tilde{C}), & \text{Kern}(\tilde{C}) &= \text{Bild}(\tilde{G}). \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung:

$$\text{Kern}(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (3.37)$$

$$\text{Bild}(A) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = Av\} \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (3.38)$$

Die nachstehende Abbildung 3.21 zeigt, dass zwischen den "diskreten Differentialformen" der FIT dieselben Zusammenhänge bestehen wie bei stetigen Feldern und dass aus beiden dieselben Folgerungen entstehen.

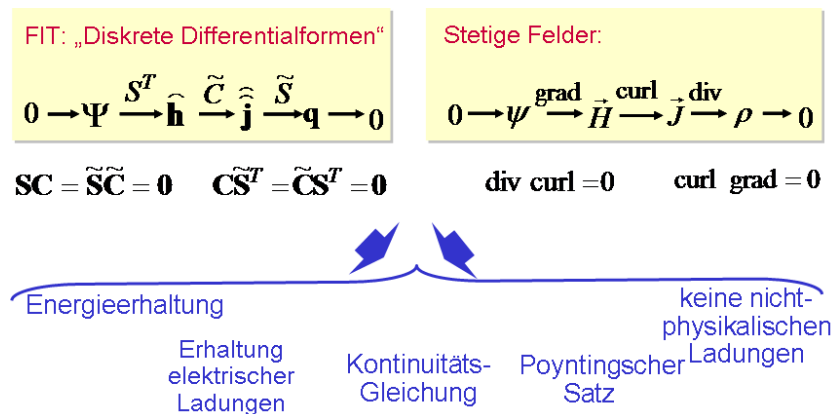


Abb. 3.21: Vergleich der Topologie-Eigenschaften der "diskreten Differentialformen" und der stetigen Felder

3.13 Materialbeziehungen

In diesem Abschnitt werden nun auch die bisher außer Acht gelassenen Materialbeziehungen diskretisiert. Es wird sich zeigen, dass deren Diskretisierung die einzige Beziehung zwischen dem primären und dem dualen Gitter darstellt. Außerdem wird eine Beziehung zwischen Gitterfluss und der dazu dualen Gitterspannung hergestellt. Es wird dabei von linearen Materialbeziehungen ausgegangen.

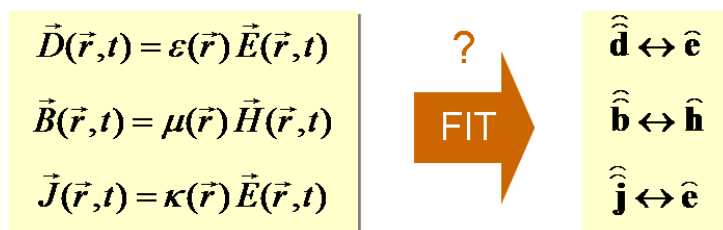


Abb. 3.22: Diskretisierung der Materialbeziehungen in der FIT

Für die Diskretisierung der Materialbeziehungen wählt man zunächst ein einfaches Modell. Man geht davon aus, dass das Rechengitter zunächst auch die Materialverteilung festlegt. Außerdem sei jede Zelle des primären Gitters homogen gefüllt. Dabei müssen die verschiedenen Permeabilitäten, Permittivitäten und Leitfähigkeiten berücksichtigt werden.

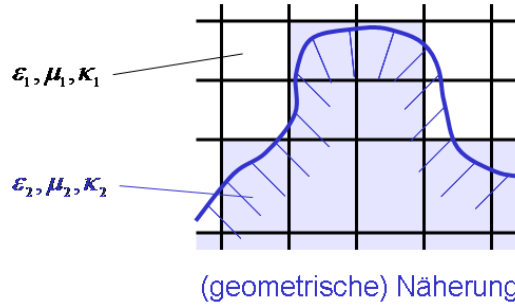


Abb. 3.23: Materialverteilung im Rechengitter

3.13.1 Magnetische Materialmatrix

Um die für die Diskretisierung der Materialbeziehungen benötigte magnetische Materialmatrix aufzustellen, wird zunächst wiederum lokal eine primäre Fläche mit dazugehöriger dualer Kante betrachtet.

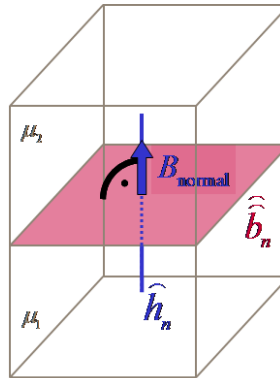


Abb. 3.24: Primäre Volumenzelle mit dazugehöriger dualer Kante

Die duale Kante schneidet somit zwei primäre Zellen die i. a. mit zwei verschiedenen Materialien gefüllt sind. Die Idee besteht jetzt darin, den magnetischen Gitterfluss $\hat{\mathbf{h}}_n$ durch die normalen Komponente des magnetischen Feldes anzunähern

$$\hat{\mathbf{b}}_n = \int_{A_n} \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx B_{normal} \int_{A_n} dA. \quad (3.39)$$

Der Ausdruck in (3.39) lässt sich dann für die Beschreibung der magnetischen Gitterspannung nutzen

$$\hat{\mathbf{h}}_n = \int_{\tilde{L}_n} \vec{H} \cdot d\vec{r} \approx B_{normal} \int_{\tilde{L}_n} \mu^{-1} dr. \quad (3.40)$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die normale Komponente des Magnetfeldes eine stetige Komponente ist, während die Komponente von \vec{H} an dieser Stelle Sprünge aufweist. Allerdings muss, um diese Zusammenhänge nutzen zu können, ein dual orthogonales Gitter vorliegen. Die Raumrichtung für die Kante und die Fläche muss die gleiche sein.

Die Ausdrücke in (3.39), (3.40) stellen allerdings nur Näherungen dar, so dass man zusätzlich einen Fehlerterm für beide Gleichungen berücksichtigen muss.

Fehlerordnungen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_n &= \int_{A_n} \vec{B} \cdot d\vec{A} & \hat{\mathbf{h}}_n &= \int_{\tilde{L}_n} \vec{H} \cdot d\vec{r} \\ &= B_{normal} \cdot \int_{A_n} dA + O(h^{3..4}) & &= B_{normal} \int_{\tilde{L}_n} \mu^{-1} dr + O(h^{2..3}) \\ &= B_{normal} A_n + O(h^{3..4}) & &= B_{normal} \overline{\mu^{-1}} \tilde{L}_n + O(h^{2..3}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Für die magnetische Gitterspannung $\hat{\mathbf{h}}_n$ folgt somit aus (3.41)

$$\hat{\mathbf{h}}_n = \left(\overline{\mu^{-1}} \frac{\tilde{L}_n}{A_n} \right) \hat{\mathbf{b}}_n + \begin{cases} O(h^3) \\ O(h^2) \end{cases}. \quad (3.42)$$

Dabei ist $\overline{\mu^{-1}}$ die über die duale Länge **gemittelte inverse Permiabilität**. Es gilt somit

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_\mu \hat{\mathbf{h}}, \quad (3.43)$$

wobei \mathbf{M}_μ eine quadratische Matrix ist, die **magnetische Materialmatrix**.

3.13.2 Elektrische Materialmatrix

Um die elektrische Materialmatrix aufzustellen, wird zunächst wiederum lokal eine primäre Kante und die dazugehörige duale Fläche betrachtet. Die duale Fläche

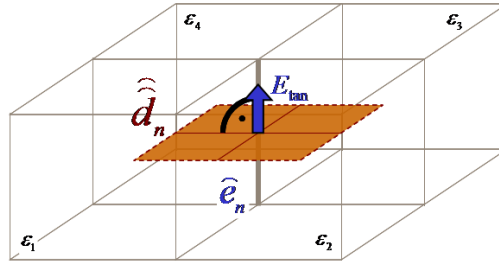


Abb. 3.25: Vier Volumenzellen des primären Gitters mit einer dualen Fläche

schneidet vier primäre Volumenzellen, die i.a. mit 4 unterschiedlichen Materialien gefüllt sind.

Die Idee besteht jetzt wieder darin, den elektrischen Gitterfluss $\hat{\mathbf{d}}_n$ durch die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes anzunähern. Es gilt zunächst

$$\hat{\mathbf{e}}_n = \int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx E_{\text{tan}} L_n. \quad (3.44)$$

Aus (3.44) folgt dann analog zum Abschnitt 3.13.1 eine Formulierung für den elektrischen Gitterfluss

$$\hat{\mathbf{d}}_n = \iint_{\tilde{A}_n} \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{A} \approx E_{\text{tan}} \cdot \iint_{\tilde{A}_n} \varepsilon dA. \quad (3.45)$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes eine stetige Komponente ist, während die Komponente des elektrischen Gitterfluss $\hat{\mathbf{d}}_n$ an dieser Stelle Sprünge aufweist. Um nun das Integral auf der rechten Seite in (3.45) zu berechnen, nimmt man eine Mittelung der Permittivität über die gesamte duale Fläche vor:

$$\iint_{\tilde{A}_n} \varepsilon dA = \varepsilon_1 \tilde{A}_1 + \varepsilon_2 \tilde{A}_2 + \varepsilon_3 \tilde{A}_3 + \varepsilon_4 \tilde{A}_4 = \underbrace{\frac{\varepsilon_1 \tilde{A}_1 + \varepsilon_2 \tilde{A}_2 + \varepsilon_3 \tilde{A}_3 + \varepsilon_4 \tilde{A}_4}{\tilde{A}_n}}_{=\bar{\varepsilon}} \cdot \tilde{A}_n. \quad (3.46)$$

Dabei ist

$$\tilde{A}_n = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \tilde{A}_4 \quad (3.47)$$

der Flächeninhalt über die duale Flächenfacette.

Die Ausdrücke in (3.44) und (3.45) stellen allerdings nur Näherungen dar, so dass man zusätzlich einen Fehlerterm für beide Gleichungen berücksichtigen muss.

Fehlerordnungen:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{e}}_n &= \int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{r} & \hat{\mathbf{d}}_n &= \iint_{\tilde{A}_n} \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
 &= E_{\tan} \int_{L_n} d\vec{r} + O(h^{2...3}) & &= E_{\tan} \cdot \iint_{\tilde{A}_n} \varepsilon dA + O(h^{3...4}) \\
 &= E_{\tan} L_n + O(h^{2...3}) & &= \left(\frac{\bar{\varepsilon} \tilde{A}_n}{L_n} \right) \hat{\mathbf{e}}_n + O(h^{3...4})
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Für den elektrischen Gitterfluss folgt somit aus (3.48)

$$\hat{\mathbf{d}}_n = \left(\frac{\bar{\varepsilon} \tilde{A}_n}{L_n} \right) \hat{\mathbf{e}}_n + O(h^{3...4}). \tag{3.49}$$

Es tritt bei einer zentrierten Mittelung in homogenen Materialien eine maximale 2. Ordnung für die Fehler auf. $\bar{\varepsilon}$ ist die über die duale Fläche **gemittelte Permittivität**. Es gilt somit

$$\hat{\mathbf{d}}_n = \mathbf{M}_\varepsilon \hat{\mathbf{e}}_n, \tag{3.50}$$

wobei \mathbf{M}_ε eine quadratische Matrix ist, die **elektrische Materialmatrix**. Für die Leitfähigkeit $\hat{\mathbf{j}}_n$ geht man analog vor. Es ergibt sich

$$\hat{\mathbf{j}}_n = \left(\frac{\bar{\kappa} \tilde{A}_n}{L_n} \right) \hat{\mathbf{e}}_n + O(h^{3...4}). \tag{3.51}$$

Zusammenfassend ergeben sich nun durch die diskrete gitterbasierte Feldtheorie die folgenden Maxwellgleichungen

3.13.3 Konstitutive Materialgleichungen der FIT

Zwischen der magnetischen (3.43) und der elektrischen Materialmatrix (3.50) bestehen somit folgende Zusammenhänge

Durch die Kopplung des primären mit dem dualen Gitter erhält man einen Übergang zwischen den Größen "Flüsse" und "Spannungen".

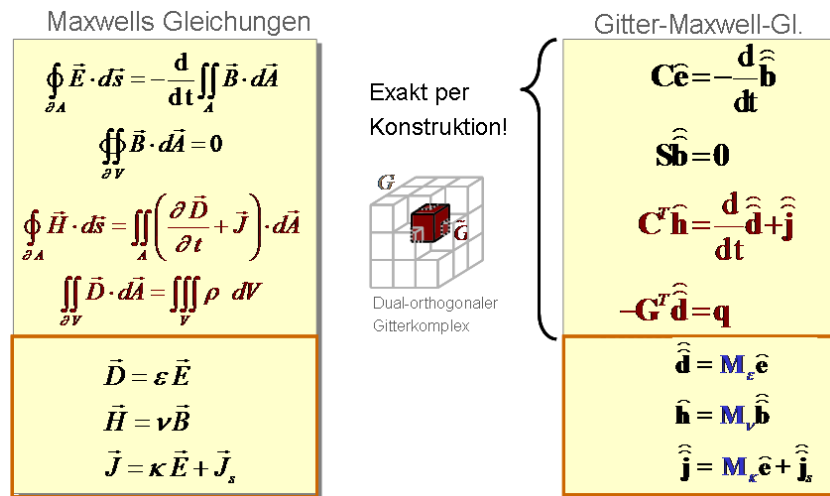


Abb. 3.26: Maxwellgleichungen im Überblick: Integralform und Gitter-Maxwell-Gleichungen

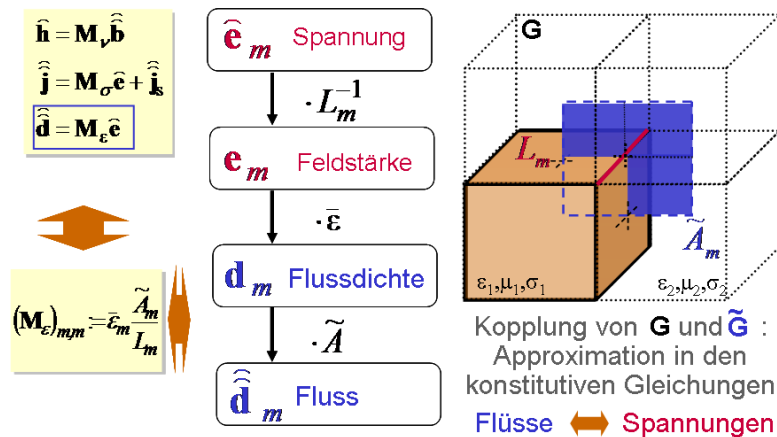


Abb. 3.27: Konstitutive Materialgleichung der FIT

3.13.4 Konstruktion der FIT-Materialmatrizen

Je nachdem, welches Material betrachtet wird, ergeben sich unterschiedliche Materialmatrizen. Man unterscheidet dabei zwischen isotropen und anisotropen Materialien. Es werden dualorthogonale Gitterpaare $\{G, \tilde{G}\}$ verwendet. Die **isotropen** Materialien ist folgendes gegeben

Es gilt zunächst für die skalare elektrische Leitfähigkeit

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}. \quad (3.52)$$

Isotrope Materialien:

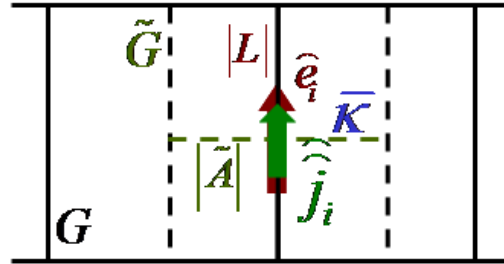


Abb. 3.28: Dual-orthogonales Gitterpaar mit einer isotropen Materialverteilung

Aus dem bisherigen folgt für die Anordnung in Abbildung 3.28 für die Materialmatrizen dann

$$\{\mathbf{M}_k\}_{ii} := \frac{\bar{k} \cdot |\tilde{A}_i|}{|L_i|} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{j}}_i = \{\mathbf{M}_k\}_{ii} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (3.53)$$

Es ergeben sich **diagonale** Materialmatrizen.

Bei **anisotropen** Materialverteilungen ergibt sich folgende Anordnung der Gitterpaars

Anisotrope Materialien:

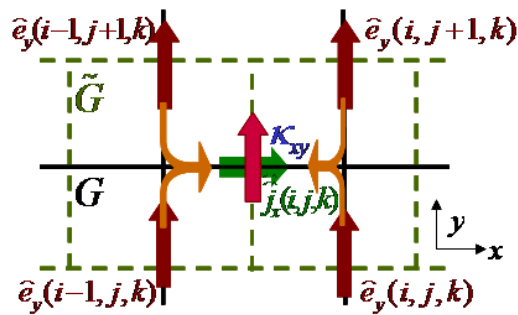


Abb. 3.29: Dual-orthogonales Gitterpaar mit einer anisotropen Materialverteilung

Bei dieser Materialverteilung ergibt sich eine tensorielle elektrische Leitfähigkeit

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \vec{\kappa} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Es findet eine Mittelung der Komponenten statt und somit entstehen **nicht-diagonale** Materialmatrizen.

3.13.5 Erweiterung zu den Materialfüllungen

Eine bessere geometrische Modellierung kann fast ohne Mehraufwand durch sogenannte **Dreiecksfüllungen** erzielt werden.

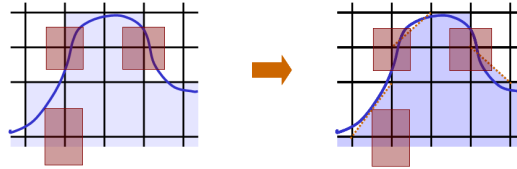


Abb. 3.30: Material-Dreiecksfüllungen

Diese Art der Modellierung ermöglicht es, beliebige Teilfüllungen zu berücksichtigen. Dies gilt auch für ideal leitfähiges Material (Perfect Electric Conductors PEC).

Für die flächengemittelte Permittivität gilt dadurch im Vergleich zu Abschnitt 3.13.2, Gleichung (3.46) eine etwas abgeänderte Darstellung, da sich die Flächen, über die gemittelt wird, verändert haben.

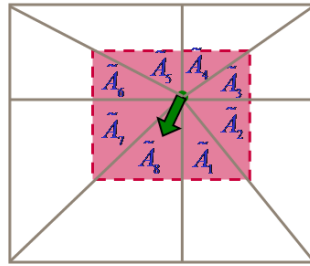


Abb. 3.31: Duale Flächenfacette bei Material-Dreiecksfüllungen

Die gemittelte Permittivität ergibt sich in diesem Falle aus

$$\iint_{\tilde{A}_n} \varepsilon \, dA = \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i \tilde{A}_i = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^8 \varepsilon_i \tilde{A}_i}{\tilde{A}_n}}_{=\bar{\varepsilon}} \cdot \tilde{A}_n, \quad (3.55)$$

wobei sich die duale Flächenfacette zusammensetzt aus

$$\tilde{A}_n = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \tilde{A}_4 + \tilde{A}_5 + \tilde{A}_6 + \tilde{A}_7 + \tilde{A}_8. \quad (3.56)$$

Durch diese Vorgehensweise entsteht ein geringer Volumenfehler, wie auch die Darstellung in der Abbildung 3.32 und 3.33 zeigen

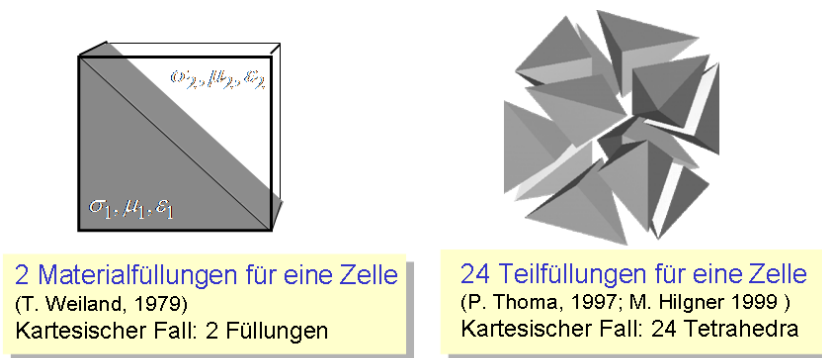


Abb. 3.32: Volumenfehler bei verschiedenen Materialfüllungen

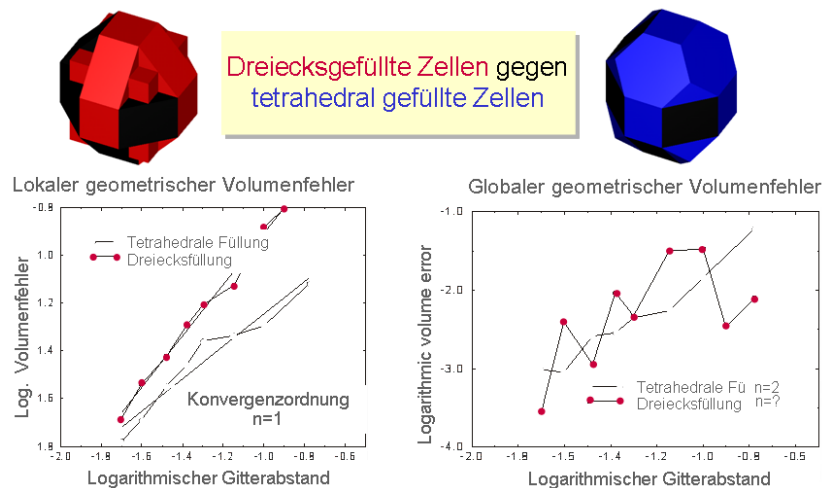


Abb. 3.33: Volumenfehler bei dreiecks- und tetrahedral gefüllten Zellen (Diagramme: M. Hilgner)

Verbesserte Methoden zur Diskretisierung der Materialverteilung sind z.B. die *verbesserten Staircase Gitter* (Weiland '77) oder *Randkonforme Gitter*.

Die Staircase Gitter haben den Vorteil, dass sie einfach zu implementieren sind und eine verbesserte Approximation liefern. Die Randkonformen Gitter führen zwar zu einer besseren Approximation, sind aber auch komplexer zu implementieren.

Eine verbesserte Genauigkeit erhält man zusätzlich dadurch, dass man die sogenannte **Conformal FIT (C-FIT)** durchführt. Diese Technik führt eine noch verfeinerte Materialmittlungsprozedur durch. Hierdurch lassen sich auch gekrümmte Oberflächen mittels eines kartesischen Gitters modellieren.

Allerdings ist zu beachten, dass die Tangentialstetigkeit des E-Feldes nicht bei der

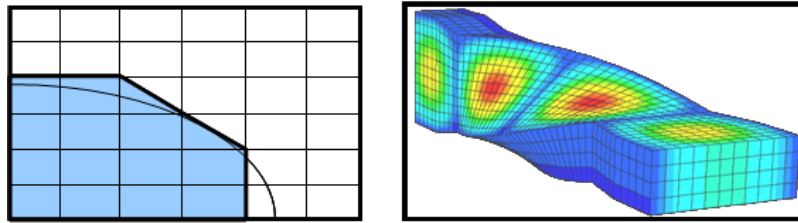


Abb. 3.34: Materialdiskretisierung durch Staircase Gitter (links) und Randkonforme Gitter (rechts, Simulation mit nicht-orthogonaler FIT, R.Schuhmann)

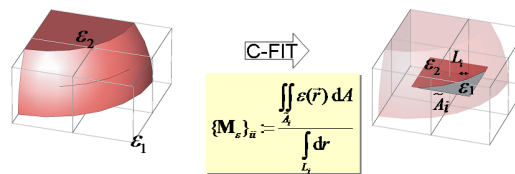


Abb. 3.35: Materialmodellierung mittels der Conformal FIT

Konstruktion berücksichtigt wird.

3.14 Diskrete elektromagnetische Feldtheorie

In diesem Abschnitt sollen nun die Lösungen von elektromagnetischen Problemen betrachtet werden. Hierzu ist es nicht immer nötig, die vollständigen Maxwellgleichungen zu lösen, sondern nur einen Teil oder sogar nur abgeleitete Gleichungen zu lösen. Die nachstehende Abbildung gibt einen Überblick über die möglichen Vorgehensweisen.

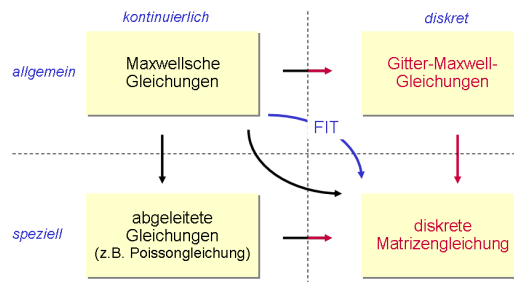


Abb. 3.36: Lösungsweisen für elektromagnetische Feldprobleme

Dabei stellt der im Uhrzeigersinn orientierte Weg die Vorgehensweise der FIT und der gegen den Uhrzeigersinn orientierte Weg die gewöhnliche Vorgehensweise dar. Der Vorteil der FIT besteht darin, dass die benötigten Matrizengleichungen direkt vorliegen.

Elektrostatik	$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = q$
Magnetostatik	$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J}_s$
Elektro-Quasistatik	$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \frac{d}{dt} \Phi(t)) + \nabla \cdot (\kappa \nabla \Phi(t)) = 0$
Magneto-Quasistatik	$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}(t)) + \kappa \frac{d}{dt} \vec{A}(t) = \vec{J}_s(t)$
Schnell veränderliche transiente Felder	$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{E}) + \frac{d}{dt} (\kappa \vec{E}) + \frac{d^2}{dt^2} (\epsilon \vec{E}) = -\frac{d}{dt} \vec{J}_s$ $\nabla \times (\nu \nabla \times \underline{\vec{E}}) + i\omega \kappa \underline{\vec{E}} - \epsilon \omega^2 \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{J}}_s$
Zeitharmonische Probleme	oder $\nabla \times (\nu \nabla \times \underline{\vec{E}}) + i\omega \kappa \underline{\vec{E}} - \epsilon \omega^2 \underline{\vec{E}} = 0$

Tabelle 3.1

Die **diskrete Formulierung** der Ausdrücke in Tabelle 3.1 lautet dann

Elektrostatik	$G^T M_\epsilon G \Phi = q$
Magnetostatik	$C^T M_\nu C \hat{\mathbf{a}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}$
Elektro-Quasistatik	$G^T M_\epsilon G \frac{d}{dt} \Phi(t) + G^T M_\kappa G \Phi(t) = 0$
Magneto-Quasistatik	$C^T M_\nu C \hat{\mathbf{a}}(t) + M_\kappa \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{a}}(t) = \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s(t)$
Schnell veränderliche transiente Felder	$C^T M_\nu C \hat{\mathbf{e}} + M_\kappa \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}} + M_\epsilon \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt} \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$ $(C^T M_\nu C + i\omega M_\kappa - \omega^2 M_\epsilon) \hat{\mathbf{e}} = -i\omega \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$
Zeitharmonische Probleme	oder $(C^T M_\nu C + i\omega M_\kappa - \omega^2 M_\epsilon) \hat{\mathbf{e}} = 0$

Tabelle 3.2

Für stationäre Felder (d.h. es gilt $\frac{d}{dt} = 0$) ergeben sich folgende kontinuierliche und diskrete Formulierungen

Elektrostatik:	Magnetostatik:	lineare Materialbeziehungen
$\text{rot} \vec{E} = 0$ $C \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$	$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$ $\tilde{C} \hat{\mathbf{h}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\hat{\hat{\mathbf{d}}} = \mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}}$
$\text{div} \vec{D} = \rho$ $\tilde{S} \hat{\hat{\mathbf{d}}} = \mathbf{q}$	$\text{div} \vec{B} = 0$ $S \hat{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\hat{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{M}_\mu \hat{\mathbf{h}}$

Tabelle 3.3

Somit liegen im Falle statischer Felder jeweils zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme vor.

3.14.1 Elektrostatik

Für die Lösung der feldtheoretischen Probleme der Elektrostatik in Tabelle ?? verwendet man den Potentialansatz

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{E} = -\underbrace{\text{rot grad}}_{\equiv 0} \varphi = 0. \quad (3.57)$$

Für den diskreten Fall gilt

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G} \varphi \quad \Rightarrow \quad C \hat{\mathbf{e}} = -\underbrace{C \mathbf{G}}_{\equiv 0} \varphi = \mathbf{0}. \quad (3.58)$$

Durch Einsetzen erhält man für den kontinuierlichen Fall

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = \rho \quad (3.59)$$

und mit (3.50) für den diskreten Fall

$$\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q} \xrightarrow{1.147} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{G}}_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{q}. \quad (3.60)$$

Somit entsteht in (3.60) für den Vektor $\boldsymbol{\Phi}$ ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem der $(N_p \times N_p)$ Potentiale (d.h. es existieren N_p Gleichungen für N_p Unbekannte). Die Systemmatrix \mathbf{A} in (3.60) ist eine **symmetrische** Matrix. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \tilde{\mathbf{S}}^T \\ \mathbf{A}^T &= (\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \tilde{\mathbf{S}}^T)^T = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon^T \tilde{\mathbf{S}}^T = \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dabei gelten die Umformungen in (3.61) aufgrund von $\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{S}}^T$ und der Symmetrie der diagonalen Materialmatrix \mathbf{M}_ε .

Des Weiteren besitzt die Systemmatrix \mathbf{A} eine Bandstruktur $L_n = A_n \equiv 1$. Für die Untersuchung wird zunächst eine homogene Ladungsverteilung angenommen, d.h.

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_\varepsilon = \varepsilon_0 \mathbf{I}. \quad (3.62)$$

Mit (3.62) und (3.14) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \tilde{\mathbf{S}}^T = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_u & \tilde{\mathbf{P}}_v & \tilde{\mathbf{P}}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_u^T \\ \tilde{\mathbf{P}}_v^T \\ \tilde{\mathbf{P}}_w^T \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon_0 (\tilde{\mathbf{P}}_u \tilde{\mathbf{P}}_u^T + \tilde{\mathbf{P}}_v \tilde{\mathbf{P}}_v^T + \tilde{\mathbf{P}}_w \tilde{\mathbf{P}}_w^T) = (\dots). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Das Produkt der P-Matrizen in (3.63) besitzt eine Bandstruktur. Die Ausnahme sind lediglich die Ränder.

Die Bandmatrix hat somit eine 6 auf der Diagonalen und jeweils eine -1 auf den sechs Nebendiagonalen.

Diese Bandstruktur ist wichtig für die numerische Abspeicherung und Anwendung der Matrix. Bei einer allgemeinen Materialverteilung ergibt sich dieselbe

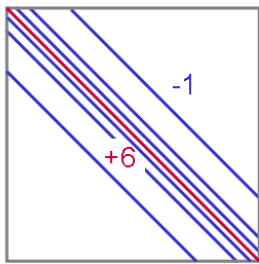
$$(\tilde{\mathbf{P}}_u \tilde{\mathbf{P}}_u^T + \tilde{\mathbf{P}}_v \tilde{\mathbf{P}}_v^T + \tilde{\mathbf{P}}_w \tilde{\mathbf{P}}_w^T) =$$


Abb. 3.37

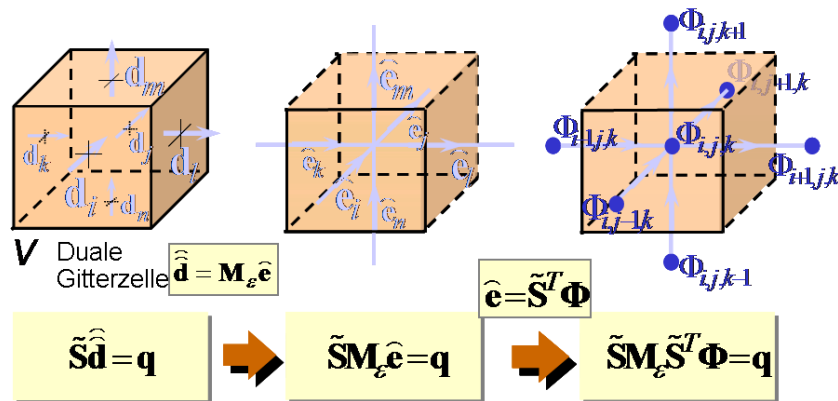


Abb. 3.38: Berechnung von statischen Potentialfeldern mittels der FIT

Struktur. Es ändern sich lediglich die Einträge selbst.

Somit lassen sich jetzt Potentialfelder mittels der FIT konstruieren

Für die Lösung der feldtheoretischen Probleme der Magnetostatik in Tabelle ?? kann die untere Gleichung direkt mit dem Vektorpotential \vec{A} über den folgenden Ansatz erfüllt werden

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \text{div } \vec{B} = \underbrace{\text{div rot } \vec{A}}_0 \equiv 0. \quad (3.64)$$

Für den diskreten Fall ergibt sich

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{a}} \Rightarrow \mathbf{S} \hat{\mathbf{b}} = \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{C}}_{=0} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Durch Einsetzen erhält man für den kontinuierlichen Fall

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \vec{A}) = \vec{J} \quad (3.66)$$

und mit (3.43) für den diskreten Fall

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}} \Rightarrow \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu}^{-1}\mathbf{C}}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}. \quad (3.67)$$

Es ergibt sich somit in (3.67) ein $(3 \cdot N_p \times 3 \cdot N_p)$ Gleichungssystem. Es liegen 3x so viele Unbekannte vor wie es in der Elektrostatik in (3.60) der Fall war. Daher sollte man sich zur Vereinfachung noch eine geeignete Eichung überlegen. Ideal wäre der Falls, dass man das Magnetfeld durch ein skalares Potential beschreiben könnte, da dieses nur N_p Unbekannte benötigen würde. Dies ist aber nicht möglich, da die Rotationsgleichungen inhomogen sind.

3.14.2 Stationäre Strömungsfelder

Bei der diskreten Formulierung stationärer Strömungsfelder muss ein skalares Potential berücksichtigt werden

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_{\sigma}\tilde{\mathbf{S}}^T\Phi &= -\tilde{\mathbf{S}}\hat{\hat{\mathbf{j}}}, \\ \hat{\mathbf{e}} &= \tilde{\mathbf{S}}^T\Phi. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Diese Art von Feldern tritt z.B. bei einem Stromunterbrecher auf

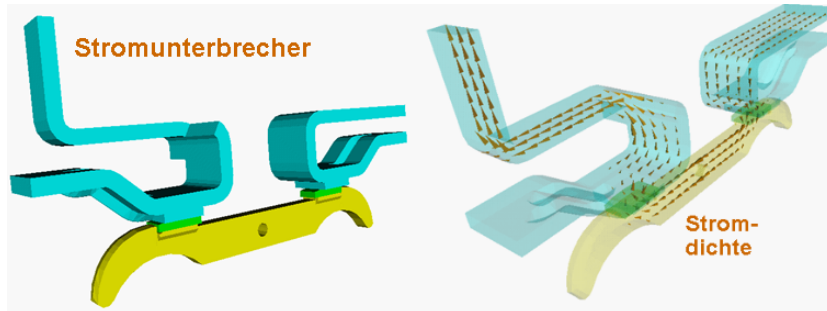


Abb. 3.39: Stromunterbrecher (links) und Verteilung der Stromdichte (rechts)

Alternativ lässt sich die FIT-Formulierung mittels eines elektrischen Vektorpotentials aufstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{M}_{\sigma^{-1}}\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{t}} &= 0, \\ \hat{\hat{\mathbf{j}}} &:= \tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{t}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.14.3 Elektro-Quasistatische Felder

Bei elektro-quasistatischen Feldern wird angenommen, dass keine induktiven Effekte auftreten, d.h. es gilt $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv 0$. Die auftretenden magnetischen Felder sind somit stationär. Diese Art von Feldern tritt z.B. bei HV-Durchführungen oder Ableitern auf.

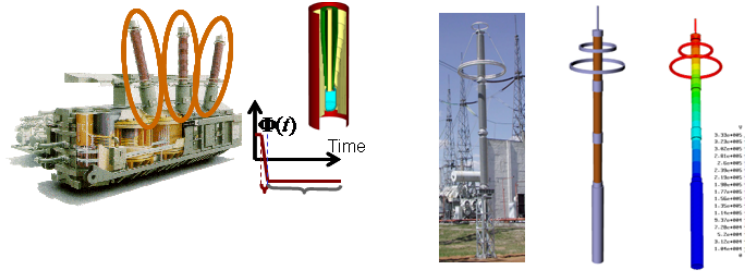


Abb. 3.40: HV-Durchführung (links) und Ableiter (rechts)

Man betrachtet das Durchflutungsgesetz aus (3.1)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}. \quad (3.70)$$

Es folgt aus (3.70)

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) = 0. \quad (3.71)$$

Aus 113 ergibt sich mit $\vec{J} = \kappa(\vec{E}) \vec{E}$ und $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\nabla \cdot (\kappa(\vec{E}) \vec{E}) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) \right) = 0. \quad (3.72)$$

Aus dem Induktionsgesetz in (3.1) folgt

$$\nabla \times \vec{E} = - \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0} \Rightarrow \vec{E}(t) = -\nabla \cdot \phi. \quad (3.73)$$

Und somit ergibt sich aus (3.72)

$$\nabla \cdot (\kappa(\phi) \nabla \phi(t)) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi(t)) = 0. \quad (3.74)$$

Es existieren somit zwei elektrostatische Felder

$$\nabla \cdot (\kappa(\phi) \nabla \phi(t)), \quad \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi(t)). \quad (3.75)$$

3.14.4 Magneto-Quasistatische Felder

Bei magneto-quasistatischen Feldern wird angenommen, dass keine resistiven Ströme auftreten, d.h. es gilt $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv 0$. Die auftretenden elektrischen Felder sind somit stationär. Diese Wirbelstromprobleme bzw. transiente Magnetfelder treten z.B. bei Festplatten Schreib-/Lesegeräten oder elektrischen Motoren auf.

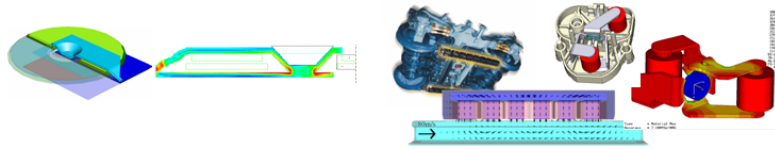


Abb. 3.41: Festplatten Schreib-/Lesegerät (links), elektrischer Motor (rechts)

Man betrachtet erneut das Durchflutungsgesetz aus (3.1), welches sich in diesem Fall etwas verändert zu

$$\nabla \times \vec{H} = \kappa \vec{E} + \underbrace{\vec{J}_S + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{=0}. \quad (3.76)$$

Für den Fall stationärer elektrischer Felder, ist bekannt, dass für die magnetische Flussdichte \vec{B} und das Vektorpotential \vec{A} gilt

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 : \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.77)$$

Aus (3.77) folgt dann mit den Materialgleichungen

$$\vec{H} = \nu(\vec{B}) \vec{B} = \nu(\vec{A}) \nabla \times \vec{A}. \quad (3.78)$$

Mit den Gleichungen (3.77) und (3.78) ergibt sich aus (3.76)

$$\nabla \times (\nu(\vec{A}) \nabla \times \vec{A}(t)) + \kappa \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t} = \vec{J}_s(t). \quad (3.79)$$

3.14.5 Transiente langsam-veränderliche Felder

Die in den Abschnitten 3.14.3 und 3.14.4 betrachteten elektro- und magnetoquasistatischen Felder gehören zu den transienten langsam-veränderlichen Feldern. Wendet man auf die Gleichungen (3.75) und (3.79) ein geometrisches Diskretisierungsverfahren sowie die FIT an, erhält man die dritte und vierte Gleichung in Tabelle 3.2. Möchte man daraus die zeitliche Lösung des skalaren Potentials $\phi(t)$ oder des Vektorpotentials $\vec{A}(t)$ berechnen, ist in beiden Fällen ein diskretes Anfangsrandwertproblem der folgenden Art zu lösen

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.80)$$

3.14.6 Zeitintegration transienter Feldprobleme

Für die Lösung zeitveränderlicher, elektromagnetischer Felder mit der FIT müssen wieder alle Maxwellgleichungen betrachtet werden, da die elektrischen und magnetischen Feldgrößen nun nicht mehr entkoppelt sind. Es ergibt sich für die ersten beiden Maxwellgleichungen in 61 für den Zeitbereich jeweils ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}(t) - \hat{\mathbf{j}}(t)), \\ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{h}}(t) &= -\mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}(t). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Um eine Näherungslösung für die transienten Lösungen von 123 zu bestimmen, müssen diese mittels eines geeigneten numerischen Verfahrens integriert werden. Hierzu werden ebenfalls die Zeitableitungen auf einem äquidistanten Gitter der Zeitachse t durch den zentralen Differenzenquotienten diskretisiert

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta) - f(x_i - \Delta)}{2\Delta} + O(\Delta^2). \quad (3.82)$$

Die Integration des Verfahrens besteht aus einer versetzten zeitlichen Allokation der Feldgrößen in 123, was der analogen räumlich versetzten Allokation durch das duale Gitter entspricht. Da die beiden Gleichungen in 123 jeweils die zeitlichen Ableitungen des einen Vektors mit der des anderen verknüpfen, bietet es sich an, die Größen $\hat{\mathbf{h}}^{(m)}$, $\hat{\mathbf{e}}^{(m)}$ abwechselnd zu verschiedenen Zeitpunkten zu berechnen. Man allokiert dabei den einen auf der Zeitachse im ganzen Zeitschritt $t_0 + m \cdot \Delta t$ und den anderen auf der Zeitachse im halben Zeitschritt $t_0 + (m + 1/2) \cdot \Delta t$. Für die magnetische Gitterspannung wählt man (willkürlich)

$$\hat{\mathbf{h}}^{(m)} = \hat{\mathbf{h}}(t_0 + m \cdot \Delta t). \quad (3.83)$$

Dann ergibt sich weiter

$$\hat{\mathbf{e}}^{(m+1/2)} = \hat{\mathbf{e}}(t_{m+1/2} = t_0 + (m + 1/2)\Delta t). \quad (3.84)$$

Aus den Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{h}}^{(m+1/2)} &\approx \frac{\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \hat{\mathbf{h}}^{(m)}}{\Delta t}, \\ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}^{(m+1)} &\approx \frac{\hat{\mathbf{e}}^{(m+3/2)} - \hat{\mathbf{e}}^{(m+1/2)}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

folgt somit die insgesamt Integrationsvorschrift

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} &:= \hat{\mathbf{h}}^{(m)} - \Delta t \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(m+1/2)}, \\ \hat{\mathbf{e}}^{(m+3/2)} &:= \hat{\mathbf{e}}^{(m+1/2)} + \Delta t \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \left(\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Die Integrationsvorschrift in (3.86) bezeichnet das sogenannte Leapfrog-Verfahren (Yee 1966). Es ist eine zeitinvariante, explizite Methode zweiter Ordnung, die zu den Finite-Integration-Time-Domain-Verfahren gehört (FITD/FDTD). Diese Verfahren eignen sich dazu, auch sich schnell veränderliche Probleme zu simulieren. Die Gleichungen in (3.86) nennt man Update-Gleichungen. Sie definieren eine Rekursionsvorschrift, aus der jeweils aus den Werten im zurückliegenden Zeitschritt m durch eine explizite Formel die neuen Werte $\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)}$, $\hat{\mathbf{e}}^{(m+1)}$ im Zeitschritt $m + 1$ berechnet werden können. Anschaulich bedeutet dies auf der Zeitachse t :

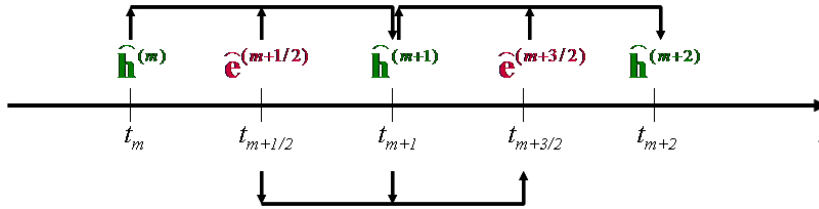


Abb. 3.42: Das Leapfrog-Verfahren, Variante 1

Es ist zu beachten, dass $G \perp \tilde{G}$ gilt. Damit sind die in 128 diskreten Materialmatrizen

$$M$$

diagonal und die Inversen M^{-1} leicht zu bestimmen. Die Verfahrensvorschrift in 128 lässt sich ebenfalls analog für die Größen $\hat{\mathbf{b}}^{(m)}$, $\hat{\mathbf{d}}^{(m)}$ aufstellen

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}^{(m+1)} &:= \hat{\mathbf{b}}^{(m)} - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1} \hat{\mathbf{d}}^{(m+1/2)}, \\ \hat{\mathbf{d}}^{(m+3/2)} &:= \hat{\mathbf{d}}^{(m+1/2)} + \Delta t \left(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu}^{-1} \hat{\mathbf{b}}^{(m+1)} - \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \right).\end{aligned}\quad (3.87)$$

Anschaulich gilt hier

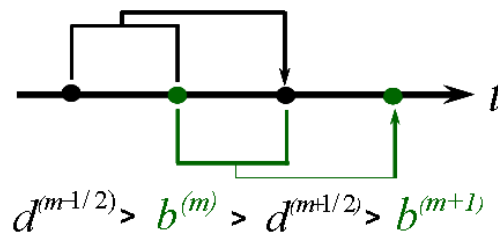


Abb. 3.43: Das Leapfrog-Verfahren, Variante 2

Die Vorteile der FDTD-Verfahren umfassen die folgenden Features:

- z.B. PML-Absorbing Boundary Conditions, konforme Formulierungen, weit entwickeltes Postprocessing (è Digitale Signalanalyse) und Untergitter
- geringer Speicherbedarf, gute geeignet für sehr große 3D-Simulationen
- einfaches Update-Schema, ermöglicht eine extrem schnelle Implementierung (inkl. Hardware-Beschleuniger, GPU-Co-Processoren, Multi-Core-CPUs?)

Somit eignen sich diese Verfahren gut für HF-Simulationen. Allerdings müssen auch die Nachteile dieser Verfahren berücksichtigt werden

- nur Konvergenz zweiter Ordnung è Dispersion
- Gitteradaptivität nur mit a postpriori Fehlerschätzer
- explizite Zeitintegration, Stabilitätskriterium (Courant-Friedrich-Levy)

$$\Delta t_{max} \leq \Delta t_{CFL} := \min_{\text{cells } i \text{ in Grid}} \frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \quad (3.88)$$

- die maximal stabile Zeitschrittlänge ist vorgegeben durch die Lichtgeschwindigkeit und die Abmessungen der Gitterzellen

Ein Anwendungsbeispiel dieser Verfahren wären z.B. die HF-Effekte auf Chip-Strukturen. Die volumengitter-basierten FI/FDTD-Verfahren besitzen allerdings auch Grenzen. Diese treten bei elektrisch großen Strukturen auf, d.h. $> 100 \cdot \lambda$ in jede Raumrichtung. Hierzu alternative Methoden wären z.B. MOM (Momenten-Methode), PEEC (Partial Element Equivalent Circuit Method) u.a.. Das Leapfrog-Verfahren wird ineffizient für

- sehr kleine Zeitschritten (wegen des CFL-Kriteriums)
- sehr kleine Gitterabmessungen (geometrische Details klein bzgl. λ)
- sehr niedrige Frequenzen (z.B. 50 Hz, entspricht $l=6.000$ km), Trafo 1 m x 1 m x 1m,
- kleine Eindringtiefen bei sehr guten Leitern (Sondermodelle benutzen)
- elektrisch große Strukturen (= sehr großes Rechengebiet (bzgl. λ))
- sehr hohe Frequenzen und große Objekte; wegen Dispersionsfehler werden ca. 10 Gitterlinien pro Wellenlänge benötigt, z.B. ebene Welle (1 GHz) auf Flugzeug (30 m=100 l): 1000 Linien pro Raumrichtung = 10^9 Gitterpunkte in 3D

3.14.7 Zeitharmonische Felder

Häufig ist man an Feldern interessiert, die bei einer festen Frequenz einen sinusförmigen Verlauf aufweisen, sogenannte **harmonische Felder**. Die allgemein zeitabhängigen Maxwell-Gitter-Gleichungen aus Abb. 3.15 lassen sich wie folgt in zeitharmonische Vorgänge umschreiben

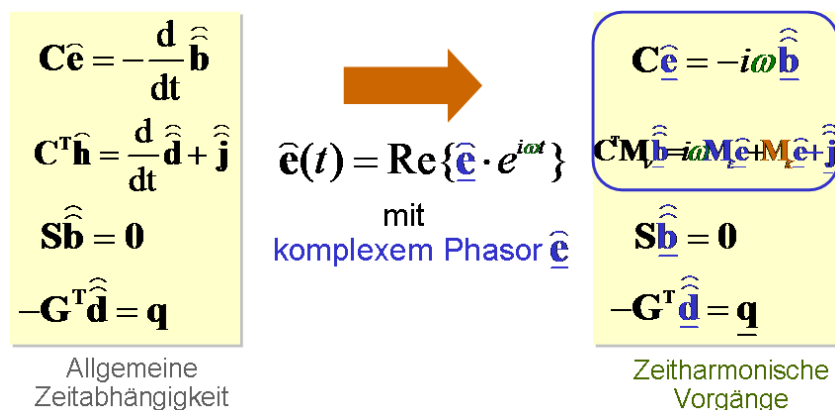


Abb. 3.44

Es entstehen somit in Abb. 3.44 aus den Differentialgleichungen im Zeitbereich komplexe algebraische Gleichungen im Frequenzbereich. Es ist zu beachten, dass der komplexe Phasenvektor $e^{j\omega t}$ auf beiden Seiten in den ersten beiden Gleichungen in 131 herausgekürzt wurde. Die Materialgleichungen behalten ihre Form bei, da sie keine expliziten Zeitableitungen enthalten.

Aus den beiden diskreten Rotationsgleichungen in Abb. 3.44 kann durch Auflösen und einsetzen der einen in die andere eine Gleichung hergeleitet werden, die nur noch eine Feldgröße enthält. Man eliminiert z.B. die magnetische Feldgröße und erhält unter Beachtung der Materialgleichungen

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{j}}} &= \underline{\mathbf{M}}_k \hat{\underline{\mathbf{e}}} + \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s \\ \Rightarrow j\omega \hat{\underline{\mathbf{d}}} + \hat{\underline{\mathbf{j}}} &= j\omega(\underline{\mathbf{M}}_\varepsilon + \frac{1}{j\omega} \underline{\mathbf{M}}_k) \hat{\underline{\mathbf{e}}} + \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s = j\omega \underline{\mathbf{M}}_\varepsilon \hat{\underline{\mathbf{e}}} + \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s \cdot \hat{\underline{\mathbf{j}}} = \underline{\mathbf{M}}_\varepsilon \hat{\underline{\mathbf{e}}} + \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s.\end{aligned}\quad (3.89)$$

Dabei ist $\underline{\mathbf{M}}$ die komplexe Permittivitätsmatrix, welche auch im Frequenzbereich Permittivität und Leitfähigkeit zusammenfasst. Berücksichtigt man noch

$$\hat{\underline{\mathbf{h}}} = \underline{\mathbf{M}}_\mu^{-1} \hat{\underline{\mathbf{b}}}\quad (3.90)$$

erhält man aus (3.89) die **diskrete Wellengleichung** der FIT

$$[\underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{M}}_\nu \underline{\mathbf{C}} + i\omega \underline{\mathbf{M}}_k - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}_\varepsilon] \hat{\underline{\mathbf{e}}} = -i\omega \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s \quad \text{mit } \omega > 0 \text{ und } \hat{\underline{\mathbf{b}}} = \frac{i}{\omega} \underline{\mathbf{C}} \hat{\underline{\mathbf{e}}}.\quad (3.91)$$

Die Matrix $\underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{M}}_\nu \underline{\mathbf{C}}$ ist symmetrisch und reell. $i\omega \underline{\mathbf{M}}_k$ ist komplex. Die Matrix $\omega^2 \underline{\mathbf{M}}_\varepsilon$ wird nur dann reell, wenn der verlustfreie Fall vorliegt. Da zweimal nacheinander der Rotationsoperator angewandt wurde, heißt die Gleichung (3.91) auch **diskrete curl-curl Gleichung**. Sie entspricht der kontinuierlichen Gleichung

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{E} - \omega^2 \varepsilon \vec{E} = -j\omega \vec{J}_s.\quad (3.92)$$

Zu den zeitharmonischen Feldern zählt außerdem das magnetische Buchholtz-Potential. Es gilt

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^* \Rightarrow \hat{\underline{\mathbf{e}}} = -i\omega \hat{\underline{\mathbf{a}}}.\quad (3.93)$$

Mit $\hat{\underline{\mathbf{b}}} = \mathbf{C}\hat{\underline{\mathbf{a}}}$ folgt dann für $\omega \geq 0$

$$[\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} + i\omega \mathbf{M}_\kappa - \omega^2 \mathbf{M}_\varepsilon] \hat{\underline{\mathbf{a}}} = \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s. \quad (3.94)$$

Der Ausdruck in (3.94) lässt sich durch

$$\underline{\mathbf{M}}_{\varepsilon'} := \mathbf{M}_\varepsilon + \frac{1}{j\omega} \mathbf{M}_\kappa \quad (3.95)$$

vereinfacht darstellen als

$$[\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}_{\varepsilon'}] \hat{\underline{\mathbf{a}}} = \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s. \quad (3.96)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \hat{\underline{\mathbf{a}}} = -i\omega \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s. \quad (3.97)$$

Grenzfälle bei den harmonischen Feldern ergeben sich in der Magnetostatik (Wirbelströme in metallischen Leitern bei $f < 100$ kHz) für $\omega \geq 0$

$$[\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} + i\omega \mathbf{M}_\kappa] \hat{\underline{\mathbf{a}}} = \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s. \quad (3.98)$$

und für $\omega = 0$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \hat{\underline{\mathbf{a}}} = \hat{\underline{\mathbf{j}}}_s. \quad (3.99)$$

Betrachtet man nun für Gleichung (3.97) die Sonderfälle $\hat{\underline{\mathbf{j}}}_s \equiv \mathbf{0}$ (keine anregenden Ströme) und $\kappa = 0$, ε, μ reell (verlustfrei) wird $\mathbf{M}_\kappa = \mathbf{0}$, und die Gleichung lässt sich in ein reellwertiges, lineares algebraisches Eigenwertproblem umschreiben

$$(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}_\varepsilon) \underline{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \underline{\mathbf{e}} = \omega^2 \underline{\mathbf{e}}. \quad (3.100)$$

Hierbei muss allerdings $\mathbf{M}_\varepsilon = \mathbf{M}_\varepsilon^T$, $\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_\nu^T$ gelten. Die Matrix $\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_\nu \mathbf{C}$ ist unsymmetrisch. Durch die Transformation $\underline{\mathbf{e}}' := \mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} \underline{\mathbf{e}}$ gelangt man jedoch zu der Formulierung

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} \underline{\mathbf{e}}' = \omega^2 \underline{\mathbf{e}}' \quad (3.101)$$

mit einer reellen symmetrischen Systemmatrix $\mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2}$. Die Gleichung (3.100) entspricht dabei

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{E} \right) = \omega^2 \vec{E}. \quad (3.102)$$

Dies beschreibt eine Eigenschwingung in verlustlosen Resonatoren. Bei der Gleichung (3.100) handelt es sich um ein algebraisches Eigenwertproblem der Form

$$A x = \lambda x. \quad (3.103)$$

Die Lösungen einer Gleichung dieser Art sind die nichttrivialen Eigenvektoren $x_i \neq 0$ und die zugeordneten reellen oder komplexen Eigenwerte λ_i . Die Systemmatrix A ist symmetrisierbar und positiv definit. Die maximale Anzahl an linear unabhängigen Eigenlösungen entspricht der Dimension n der Systemmatrix. Aufgrund der Symmetrie der Systemmatrix A sind die Eigenwerte reell und nicht negativ. Sie sind gleich den quadrierten Resonanzfrequenzen ω^2 und die Eigenvektoren entsprechen den zugehörigen Resonatormoden. Die Eigenschwingung $\sim e^{j\omega t}$ ist ungedämpft. Die Lösungen der diskreten Eigenwertaufgabe geben nicht nur Aufschluss über die Schwingungsmoden in Resonatoren sondern lassen auch auf bestimmte Verhaltensweisen der FIT-Diskretisierung bei zeitveränderlichen Feldern schließen.

Im Weiteren soll nun der Lösungsraum des Eigenwertproblems untersucht werden. Hierzu multipliziert man Gleichung (3.100) mit \mathbf{M}_ε und wendet den diskreten Divergenzoperator $\tilde{\mathbf{S}}$ an

$$\tilde{\mathbf{S}} \underbrace{\mathbf{C}^T}_{\tilde{\mathbf{C}}} \mathbf{M}_\nu \mathbf{C} \mathbf{e} = \omega^2 \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e} \Rightarrow \omega^2 \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e} = 0. \quad (3.104)$$

$\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{C}} = 0$

Die Gleichung (3.104) ist genau dann erfüllt, wenn entweder bei allen Eigenlösungen die Eigenfrequenz ω verschwindet oder die Divergenz der elektrischen Flussdichte. Man betrachtet zwei Fälle:

1. $\omega \in \mathbb{R}, \omega = 0$: In diesem Falle sind alle Eigenwerte $\lambda = 0$ und werden als statische Lösungen bezeichnet. Wenn $\omega = 0$, dann muss $\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e}_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, N_p$ und somit $\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}}_i \neq 0$. Wenn dies gilt, existiert ebenfalls eine Ladung $q \neq 0$ mit $\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}}_i = q_i \neq 0$ sein. Dies gilt für alle Knoten des dualen Gitters mit $q_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)'$. Die 1 steht dabei an der i -ten Stelle des Vektors. Daraus folgt, ω ist ein N_p -facher entarteter Eigenwert.

2. $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$: In diesem Falle sind alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ und werden als dynamische Eigenschwingungen bezeichnet. Es muss gelten $\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\hat{\mathbf{e}}_i = 0 \Leftrightarrow \nabla(\varepsilon\vec{E}) = 0$. Daraus folgt, ω ist ein $2N_P$ -facher Eigenwert.

Somit hat die curl-curl-Gleichung zwei disjunkte Lösungsräume:

- statische Moden: $\omega = 0$, $\mathbf{G}^T\mathbf{M}_\varepsilon\hat{\mathbf{e}}_i \neq 0$, $\hat{\mathbf{e}}_i = -\mathbf{G}\varphi_i$ (Dimension $\sim N_P$)
- dynamische Moden: $\omega \neq 0$, $\mathbf{G}^T\mathbf{M}_\varepsilon\hat{\mathbf{e}}_i = 0$ (Dimension $\sim N_P$)

Von technischem Interesse sind meist die dynamischen Moden mit den kleinsten Eigenwerten $\lambda = \omega^2 \neq 0$. Das Spektrum der Systemmatrix ist aber von dem entarteten Eigenwert $\lambda = 0$ bestimmt. Diese Eigenschaft bereitet vielen numerischen Lösungsverfahren Probleme, so dass hier eine andere Formulierung nötig ist. Das Spektrum zeigt nachstehende Abbildung.



Abb. 3.45: Spektrum der Eigenwerte des curl-curl-Operators

Die numerischen Verfahren, die die kleinsten Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren bestimmen sollen, würden also zunächst die Eigenwerte mit $\omega = 0$ bestimmen und somit den Grundmode erst als zweitkleinsten Eigenwert berechnen. Um dieses zu umgehen, versucht man die Eigenwerte mit $\omega = 0$ zu eliminieren. Dies kann durch eine Eichung der Eigenwertgleichung erreicht werden. Für die Eliminierung dieser Eigenwerte aus der Systemmatrix würden diese durch einen graphentheoretischen Ansatz verkleinert werden. Allerdings führt dies zu einem Verlust der Bandstruktur der Matrix und ist sehr aufwendig. Daher wählt man eine Alternative und verschiebt die Null-Eigenwerte (statische Moden) zu Eigenwerten $\lambda > \omega_n^2$. Die dynamischen Moden bleiben dabei unverändert. Man erhält zwar eine neue Matrix, diese hat aber ebenfalls wieder eine Bandstruktur. Hierfür arbeitet man zunächst die Divergenzbeziehungen in die curl-curl-Gleichung ein. Für alle dynamischen Moden gilt

$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\hat{\mathbf{e}} = 0. \quad (3.105)$$

Die Gleichung (3.105) multipliziert man nun mit $-\tilde{\mathbf{S}}^T$ und erhält

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\hat{\mathbf{e}} = 0. \quad (3.106)$$

Mit $\tilde{\mathbf{e}}' := \mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} \tilde{\mathbf{e}}$ wird aus der diskreten Gleichung in (3.106)

$$-\mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} \tilde{\mathbf{e}}' = 0. \quad (3.107)$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der in (3.101) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_\varepsilon) \tilde{\mathbf{e}} &= \omega^2 \tilde{\mathbf{e}} \\ \text{bzw.} \\ (\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\varepsilon) \tilde{\mathbf{e}} &= \omega^2 \tilde{\mathbf{e}}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Für die symmetrische Form gilt

$$(\mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} \mathbf{C}^T \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} + \mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\varepsilon^{1/2}) \tilde{\mathbf{e}}' = \omega^2 \tilde{\mathbf{e}}'. \quad (3.109)$$

Die Voraussetzung für dieses Vorgehen ist ein homogenes Rechengebiet, in dem keine Materialsprünge auftreten. Die Gleichung (3.109) entspricht im Kontinuierlichen der **Nabla-Quadrat-Eigenwertgleichung**

$$\text{rot rot} - \text{grad div} = -\nabla^2. \quad (3.110)$$

Diese wird nicht von den statischen Feldern ($\text{div} \vec{D} = 0$) erfüllt. Durch das beschriebene Vorgehen sind nun neue Lösungen zu dem Lösungsraum der curl-curl-Gleichung hinzugekommen. Es treten nun zwei neue Lösungstypen auf:

1. $\omega \in \mathbb{R}, \omega^2 > 0 : \text{div} \vec{D} = 0, \text{rot} \vec{E} \neq 0$, gesuchte Moden
2. $\omega \in \mathbb{R}, \omega^2 > 0 : \text{div} \vec{D} \neq 0, \text{rot} \vec{E} = 0$, Moden sind unphysikalisch, da sie $\text{grad div} \vec{E} = \omega^2 \epsilon \mu \vec{E}$ erfüllen

Das Spektrum der Eigenwerte des curl-curl-Operators verändert sich durch diese Vorgehensweise wie folgt

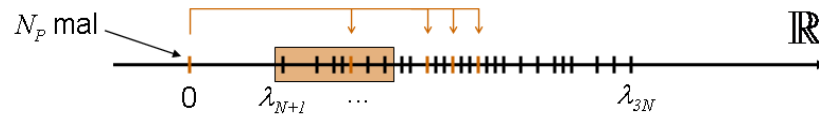


Abb. 3.46: Spektrum der Eigenwerte des curl-curl-Operators mit verschobenen Null-Eigenwerten

Die Eliminierung der statischen Moden führt somit zu sogenannten **Ghost Modes** bzw. **Geistermoden**. Da diese unphysikalisch sind, müssen sie von den numerischen Verfahren ausgeschlossen werden. Hierzu prüfen die Verfahren folgende Eigenschaft

$$-\mathbf{G}^T \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e} \begin{cases} = \mathbf{0} \\ \neq \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{dynamischer Mode} \\ \text{Ghost-Mode} \end{matrix} \quad (3.111)$$

Eine Lösungsmethode für solche Eigenwertprobleme sind die sogenannten simultanen Iterationen.

Kapitel 4

Die Methode der Finiten Elemente (FEM)

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode der Finiten Elemente ist ein weiteres numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung der Maxwellgleichungen. Ähnlich wie bei der FIT zerlegt man wiederum das zu betrachtende Volumen durch ein Diskretisierungsgitter in einzelne **finite Elemente**, auf welchen die Näherungslösungen berechnet werden. Der Vorteil der FEM im Gegensatz zur FIT besteht darin, dass auch unstrukturierte Gitter verwendet werden können, was meist eine Reduzierung der Elemente mit sich zieht.

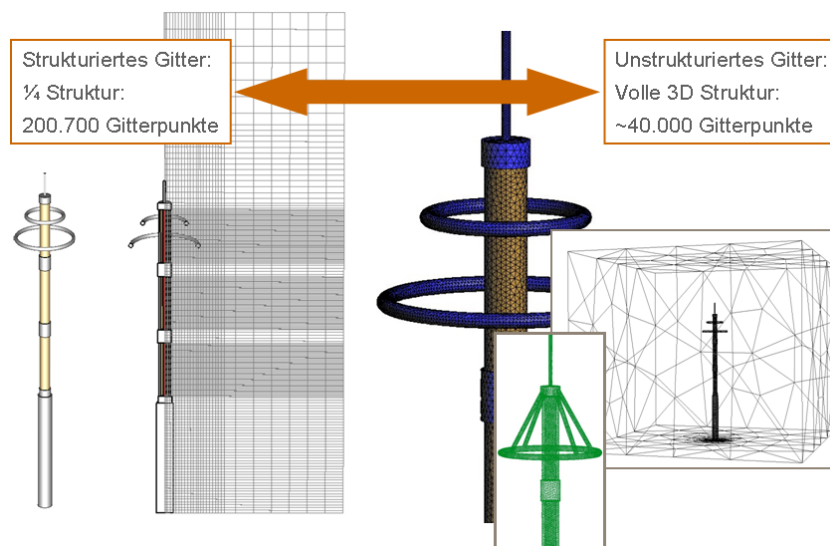


Abb. 4.1: Vergleich der Diskretisierungsgitter bei der FIT und FEM

4.1 Elektrostatik - Die FEM Diskretisierung am Beispiel der Poisson-Gleichung

Die Vorgehensweise der FEM wird im Weiteren an dem Beispiel der Poisson-Gleichung mit gemischten Randbedingungen verdeutlicht. Man betrachtet hier ein beliebiges offenes und beschränktes Gebiet Ω

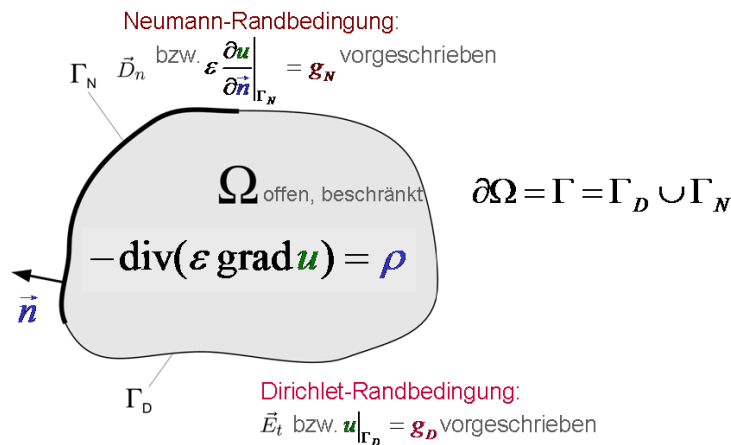


Abb. 4.2: FEM-Diskretisierung der Poisson-Gleichung für ein beliebiges, beschränktes offenes Gebiet Ω

Der Rand des Gebiets Ω ist in zwei Randstücke unterteilt $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Auf dem einen Randstück Γ_N sollen Neumann-Randbedingungen vorliegen, auf Γ_D Dirichlet-Randbedingungen. Das Randwertproblem der Poisson-Gleichung lautet dann

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = \rho, \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_N} = g_N, \quad u|_{\Gamma_D} = g_D. \quad (4.1)$$

Um die Lösung der Poisson-Gleichung auf dem gegebenen Gebiet Ω anzunähern, wird das ursprüngliche Problem in ein äquivalentes, aber vereinfachtes Problem, die sogenannte **Variationsformulierung**, überführt. Hierzu führt man zunächst eine "**schwache Formulierung**" des Problems über sogenannte **Testfunktionen** ein. Bevor diese konstruiert werden können, muss zunächst für die gewählte Zerlegung des Gebietes ein geeigneter Funktionenraum definiert werden. Es sei

$$L_2(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = M < \infty, M \in \mathbb{R}\} \quad (4.2)$$

der Raum der **quadratisch integrierbaren Funktionen**. Der benötigte Funktionenraum muss zusätzlich noch die Existenz der partiellen Ableitungen sicherstellen. Hierfür definiert man folgenden *Sobolev-Raum*¹

$$H^1(\Omega) := \{u \in L_2(\Omega) | \exists \text{ verallg. Ableitungen } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad i = 1, \dots, d\}. \quad (4.3)$$

Für die Testfunktionen wird zusätzlich noch berücksichtigt, dass diese auf dem Randstück Γ_D die Dirichlet-Randbedingung erfüllen. Daher wählt man als Funktionenraum für die Testfunktionen, einen abgeschlossenen Teilraum des Sobolev-Raumes aus (4.3)

$$H_0^1(\Omega, \Gamma_D) := \{v \in H^1(\Omega) | v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D\} =: V_0. \quad (4.4)$$

Dies ist ein sogenannter *Hilbert-Raum*², d.h. auf diesem ist ein Skalarprodukt definiert.

Um das Randwertproblem in (4.1) in eine "schwache Formulierung" zu überführen, multipliziert man es mit den Testfunktionen aus dem Raum V_0 und integriert anschließend über das Gebiet Ω

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u)) \cdot v \, d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \cdot v \, d\Omega \quad \text{für alle } v \in V_0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \underbrace{(-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) - \rho)}_{\text{"gewichtetes Residuum für u"}} \cdot v \, d\Omega &= 0 \quad \text{für alle } v \in V_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Für die weitere Vorgehensweise wird zunächst ein kleines Hilfsmittel benötigt, der *Integralsatz von Gauß*

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, d\Omega = \iint_{\Gamma} \partial\Omega \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\Gamma. \quad (4.6)$$

Setzt man $\vec{a} = \varphi(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi)$, erhält man aus (4.6)

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \varepsilon \operatorname{grad} \varphi) \, d\Omega$$

¹Die genaue Definition eines Sobolev-Raums kann nachgelesen werden unter: Hans W. Alt, *Lineare Funktionsanalysis*, 4. Auflage, Springer-Verlag GmbH, 2002

²Die genaue Definition eines Hilbert-Raums kann nachgelesen werden unter: Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, 4. Auflage, B.G. Teubner Verlag, 2006

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\Omega} (\varphi \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) + \operatorname{grad} \varphi \cdot (\varepsilon \operatorname{grad} \varphi)) \, d\Omega \quad (4.7) \\
&= \iint_{\Gamma} \varphi (\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) \cdot \vec{n} \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Es ist dabei $\varepsilon \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{n} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}$. Eine Anwendung des 1. Greenschen Integralsatzes führt zu

$$-\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u)) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v) \, d\Omega - \oint_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \cdot v \, d\Gamma \quad \text{für alle } v \in V_0. \quad (4.8)$$

Als **schwache Formulierung** gilt dann

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \cdot v \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \cdot v \, d\Gamma \quad \text{für alle } v \in V_0. \quad (4.9)$$

Der letzte Term in (4.9) wird noch genauer untersucht. Es ist

$$\oint_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \cdot v \, d\Gamma = \underbrace{\int_{\Gamma_D} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \cdot v \, d\Gamma}_{=0 \text{ wg. } v \in H_0^1(\Omega)} + \underbrace{\int_{\Gamma_N} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u \cdot v \, d\Gamma}_{= \int_{\Gamma_N} \varepsilon g_N \cdot v \, d\Gamma}. \quad (4.10)$$

An dieser Stelle lässt sich nun das ursprüngliche Problem (4.1) in das neue äquivalente, abgeschwächte der Variationsformulierung überführen. Es lautet:

Gesucht sei eine Funktion $u \in V_G := \{v \in H^1(\Omega) | v(x) = g_D, x \in \Gamma_D\}$, so dass gilt

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \varepsilon g_N \cdot v \, d\Gamma \quad \text{für alle } v \in V_0. \quad (4.11)$$

Die Gleichung in (4.11) besitzt eine eindeutige Lösung die durch die Nebenbedingungen g_N, g_D, ρ festgelegt ist. Um eine geeignete Näherungsfunktion u zu bestimmen, muss man für diese einen geeigneten Ansatz finden. Dabei ist die Idee die kontinuierlichen (unendlich-dimensionalen) Funktionenräume durch diskrete (endlich-dimensionale) Funktionenräume zu ersetzen. Eine Vorgehensweise ist dabei der sogenannte Galerkin-Ansatz. Man wählt dieselbe Basis für die Funktionenräume V_0 und V_G

$$u \rightarrow u_h = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i N_i(x) \quad \text{und} \quad v \rightarrow v_h = \sum_{i \in \omega_h} v_i N_i(x)$$

mit
(4.12)

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h, \quad \omega_h = \{1, 2, \dots, n_h\}, \quad \gamma_h = \{n_h + 1, \dots, n_{\bar{h}}\} \quad (= \text{Dirichlet-Rand}).$$

Die in (4.12) auftretenden Funktionen $N_i(x)$ nennt man **Ansatzfunktionen**. Diese werden je nach Problem unterschiedlich bestimmt, wobei die Basisfunktionen unterschiedliche Ordnungen ausweisen. Die folgende Abbildung zeigt ein mögliches Beispiel für ein 1D-Problem.

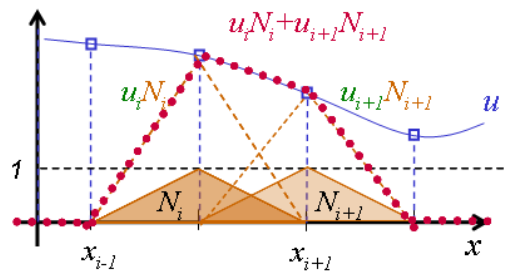


Abb. 4.3: Beispiel für die Wahl der Ansatzfunktion für den 1D-Fall

In diesem Falle wählt man als Ansatz- oder auch Basisfunktionen die sogenannten "Hütchen-Funktionen" auf einem lokalen kompakten Träger. Die Schrittweite zwischen zwei Punkten x_{i-1} , x_i ist h . Die Ansatzfunktionen sind stückweise linear. Für ein finites Element des gewählten Gitters gilt somit

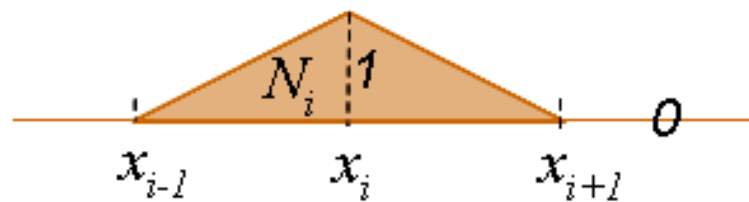


Abb. 4.4: Stückweise lineare Ansatzfunktionen für ein finites Element - "1D-Hütchen-Funktion"

Außerdem erfüllen die Ansatzfunktionen das Kriterium der "Zerlegung der Eins". Für 2D-Probleme sehen die "2D-Hütchenfunktionen" wie folgt aus

$$\sum_{i \in \bar{\omega}_h} N_i(x) = 1.$$

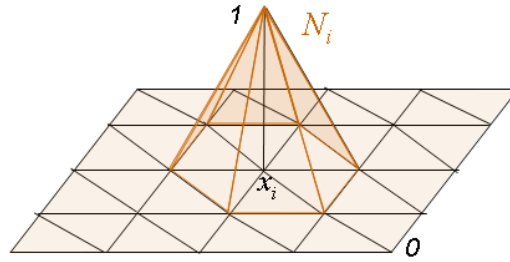


Abb. 4.5: Stückweise lineare Ansatzfunktionen für ein finites Element - "2D-Hütchen-Funktion"

$$u \rightarrow u_h = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i N_i(x). \quad (4.13)$$

Für 3D-Probleme ergibt sich

$$u \rightarrow u_h = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i N_i(x) \quad (4.14)$$

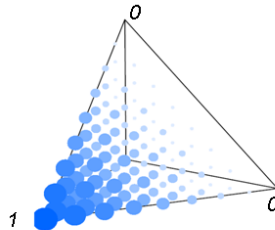


Abb. 4.6: Stückweise lineare Ansatzfunktionen für ein finites Element - "3D-Hütchen-Funktion"

Die gewählten Ansatzfunktionen werden jetzt auf das Randwertproblem der Poisson-Gleichung angewendet. Hierzu setzt man die Funktionen aus (4.11) in (4.12) ein und erhält

$$\int_{\Omega} \left(\text{grad} \left(\sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i N_i \right) \cdot \varepsilon \text{grad} \left(\sum_{j \in \omega_h} v_j N_j \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \cdot \left(\sum_{j \in \omega_h} v_j N_j \right) d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_N \cdot \left(\sum_{j \in \omega_h} v_j N_j \right) d\Gamma. \quad (4.15)$$

Sortiert man die Gleichung um, ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{n_h} v_j \left(\sum_{i=0}^{n_h} u_i \int_{\Omega} (\text{grad} N_i \cdot \varepsilon \text{grad} N_j) \, d\Omega \right) = \sum_{j=0}^{n_h} v_j \int_{\Omega} \rho \cdot N_j \, d\Omega + \sum_{j=0}^{n_h} v_j \int_{\Gamma_N} \varepsilon g_N \cdot N_j \, d\Gamma. \quad (4.16)$$

Die Gleichung in (4.16) wird notwendig erfüllt, wenn gilt

$$\sum_{i=0}^{n_h} u_i \int_{\Omega} (\text{grad} N_i \cdot \varepsilon \text{grad} N_j) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \cdot N_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \varepsilon g_N \cdot N_j \, d\Gamma \quad \forall j \in \{1, \dots, n_h\}. \quad (4.17)$$

Der Ausdruck in Gleichung (??) beschreibt die Zeilen eines linearen Gleichungssystems und lässt sich zusammenfassen zu

$$[\mathbf{A}][\mathbf{u}] = [\mathbf{f}]. \quad (4.18)$$

Dabei ist

$$[\mathbf{A}]_{ij} := \int_{\Omega} (\text{grad} N_i \cdot \varepsilon \cdot \text{grad} N_j) \, d\Omega, \quad [\mathbf{f}]_i := \int_{\Omega} \rho \cdot N_i \, d\Omega, \quad [u]_j := u_j. \quad (4.19)$$

Die Matrix A ist symmetrisch. Der Vektor f wird zunächst ohne Randbedingungen numerisch assembliert. Dies geschieht erst im Nachhinein. Die Auswertung der Integrale erfolgt i.d.R. durch eine numerische Quadratur (z.B. Gauß-Quadratur). Da die Ansatzfunktionen auf einem lokalen Träger definiert sind, erfolgt die Integration der linearen Ansatzfunktionen elementweise in den Tetraedern. Dies zeigt die nächste Abbildung beispielhaft für ein r -tes Element E_r im FEM-Netz

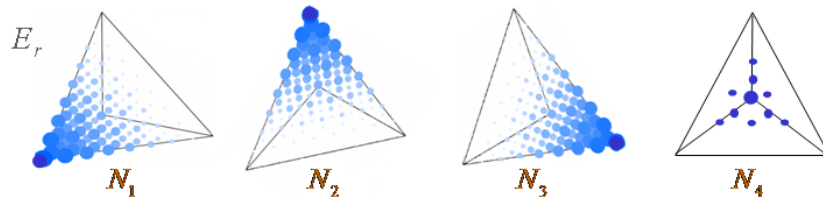


Abb. 4.7: Elementweise Integration am Beispiel eines r -ten Elements des FEM-Netzes

Man erkennt, dass die Matrix A aus (4.18), die meist als Elementsteifigkeitsmatrix $[K_r]$ bezeichnet wird, eine 4×4 Matrix ist

$$[K_r]_{ij} := \int_{E_r} (\text{grad} N_i \cdot \varepsilon \cdot \text{grad} N_j) \, d\Omega. \quad (4.20)$$

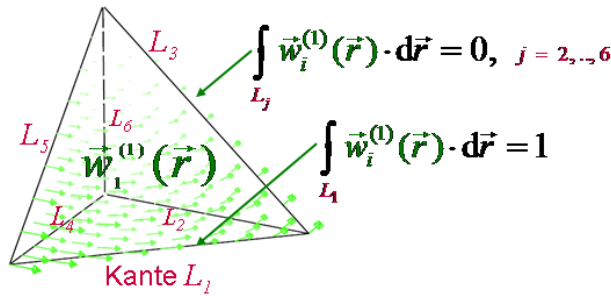
Der Vektor f auch als **Elementlastvektor** bezeichnet ist ein 4×1 Vektor

$$[f_r]_i := \int_{\Omega} \rho \cdot N_i \, d\Omega. \quad (4.21)$$

4.1.1 Nedélec-Kantenelemente

Eine Alternative zu den bisher betrachteten Knotenelementen bilden die sogenannten Kantenelemente. Bei diesen wird die genäherte Lösung nicht aus Knoten sondern aus Kantenwerten zusammengesetzt. Solche Elemente bezeichnet man auch als **Nedelec-Kantenelemente**. Der Vorteil der Elemente besteht darin, dass die Normalenkomponente von den Vektoren beim Übergang von Element zu Element unstetig sein darf. Außerdem sind die Singularitäten an den Kanten besser modellierbar als solche an den Knoten. Die Ghost Modes werden ebenfalls eliminiert. Für die vektoriellen Finite (Kanten-Elemente) gilt

$$\begin{aligned} \vec{w}_1^{(1)} &= \text{grad} N_2 \cdot N_1 - \text{grad} N_1 \cdot N_2 \\ \vec{w}_2^{(1)} &= \text{grad} N_3 \cdot N_1 - \text{grad} N_1 \cdot N_3 \\ \vec{w}_3^{(1)} &= \text{grad} N_4 \cdot N_1 - \text{grad} N_1 \cdot N_4 \\ \vec{w}_4^{(1)} &= \text{grad} N_3 \cdot N_2 - \text{grad} N_2 \cdot N_3 \\ \vec{w}_5^{(1)} &= \text{grad} N_4 \cdot N_2 - \text{grad} N_2 \cdot N_4 \\ \vec{w}_6^{(1)} &= \text{grad} N_4 \cdot N_3 - \text{grad} N_3 \cdot N_4 \end{aligned} \quad (4.22)$$



Dabei ist

$$\text{grad } N_1 = \sum_{i=1,\dots,6} e_i \underbrace{\vec{w}_i^{(1)}}_* (\vec{r}). \quad (4.23)$$

Der Term $*$ in (4.23) stellt die zugehörigen Freiheitsgrade des Elements dar. Im Tetraeder gilt

$$\text{div } \vec{w}_i^{(1)} = 0. \quad (4.24)$$

Dies folgt für $i = 1$ aus

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{w}_1^{(1)} &= \text{div}(\text{grad} N_2 \cdot N_1) - \text{div}(\text{grad} N_1 \cdot N_2) \\ &= \text{grad} N_2 \cdot \text{grad} N_1 + \underbrace{\text{div } \text{grad} N_2 \cdot N_1}_{=0} - \underbrace{\text{div } \text{grad} N_1 \cdot N_2}_{=0 \text{ wg. } N_i \text{ linear}} - \text{grad} N_1 \cdot \text{grad} N_2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für die anderen Komponenten gilt dies analog. Für das elektrische Feld \vec{E} ergibt sich für ein Element entlang einer Kante

$$E_i = \int_{L_i} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (4.26)$$

Für das gesamte Element gilt dann

$$\vec{E}(\vec{r}) := \sum_{i=1,\dots,6} \underbrace{E_i}_{*} \vec{w}_i^{(1)}(\vec{r}) \in H_0^\Sigma(\text{rot}, \Omega). \quad (4.27)$$

Der Term $*$ in (4.27) stellt wieder die zugehörigen Freiheitsgrade des Elements dar. Für das Potential entlang der Kanten ist die Tangentialstetigkeit erfüllt, da gilt

$$L_i \neq L_j : \vec{w}_i^{(1)} = 0 \quad (4.28)$$

Im Tetraeder ist dann insgesamt wieder

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (4.29)$$

4.2 Der Gradientenoperator der FEM

Für das FEM-Gitter lässt sich wie bei der FIT im Abschnitt "Der Gradientenoperator" ein lokaler Gradientenoperator G einführen. Man betrachtet wieder ein einzelnes Gitter-Element mit 4 Knoten und 6 Kanten

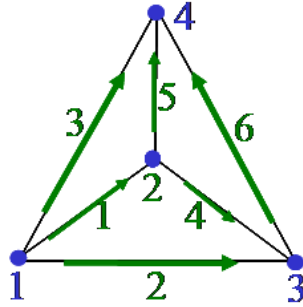


Abb. 4.8: Lokaler Gradientenoperator für ein FEM-Element

Analog zum Abschnitt "Der Gradientenoperator" ergibt sich dann für die Kanten-
spannungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}} &= -\mathbf{G}\Phi & \left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{e}} : (6 \times 1) \\ \Phi : (4 \times 1) \end{array} \right\} \Rightarrow & \mathbf{G} : (6 \times 4), \\ \bar{\mathbf{e}}_1 &= -(\Phi_2 - \Phi_1) & \bar{\mathbf{e}}_4 &= -(\Phi_3 - \Phi_2), \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= -(\Phi_3 - \Phi_1) & \bar{\mathbf{e}}_5 &= -(\Phi_4 - \Phi_2), \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= -(\Phi_4 - \Phi_1) & \bar{\mathbf{e}}_6 &= -(\Phi_4 - \Phi_3). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Matrix G ist dann wie folgt aufgebaut

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

oder in kompakter Schreibweise

$$[K_r] := -\mathbf{G}^T \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{G} (= \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{G}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{S}} := -\mathbf{G}^T \quad \leftrightarrow \quad (4 \times 6)(6 \times 6)(6 \times 4), \quad (4.32)$$

wobei

$$[\mathbf{M}_\varepsilon]_{ij} := \int_{\Omega} \varepsilon \left(\vec{w}_i^{(1)} \cdot \vec{w}_j^{(1)} \right) d\Omega \quad \text{mit} \quad w_{ij}^{(1)} := \text{grad} N_i \cdot N_j - \text{grad} N_j \cdot N_i. \quad (4.33)$$

Um die gesuchten Größen in den Knoten eines Elements zu bestimmen, müssen die auftretenden Größen dort in ihre Komponenten zerlegt werden, was sich aber durchaus als schwierig gestalten kann. Außerdem gibt es oft auch Randbedingungen die nur die tangentielle Komponente an den Elementgrenzen berücksichtigt.

4.3 Magnetostatik

Wie in Abschnitt 4.1 liege ein beliebiges offenes und beschränktes Gebiet Ω vor mit dem Rand $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H$

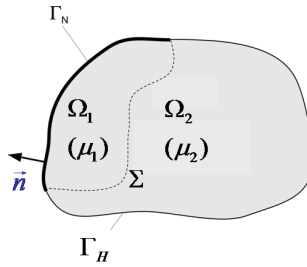


Abb. 4.9: FEM-Diskretisierung für die Magnetostatik für ein beliebiges, beschränktes offenes Gebiet

$$\begin{aligned}
 \Gamma_B : \vec{B} \cdot \vec{n} &= B_n = 0 \\
 \Rightarrow \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= 0 \\
 \Gamma_H : \vec{H} \times \vec{n} &= \vec{k}_H \\
 \Rightarrow \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \times \vec{n} &= \vec{k}_H \\
 \Sigma : \vec{n} \times \vec{A}_1 &= \vec{n} \times \vec{A}_2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{\mu_2} \vec{n} \times \nabla \times \vec{A}_1 &= \frac{1}{\mu_2} \vec{n} \times \nabla \times \vec{A}_2
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Das **magnetostatische Randwertproblem** lautet:

Gegeben sei eine Funktion $\vec{J}_S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Gesucht ist eine Funktion $\vec{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass gilt

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_i} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_S \quad \text{in } \Omega. \tag{4.35}$$

Dabei gelten folgende Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 \text{auf } \Gamma_B : \quad & \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \vec{A}_t, \\
 \text{auf } \Gamma_H : \quad & \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \times \vec{n} = \vec{k}_t,
 \end{aligned}$$

$$\text{auf } \Sigma : \quad \vec{n} \times \vec{A}_1 = \vec{n} \times \vec{A}_2, \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{n} \times \nabla \times \vec{A}_1 = \frac{1}{\mu_2} \vec{n} \times \nabla \times \vec{A}_2.$$

Analog zu Abschnitt 4.1 stellt man die **Variationsformulierung** auf. Hierzu betrachtet man den Folgenden Sobolev-Raum

$$H_0^\Sigma(\text{rot}, \Omega) := \{\vec{U} \in (L_2(\Omega))^3 \mid \nabla \times \vec{U} \in (L_2(\Omega))^3, [\vec{n} \times \vec{U}]_\Gamma = 0, [\vec{n} \times \vec{U}]_\Sigma = 0\}. \quad (4.37)$$

Gesucht sei eine Funktion $\vec{A} \in H_0^\Sigma(\text{rot}, \Omega)$, so dass gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_H} (\vec{W} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \vec{J}_S d\Omega \quad (4.38)$$

für alle vektoriellen Testfunktionen $\vec{W} \in H_0^\Sigma(\text{rot}, \Omega)$. Für das Randstück Γ_H gilt weiter

$$\int_{\Gamma_H} (\vec{W} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_H} \vec{W} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \times \vec{n}\right) d\Gamma = \int_{\Gamma_H} (\vec{W} \cdot \vec{k}_t) d\Gamma, \quad (4.39)$$

so dass sich (4.38) ändert zu

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}\right) d\Omega = \int_{\Gamma_H} \vec{W} \cdot \vec{k}_t d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \vec{J}_S d\Omega. \quad (4.40)$$

Dabei sind $\vec{J}_S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\vec{k}_t : \Gamma_H \rightarrow \mathbb{R}^3$ Quellstromdichten. Analog zu Abschnitt 4.1 ergibt sich mittels des Galerkin-Ansatzes und geeigneten Ansatz-Funktionen

$$\vec{A} = \sum_{i=1, \dots, \#Kanten} A_i \vec{w}_i^{(1)}(\vec{r}), \quad \vec{W} = \sum_{i=1, \dots, \#Kanten} W_i \vec{w}_i^{(1)}(\vec{r}) \quad (4.41)$$

folgende Formulierung

$$\sum_{i=1}^{\#Kanten} \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{w}_i^{(1)}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{w}_j^{(1)}\right) A_j d\Omega - \int_{\Gamma_H} \vec{w}_j^{(1)} \cdot \vec{k}_t d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{w}_j^{(1)} \cdot \vec{J}_S d\Omega = 0. \quad (4.42)$$

Der Ausdruck in Gleichung 4.42 beschreibt wiederum die Zeilen eines linearen Gleichungssystems und lässt sich zusammenfassen zu

$$[K][a] = [\mathbf{f}]. \quad (4.43)$$

Dabei ist

$$[\mathbf{K}]_{ij} := \int_{\Omega} (\text{rot } \vec{w}_i^{(1)}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{w}_j^{(1)}\right) d\Omega, \quad [\mathbf{f}]_i := \int_{\Omega} \vec{w}_i^{(1)} \cdot \vec{J}_S d\Omega, \quad [\mathbf{a}]_j := A_j. \quad (4.44)$$

Die Matrix K ist symmetrisch. Der Vektor f wird zunächst ohne Randbedingungen assembliert. Dies geschieht erst im Nachhinein. Die Auswertung der Integrale erfolgt i.d.R. durch eine numerische Quadratur (z.B. Gauß-Quadratur). Wegen

$$\text{rot } H_0^{\Sigma}(\text{rot}, \Omega) \subset H(\text{div}, \Omega) \quad (4.45)$$

gilt

$$\text{rot } \vec{w}_i^{(1)} = \sum_{k=1, \dots, \# \text{Flächen}} c_{ki} \vec{w}_k^{(2)} \text{ mit Koeffizienten } c_{ki} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}. \quad (4.46)$$

Für die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} aus (4.44) ergibt sich dann mit (4.46)

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]_{ij} &:= \int_{\Omega} (\text{rot } \vec{w}_i^{(1)}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{w}_j^{(1)}\right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1, \dots, \# \text{Flächen}} c_{ki} \vec{w}_k^{(2)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \sum_{k=1, \dots, \# \text{Flächen}} c_{kj} \vec{w}_k^{(2)} \right) d\Omega \\ \Rightarrow [\mathbf{K}] &:= \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Matrix \mathbf{C} in der letzten Zeile in (4.47) ist identisch zu der Curl-Matrix der FIT in Abschnitt "Die Operatormatrizen \mathbf{C} und \mathbf{S} " und es gilt

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1, \#FL.} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\#FL., 1} & \cdots & c_{\#FL., \#FL.} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Für die Matrix $\mathbf{M}_{\mu^{-1}}$ gilt

$$[\mathbf{M}_{\mu^{-1}}]_{ij} := \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\vec{w}_i^{(2)} \cdot \vec{w}_j^{(2)}) \, d\Omega \quad \text{mit } w_i^{(2)} = \text{rot } w_i^{(1)}. \quad (4.49)$$

4.3.0.1 Nedélec-Kantenelemente

Wie auch schon in Abschnitt 4.1.1 werden hier wieder die Unterschiede zu Nedélec-Kantenelementen aufgezeigt. Auch in diesem Falle existiert eine Tangentialstetigkeit des Vektorpotentials entlang der Kanten.

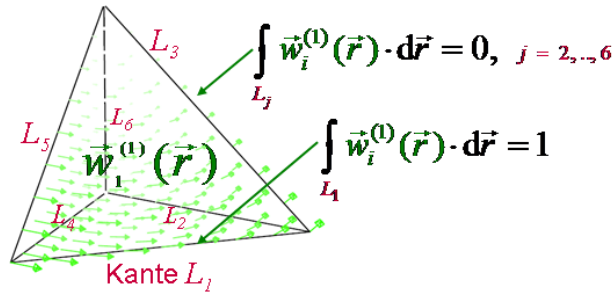


Abb. 4.10: Tangentialstetigkeit des Vektorpotentials für ein Nedélec-Kantenelement

Für das Vektorpotential \vec{A} ergibt sich für ein Element entlang einer Kante

$$A_i = \int_{L_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (4.50)$$

Für das gesamte Element gilt dann

$$\vec{A}(\vec{r}) := \sum_{i=1, \dots, 6} \underbrace{A_i}_{*} \vec{w}_i^{(1)}(\vec{r}) \in H_0^{\Sigma}(\text{rot}, \Omega). \quad (4.51)$$

Der Term $*$ in 4.51 stellt wieder die zugehörigen Freiheitsgrade des Elements dar. Für die Tangentialkomponente entlang der Kanten gilt analog zu (4.28)

$$L_i \neq L_j : A_i = 0. \quad (4.52)$$

Im Tetraeder ist dann insgesamt

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (4.53)$$

4.3.1 Raviart-Thomas Elemente

Eine weitere Art von wählbaren Elementen sind die Raviart-Thomas Elemente. Diese werden so gewählt, dass die Stetigkeit der Normalenkomponenten an den Elementargrenzen gewährleistet ist

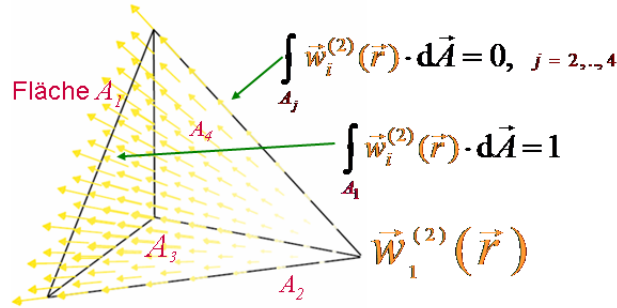


Abb. 4.11: Tangentialstetigkeit des Vektorpotentials für ein Raviart-Thomas Element

Dabei sind $\vec{w}_i^{(2)}, i = 1, \dots, \#$ Flächen der vektoriellen Finite-Flächen-Elemente. Für die magnetische Flussdichte \vec{B} ergibt sich für ein Element entlang einer Kante

$$B_i = \int_{A_i} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}. \quad (4.54)$$

Für das gesamte Element gilt dann

$$\vec{B}(\vec{r}) := \sum_{i=1, \dots, 4} \underbrace{b_i}_{*} \vec{w}_i^{(2)}(\vec{r}) \in H(\text{div}, \Omega) \quad (4.55)$$

$$, := \{\vec{U} \in (L_2(\Omega))^3 \mid \text{div } \vec{U} \in L_2(\Omega)\}. \quad (4.56)$$

Der Term $*$ in (4.56) stellt wieder die zugehörigen Freiheitsgrade des Elements dar. Für die Normalenkomponente entlang der Kanten gilt analog zu (4.28) und (4.52)

$$A_i \neq A_j : B_i = 0. \quad (4.57)$$

Im Tetraeder ist dann insgesamt

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.58)$$

4.4 Whitney-Finite-Elemente Methode: Basisfunktionen

Die bisher in den Abschnitten 4.1.1, 4.3.0.1, 4.3.1 betrachteten Ansatzfunktionen für die finiten Elemente gehören zu den sogenannten Whitney-Basis-Funktionen niedrigster Ordnung. Diese bilden eine hierarchische Struktur von Basis-Funktionen, durch welche die verschiedenen elektromagnetischen Größen auf dem finiten Element angenähert werden können.

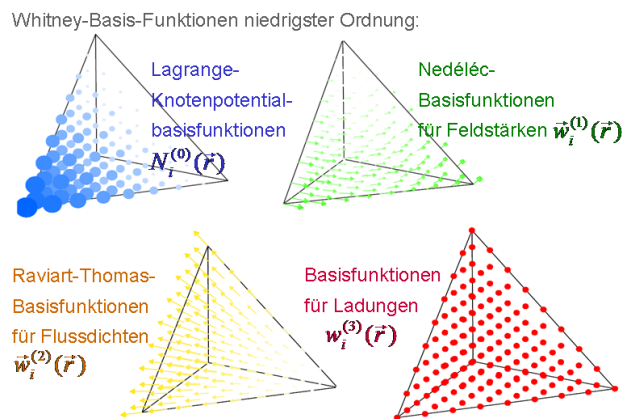


Abb. 4.12: Whitney-Basis-Funktionen niedrigster Ordnung

Die 0-Formen beschreiben wie aus der Abbildung zu entnehmen ist die skalaren Größen wie z.B. die elektrischen Potentiale. Die 1-Formen repräsentieren Feldgrößen wie das elektrische und magnetische Feld, die 2-Formen die magnetische und elektrische Flussdichte und die 3-Formen volumenabhängige Ladungsdichten. Das Bedeutende an Whitney-Basis-Funktionen ist, dass die jeweils relevanten Stetigkeitsbedingungen an den Elementengrenzen automatisch erfüllt sind.

Für die Materialmatrizen ergeben sich

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_{\varepsilon}^{\text{WFEM}} \}_{ij} &:= \int_{\Omega} \varepsilon \vec{w}_i^{(1)} \cdot \vec{w}_j^{(1)} dV \\ \mathbf{M}_{\mu^{-1}}^{\text{WFEM}} \}_{ij} &:= \int_{\Omega} \mu^{-1} \vec{w}_i^{(2)} \cdot \vec{w}_j^{(2)} dV \end{aligned} \right\}^* \quad \left\{ \mathbf{M}_{\kappa}^{\text{WFEM}} \}_{ij} := \int_{\Omega} \kappa \vec{w}_i^{(1)} \cdot \vec{w}_j^{(1)} dV \right\} \Delta \quad (4.59)$$

Die WFEM-Materialmatrizen $*$ sind symmetrisch und positiv definit. Die Die WFEM-Materialmatrizen Δ sind symmetrisch und positiv semi-definit.

Kapitel 5

Die elektrische Feldintegralgleichung

In diesem Abschnitt werden nun zeitharmonische Felder betrachtet. Bei linearen zeitinvarianten Materialeigenschaften lassen sich die Maxwellgleichungen in den Frequenzbereich transformieren. Es gilt die Transformationseigenschaft

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega. \quad (5.1)$$

Die Helmholtz-Gleichung lautet in diesem Falle

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_S. \quad (5.2)$$

Es gilt weiterhin

$$\vec{A}(\vec{r}_P) = \mu \iiint_{V_\infty} G(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \vec{J}_S(\vec{r}_Q) dV_Q, \quad \text{mit } G(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) = \frac{e^{-jkr_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}. \quad (5.3)$$

Aus der folgenden Abbildung lassen sich die räumlichen Zusammenhänge zwischen dem elektrischen Feld und der elektrischen Stromdichte ablesen

Mittels der folgenden Zusammenhänge lässt sich eine Formulierung für das elektrische Feld \vec{E} durch das Vektorpotential \vec{A} herleiten

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -j\omega \vec{A} - \text{grad} \varphi \\ \text{div } \vec{A} = -j\omega \varepsilon \mu \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -j\omega \vec{A} + \frac{1}{j\omega \varepsilon \mu} \text{grad div } \vec{A}. \quad (5.4)$$

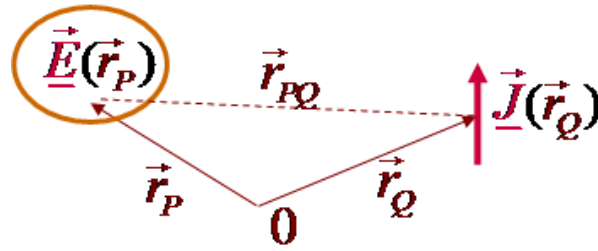


Abb. 5.1: Räumliche Lage des elektrischen Feldes und der Stromdichte aus Sicht eines Betrachters im Punkt 0

Aus Gleichung (5.4) ergibt sich dann die **elektrische Feldintegralgleichung** (des freien Raums) in dyadischer Form

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = -j\omega\mu \iiint_{V_\infty} \vec{G}(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}_S(\vec{r}_Q) dV_Q. \quad (5.5)$$

Dabei ist

$$\vec{G}(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) := \left[\mathbf{I} + \frac{\text{grad div}}{k^2} \right] G(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \quad (5.6)$$

die **dyadische (homogene) Greensche Funktion**.

Die Gleichung (5.6) entspricht dabei einer linearen Operatorgleichung der Form

$$\mathbf{L}\{J\} = E. \quad (5.7)$$

Durch das *Huygensche Äquivalenzprinzip* lässt sich das elektrische Feld \vec{E} in einem beliebigen Gebiet Ω_A durch die dort vorhandenen Stromdichten und Oberflächenstromdichten auf einer beliebigen Oberfläche eines Gebietes Ω_I eindeutig bestimmen.

Auf der Oberfläche Γ existiert dabei die folgende Größe

$$\text{Stromdichten} \quad \vec{J}_\Gamma(\vec{r}_Q) = \vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}_Q). \quad (5.8)$$

Für das elektrische Feld \vec{E} ergibt sich dann die folgende Feldintegralgleichung

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = -j\omega \iiint_{\Omega_A} \vec{G}_J^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}(\vec{r}_Q) dV_Q$$

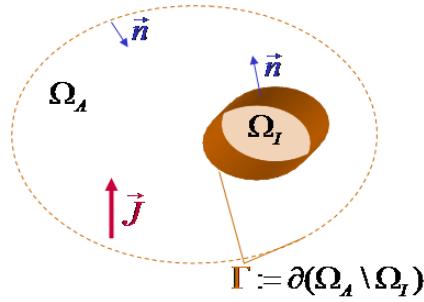
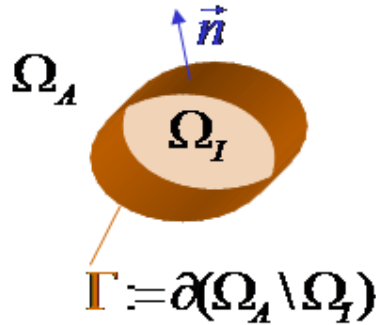


Abb. 5.2: Geometrische Anordnung der Stromdichten und Oberflächenströme

$$+ -j\omega \iint_{\Gamma} \vec{G}_J^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) d\vec{A}_Q. \quad (5.9)$$

Bei offenen Problemen wird der Betrag der äußeren Hülle gegen unendlich vernachlässigt. Es wird nun ein quellfreier Außenraum Ω_A betrachtet. Wird jetzt zusätzlich eine Magnetisierung \vec{M}_{Γ} eingeführt $\vec{M}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) = -\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}_Q)$ wird feldfrei



$$\vec{E}(\vec{r}_P) = -j\omega \iint_{\Gamma} \left[\vec{G}_J^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) + \vec{G}_M^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{M}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) \right] d\vec{A}_Q \quad (5.10)$$

Durch Anfüllen von Ω_I mit bestimmten Materialverteilungen können äquivalente Formulierungen erzeugt werden, z.B.

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = -j\omega \mu \iint_{\Gamma} \left[\vec{G}_{J,1}^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) \right] d\vec{A}_Q \quad \text{mit } \vec{G}_{J,1}^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) : \Omega_I \text{ ideal elektrisch leitend,} \quad (5.11)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = -j\omega \mu \iint_{\Gamma} \left[\vec{G}_{M,2}^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{M}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) \right] d\vec{A}_Q \quad \text{mit } \vec{G}_{M,2}^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) : \Omega_I \text{ ideal magnetisch leitend.}$$

Auf einer Oberfläche eines PEC-Streukörpers ($\vec{r}_P \in \Gamma$) verschwindet die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes

$$\vec{E}_{\text{tan}}(\vec{r})\Big|_{\Gamma} = 0 \quad (5.12)$$

Es gilt dort

$$-\vec{E}_{\text{Einfallend,tangential}}(\vec{r}_P) = -j\omega\mu \iint_{\Gamma} \left[\vec{G}(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) \right] d\vec{A}_Q|_{\text{tangential}}. \quad (5.13)$$

Die Gleichung (5.13) ist wiederum äquivalent zu einer linearen Operatorengleichung der Form

$$L\{J\} = E_{\text{Einfallend}}. \quad (5.14)$$

Kapitel 6

Die Momentenmethode (MOM)

Diese numerische Methode basiert auf demselben Ansatz wie die Finite Elementen-Methode aus Kapitel 3. Diesmal wird das Verfahren zur Bestimmung der Stromdichte \vec{J} genutzt. Man wählt wiederum vektorielle Ansatzfunktionen $\vec{v}^{(2)}$ für $\vec{J} = \sum_{n=1}^N J_n \vec{v}_n^{(2)}$. Hierbei kommen z.B. die sogenannten Rao-Walton-Glisson (RWG) Ansatzfunktionen zum Einsatz. Weiter werden Gewichtsfunktionen $\vec{w}_m^{(2)}$ (auch Testfunktionen) gewählt, z.B. die vektoriellen Raviart-Thomas Ansatzfunktionen (RWGs) mit einem kompakten Träger auf dem Rand Γ . Häufig wird hierbei genauso wie bei der FEM der Galerkin-Ansatz verwandt, dabei sind die Basisfunktionen gleich den Testfunktionen $\vec{w}_m^{(2)} := \vec{v}_m^{(2)}$. Das innere Produkt ist wie folgt definiert

$$\langle \vec{w}_m^{(2)}, \vec{E} \rangle := \iint_{\Gamma} \vec{w}_m^{(2)} \cdot \vec{E} \, dA. \quad (6.1)$$

Es ergibt sich für die gesuchte Stromdichte $\{J_n\}_{n=1,\dots,N}$ ein komplexwertiges Gleichungssystem

$$\sum_{n=1}^N J_n \langle \vec{w}_m^{(2)}, \vec{L} \{ \vec{v}_n \} \rangle = \langle \vec{w}_m^{(2)}, \vec{E} \rangle, \quad m = 1, \dots, N. \quad (6.2)$$

Wird nun ein Streukörper (feldfrei) nur durch seine Oberflächenströme repräsentiert, ergibt sich aus der Integralgleichungsmethode aus Kapitel 4

$$-E_{\text{Einfallend,tan}}(\vec{r}_P) = -j\omega\mu \iint_{\Gamma} \left[\vec{G}_J^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{J}_{\Gamma}(\vec{r}_Q) \right] d\vec{A}_Q|_{\text{tan}}, \quad (6.3)$$

wobei $\vec{G}_J^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q)$ die Greensche Funktion des freien Raumes ist. Mit der Momentenmethode ergibt sich hiermit ein lineares Gleichungssystem der folgenden Form

$$\begin{aligned}
 - \iint_{\Gamma} \vec{w}_m^{(2)}(\vec{r}_P) \cdot \vec{E}_{\text{Einfallend}}(\vec{r}_P) d\vec{A}_P = \\
 \sum_{n=1}^N J_n \iint_{\Gamma} \iint_{\Gamma} -j\omega\mu \left[\vec{w}_m^{(2)}(\vec{r}_P) \cdot \vec{G}_J^E(\vec{r}_P, \vec{r}_Q) \cdot \vec{w}_n^{(2)}(\vec{r}_Q) \right] d\vec{A}_Q d\vec{A}_P. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Es folgt für die Stromdichte :

$$\vec{J}_{\Gamma}(\vec{r}_P) = \sum_{n=1}^N J_n \vec{w}_n^{(2)}(\vec{r}_P) \quad (6.5)$$

Ein praktisches Anwendungsbeispiel für die Momentenmethode ist z.B. die Stromdichteverteilung auf einem Flugzeug, welche durch eine einfallende ebene Welle (z.B. ein Radarsignal) erzeugt wird. Dabei wird dann die mehrfache Auswertung des Oberflächenintegrals an unterschiedlichen Positionen um den Flieger durchgeführt. Allerdings ist die klassische Momentenmethode dabei sehr rechenintensiv und aufwendig im Speicherbedarf.