BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Theoretische Elektrotechnik II

Übung 1 - WS 2017/2018

Aufgabe II.1: *Polarisation elektromagnetischer Wellen*

Eine homogene ebene Welle (HEW) breitet sich in einem nicht leitenden, ladungsfreien Medium der Permittivität ε und der Permeabilität μ in positive z-Richtung eines kartesischen Koordinatensystems aus. Die Welle ist hierbei entweder

i) linear polarisiert: $\vec{E}\,(\vec{r},t) = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y)\sin(\omega t - kz)$, oder

ii) zirkular polarisiert: $\vec{E}\,(\vec{r},t) = E_0\,[\vec{e}_x \cos(\omega t - kz) + \vec{e}_y \sin(\omega t - kz)]$.

a) Berechnen Sie aus den angegebenen Momentanwerten die magnetische Flussdichte $\vec{B}\,(\vec{r},t)$ für beide Polarisationen

- mittels $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ und
- mittels $\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right)$.

b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}\,(\vec{r},t)$ für beide Wellen.

Hinweise zu Aufgabe II.1:

Aufgabenteil b): Verwenden Sie

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right),$$
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right).$$

Ergebnisse von Aufgabe II.1:

a)

$$\textit{lineare Polarisation: } \vec{B} = \frac{k}{\omega}\left(-E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y\right)\sin\left(\omega t - kz\right)$$
$$\textit{zirkulare Polarisation: } \vec{B} = E_0\frac{k}{\omega}\left[-\sin\left(\omega t - kz\right)\vec{e}_x + \cos\left(\omega t - kz\right)\vec{e}_y\right]$$

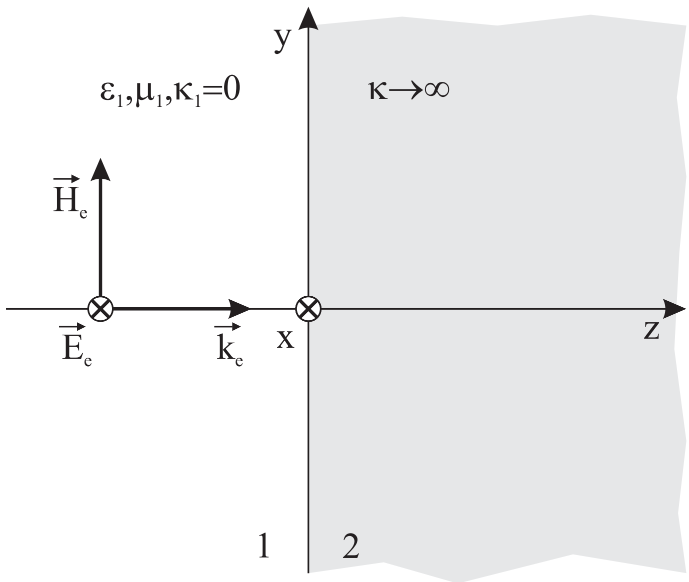
b)

$$\textit{lineare Polarisation: } \vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)\sin^2\left(\omega t - kz\right)\vec{e}_z$$
$$\textit{zirkulare Polarisation: } \vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_z$$

Aufgabe II.2: *Homogene ebene Welle trifft senkrecht auf ideal leitenden Halbraum*

Eine HEW breitet sich im Vakuum in positive z-Richtung aus. Sie trifft bei $z = 0$ auf einen Halbraum unendlicher Leitfähigkeit κ, siehe Skizze. Gegeben sind dabei folgende Größen:

$$\underline{\vec{E}}_e(\vec{r}) \quad = \quad E_e \vec{e}_x \, e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \,, \qquad \vec{k}_e = (0, 0, k_{ez})$$



a) Berechnen Sie das elektromagnetische Feld im Halbraum $z \leq 0$ als Momentanwert.

b) Geben Sie die Flächenstromdichte $\vec{\alpha}$ in der Grenzfläche an. Überlegen Sie zuerst, in welche Richtung die Flächenstromdichte zeigt.

c) Berechnen Sie die Energiedichte $w(\vec{r}, t)$ sowie deren zeitlichen Mittelwert $\overline{w}(\vec{r})$.

d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$ der elektromagnetischen Welle und dessen zeitlichen Mittelwert $\overline{\vec{S}}(\vec{r})$. Überlegen Sie zuerst, was Sie als Ergebnis für den zeitlichen Mittelwert der Leistungsdichte erwarten.

e) Berechnen Sie die äquivalente Leitschichtdicke δ (auch Skintiefe genannt) im Medium 2 für einen nun nicht mehr ideal leitenden Halbraum mit $\kappa = 0,1\ S/m$, $\mu_r = 1$ und einer Frequenz von $f = 1$ GHz.

Hinweise zu Aufgabe II.2:

a) Das elektromagnetische Feld im Halbraum $z \leq 0$ setzt sich aus dem Feld der einfallenden Welle und der vollständig reflektierten Welle zusammen. Wegen $\kappa \to \infty$ kann kein Feld in den Halbraum $z \geq 0$ eindringen. Die Ansätze für die einfallende Welle sind in der Aufgabenstellung gegeben. Geben Sie für die reflektierte Welle analoge Ansätze an. Beachten Sie, dass der Wellenvektor der reflektierten Welle $\vec{k}_r$ im Gegensatz zum Wellenvektor der einfallenden Welle $\vec{k}_e = k_e \cdot \vec{e}_z$ in negative z-Richtung zeigt: $\vec{k}_r = -k_r \cdot \vec{e}_z$, wobei hier $k^2 = k_e^2 = k_r^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ gilt.

Die unbekannten Amplituden der reflektierten Welle müssen über die Randbedingung $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ an der Grenzfläche $z = 0$ bestimmt werden. Die Amplituden der magnetischen Feldstärken H_e und H_r können hierbei mittels der Beziehung $\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E}$ durch die Amplituden E_e und E_r der korrespondierenden elektrischen Feldstärken ausgedrückt werden. $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t}\right\}$. Analog $\underline{\vec{H}}(\vec{r}, t)$.

b) Verwenden Sie die Randbedingung $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}$.

c) Die Energiedichte ergibt sich mit: $w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$
Für den zeitlichen Mittelwert gilt: $\overline{w(\vec{r})} = \frac{1}{T}\int_0^T w(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}t$
Hinweis: $\int\limits_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

d) Den Poynting'schen Vektor (Leistungsdichte) erhält man aus der Beziehung $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$. Den zeitlichen Mittelwert dieser Größe bekommt man entweder durch zeitliche Integration analog zu Aufgabenteil c) oder durch $\overline{\vec{S}(\vec{r})} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{H}}^*(\vec{r})\right\}$.

Ergebnisse von Aufgabe II.2:

a) $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = 2E_e \sin(k_{ez}z)\sin(\omega t)\vec{e}_x$

$\underline{\vec{H}}(\vec{r}, t) = 2\dfrac{E_e}{Z_0}\cos(k_{ez}z)\cos(\omega t)\vec{e}_y$

b) $\vec{\alpha}(t) = \mathrm{Re}\left\{2\dfrac{E_e}{Z_0}e^{j\omega t}\right\}\vec{e}_x = 2\dfrac{E_e}{Z_0}\cos(\omega t)\vec{e}_x$

c) $w(\vec{r}, t) = 2\varepsilon_0 E_e^2\left(\sin^2(k_{ez}z)\sin^2(\omega t) + \cos^2(k_{ez}z)\cos^2(\omega t)\right)$

$\bar{w}(\vec{r}) = \varepsilon_0 E_e^2$

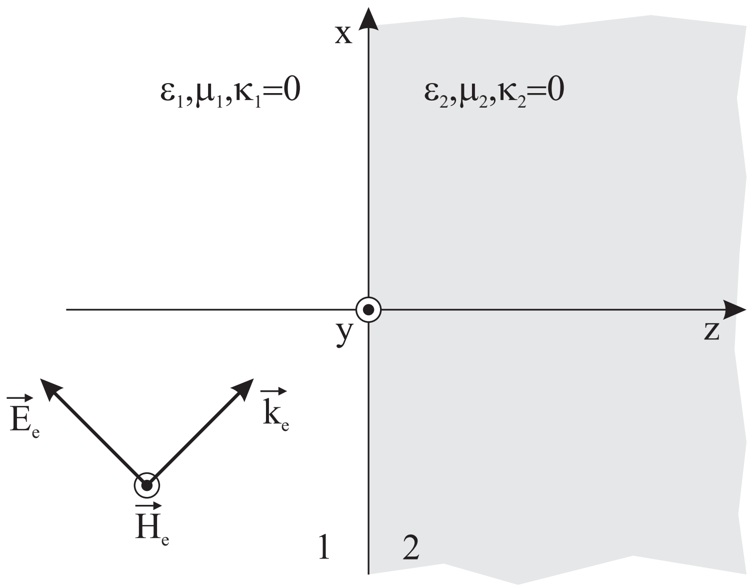
d) $\vec{S}(\vec{r}, t) = 4\dfrac{E_e^2}{Z_0}\sin(k_{ez}z)\sin(\omega t)\cos(k_{ez}z)\cos(\omega t)\vec{e}_z$

$\overline{\vec{S}}(\vec{r}) = \vec{0}$ (Stehende Welle)

e) $\delta \approx 50\ mm$

Aufgabe II.3: *Homogene ebene Welle (HEW) trifft auf dielektrischen Halbraum*

Eine homogene ebene Welle kommt aus dem Medium 1 und trifft bei $z = 0$ auf die Grenzfläche zum Medium 2 (siehe Skizze).



Der Phasor der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ der einfallenden Welle ist $\underline{\vec{H}}_e = H_e e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \vec{e}_y$. Der Wellenvektor ist folgend gegeben:

$$\vec{k}_e = k_{ex}\vec{e}_x + k_{ez}\vec{e}_z \qquad \text{mit} \qquad |\vec{k}_e|^2 = k_e^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1.$$

a) Wie ist die Welle polarisiert? Erklären Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe Polarisation und Einfallsebene.

b) Zeichnen Sie in eine separate Skizze alle auftretenden Teilwellen.

c) Bestimmen Sie alle Teilwellenansätze.

d) Bestimmen Sie für jede Teilwelle den Wellenvektor.

e) Bestimmen Sie den Reflexions- und den Transmissionsfaktor.

Hinweise zu Aufgabe II.3:

b) Zeichnen Sie zuerst die Wellenvektoren ein. Benutzen Sie dann die Grenzbedingungen und die Tatsache, dass $\vec{E}$, $\vec{H}$ und $\vec{k}$ senkrecht aufeinander stehen. Beachten Sie, dass für den unten angegebene Ansatz von $\vec{H}_r$ die gezeichnete Richtung $+\vec{e}_y$ gewählt wurde. Diese Wahl hat Einfluss auf das Vorzeichen des Reflexionsfaktors.

c) Geben Sie für die magnetische Feldstärke der reflektierten Welle $\vec{H}_r$ und der transmittierten Welle $\vec{H}_t$ analoge Ansätze wie für die einfallende Feldstärke $\vec{H}_e$ an. Bestimmen Sie die Ansätze für die elektrischen Feldstärken $\vec{E}_e$, $\vec{E}_r$ und $\vec{E}_t$ über $\vec{E} = \frac{Z}{k}\vec{H}\times\vec{k}$. Benutzen Sie dabei allgemeine Wellenvektoren.

d) Bestimmen Sie die Komponenten der Wellenvektoren aus den bekannten Grenzbedingungen.

e) Die Randbedingungen liefern zwei Gleichungen für die Amplituden. Hieraus erhalten Sie dann den Reflexions- und den Transmissionsfaktor.

Ergebnisse von Aufgabe II.3:

c) H- und E-Feldansätze:

$$\vec{H}_e = H_e e^{-j(k_{ex}\cdot x + k_{ez}\cdot z)}\vec{e}_y$$
$$\vec{H}_r = H_r e^{-j(k_{rx}\cdot x - k_{rz}\cdot z)}\vec{e}_y$$
$$\vec{H}_t = H_t e^{-j(k_{tx}\cdot x + k_{tz}\cdot z)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}_e = \frac{Z_1}{k_1} H_e e^{-j(k_{ex}\cdot x + k_{ez} z)} \cdot (k_{ez}, 0, -k_{ex})$$
$$\vec{E}_r = \frac{Z_1}{k_1} H_r e^{-j(k_{rx}\cdot x - k_{rz} z)} \cdot (-k_{rz}, 0, -k_{rx})$$
$$\vec{E}_t = \frac{Z_2}{k_2} H_t e^{-j(k_{tx}\cdot x + k_{tz} z)} \cdot (k_{tz}, 0, -k_{tx})$$

d)
$$\vec{k}_t = k_{ex}\cdot\vec{e}_x + k_{tz}\cdot\vec{e}_z \quad \text{mit} \quad k_{tz} = \sqrt{-k_{ex}^2 + \omega^2\varepsilon_2\mu_2}$$
$$\vec{k}_r = k_{ex}\cdot\vec{e}_x - k_{ez}\cdot\vec{e}_z$$

e)
$$t_H = \frac{2\varepsilon_2\, k_{ez}}{\varepsilon_1 k_{tz} + \varepsilon_2 k_{ez}}$$
$$t_E = \frac{\sqrt{\mu_2\,\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\,\mu_1}}\, t_H$$
$$r_H = \frac{\varepsilon_2\, k_{ez} - \varepsilon_1 k_{tz}}{\varepsilon_1 k_{tz} + \varepsilon_2 k_{ez}} = r_E$$